NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 108, julio de 2021, páginas 119-148

Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos

Gonzalo Rodríguez (Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N° 122. Argentina)
Natalia Sgreccia (Universidad Nacional de Rosario. Argentina)

Fecha de recepción: 28 de febrero de 2021
Fecha de aceptación: 05 de junio de 2021

Resumen

En torno al contenido Trigonometría, se identifican, analizan y describen los procesos involucrados, en términos de predisposición y comprensión, que estudiantes de cuarto año de secundaria manifiestan en la resolución de problemas, a partir de un trabajo metodológico cualitativo basado en las teorías de aprendizaje significativo y modelos mentales. Se advierte que los estudiantes se encuentran familiarizados con actividades mecánicas, no tanto con problemas, y que trabajan de manera aislada con respecto a los contenidos previos vinculados, recurriendo solo a los más recientes. Predominan las representaciones mentales en formato de imágenes, y de construcciones sobre ellas, así como de proposiciones en forma oral. Se concluye que existe un componente emocional, con incidencia negativa de bloqueo en los desempeños, debido a las sucesivas situaciones vividas por los estudiantes.

Palabras clave

Trigonometría. Resolución de Problemas. Aprendizaje significativo. Escuela secundaria.

Title

Predisposition and understanding of secondary school's students when solving trigonometric problems

Abstract

Regarding the Trigonometry content, the processes involved, in terms of predisposition and understanding, that fourth year secondary school students manifest in problem solving are identified, analyzed and described, based on qualitative methodological work based on the meaningful learning theories and mental models. It is noted that students are familiar with mechanical activities, not so much with problems, and that they work in isolation with respect to the previous linked content, using only the most recent. Mental representations predominate in the format of images, and of constructions on them, as well as of propositions in oral form. It is concluded that there is an emotional component, with a negative impact on performance blocking, due to the successive situations experienced by the students.

Keywords

Trigonometry. Problem solving. Significant learning. Secondary school.

1. Presentación

Uno de los principales obstáculos a los que se enfrentan los profesores en Matemática hoy en día es la dificultad de incluir problemas en las secuencias didácticas (Salinas y Sgreccia, 2017). Asimismo, los problemas tienen relevancia para la formación integral de los estudianes ya que, desde su génesis, los primeros conceptos matemáticos nacieron ligados a situaciones de carácter empírico y le permitieron históricamente al hombre actuar en su entorno (Meavilla y Oller, 2013).

Pero, qué es y significa un problema no implica una respuesta única, ni tampoco universal. Según Krulik y Rudnik (1980, p.3) un problema puede pensarse como: "una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma". En efecto, todo problema tiene un objetivo claro pero no alcanzable de forma inmediata (Polya, 1989) y puede resumirse mediante tres características: "Existe una persona que lo resuelve, es decir, un resolutor; Existe un punto de partida y una meta a alcanzar; Existe un cierto bloqueo o resistencia que no permite acceder a la meta inmediatamente" (Rodríguez, 2012, p.155).

Puntualmente este estudio se ubica en cuarto año del nivel secundario, donde el estudiante (15-16 años de edad) ya posee un bagaje personal y académico para la resolución de problemas, y se basa en el Diseño Curricular Jurisdiccional de Matemática del ciclo superior (Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires, 2010), que señala que para hacer Matemática es ineludible resolver problemas, actividad que también ha de estar acompañada de una descontextualización que le permita al estudiante mayor generalidad de los conceptos.

Un trabajo en aula en este sentido involucra el abordaje del problema desde la resolución del estudiante con sus conocimientos previos, el planteo de distintas alternativas de resolución y la generalización del contenido en tratamiento para su transferencia a otras situaciones (Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires, 2010). Estas etapas suponen interés y compromiso de los estudiantes para la resolución de problemas, así como la activación de procesos mentales para la búsqueda de soluciones (Johnson-Laird, 1983), lo que constituye el foco del estudio.

Desde la experiencia docente puede observarse que cuando a un estudiante se le propone un problema, en ocasiones el entusiasmo por asumir la responsabilidad de resolverlo parece estar ausente y pasa de ser un desafío a una obligación. De este modo, la necesidad de buscar el ejemplo, el "cómo se hace", para cumplir con la tarea asignada, se vuelve la estrategia más utilizada. Se producen afirmaciones del tipo: "no hicimos uno como este", "es muy difícil", "usted lo sabe porque es profesor". Incluso llega al final de la educación secundaria sin saber por qué estudió todos esos contenidos matemáticos, manifiesta que no los va a utilizar en su entorno inmediato y que con saber algunos del ciclo básico le alcanza. De esta manera, la Matemática que "aprende" en la escuela secundaria en los últimos años le resulta poco significativa.

Es así como surge la inquietud de conocer qué es lo que el estudiante piensa cuando manifiesta tales actitudes. Para ello, se elige un contenido potencialmente representativo de la resolución de problemas, Trigonometría, que permita el despliegue de estrategias en cuarto año de la escuela secundaria. Además, se considera importante develar el porqué de los obstáculos que se producen en la resolución, a modo de re-pensar también la práctica docente. Específicamente se interpela: ¿Cómo son las representaciones mentales que organiza el estudiante cuando debe afrontar la resolución de un problema de trigonometría? ¿Cuáles son los saberes previos a los que recurre el estudiante para abordar este tipo de problemas? ¿Cuáles y cómo son, desde el punto de vista disciplinar y psicológico, los obstáculos y facilidades que surgen en la resolución de problemas de este tipo?

En la misma línea de contenido, aunque enmarcado en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), Araya y Parraguez (2014) trabajan sobre la idea de la resolución de ecuaciones desde un método no mecanizado, específicamente en la resolución de ecuaciones trigonométricas del tipo "ab = 0". Su objetivo principal consiste en analizar los procesos mentales que se dan en los estudiantes cuando resuelven ecuaciones trigonométricas de una estructura específica. Para ello, con un enfoque cualitativo, aplican cuestionarios y entrevistas semiestructuradas a algunos estudiantes de un curso de cuarto año medio de Chile. Sus principales conclusiones evidencian las dificultades que tienen los estudiantes para pasar de un contenido a otro, por ejemplo, de razones a funciones trigonométricas, lo que muestra una deficiencia en los contenidos previos.

Mondino (2014), por su parte, aporta conceptualmente una descripción de la forma en que los estudiantes construyen el conocimiento en forma general, como una manera de re-pensar los formatos adoptados para la enseñanza y el aprendizaje en las escuelas. El término modelo para este autor tiene un carácter polisémico, y es necesario refinarlo para el caso del aprendizaje escolar. Pero, en general, un modelo es siempre una forma de representación con características comunes. Distingue entre modelos conceptuales y mentales, diferenciando al primero como una forma más simplificada de presentar conceptos rígidos. Los modelos mentales, por otro lado, constituyen una representación propia del sujeto, específica, donde por medio de imágenes y proposiciones, construye una analogía entre lo conocido y lo nuevo.

Precisamente, D'Amore y Martini (1997) describen la influencia de un modelo general de problema y los esquemas mentales asociados a las operaciones de problemas escolares. Trabajan con estudiantes del nivel secundario mediante dos tipos de problemas: uno con un enunciado fácilmente imaginable y otro un poco menos evidente. Se les pide que trabajen de manera autónoma, sin ayuda del compañero ni del docente y, al finalizar, se los entrevista. Entre las conclusiones destacan que el uso acrítico de la calculadora inhibió el control en la resolución ya que condicionó la interpretación de resultados. También comentan que en uno de los problemas los estudiantes se mostraron molestos por no saber qué operación utilizar en la resolución. Por último, comprueban que los modelos mentales construidos coinciden con lo plasmado en las resoluciones, hecho que les permite afirmar la correspondencia entre esquema y resolución.

