NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 108, julio de 2021, páginas 179-193

MUNDO GEOGEBRA
Coordinador: Carlos Ueno

Trayectoria hipotética de aprendizaje de las transformaciones isométricas durante el cálculo del área de polígonos a través del uso de GeoGebra

Armando Morales Carballo
Angie Damián Mojica
Saúl Balbuena Castillo
José Efrén Marmolejo Valle
(Universidad Autónoma de Guerrero. México)

Fecha de recepción: 14 de enero de 2021
Fecha de aceptación: 13 de mayo de 2021

Resumen

Se presenta una propuesta teórico-didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la traslación y rotación en el tratamiento de situaciones de preservación de áreas de figuras geométricas planas, en el nivel secundaria. Dentro de ésta, se describe una línea hipotética de trayectoria de aprendizaje, la cual está basada en el uso del software GeoGebra. Este trabajo aporta una herramienta para la actividad de enseñanza del profesor, particularmente; se le propone una manera distinta a la clásica para el tratamiento del concepto de área a través de las transformaciones isométricas. Por otra parte, al estudiante le favorece un escenario propicio para la exploración a través de recursos tecnológicos de los conceptos matemáticos, sus conexiones y su aplicación.

Palabras clave

Trayectoria de aprendizaje, recurso heurístico, transformación isométrica, área, GeoGebra

Title

Hypothetical learning trajectory of the isometric transformations during the calculation of the area of polygons through the use of GeoGebra

Abstract

A theoretical-didactic proposal is presented for the teaching and learning of translation and rotation in the treatment of situations of preservation of areas of plane geometric figures, at the secondary level. Within this, a hypothetical learning trajectory line is described, which is based on the use of GeoGebra software. This work provides a tool for the teacher's teaching activity, particularly; a different way from the classical one is proposed to treat the concept of area through isometric transformations. On the other hand, the student is favored by a favorable scenario for the exploration through technological resources of mathematical concepts, their connections and their application.

Keywords

Learning trajectory, heuristic resource, isometric transformation, area, GeoGebra.

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

1. Introducción

El concepto de área de figuras planas es un contenido importante dentro del sistema de contenidos propuestos en los planes y programas de estudios de enseñanza y aprendizaje de la matemática en los niveles básico, preuniversitario y universitario en carreras de Matemáticas o en carreras afines. La importancia del concepto de área y de su preservación en procesos de transformación resultan fundamentales tanto para el desarrollo de contenidos afines dentro de la geometría misma, así como de otras ramas de la matemática avanzada como el cálculo integral (Morales, Locia, Ramírez y Sigarreta, 2020).

Al revisar la literatura acerca de estudios sobre el concepto de área (Corberán, 1996; Arenas, 2012; García, 2013; López, Silva y Fuentes, 2013; González, 2014; Marmolejo y González, 2015 y Hernández, 2016) se ha documentado e identificado en varios casos que permea en la práctica la presentación clásica del estudio de las figuras geométricas y con ello, el tratamiento del área considerando la representación de dichas figuras en la posición estándar. Esta manera de presentar el contenido genera dificultades en estudiantes y profesores de nivel secundaria, lo cual fue constatado al plantearles situaciones de área de figuras representadas en posición no estándar (Morales, Damián y Cano, 2020).

El uso de las transformaciones isométricas juega un papel importante en el estudio de la ecuación general de segundo grado (Morales, Locia y Salmerón, 2016). También, en el tratamiento del área y de su preservación, favorece la medida del área de polígonos a través de la medida del área de rectángulos o triángulos de área equivalente al polígono. Esto resulta fundamental, ya que existen polígonos para los cuales ya no existe una fórmula para la determinación del área, y bajo la transformación se favorece su resolución. Por otra parte, si la representación del polígono del que se conoce la fórmula para medir su área impide su cálculo directo, se puede recurrir a las transformaciones isométricas para su resolución.

Considerando los referentes dados, nos planteamos en este trabajo una propuesta teórico-didáctica para la enseñanza y aprendizaje de la traslación y rotación durante el tratamiento de situaciones de preservación de áreas de figuras geométricas planas, en el nivel secundaria. Dentro de esta propuesta se describe una línea hipotética de trayectoria de aprendizaje que se basó en el uso del software GeoGebra.

2. Fundamento teórico y metodológico

2.1. Tratamiento de conceptos

Los conceptos son parte de la estructura matemática y juegan un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático y en la explicación de la realidad objetiva (Ballester, 1992). Gran parte de las dificultades acerca de la comprensión de los contenidos matemáticos que se documentan en las investigaciones, radica en la ausencia del tratamiento de los conceptos. En este trabajo se asume que la comprensión de los mismos exige dos actividades fundamentales: la formación y la asimilación (fijación). Bajo esta perspectiva, la presente investigación busca aportar recursos para incidir en la asimilación de conceptos, en particular, de traslación y de rotación cuando se estudian situaciones de área y de preservación de áreas en polígonos. Si bien en este trabajo no se plantea como objetivo la formación de dichos conceptos, en los procesos metodológicos que se describen figuran aspectos que pueden influir en su etapa de formación.