En este punto, en relación con la actitud del resolutor ante los problemas, Moreira (2012) expone la idea de la Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico. El autor le otorga un matiz relacionado con la actitud crítica del estudiante y reconoce las condiciones necesarias para que este tipo de aprendizaje se dé. Entre ellas, propone enseñar más preguntas que respuestas, utilizar diversos materiales, no solamente libros, y aprender a partir del error. Precisamente recomienda a los docentes no constituirse en depositadores de contenidos, sino promover que los estudiantes los busquen y concreten por sus medios, que se pregunten y re-pregunten a partir de sus prácticas.

2. Encuadre conceptual

La enseñanza de las ciencias en la escuela, en especial de la Matemática, se caracteriza, muchas veces, por una fuerte presencia de la formalidad y la rigurosidad que le son propias, a tal punto que lo que prevalece es el manejo de su simbología y de su método. En estos términos lo plantea el Diseño Curricular de Educación Secundaria vigente para la provincia de Buenos Aires:

> "El imaginario popular asigna a la matemática significados discutibles que la colocan en un lugar casi inalcanzable para el común de las personas. Estas concepciones, en gran parte, tienen su origen en los aprendizajes que se produjeron durante la escolaridad (…) Esta concepción determinista y elitista se contrapone con la propuesta del presente Diseño Curricular, que considera a la disciplina como parte de la cultura y valora a los alumnos como hacedores de la misma. Por este motivo se propone un cambio sustancial en el quehacer matemático del aula, mediante el cual el docente (…) sea un motor importante en la construcción de conocimientos que cobren sentido dentro de la formación integral del alumno. (Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires, 2010, p. 9)

El protagonismo del estudiante lo pone en un lugar central del quehacer matemático en el aula. Aunque las miradas de los estudiantes hacia la Matemática escolar son variadas y dejan ver componentes afectivos -tales como aprecio, interés, valoración-, también se evidencian actitudes negativas como el rechazo, la frustración, el pesimismo y la evitación (Caballero et al, 2014). Los estudiantes centran su mirada en un objetivo específico: aprobar la materia en la cual van a ser evaluados (Mellado et al, 2012).

En el área Matemática, el llamado Enfoque Cognitivista, tiene como principal elemento de análisis a las representaciones o esquemas mentales de objetos matemáticos, constructo trabajado por Johnson-Laird. El mundo tal cual se presenta ante las personas no es captado directamente, sino que lo es internamente a partir de construcciones que se dan en la mente y que pueden adoptar diferentes formas. Estas construcciones se denominan representaciones mentales.

Eysenck y Keane (1990) entienden al concepto de representación como cualquier notación, signo o conjunto de símbolos que re-presenta ("vuelve a presentar") algún aspecto del mundo externo o de la imaginación. En este marco, surge una forma de abordar los procesos de aprendizaje basados en la equiparación de la mente con una computadora, que intenta explicar cómo y de qué manera se procesa la información internamente, es decir, mentalmente. Es aquí donde cobra importancia la teoría presentada por Johnson-Laird en 1983, denominada Teoría de las Representaciones Mentales.

Desde esta perspectiva, la captación de la realidad depende de lo que hay en esa realidad y de lo que la mente percibe de ella. En este sentido, los procedimientos llevados a cabo por la mente interpretan el mundo utilizando un colectivo de símbolos que se comparten con otras personas, siendo estos procedimientos traducciones de hechos y/o conceptos a un lenguaje propio de cada sujeto. En este proceso, la mente va construyendo una base de palabras con significado (semántica) y una serie de reglas para manipularlas (sintáctica). Estas palabras con significado contribuyen a la construcción de representaciones mentales a través de un procedimiento de revisión recursiva, comparable con el método deductivo utilizado en Matemática.

En particular, para acceder a los objetos matemáticos, Duval (2016) sostiene que el estudiante ha de utilizar signos, símbolos, letras y lenguaje natural, que encuadra dentro de las representaciones semióticas. Estas, a su vez, se dan en diferentes registros semióticos, como el verbal (hablado o escrito), algebraico, numérico, tabular y gráfico. Lo interesante es que un mismo objeto matemático puede tener distintas representaciones semióticas, las cuales permiten "ver dentro" de la mente del estudiante.

Asimismo, Istadi et al (2017), al analizar la resolución de problemas trigonométricos por parte de estudiantes de nivel secundario, advierten que la interacción entre las representaciones internas y las externas está poco desarrollada. En su estudio, observan que los estudiantes pueden responder con base a una figura dada, también apelar a la definición de razón trigonométrica y determinar posiciones de objetos a partir de la observación. Pero tienen dificultades para determinar ángulos específicos (de depresión) y ecuaciones matemáticas asociadas.

Por su parte, la trigonometría constituye una de las principales ramas de la Matemática y objeto de estudio en los currículos de educación secundaria, que pone en relación los lados y los ángulos de triángulos. Específicamente, sirve para medir aquello que no es posible medir concretamente, como ser distancias inaccesibles (Puig, 1986). Las razones trigonométricas se basan en la semejanza de triángulos; de allí que su tratamiento se base en este contenido geométrico. Asimismo, como advierte Montiel (2013), suele darse a través de una visión tradicional que se limita a la razón y la función, descuidando la faceta geométrica. Es por eso que tal vez, como aluden Usman y Hussaini (2017), los errores de los estudiantes estén relacionados con el procesamiento matemático, las habilidades empleadas y la codificación de respuestas, por encontrarse con situaciones que dificultan su despliegue de estrategias.

Además, la enseñanza de la trigonometría resulta propicia desde la resolución de problemas. Polya (1989) distingue cuatro fases fundamentales a recorrer mediante este tipo de actividad: *comprender el problema*, lo que presupone leer con atención el enunciado del mismo, identificar qué es lo que se pide y las incógnitas; *concebir un plan* de resolución y diseñar un camino rumbo a responder a los interrogantes del problema; *ejecutar el plan* de resolución y comenzar a transitar el camino; *revisar la respuesta* obtenida para ver si efectivamente responde a los interrogantes. Estas cuatro fases tratan de una resolución autónoma por parte del estudiante, quien en el proceso va marcando el horizonte que persigue siendo crítico y cuenta con la ayuda del docente en caso de requerirla.

3. Método

El encuadre metodológico que se le dio a esta investigación tuvo un enfoque cualitativo (Hernández et al, 2006), con foco en obtener, de una manera flexible y no estandarizada, la mayor información posible proporcionada por los estudiantes que permita dilucidar características de ellos mismos. El alcance del estudio fue descriptivo y también interpretativo, dado que se pretendió identificar representaciones mentales y ciertos aspectos emocionales de los estudiantes.

Se eligió como ambiente de estudio un aula de cuarto año (26 estudiantes), en una escuela secundaria de gestión pública con orientación agropecuaria, en un partido al norte de la provincia de Buenos Aires. La docente del curso se mostró siempre dispuesta a colaborar con la investigación, y su perfil profesional resultó de gran ayuda, ya que tenía buena llegada a los estudiantes y manejaba correctamente los diferentes momentos en la clase.

El trabajo de campo constó de dos etapas: 1) *De diagnóstico*, se observó en términos generales al grupo, se presenciaron cuatro clases para ir introduciendo al investigador en el aula, se entrevistó a la docente del curso y se decidió qué estudiantes se estudiaría con mayor detenimiento; 2) *Con foco en los casos seleccionados*, en los que se registraron aspectos vinculados a la resolución de problemas. Durante siete clases se realizaron observaciones y narraciones escritas, y se entrevistó fuera del aula a dos estudiantes que se presentaban como resolutores bloqueados, que no resolvían las actividades propuestas por la docente, para poder develar lo que producían sus conductas dentro del aula.

Los datos recolectados fueron procesados y analizados de acuerdo con ocho categorías de análisis (C1 a C8), pensadas en función de los interrogantes planteados (apartado 1), con el objetivo de analizar las representaciones mentales de los estudiantes cuando resuelven problemas de trigonometría. Todas ellas asumieron entre dos y cinco valores en función a lo que se esperaba observar al interactuar con los participantes del estudio.

Las tres primeras categorías (C1 a C3) atendieron a un plano psicológico de disposición hacia las tareas propuestas. Puntualmente C1, denominada *Predisposición para la resolución de problemas*, permitió rescatar aspectos de tipo emocionales que el estudiante experimenta en la etapa inicial de la resolución de un problema, y que puede de alguna forma exteriorizar. Aquí se clasificó en niveles de predisposición (buena, regular, mala) como una manera que permitió identificar y explicar posteriormente lo observado. Como C2 se situó *Gestos y actitudes que se manifiestan cuando se asigna la tarea de resolver un problema*. Se puntualizó en los aspectos observables del estudiante en el inicio de la resolución (tranquilidad, nerviosismo, negación), al mismo tiempo que fue posible advertir si existieron o no bloqueos iniciales en la resolución. Por último, la categoría *Saberes previos para la resolución* (C3) tuvo en cuenta que, al momento de encarar un problema, el estudiante trae a su mente todos aquellos recuerdos que vivenció en situaciones similares. Por lo tanto, lo que se pretendió analizar en esta categoría fue cómo estaban equipados los estudiantes con respecto a los problemas propuestos (disponibles, escasos, ausentes).

Las siguientes cinco categorías (C4 a C8) fueron organizadas en función a la propuesta desarrollada por Polya (1989). C4 a C6 corresponden a la fase inicial de comprensión del problema. Específicamente, con la categoría *Nivel de comprensión que se evidencia con relación al enunciado* (C4) interesó dilucidar si el estudiante comprende o no el enunciado y de qué manera lo hace (bueno, regular, deficiente, malo, no registra). De este modo, se puede ver de qué modo exterioriza sus pensamientos para facilitar la tarea de entendimiento, a través de la categoría C5 *Formas de representación que se utilizan* (imagen, proposición, construcción gráfica, no registra), y si reconoce lo que debe encontrar como respuesta, abordado mediante la categoría C6 *Asociación de datos con incógnita/s del problema* (correcta, parcial, incorrecta, no asocia). Por su parte, C7 se focalizó en la *Confección y ejecución de un plan de acción*, distinguiendo cuatro posibles desempeños (correcta, parcial, incorrecta, no registra). Por último, C8 se vinculó con la fase final de la resolución de problemas: *Revisión del resultado obtenido*, y permitió reconocer si los estudiantes vivenciaron o no este paso (revisa, no revisa).

En cuanto a las actividades con estudiantes que se propusieron en la experiencia, es posible reconocer dos tipos: los problemas que fueron presentados por la docente del curso en el material de estudio, denominados *problemas propuestos*, y los problemas sugeridos e incorporados a las actividades anteriores, que se rotularon como *problemas sugeridos*.

Problema propuesto 1. *María quiere realizar un cantero de forma triangular para decorar su patio con plantas de distintos colores. Si cada lado mide 4 m, ¿cuál será el área que podrá sembrar María?*

Esta actividad se introdujo como una tarea para que los estudiantes realizaran en sus hogares la clase anterior al análisis, previendo que lo primero a plantear sería recurrir a un esquema del estilo al que se presenta en la Figura 1.

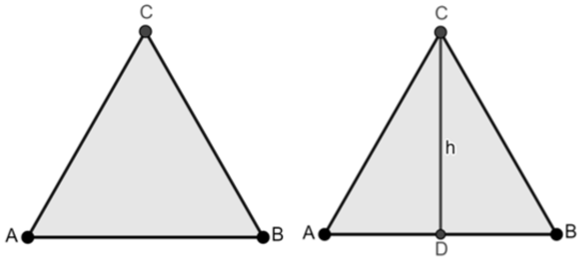

Figura 1. Posible representación gráfica para el planteo del problema propuesto 1.

Los estudiantes ya habían trabajado, en actividades anteriores de esta unidad, con propiedades de triángulos equiláteros. Por lo tanto, se esperaba que las asocien al problema e identifiquen que, trazando la altura de uno de los lados del triángulo, se forman dos triángulos rectángulos congruentes, cada uno con un ángulo interior de 60° y un cateto de 2 cm. De esta manera, recurriendo a las razones trigonométricas, se puede calcular el valor de la altura, necesaria para hallar la superficie del triángulo inicial. Precisamente la intención fue desplegar algunos contenidos previamente trabajados, sin un soporte visual explícito dado. Se pretendió ver si los estudiantes recurren, por sus propios medios, a tales contenidos y soporte.

Problema propuesto 2. *¿Qué inclinación, con respecto al suelo, debes darle a una escalera de 20 m de longitud para que llegue justo al centro de la ventana del 5° piso que se encuentra a 15 m de altura? ¿Cuánto queda separada de la pared?*

La primera cuestión que se pretendió trabajar en este problema, que comparte con el anterior la falta de soporte visual explícito, es analizar si los estudiantes asociaban o no el concepto de inclinación con el de ángulo. Una posible representación gráfica relativa a este problema puede observarse en la Figura 2 y, para encontrar el ángulo α, basta recurrir a las razones trigonométricas vinculando las longitudes presentadas (20 m de la escalera y 15 m de la altura de la ventana respecto del piso).

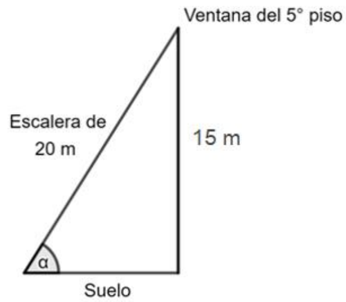

Figura 2. Posible representación gráfica para el planteo del problema propuesto 2.

Problema propuesto 3. *En un terreno rectangular se cruza una soga de 5 m desde una punta a otra puesta para cercar el terreno y sembrar de ambos lados distintas hortalizas. El ángulo que forma la soga con el lateral inferior del terreno es de 32° 40’ 38”. Calcular la superficie que puede ser sembrada.*

Esta situación presenta una dificultad mayor a la de los problemas precedentes ya que, sin un soporte visual claro y preciso, puede resultar complejo imaginarse lo que el problema quiere plasmar. Se espera un planteo gráfico como el de la Figura 3. Al trazar la diagonal, se puede reconocer la existencia de dos triángulos rectángulos congruentes, con una hipotenusa en común de 5 cm, y en cada uno de ellos un ángulo α de 32° 40’ 38’’. El área a determinar es la del rectángulo que se forma con los catetos. Los contenidos previos que se requirieron fueron mínimos, pero a la vez necesarios para encarar una posible resolución. Se pretendió focalizar la mirada en los pasos que el estudiante fue dejando durante el proceso y en los distintos tipos de *registros que utilizó.*

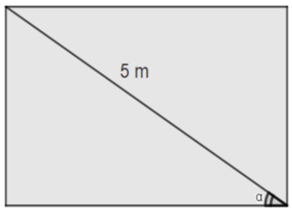

Figura 3. Posible representación gráfica para el planteo del problema propuesto 3.