Los trabajos de investigación de Morales, Marmolejo y Locia (2014) y Arteaga, Díaz, García y Del Sol (2009) coinciden en la concepción de asimilación de un contenido matemático y la conciben como las ejercitaciones, profundizaciones, sistematizaciones y aplicaciones del concepto. De manera particular, el presente trabajo se orienta hacia las operaciones con los conceptos, incluyendo actividades que contribuyen en el proceso de asimilación. Las operaciones fundamentales son: de relación, de cálculo, y de aplicación. Cada una de ellas desempeña una función específica. Así, la operación de relación favorece el desarrollo de habilidades para identificar las propiedades del concepto y su definición; si se trata de un concepto superior, colateral o subconcepto, o bien conceptos disjuntos. La operación de cálculo permite determinar el concepto cuando esto es posible, como por ejemplo la longitud de la altura o la medida del área, efecto de una transformación como la traslación o la rotación. Finalmente, la operación de aplicación favorece el desarrollo de habilidades para identificar situaciones en las que se pueden aplicar los conceptos, mediante el uso directo o indirecto de sus definiciones y la aplicación en la resolución de problemas, entre otros.

En cada una de las etapas que se conciben en el proceso de asimilación, los procedimientos heurísticos juegan un papel importante, ya que constituyen recursos mentales de búsqueda que permiten orientar y aportar elementos en los procesos de comprensión y determinación del concepto sobre la base de resolución de problemas (Torres, 2013). Estos procedimientos se clasifican en principios, reglas y estrategias, las cuales interactúan durante los procesos de búsqueda, elaboración y aplicación de la vía de solución. Así, los principios heurísticos constituyen sugerencias para encontrar directamente la idea de solución principal de resolución; además posibilita determinar, por tanto, los medios y la vía de solución. Las reglas heurísticas actúan como impulsos generales dentro del proceso de búsqueda y ayudan a encontrar los medios para resolver el problema. En este trabajo utilizaremos la regla de las transformaciones geométricas que radica en construir una figura que cumpla parcialmente con las condiciones exigidas, para después obtener la figura de interés mediante una transformación geométrica.

2.2. Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

Simón y Tzur (2004) identifican las principales características de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje de la siguiente manera: una trayectoria hipotética de aprendizaje (THA) consiste en los objetivos para el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje, y las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. En esta dirección, investigadores como (León, Díaz, y Guilombo, 2014) coinciden en que las THA refieren a las predicciones del profesor sobre el camino por el que el aprendizaje puede movilizarse, son hipotéticas debido a que las trayectorias reales del aprendizaje de los estudiantes dependen de las condiciones de existencia de cada individuo y en que el aprendizaje de los individuos tiene ciertas regularidades. Además, establecen que las THA proporcionan al investigador un criterio racional para decidir el diseño que habrá de considerar y las conjeturas de cómo hacer evolucionar los aprendizajes. Las tareas se seleccionan con base en hipótesis acerca del proceso de aprendizaje.

En este trabajo se concibe que en la elaboración y puesta en funcionamiento de una trayectoria hipotética de aprendizaje esencialmente puede intervenir el profesor o el profesor-investigador. Desde esta visión el profesor-investigador se concibe como aquel que en su práctica docente identifica problemáticas, tanto de enseñanza como de aprendizaje de contenidos de la matemática; esencialmente en el nivel en el cual incide, esa situación lo obliga a indagar acerca del porqué de esas problemáticas, para después proyectar una trayectoria hipotética de aprendizaje; primero desde el plano teórico y luego, para su puesta en funcionamiento.

La elaboración de la trayectoria hipotética del aprendizaje debe contemplar todos los elementos que la fundamentan como constructo: comprensión del conocimiento actual de los estudiantes que recibirán la instrucción, descripción de aspectos fundamentales sobre asimilación y fijación, la selección de las tareas, y la preparación matemática y metodológica del profesor para su posible intervención en ella, en caso necesario de que se exija modificar y reestructurar algún aspecto de la THA.

2.3. Software GeoGebra

Entre las herramientas tecnológicas actuales, GeoGebra es un software que favorece la actividad dinámico-visual y que posibilita el tratamiento de contenidos de la matemática en los distintos niveles educativos. A través de la actividad dinámico-visual en el tratamiento de algún objeto matemático se favorecen procesos de redescubrimiento de comportamientos numéricos, geométricos y algebraicos. Con GeoGebra, los procesos de construcción y las transformaciones geométricas que se pueden realizar resultan ser una herramienta importante para el tratamiento de contenidos como el de área, situaciones de preservación de área, congruencia y semejanza de triángulos, entre otros.

El uso de GeoGebra como una herramienta heurística permite acelerar los procesos que tienen generalización; este fenómeno se produce a través del redescubrimiento de patrones de comportamiento (el software por sí solo no arroja las soluciones a distintas situaciones). Es a medida que el individuo manipula, ensaya, o lleva a cabo acciones pre-elaboradas o teóricamente válidas como redescubre, formula, conjetura, plantea estrategias de solución y lleva a cabo la resolución de las actividades o problemas en el abordaje de los contenidos. En tal dirección, la representación dinámica-visual y el tratamiento de esta que favorece el software se convierte en un recurso metodológico para la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Con lo antes dicho, en este trabajo asumiremos el software GeoGebra como un recurso heurístico mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje: la actividad dinámico-visual que favorece como la asociación de imágenes–ideas, contribuye en la interiorización de los procesos de abstracción sobre los contenidos matemáticos a tratar.

2.4. La resolución de problemas

Sin entrar en un análisis minucioso acerca del concepto *problema*, en este trabajo se asume que en un problema se conjugan los siguientes elementos:

- Existe una situación inicial y una situación final.
- La vía de pasar de la situación inicial a la situación final es desconocida.
- Existe la persona que quiera resolver dicha situación.
- Además, esta última dispone de los elementos necesarios para la resolución.

3. Línea de trayectoria hipotética de enseñanza y aprendizaje de la traslación y rotación durante el tratamiento de situaciones de área y de preservación de área de polígonos

3.1. Fases metodológicas

Considerando los referentes teóricos y metodológicos se planteó y se describió una THA compuesta por cinco fases para el tratamiento de las transformaciones isométricas durante el estudio de situaciones de área y de preservación de área. Se trataron actividades matemáticas relacionadas con el tópico de interés identificado en el nivel secundaria. El diseño de actividades y validación se llevó a cabo a nivel teórico, considerando el criterio de expertos. Por tanto, esta propuesta es de tipo teórico-didáctico.

Fase 1. Acción motivadora. Esta se planteó con el objetivo de que el profesor o el estudiante de secundaria reflexione acerca de sus nociones en el cálculo de áreas de figuras que no están representadas en la forma estándar. Este tipo de actividades contribuyen a disminuir la fijación de imágenes conceptuales que obstaculizan la comprensión de los conceptos y de su definición.

Fase 2. En esta fase se ejemplifican las transformaciones isométricas ejecutadas desde GeoGebra. De manera colateral, la realización de todas las actividades que se indican muestra una alternativa para justificar la semejanza de triángulos. A pesar de que el tópico de la semejanza no es objetivo de este trabajo, con su realización también se busca identificar el papel que pueden desempeñar las transformaciones en la resolución de problemas diversos, a la par de que se favorecen las condiciones previas para el trabajo con el contenido aquí indicado.

Fase 3. En esta fase de describen dos métodos diferentes para transformar un triángulo a un rectángulo de área equivalente. Se pretende que mediante el uso de GeoGebra se realicen, en un primer momento, comprobaciones para casos particulares. Es decir, dado cualquier triángulo, identificar la medida de su área (el software da ese dato, una vez que se hace la construcción) y luego, construir un rectángulo de área equivalente. La siguiente etapa consiste en concebir un plan acerca de cómo lograr dividir el triángulo original en piezas más pequeñas, y con esas piezas cubrir el rectángulo construido. Finalmente, se procede a realizar la construcción general. Cabe destacar que en realidad esta actividad es una aplicación del Teorema de Bolyai-Gerwien. Sin embargo, lo que se espera es identificar los efectos de la traslación y la rotación, una vez que se haya concebido alguna propuesta de división del triángulo en piezas más pequeñas, y con ellas construir el rectángulo de área equivalente.

Fase 4. Como preparación para la generalización del proceso anterior (Fase 3), se describe el proceso de justificación del Teorema de Pitágoras mediante el uso de las transformaciones isométricas y del software GeoGebra.

Fase 5. Generalización. En esta fase se presentan un hexágono, un rectángulo y un triángulo que tienen la misma área. La tarea inicial que se plantea es dividir en piezas más simples al hexágono, y con ellas cubrir el rectángulo. De manera análoga, a continuación, se propone dividir el hexágono y con las piezas resultantes cubrir el triángulo (evidentemente, dividir el rectángulo y cubrir el triángulo no fue propuesto, ya que resulta una actividad inmediata). Lo que se busca es identificar si se favorecen las siguientes cuestiones: ¿Por qué es posible descomponer en polígonos simples una figura plana y transformarla a otra figura preservando la medida de las áreas? ¿Siempre es posible este proceso? ¿Qué relación existe entre esta idea y la cuadratura de polígonos?

3.2. Descripción y análisis

Fase 1. Acción motivadora. En esta fase se pretende influir en el profesor o en el estudiante en reflexionar acerca de sus nociones en el cálculo de áreas de figuras que no están representadas en la forma estándar. Para esto se proyectan dos actividades, la primera tiene el objetivo de que el profesor identifique la importancia del trabajo con lo espacial como un elemento importante en el proceso operacional de conceptos tales como el de área. La segunda actividad, tiene el propósito de que el profesor busque otros medios que favorecen la representación de las figuras planas y con ello, la parte operacional conceptual. En el caso de los estudiantes, esta actividad puede contribuir en disminuir las imágenes conceptuales que obstaculizan la comprensión de los conceptos y de su definición.

Acción 1. Se pide describir algún procedimiento para determinar la medida del área del triángulo ABC, y de los cuadriláteros $DEFG$ y $HIJK$.

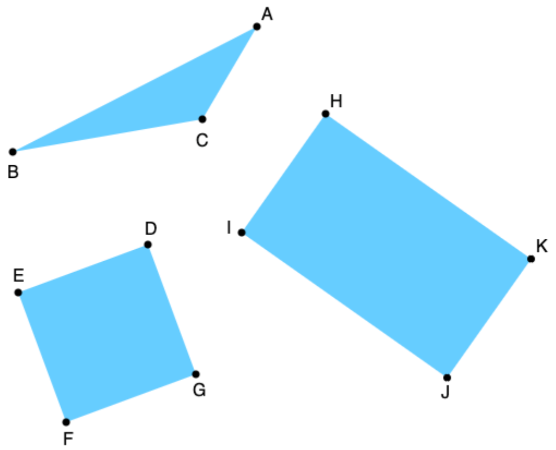

Figura 1. Representación de figuras planas en la posición no estándar.

Acción 2. Describir algunas estrategias que favorecen la transformación de las figuras antes dadas, Figura 1, a las figuras que componen la Figura 2.