<u>Problema propuesto 4</u>. *Laura y Pablo fueron a conocer el Obelisco. Laura se paró a la derecha y observa el extremo superior con un ángulo de elevación desde el piso de 55°. Pablo lo observa desde la izquierda con un ángulo de elevación desde el piso de 65°. La distancia entre Laura y Pablo es de 20,8 m. a) ¿Cuál es la altura del Obelisco? b) ¿A qué distancia del Obelisco se encuentra Pablo?*

Con este problema se pretendió trabajar también la descomposición de una figura en otras más simples, como en el problema anterior. Los estudiantes ya habían trabajado con ejercicios donde el soporte gráfico es de características similares a este, por lo que fue esperable que realizaran un esquema como el presentado en la Figura 4. El primer obstáculo que se previó para comenzar la resolución es la falta de longitudes en el triángulo, que se compensó con la presencia de los ángulos interiores. Se espera que los estudiantes recurran al teorema del seno para calcular, como datos auxiliares, las distancias lineales de cada una de las personas al extremo superior del Obelisco y con estas medidas, haciendo uso de las razones trigonométricas, hallar la altura del Obelisco.

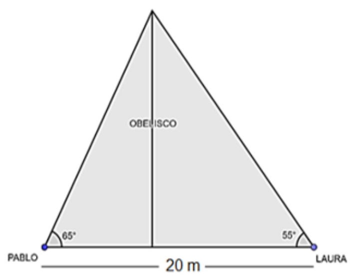

Figura 4. Posible representación gráfica para el planteo del problema propuesto 4.

Con respecto a los problemas complementarios sugeridos a la docente, cabe destacar que se buscaron situaciones problemáticas donde el estudiante tenga que comprender el enunciado para comenzar una resolución, necesite buscar contenidos previos aprendidos en otros años de su trayectoria escolar y sea puesto ante la posibilidad de recurrir a distintos tipos de soportes para encarar su resolución. Estos problemas se incorporaron en forma intercalada con los ya propuestos.

Problema sugerido 1. *Observar los datos que señala un radar sobre la posición de dos aviones respecto de la torre de control. ¿A qué distancia están estos aviones entre sí?*

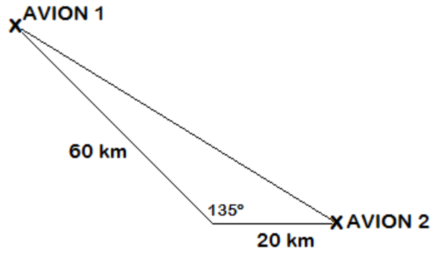

Figura 5. Representación gráfica del enunciado del problema sugerido 1.

Este problema fue propuesto a los estudiantes después de haberse desarrollado el contenido teorema del seno y antes del desarrollo del teorema del coseno, a modo disparador. Entre las inquietudes emergentes por parte de los estudiantes se previeron: ¿Dónde está el radar que menciona el enunciado? ¿Es relevante para este problema saber dónde se sitúa? ¿Qué se puede ver en el dibujo? ¿Cuál es la incógnita en este problema?

Es posible advertir que no se trata de un triángulo rectángulo y que la incógnita está situada en el lado opuesto al ángulo de 135°. También, que si se intenta aplicar el teorema del seno, no es posible debido a que no se conocen los dos ángulos interiores restantes del triángulo. Un posible camino hacia la resolución es pensar en una construcción auxiliar como la de la Figura 6. Con esta construcción -que posiblemente requiera ser guiada por la docente- se forman dos triángulos rectángulos adicionales, uno de ellos isósceles. Esto permite afirmar que los lados opuestos a los ángulos de 45° son iguales y, de esta manera, se puede calcular por medio de las razones trigonométricas, o el teorema del seno, la medida de cada uno de estos lados. Luego, con el teorema de Pitágoras, se puede llegar a la incógnita inicial planteada.

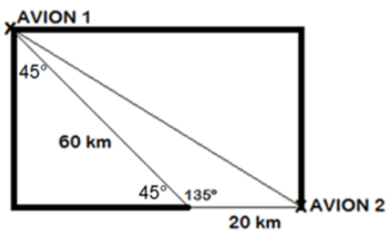

Figura 6. Posible representación gráfica para el planteo del problema sugerido 1.

Se consideraron en este problema dos cuestiones esenciales. Por un lado, que no fuera solo de aplicación de conceptos, sino que tuviera un bloqueo inicial y resultara desafiante para el estudiante. Por otro lado, se tuvo en cuenta que fuera un problema cercano para el resolutor y que su planteo, incluyendo el esquema presentado, resulte amigable y similar a otros problemas del estilo ya trabajados.

Problema sugerido 2. *Un piloto conduce un avión en línea recta. Este avión determina los ángulos de depresión a dos señales de distancia A y B, distantes entre sí 5 mi (millas), como se muestra en la figura 7. a) Encontrar la distancia entre el avión y los puntos A y B. b) Encontrar la altura del avión respecto del suelo.*

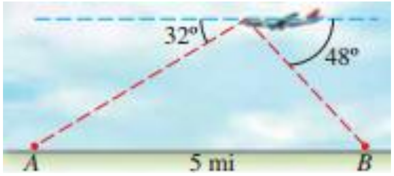

Figura 7. Representación gráfica del enunciado del problema sugerido 2.

En esta situación, se pretendió trabajar con los conceptos de ángulo de elevación y depresión, que ya habían sido comentados y aplicados durante la etapa anterior. Se esperaba que los estudiantes intentaran hacer una construcción similar a la comentada en la Figura 4 pero que llegaran a la dificultad de que no conocían en estos triángulos más que un ángulo interior y el ángulo recto. Asimismo, se puede recurrir a dos elementos conceptuales importantes: por un lado, en el triángulo oblicuángulo central, el ángulo opuesto al lado de 5 millas resultó ser de 100°, ya que junto con los ángulos señalados de 32° y 48° forman un ángulo llano, y además, los ángulos interiores restantes pudieron averiguarse a partir de los ángulos de depresión proporcionados por el problema. De esta manera, aplicando el teorema del seno, se pueden encontrar las distancias pedidas.

La imagen proporcionada junto con el enunciado tiene una estructura parecida a la del problema sugerido 1. Sin embargo, los datos iniciales son otros y la resolucion cambia respecto de la situación anterior. El foco en este problema se pone en la cuestion de identificar los ángulos interiores del triángulo oblicuángulo, a partir de otros conceptos geométricos, y en encontrar las limitaciones al trabajar con este.

Problema sugerido 3. *La Torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura libre más alta de Norteamérica. Una mujer que está en la plataforma de observación de la torre, a 1150 pies sobre el suelo, desea determinar la distancia entre dos puntos de referencia que están al nivel del piso. Ella observa que el ángulo formado por las líneas de vista a estos dos puntos de referencia es de 43°; también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de vista a uno de los puntos de referencia es de 62° y el del otro punto de referencia es de 54°. Encontrar la distancia entre los puntos mencionados.* (Adaptado de Stewart et al, 2012, pp.482-483).

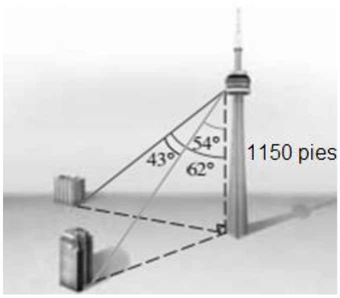

Figura 8. Representación gráfica del enunciado del problema sugerido 3.

El dibujo presentado, extraído del texto del que se hizo la adaptación del enunciado, está diagramado en tres dimensiones. Esta cuestión fue considerada como un posible bloqueo inicial para la resolución. Básicamente se trata de una situación que presenta tres triángulos, dos de ellos rectángulos y uno oblicuángulo, pertenecientes a tres planos diferentes. La incógnita consiste en hallar un lado del triángulo oblicuángulo, como se muestra en la Figura 9. Entre las inquietudes que pueden emerger al leer la situación y observar la imagen se encuentran: ¿Se trata de un problema similar a alguno ya resuelto anteriormente? ¿Cuántos y cuáles son los triángulos y ángulos señalados en el dibujo? ¿A cuál de los triángulos pertenece la incógnita que se debe encontrar? ¿Todos los datos sirven para resolver el problema?

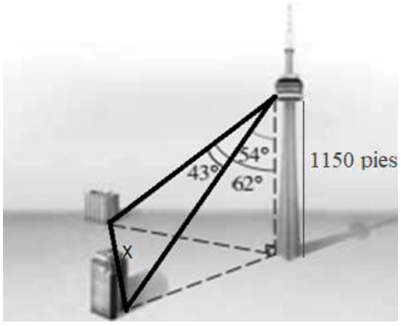

Figura 9. Posible representación gráfica para el planteo del problema sugerido 3.

En la resolución se requiere identificar los tres triángulos en escena, posiblemente representados en un dibujo más cercano al estudiante. Por ejemplo, en la Figura 10 se los muestra llevados al plano 2d. Los ángulos α, β y γ miden 62°, 43° y 54° respectivamente, y el segmento AC tiene la misma longitud que DF, al igual que el segmento HI, que mide lo mismo que DE. De este modo, la incógnita del problema se sitúa en el lado EF del segundo triángulo y, para encontrarla, se puede pensar en trabajar en cada uno de los triángulos rectángulos para hallar la medida de los lados DE y DF, y luego, con el ángulo comprendido β, poder aplicar el teorema del coseno para encontrar la incógnita pedida.

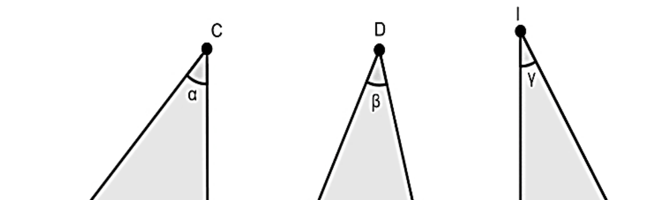

Figura 10. Posible representación de los triángulos planos en el problema sugerido 3.

Entre los contenidos previos de los que debió disponer el estudiante para poder encarar la resolución de este problema se encuentran las razones trigonométricas y el teorema del coseno. Posiblemente uno de los más marcados haya sido la habilidad de visualizar en el plano una situación ideada en el espacio. Por esto, la atención estuvo puesta durante esta actividad en las habilidades de los estudiantes de desglosar el dibujo e identificar las incógnitas (principal y auxiliares).

4. Etapa diagnóstica

Las actividades con que los estudiantes trabajaron durante la etapa diagnóstica consistieron en: 1) hallar el valor redondeado a milésimos a partir de calcular razones trigonométricas dadas; 2) hallar el valor del ángulo conocido el valor de una razón trigonométrica; 3) escribir simbólicamente las razones trigonométricas de un triángulo, dada una imagen del mismo; 4) hallar la medida de un lado o un ángulo desconocido de un triángulo, dado un dibujo con datos; 5) observar figuras que representan objetos cotidianos (árbol, avión, rampa, antena, barrilete, escalera) y calcular ciertas medidas. Básicamente estas actividades consistieron en ejercicios de aplicación directa de contenidos. La docente fundamentó esta propuesta en que el curso estaba formado por estudiantes que provenían de hasta tres divisiones distintas, algunos no habían visto los conceptos básicos de trigonometría en tercer año y se debió aportar herramientas que podrían llegar a ser necesarias más adelante.

Cuando la profesora comenzó la unidad temática "trigonometría", al colocar dicho título se percibieron dichos tales como: "es muy difícil", "nos vemos en diciembre (período en que son examinados aquellos alumnos que no logran desempeños satisfactorios durante el ciclo escolar)", y se observaron sus cuerpos tendidos sobre las mesas de trabajo, como si no escucharan lo que se estaba hablando. Cuando la docente comenzó a introducir los conceptos básicos de trigonometría, de una forma explicativa, algunos estudiantes manifestaron verbalmente no entenderlos, al mismo tiempo que se mostraron molestos.

Llamó la atención la frase de un estudiante: "profesora, me parece muy fácil, por eso creo que lo estoy haciendo mal y la quiero llamar". Se percibió, en todo momento, inseguridad en las resoluciones de los estudiantes, evidenciadas por las reiteradas veces que consultaron a la docente. En general, se notó un curso con una forma de trabajar algo acelerada, con constantes interrupciones a la docente, producto de la inseguridad y el miedo a equivocarse que tenían. Los estudiantes se mostraron familiarizados con los contenidos curriculares, dado que no tuvieron mayores inconvenientes en aplicarlos de manera directa; pero mostraron algunas carencias de contenidos previos de años anteriores.

Los casos seleccionados en esta etapa fueron cinco (A a E): A se tomó como caso de referencia, por considerarse una buena resolutora de problemas; B y C fueron considerados como resolutores bloqueados, que permitieron analizar cuestiones emocionales que produjeron los obstáculos en la resolución; D y E fueron contempladas como referentes de resolutores intermedios, en las que se focalizó la mirada para observar su desenvolvimiento en la resolución de problemas. Desde la perspectiva de la profesora del curso cuando fue entrevistada, solo uno de los estudiantes del curso puede considerarse como un resolutor activo dentro del aula. De los restantes, algunos rechazan el trabajo en la asignatura con el argumento de que siempre "se llevan Matemática" y otros trabajan de manera muy asistida. En efecto, la docente subrayó la dependencia de los estudiantes, ya que necesitan mucho de su intervención en las tareas asignadas.

Cuando se le consultó si trabajaba con resolución de problemas, respondió que durante la unidad anterior (Números Reales) había trabajado con actividades geométricas, es decir, donde el soporte a tomar estaba representado por una figura, en una actividad de aplicación. También, al preguntarle por su concepción de resolución de problemas, expuso que este tipo de actividad genera en los estudiantes una actitud negativa:

> Ya cuando ponés la palabra “problema” ves en ellos una actitud de “no voy a poder”, de que “yo no”, “a mí no me da”, “deme un ejercicio”. Directamente, ellos consideran que no pueden, que no les da la cabeza, que son las palabras que ellos mismos usan.

La principal dificultad que advierte en esta metodología es que los estudiantes se limitan a trabajar con los contenidos que están estudiando y no tienen en cuenta los previos. Incluso comentó que, por lo general, a los alumnos les interesa más aprobar que aprender:

> (…) hay algunos alumnos que no se quieren llevar la materia, entonces estudian por ese motivo únicamente, pero no por el deseo o porque vos veas que se evidencia en clase el deseo de querer resolver como un desafío, porque “a mí no me va a ganar”.