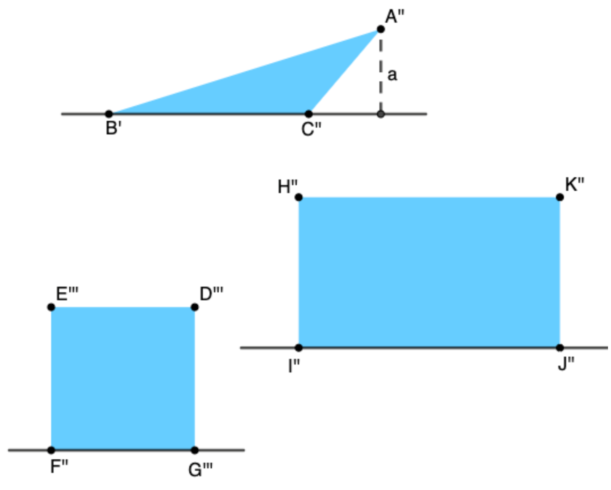

Figura 2. Representación de figuras planas en la posición estándar.

Fase 2. Traslación y rotación. En esta fase se introduce al profesor o al estudiante a la realización de ejemplificaciones de las transformaciones de traslación y rotación mediante el uso del software. Cabe destacar que, dada la experiencia docente de los autores de este trabajo, se propuso trabajar en esta fase la ejemplificación de las transformaciones isométricas señaladas en una actividad que propone una manera alterna para comprender la definición de semejanza de triángulos y que, en dicho proceso, la traslación y la rotación contribuyen a identificar y poner en juego las propiedades matemáticas necesarias para la justificación de la semejanza. Desde el punto de vista de la investigación, este tipo de situaciones favorecen las raíces cognitivas para el desarrollo del pensamiento geométrico.

Así, para producir lo visualizado en la Figura 3 se llevaron a cabo las siguientes acciones: Se construyó un triángulo cualquiera ABC y un segundo triángulo $A'B'C'$ semejante al principal. Sin embargo, este segundo triángulo se colocó en forma no estándar. Se construyó un vector de traslación $u = \overrightarrow{A'A}$ que luego se ejecutó en GeoGebra (Traslación, Triángulo $A'B'C'$, Vector u), obteniendo el triángulo $AB_1''C_1''$.

Se determinó la medida del $\measuredangle CAC_1''$. Después, se activó en el orden indicado la instrucción (Rotación, Triángulo $AB_1''C_1''$, Centro de rotación "punto A", $\measuredangle CAC_1''$) (nótese que la rotación en este caso es a favor de las manecillas del reloj). Para mejor visibilidad, se desactivaron algunas construcciones auxiliares. Un trabajo análogo se puede realizar para hacer coincidir los $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle A'B'C'$, los lados $B'A'$ sobre y en la dirección de BA y $B'C'$ sobre y en la dirección de BC. De igual manera se procede para hacer coincidir los $\measuredangle BCA$ y $\measuredangle B'C'A'$, los lados $C'B'$ sobre CB y $C'A'$ sobre CA.

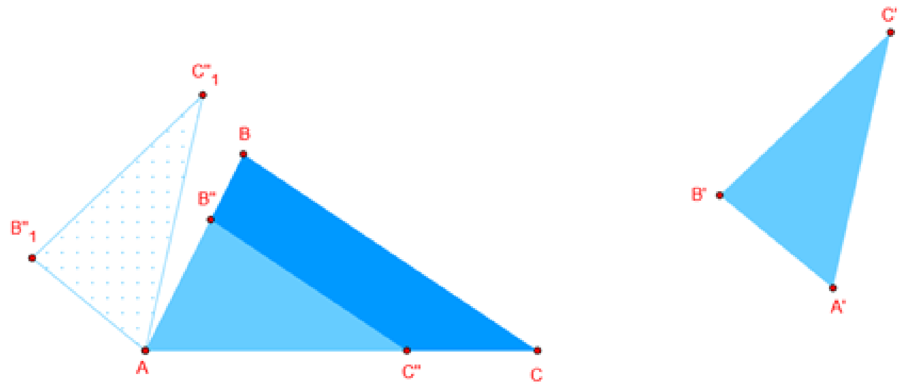

Figura 3. Ejemplificación de la traslación, rotación y la relación de triángulos semejantes.

Fase 3. Transformación de un triángulo en un rectángulo de área equivalente. En esta fase se pretende introducir al profesor o al estudiante a la resolución de problemas geométricos que involucran el área, a través de las transformaciones de traslación y rotación ejecutadas mediante el uso de GeoGebra. Desde el punto de vista del contenido matemático se combinan la definición de área, la fórmula clásica para medir el área y las representaciones visuales. Se trata aquí de identificar que las transformaciones isométricas posibilitan la transformación de figuras a otras, equivalentes en área, y en la mayoría de los casos se busca que la figura resultante sea una figura para la cual se conozca una fórmula o procedimiento menos complejo que ayude a determinar la medida del área. Enseguida, se presentan dos métodos para desarrollar esta fase y se conjetura en qué condiciones se pueden generalizar estos procesos.

Método 1. *Etapa 1.* Se construyó el triángulo ABC utilizando la herramienta Polígono, se determinaron los puntos medios de los lados AC y BC utilizando la herramienta Medio o Centro, se construyó el triángulo DEC. Seguidamente, se activó la herramienta Rotación, se seleccionó el triángulo DEC y como punto de rotación se eligió el punto E, finalmente se indicó el ángulo de rotación: 180 grados a favor de las manecillas del reloj, y se activó Aceptar. El resultado es el triángulo EBD_2', ver Figura 4, a).

Etapa 2. Producto de la rotación en la etapa anterior, se completó un paralelogramo $ABD_2'D$. Este paralelogramo se trasladó a la posición de la Figura 4, b). Este cuadrilátero tiene área equivalente a la del triángulo ABC. Ya que mediante la rotación se obtuvo el triángulo EBD_2' congruente con el triángulo DEC.

Etapa 3. Mediante la traslación se transformó el paralelogramo $A_3'B_2'C_1D_5'$ en el paralelogramo $A_1ZT'W$, como se ve en la Figura 4, c). Se ubica la intersección de la perpendicular al lado A_1Z desde el punto W, para formar el triángulo A_1D_1W. Con la herramienta Traslación, se desplaza horizontalmente el triángulo A_1D_1W en la dirección de un vector de longitud A_1Z. Después, mediante una segunda traslación se obtuvo el rectángulo $G_1J_1T'W'$, ver Figura 4, d). Finalmente, el rectángulo $M_1'M''J'Q$ que se identifica en la Figura 4, e) es resultado del proceso de las transformaciones que se han realizado sobre el triángulo ABC y, por tanto, tienen igual su área.

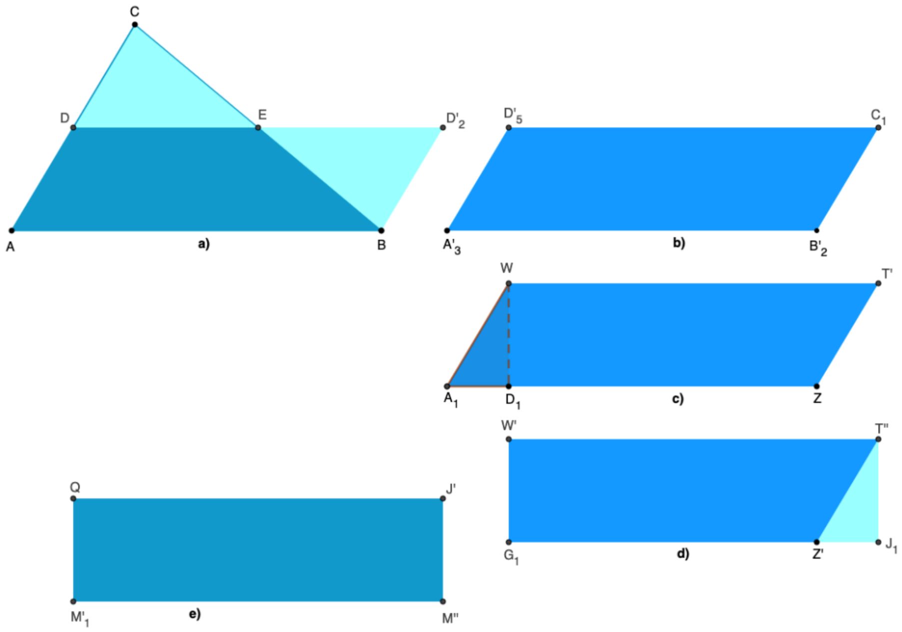

Figura 4. Representación del proceso de transformación del triángulo al rectángulo de igual área.

Método 2. *Etapa 1.* Una vez construido el triángulo ABC, se trazó una perpendicular al lado AB desde el vértice C. Se determinó el punto medio E del segmento CD, y por dicho punto se trazó una perpendicular hasta intersecar en los puntos medios a los lados AC y BC del triángulo principal, como se observa en la Figura 5.

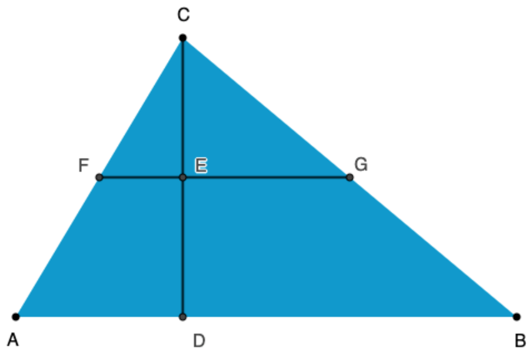

Figura 5. Representación del proceso de división del triángulo principal.

Etapa 2. En la Figura 5 se construyeron los triángulos FEC y GEC, con la herramienta Rotación se rotaron los triángulos construidos con centros de rotación los puntos F y G. El triángulo FEC se rotó 180 grados en sentido contrario a las manecillas del reloj y el triángulo GECse rotó 180 grados en sentido a favor de las manecillas del reloj, ver Figura 6.

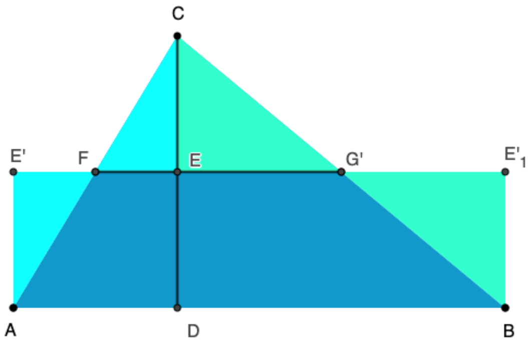

Figura 6. Representación de las rotaciones de los triángulos a su nueva posición.

Finalmente, el rectángulo $ABE_1'E'$ es la transformación del triángulo ABC y tienen áreas iguales. En la Figura 7 se muestra el rectángulo construido, trasladado a otra posición mediante la herramienta Traslación.