Al error lo definió como un “castigo” de los estudiantes hacia ellos mismos. Ante una equivocación, ven frustradas sus posibilidades de resolver y anteponen una actitud negativa que les impide seguir. Lo asoció al deseo explícito de querer resolver ejercicios de tipo algorítmico, acentuando que la Matemática que se trabaja en las escuelas es de este tipo y no espiralada. Finalmente, con respecto a los saberes previos disponibles en los estudiantes para la resolución, la docente subrayó que muchas veces el inconveniente no se presenta por la situación en tratamiento en ese momento, sino por la falta de herramientas previas, sobre todo vinculadas a geometría.

5. Desempeños estudiantiles en los problemas

En lo que sigue se recorren los siete problemas, tanto propuestos como sugeridos, presentados en el apartado 3. Los problemas propuestos fueron desarrollados luego de haberse presentado el teorema del seno y antes del teorema del coseno, mientras que los sugeridos fueron trabajados, salvo el primero, luego del teorema del coseno. También se resume lo dialogado en un par de entrevistas con estudiantes bloqueados ante la tarea.

5.1. Problema propuesto 1

La resolución de esta actividad fue de aproximadamente 30 minutos (10 iniciales para socializar lo que habían llegado a hacer de tarea y los restantes 20 para resolverla en clase).

La estudiante A realizó en su hogar un esquema que constó de un triángulo con la medida explícita en cada uno de sus lados y la altura con respecto a uno de ellos; por el contrario, las estudiantes D y E no habían esbozado ningún dibujo. Se percibió que estas últimas realizaron el esquema junto con la profesora, pero no intentaron continuar con la resolución, quedando expectantes a que la docente realice los cálculos en el pizarrón. Al mismo tiempo, la estudiante A calculó el área de uno de los triángulos rectángulos y luego la duplicó.

A pesar de haber quedado como un deber para el hogar, se percibió que muy pocos estudiantes intentaron realizar algo de este problema, especialmente las estudiantes D y E que no resolvieron prácticamente nada en forma autónoma, sino que fueron completando su resolución a la par de la docente. Por consiguiente, no mostraron representación mental alguna, aunque sí cierto bloqueo fundado en la falta de confianza y de autonomía en la resolución. A la estudiante A, en cambio, se la vio más activa y predispuesta a trabajar. Durante la resolución en clase puso en evidencia algunas representaciones mentales, además de contenidos previos a los que recurrió para resolver, como la descomposición de una figura en otras más simples y el concepto de área de un triángulo. En efecto, al realizar el dibujo, dejó explícito que no solo reconoció la situación y la incógnita, sino que resolvió dividiendo a la figura en dos partes iguales, lo que evidenció la ejecución de un plan para resolver. A su vez, organizó una representación mental en forma de imagen (registro gráfico) y recurrió a situaciones anteriores que involucraban una división de figuras en otras más simples. Por último, no puso en evidencia la revisión de la resolución.

5.2. Problema propuesto 2

La resolución de este problema comenzó con una ayuda de la docente, quien por medio de una varilla simuló la escalera e intentó mostrar a los estudiantes una manera de representar la situación a resolver. El tiempo de duración de esta actividad fue de 15 minutos.

Durante el desarrollo, la estudiante D manifestó en palabras textuales: “yo no entiendo nada”. Nuevamente, se la vio desinteresada durante la resolución y, pese a que uno de los investigadores le pidió que leyera el problema e identificara lo que debía calcular, no encaró ninguna resolución. Por su parte, la estudiante E realizó un esquema en su carpeta representando la situación planteada por el problema y expresó: “se puede usar seno”. Esto dejó ver que, a diferencia del problema anterior, pudo organizarse mentalmente y estar mejor predispuesta a resolver. Al ejecutar un soporte visual, construyó una representación mental que exteriorizó utilizando un registro gráfico. Además, utilizó el registro verbal oral para referirse a la resolución, lo que implicó la puesta en marcha de un plan de resolución. Por último, no se tienen certezas acerca de si su resolución culminó de manera autónoma o luego de la puesta en común.

La estudiante A ya había realizado un bosquejo de la situación, previo a que la docente realizara el comentario inicial, y situó la incógnita sin problemas en el lugar del ángulo de elevación. Esto permitió comprobar que la estudiante se organizó mentalmente, pensó en un esquema de la situación que plasmó en un dibujo, identificó el ángulo como el adyacente al piso y no la a la pared y que, por lo tanto, interpretó correctamente el concepto de inclinación. Culminó la resolución sin inconvenientes, pero no dejó explícito registro alguno de si revisó o no su resolución.

5.3. Problema propuesto 3

Esta actividad se desarrolló en los últimos 15 minutos de la clase y no tuvo introducción de la docente; los estudiantes comenzaron a trabajar directamente.

La estudiante E realizó un dibujo en su carpeta de un triángulo rectángulo, ubicando en uno de sus ángulos agudos la amplitud que daba el problema y, como hipotenusa, la medida 5 metros. Esto dejó abiertas dos posibilidades: reconoció que el problema inicial podía pasar de un rectángulo a dos triángulos rectángulos con el trazado de la diagonal o interpretó la palabra “rectángulo” como “triángulo rectángulo”. Para esclarecer esta cuestión, se le preguntó a la estudiante, quien respondió: “claro, como dice rectángulo, dibujé esto”, señalando la figura. Si bien la interpretación sirve para comenzar con la resolución, no es evidente que la estudiante haya pasado por la etapa previa de descomposición de la figura inicial (rectángulo) en otras dos más simples (triángulos rectángulos). Resumidamente, existió una representación mental de la situación problemática, que se pudo plasmar en un gráfico y que estuvo íntimamente relacionada con los contenidos que se estaban trabajando.

Pudo observarse también que la predisposición a trabajar en este problema fue buena y la estudiante se mostró tranquila al resolver. Además, luego del esquema que realizó, encontró sin inconvenientes la altura del rectángulo, que en su esquema estaba determinada por el cateto opuesto al ángulo señalado en el enunciado. Por lo tanto, identificó de manera correcta la incógnita. Cuando tuvo que calcular la superficie, no supo cómo continuar y se generó una pausa para culminar la resolución, sin llegar a evidenciarse la etapa final de la resolución.

La estudiante A realizó el esquema de la situación representado por un rectángulo y trazó la diagonal. Marcó uno de los ángulos que formaba esta con un lado del rectángulo, colocó su medida e indicó la misma para el ángulo alterno interno con este. De este modo representó mentalmente la situación y la plasmó mediante un dibujo/esquema, recurrió a los saberes previos comentados en clases anteriores, como los ángulos entre paralelas y los plasmó también en el dibujo. Para resolver, identificó que debía calcular la altura y base del rectángulo, y recurrió a las razones trigonométricas; aunque no dibujó la descomposición del rectángulo en dos triángulos, sí lo tuvo en cuenta. Por último, esta alumna (A) no mostró evidencias respecto de la revisión de su resolución y la estudiante D, por su parte, no resolvió el problema autónomamente, completando la resolución junto con la docente.