Figura 7. Representación del rectángulo, equivalente en área al triangulo principal.

Fase 4. El rigor de la prueba en matemáticas viene precedido de una secuencia lógica de estructuración que involucra axiomas (corolarios), definiciones y propiedades. Sin embargo, el avance de la tecnología ha favorecido la implementación de herramientas tecnológicas adecuadas para el trabajo propio en matemáticas como el software de geometría dinámica GeoGebra. En tal dirección, en esta fase de la trayectoria de aprendizaje se va más allá de ensayar una prueba más mediante un proceso distinto al clásico para justificar el teorema de Pitágoras, y del hecho de que las transformaciones isométricas juegan un papel central. En realidad, se busca crear las condiciones para reflexionar y responder las siguientes cuestiones: ¿Por qué es posible descomponer en polígonos simples una figura plana y transformarla en otra figura preservando la medida de las áreas?, ¿Siempre es posible este proceso?, ¿Cómo se garantiza desde la teoría esta posibilidad?

Como se dijo antes, el desarrollo de esta fase genera las condiciones para la generalización del proceso ejemplificado hasta ahora, y se resalta el papel que juegan las transformaciones de traslación y rotación y el uso del software GeoGebra.

Teorema de Pitágoras. En un triángulo rectángulo ABC la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

A continuación, se presenta una manera de justificar el teorema anunciado. No es la única, pero sí se diferencian tanto los recursos matemáticos, como el papel del software en dicho proceso.

Prueba. En cada lado del triángulo rectángulo ABC se construyeron cuadrados, ver Figura 8, a). Por el punto A se construyó una paralela al lado BC, los puntos L y M son las intersecciones de la paralela con lados de los cuadrados $ABHI$ y $A'F'G'C'$, y por el punto M se trazó una perpendicular a la recta trazada antes. El punto N es la intersección de la recta perpendicular con el lado $F'G'$, ver Figura 8, b). Con estos trazos y una vez ubicadas las intersecciones de las rectas construidas con los lados identificados de los cuadrados, se logra dividir a los cuadrados $ABHI$ y $ACGF$ en triángulos y cuadriláteros como se indica en la figura.

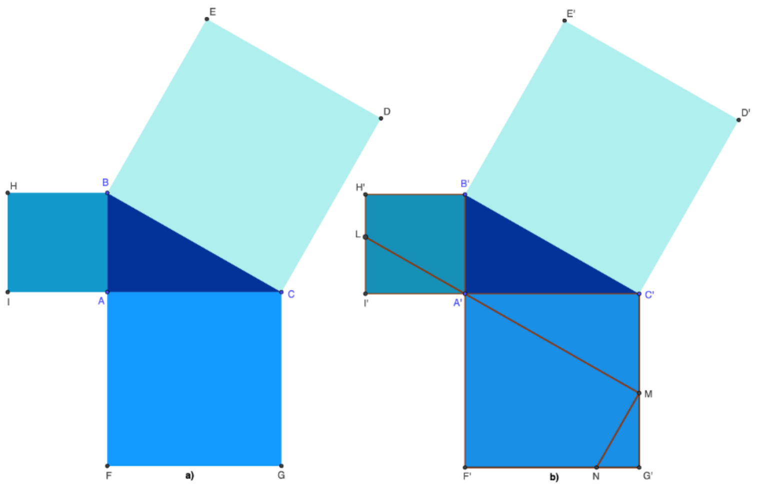

Figura 8. Representación geométrica del Teorema de Pitágoras y la división de los cuadrados construidos por los catetos.

El siguiente paso consiste en colocar sin superponer las figuras en que se han dividido los cuadrados $ABHI$ y $A'F'G'C'$ en el cuadrado $B'C'D'E'$, para lograrlo se usaron las herramientas de

Traslación y Rotación. Por ejemplo, el proceso de colocar el triángulo $N'G''M'$ a su nueva posición, el triángulo F_2G_2E'', se logró mediante la sucesión de indicaciones ejecutadas en el software: (Traslación, Triángulo $N'G''M', u_2$), (Traslación, Triángulo $J_2F''I_2, w_1$), (Traslación, Triángulo $U_1A''T_1, w$), (Traslación, Triángulo $Z_1B''W_1, u_1$) y (Traslación, Triángulo $C_2D_2B_2, w$), ver Figura 9. De manera análoga, y mediante la traslación, rotación y simetría axial se colocaron las figuras cubriendo el cuadrado $B''C''D''E''$ equivalente al cuadrado $BCDE$ de la Figura 8, a).

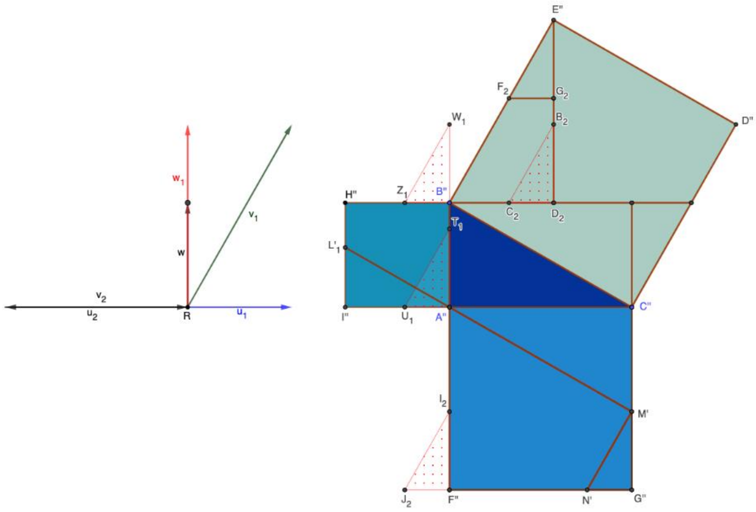

Figura 9. Representación del proceso de acomodar las áreas de los cuadrados levantados por los catetos, en el cuadrado levantado por la hipotenusa.

Con el proceso anterior, se ha llevado a cabo la prueba mediante el uso del software, y con las herramientas de traslación y rotación se ha comprobado que las regiones de área que representan los cuadrados $ABHI$ y $AFGC$ caben exactamente en la región de área que representa el cuadrado $BCDE$, ya que los siguientes cuadrados emparejados son iguales: $ABHI$ y $A''B''H''I''$, $AFGC$ y $A''F''G''C''$, $BCDE$ y $B''C''D''E''$, como se identifica en las Figuras 8 y 9. Por tanto, se prueba geométricamente que la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Fase 5. Hacia la generalización.

El problema que ahora se plantea consiste en "*dado el polígono $ABCDEF$ se desea transformar mediante traslación y rotación dicho polígono, o bien al rectángulo $KLIG$, o bien al triángulo PQS*".

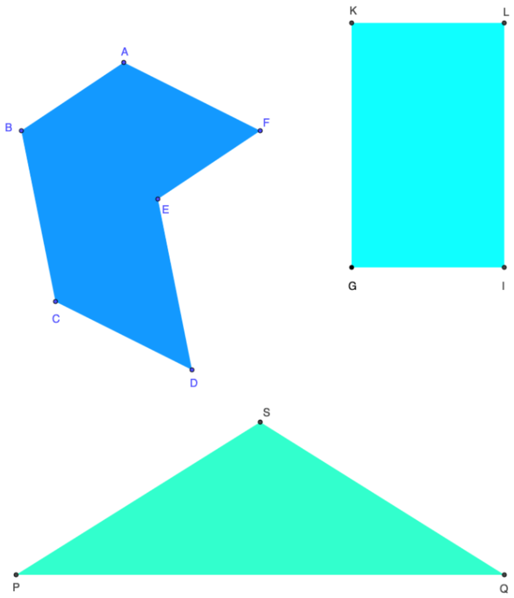

Figura 10. Representación del problema de transformar un polígono en un rectángulo o en un triángulo, preservando la medida del área.

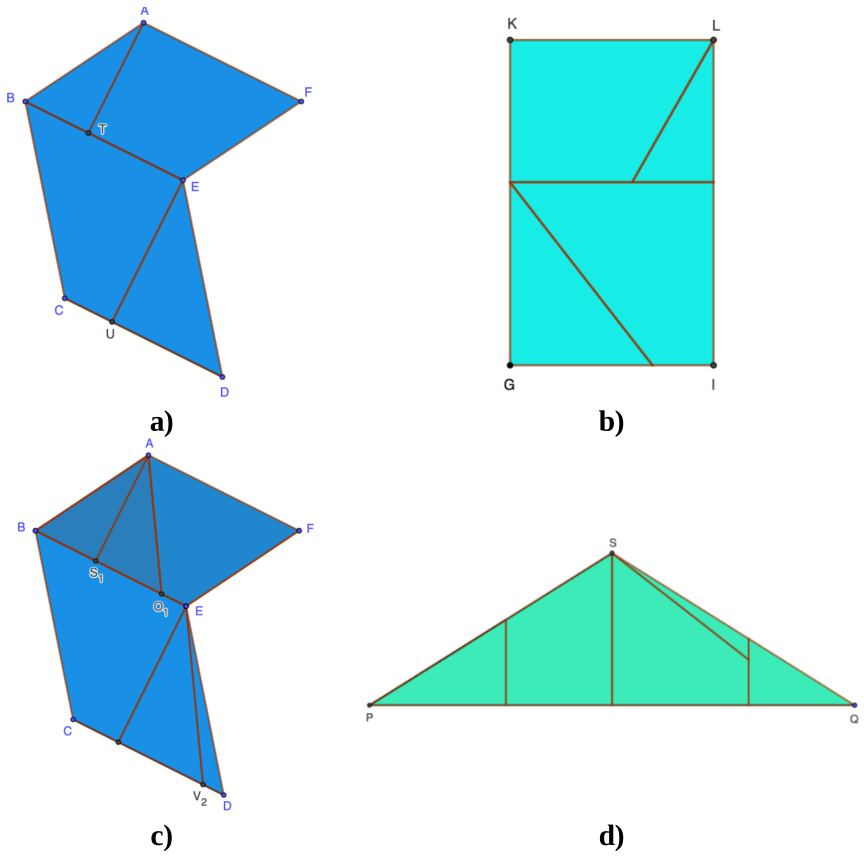

Figura 11. Representación del proceso de transformación.

Una manera de lograr que de una transformación resulte el rectángulo $KLIG$ es dividiendo el polígono principal como se muestra en la Figura 11, a) y luego, mediante traslaciones y rotaciones, por supuesto teniendo todos los datos para la ejecución de dichas transformaciones, hasta obtener la Figura 11, b). Por otra parte, una manera de lograr que de la transformación resulte el triángulo PQS es dividiendo el polígono principal como se muestra en la Figura 11, c) y luego, ejecutar traslaciones, rotaciones y simetría axial, hasta obtener la Figura 11, d).