5.4. Problema propuesto 4

La resolución de este problema comenzó recién iniciada la clase y se extendió por 20 minutos. La estudiante A realizó el dibujo de un triángulo que tenía en los vértices adyacentes a la base a las personas mencionadas en el problema y la altura respecto a dicha base como altura del Obelisco. En ese momento, llamó a uno de los investigadores y le realizó una pregunta que reflejó la intención de trabajar los dos triángulos rectángulos que se formaron como congruentes, hecho que rápidamente descartó por darse cuenta que no se trataba de un triángulo isósceles. Esta acción permitió ver que la estudiante recordó un problema similar y quiso evocarlo en esta situación; también puso de manifiesto la organización de una representación mental asociada a una de las fases de resolución de problemas: la planificación. Superado este obstáculo, pudo comenzar la resolución empleando el teorema del seno, pero no se percató que con los datos con los que contaba podía calcular otros auxiliares y luego trabajar con los triángulos rectángulos por separado. Asimismo, la estudiante tenía clara la incógnita.

La estudiante D comenzó a realizar cálculos. Los primeros que se plasmaron fueron de aplicación del teorema del seno para hallar las distancias de cada persona al extremo del Obelisco. Sin embargo, no realizó un esquema de la situación ni identificó la incógnita del problema, no pudiendo dar cuenta de una interpretación del mismo ni una representación mental evidente; esto es, pareciera que simplemente comenzó a resolver hallando medidas sin saber si realmente tenían o no significado para el problema. En este sentido, la aplicación de procedimientos algorítmicos no le resultó una complicación, pero sí la puesta en marcha de una resolución sustentada en el planteo del problema.

La estudiante E tardó bastante en comenzar a resolver, se le notó distraída. Luego de un tiempo, al acercarse uno de los investigadores, manifestó textualmente: “me sale humo de la cabeza profe”, aduciendo falta de tranquilidad en esta etapa inicial de resolución. Se observaron las primeras líneas de organización de su resolución y se pudo percibir que había realizado un esquema. Se le preguntó cómo había comenzado y la estudiante explicó, aunque no utilizando vocabulario matemático, que había aplicado el teorema del seno y había encontrado una distancia. Sin embargo, cuando la situó en el dibujo lo hizo de manera incorrecta. Si bien tenía claro qué procedimientos aplicar, no sabía muy bien para qué lo estaba realizando; incluso manifestó estar insegura de lo que estaba haciendo.

La estudiante D le preguntó a uno de los investigadores, cuando se acercó a su banco, si también debía sacar la distancia que había entre Pablo y el Obelisco, cuestión que estaba explícita en el ítem b del enunciado. Esto puede tener varias interpretaciones: que no leyó completamente el enunciado del problema y solo realizó una lectura superficial de la primera parte que la llevó a "bosquejar" la situación; o, sabiendo que lo debía hacer, necesitaba la confirmación de otro en rol de autoridad, denotando cierta falta de seguridad en ella misma.

La estudiante A, por su parte, le consultó a uno de los investigadores si tomando uno de los triángulos rectángulos podía calcular la altura del Obelisco, aunque mencionó que no sabía cómo; entonces se le destacaron los datos que disponía y se le preguntó qué procedimiento utilizar. La estudiante aludió al teorema del seno -que pudo aplicar sin problemas posteriormente-, aunque manifestó que no sabía que era aplicable a triángulos rectángulos. De este modo se generó un bloqueo al dudar sobre el alcance de la propiedad, hecho que la llevó a consultar, pudiendo sortear rápidamente el inconveniente y seguir con la resolución. Luego, para resolver el ítem b, la estudiante recurrió a las razones trigonométricas, que también podría haber utilizado en el paso anterior. Sucintamente, la estudiante poseía herramientas para resolver, con una organización mental a pulir.

En un momento de la clase, la docente interrumpió la resolución de los estudiantes y realizó el esquema del problema trabajado. Aunque los estudiantes pidieron que no lo haga, diciendo que querían trabajar solos, la profesora manifestó que era para aclarar que no se podía calcular la altura del Obelisco en un solo paso, sino que -como en otras situaciones previas- había que mirar las partes que formaban el triángulo central.

Luego, uno de los investigadores se dirigió al banco de la estudiante C. No había comenzado a resolver y había copiado el esquema que la profesora realizó en el pizarrón. Se le preguntó qué tipo de procedimiento se podía utilizar para calcular la altura del Obelisco y expresó no saber cuál. Tras esto, se la invitó a buscar en la carpeta alguna herramienta que pudiera ser de utilidad en este caso, pero manifestó no tener los apuntes de las últimas clases. Se comenzó a indagar por qué no había completado la carpeta de las clases previas y contestó: "lo que pasa es que tuve que ir al psicólogo". Esta respuesta develó un aspecto de tipo emocional, transversal a los procesos de enseñanza y de aprendizaje. La estudiante se encontraba atravesando una situación personal que influyó en su trayectoria escolar, identificada como una representación mental que exteriorizó con palabras. Esta incidencia dejó claro por qué la estudiante no pudo organizarse mental y emocionalmente para la resolución del problema, y cuáles son sus condiciones personales para afrontar situaciones similares. Este bloqueo de tipo psicológico se amplió luego en la entrevista personal.

Para finalizar el análisis de esta situación, es para destacar que las estudiantes observadas, exceptuando a la estudiante A, necesitaron esperar a la puesta en común para culminar la resolución y establecer el resultado final. Tampoco realizaron la última fase de resolución que persigue comprobar si el resultado obtenido resuelve o no el problema planteado. Por último, si bien todas tuvieron claro qué camino seguir para comenzar a resolver, se produjeron algunos bloqueos iniciales e intermedios que no pudieron sortear sin recurrir la docente o a uno de los investigadores.

5.5. Problema sugerido 1

Este problema fue trabajado en el inicio de una clase que en principio sería de dos horas reloj, pero que luego duró unos minutos menos. El tiempo asignado fue extenso, aproximadamente 70 minutos, ya que la docente prefirió dejarlos trabajar sin tantas ayudas iniciales. Sin embargo, comentó al presentar la actividad que iban a trabajar con problemas y recordó que para triángulos oblicuángulos se utilizan el teorema del seno y del coseno. Luego, indicó que realizaran el problema en cuestión. En general, se percibió que los estudiantes se encontraron sin saber qué hacer, como esperando una ayuda. En particular, las estudiantes D y E se mostraron algo nerviosas, mientras que A se mostró tranquila, aunque al principio, desorientada.

La estudiante E trabajó con un compañero. Uno de los investigadores se acercó y la estudiante manifestó que se podía utilizar el teorema de Pitágoras. Entonces, se le preguntó: “¿se puede utilizar teorema de Pitágoras acá?”. En este primer intento, se notó que la estudiante pensó a la figura como un triángulo rectángulo, sin darse cuenta de que no lo era por tener un ángulo de 135°. En este punto, dio indicios del contenido presente, aunque restaba claridad sobre su contexto de utilización. Más tarde, realizó el siguiente planteo: $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{sen}135°}=\frac{60\mathrm{km}}{\mathrm{senx}}$.

Se pudo observar la presencia de dos incógnitas, que fueron distintas en el problema, pero que la estudiante representó con la misma letra (x), como indicando que fuera la misma. Además, no advirtió este error, incluso cuando uno de los investigadores se lo hizo ver oportunamente. La asociación del problema con la incógnita fue, entonces, parcial.