4. Conclusiones

Con esta propuesta de Línea de Trayectoria de Aprendizaje se contribuye con una herramienta para la enseñanza de las transformaciones isométricas en el plano en el tratamiento de situaciones de área y de conservación de área en el nivel secundaria. Cabe destacar que el tratamiento de las transformaciones isométricas mediante el software GeoGebra para el estudio de situaciones y preservación de áreas, posibilita desarrollar habilidades para determinar el área de polígonos simples representados en posiciones no estándar y para los cuales no se pueden aplicar directamente las fórmulas clásicas; es mediante el uso de las transformaciones cuando se posibilita la resolución. Esta propuesta también ayuda a identificar que el tratamiento de las transformaciones isométricas y el uso de GeoGebra favorecen el estudio de la semejanza y congruencia de triángulos, así como demás contenidos de la geometría en el nivel secundaria. Por tanto, esta propuesta contribuye directamente en los aprendizajes de los estudiantes, ya que las etapas de la THA tienen carácter metodológico, lo que permite que el desarrollo de las actividades siga un proceso heurístico que posibilita al estudiante la situación de generalización, en el estudio del concepto de área a través de las transformaciones isométricas y el uso del software.

La generalización de las actividades que se han expuesto en la THA consiste en la formulación del Teorema de Bolyai-Gerwien: "*Dados cualesquiera dos polígonos con áreas iguales, entonces es posible cortar uno de ellos en un número finito de piezas poligonales más pequeñas de tal manera que estas piezas pueden reacomodarse para conformar el otro polígono*" y su relación con el proceso de la cuadratura de polígonos, que consiste en lo siguiente: El problema clásico de la cuadratura de polígonos y el método que se deduce de la geometría de los griegos, para transformar un polígono de n lados en un cuadrado de área equivalente es el fundamento que asegura que dado un polígono se puede construir al menos otro que tenga la misma área que el original. De este resultado, se puede formular el Teorema de Bolyai-Gerwien.

Bibliografía

Arenas, M. F. (2012). *Propuesta didáctica para la enseñanza de áreas y perímetros en figuras planas* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Arteaga, E., Díaz, A., Gracía, F. y Del Sol, J. L. (2009). Alternativas metodológicas para la formación y fijación de conceptos geométricos en la geometría plana. Cuaderns Digitals, *0*(60), 1-25.

Ballester, S. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática*. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Corberán, R. M. (1996). *Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad* (Tesis de Doctorado). Universidad de Valencia, España.

Hernández, E. (2016). *Estrategia para la enseñanza de los conceptos de área y volumen, utilizando como mediadores de aprendizaje el origami y las tecnologías digitales* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

García, G. B. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: las interacciones y el análisis cognitivo* (Tesis de Doctorado). Universidad de Huelva, España.

González, J. (2014). *Comprensión de los conceptos de perímetro y área y la independencia de sus medidas, en el contexto de la agricultura del café* (Tesis de Maestría). Universidad de Antioquía, Colombia.

León, O. L., Díaz Celis, F., y Guilombo, M. (2014). Diseños didácticos y trayectorias de aprendizaje de la geometría de estudiantes sordos, en los primeros grados de escolaridad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 9-28.

López, R. E., Silva, D. y Fuentes, J. A. (2013). GeoGebra en el estudio de áreas y perímetros. *Pistas Educativas, No. 104, Instituto Tecnológico de Celaya, México.*

Marmolejo, G. A. y González, M. T. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, *10*(1), 45-58.

Morales, A., Marmolejo, J. E., y Locia, E. (2014). El software GeoGebra: Un recurso heurístico en la resolución de problemas geométricos. *Premisa*, *16* (63), 20-28.

Morales, A., Locia, E., y Salmerón, P. (2016). Recursos heurísticos para la actividad de enseñanza de las transformaciones geométricas en el nivel preuniversitario. *Atenas*, *3*(35), 64-79.

Morales, A., Locia, E., Ramírez, M. y Sigarreta, J. M. (2020). Methodology to favour the assimilation of theorems. *International Journal of Research in Education Methodology*, *11*(1), 64-76

Morales, A., Damián, A. y Venancio, A. (2020). El software GeoGebra un recurso para la enseñanza-aprendizaje del concepto de área. En L. A. Hernández, G. Kantún, y J. Slisko (Eds.), *Tendencias en educación matemática* (pp. 152-170). Puebla, M.: Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Task in Conceptual learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91-104.

Torres, P. (2013). La instrucción heurística en la formación de profesores de Matemáticas. En C. Dolores, M.S. García, J. A. Hernández, L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 205-221). Díaz de Santos.

Armando Morales Carballo. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Hueycantenango, Guerrero, México. Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la UAGro. Autor de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina.
Email: armandomorales@uagro.mx

Angie Damián Mojica. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacida en Tanganhuato, Guerrero, México. Maestra en Ciencias en el Área de Matemática Educativa por la UAGro. Autora de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina.
Email: adamian@uagro.mx

Saul Balbuena Castillo. Asistente de Investigación en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Acapulco, Guerrero, México. Licenciado en Matemáticas con especialidad en Computación. Autor de trabajos presentados en Congresos a Nivel Nacional, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina.
Email: balbuena85.15dc@gmail.com

José Efrén Marmolejo Valle. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero, México. Doctor en Educación Multicultural y Máster en Tecnologías Educativas. Autor de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina.
Email: jmarmolejov@uagrovirtual.mx