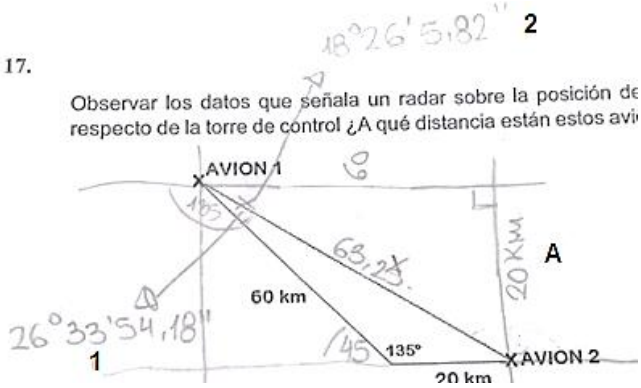

Figura 11. Representaciones sobre el gráfico dado en el problema sugerido 1 (estudiante A).

La docente sugirió, ante el desconcierto de muchos estudiantes, que miraran la figura e intentaran realizar en el dibujo alguna construcción auxiliar. Enfatizó que no consideraran solo el contenido que estaban trabajando (teorema del seno), sino que miraran más allá de él. En este marco, la estudiante A realizó la construcción que se muestra en la Figura 11 sobre el dibujo propuesto, donde recurrió a una construcción auxiliar formando triángulos rectángulos y localizó un ángulo de 135°. Esto dejó ver, y se confirmó por parte de la estudiante, que tuvo presente el contenido previo “ángulos alternos internos entre paralelas”. Asimismo, se detectaron en el dibujo algunas medidas agregadas por la estudiante, como la longitud denominada A, y los ángulos 1 y 2. La amplitud de los ángulos 1 y 2 fue incorrecta, y provino de suponer que la medida A era 20 km. La estudiante plasmó los siguientes pasos de resolución (Figura 12).

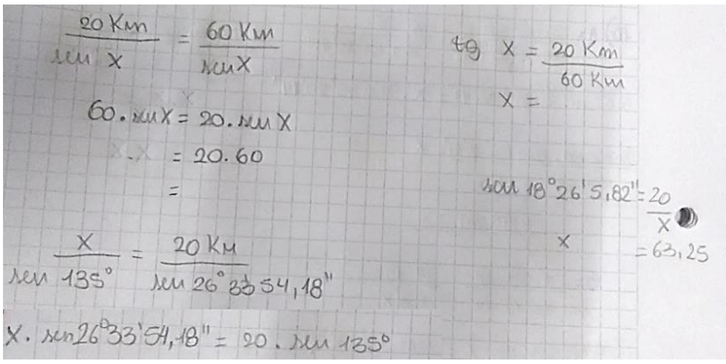

Figura 12. Cálculos en la resolución del problema sugerido 1 (estudiante A).

Se observa que los ángulos auxiliares 1 y 2 fueron calculados para poder aplicar el teorema del seno. Esto puso de manifiesto que, si bien la resolución no es correcta, existió una representación mental, exteriorizada gráfica y algebraicamente, asociada a la necesidad de buscar elementos para la resolución. Además, se produjo una correcta asociación de los datos con la incógnita planteada, ya que todos los esfuerzos de la estudiante estuvieron puestos para hallar la distancia entre los dos aviones y no se evidenció ninguna pérdida de orientación en el desarrollo. Por el contrario, y al igual que la estudiante E, asoció una misma incógnita (x) a dos medidas distintas, pero advirtió que no podía calcularse con ese planteo. Por último, se resalta que la estudiante no realizó la verificación de su resolución y logró advertir sus errores en la instancia de puesta en común.

Pasado un tiempo prudencial, y viendo que en general los estudiantes se encontraron molestos por no poder calcular la incógnita mediante el teorema del seno, la docente realizó un esquema en el pizarrón para guiar a los estudiantes en la resolución. La ayuda buscó que los estudiantes no se estancaran en la figura propuesta, sino que encontraran otras alternativas para resolver. La Figura 13 muestra el dibujo y algunos datos auxiliares plasmados por la docente.

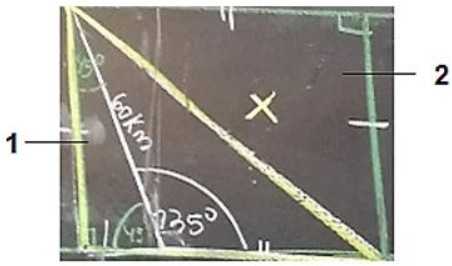

Figura 13. Esquema realizado por la docente en el pizarrón (problema sugerido 1).

Este esquema orientó a los estudiantes, en particular a la estudiante E. Luego uno de los investigadores se acercó y la estudiante le mostró la siguiente resolución (Figura 14).

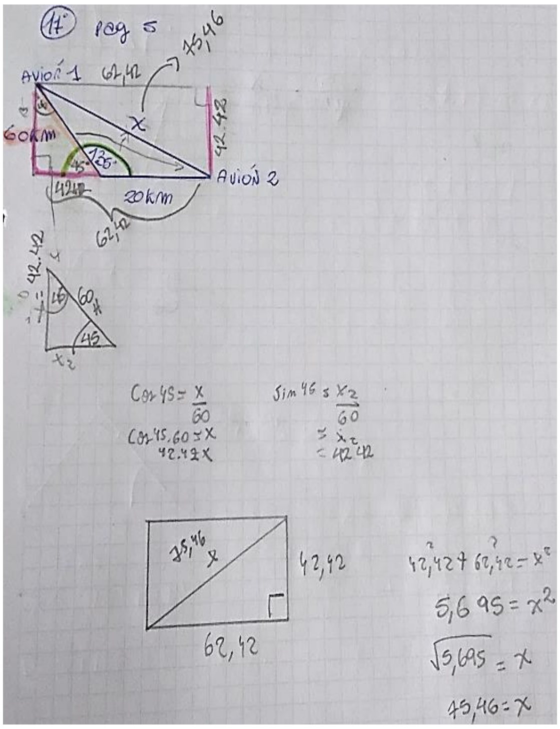

Figura 14. Resolución del problema sugerido 1 (estudiante E).

Se pudo ver que la estudiante necesitó de la construcción realizada por la docente para poder resolver. Esto significa que la representación gráfica del problema a partir de los contenidos previos disponibles fue un obstáculo para ella, pero no permitió opacar su predisposición a resolver, que siempre fue buena en este problema. Fue notable la organización de una representación mental, evidenciada gráficamente con un dibujo, que le permitió apartar del esquema general un triángulo rectángulo con ángulos agudos de 45° e hipotenusa de 60 kilómetros. El uso de las razones seno y coseno le permitió comprobar que los catetos del triángulo eran iguales, lo cual causó asombro en la estudiante, a pesar de haber trabajado en clases previas con las propiedades de los triángulos isósceles. Por último, con similares características que el paso anterior, exterioriza otra representación mental del segundo triángulo rectángulo del esquema general y recurre al teorema de Pitágoras para hallar la medida pedida inicialmente.

En otro orden de trabajo, la estudiante D también tuvo un bloqueo inicial luego de plasmar en su hoja una “réplica” del dibujo impreso en la consigna, con el agregado de la letra “x” (Figura 15).

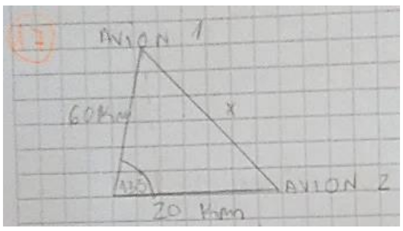

Figura 15. Esquema inicial en la resolución del problema sugerido 1 (estudiante D).

Fue notable la forma en que dibujó el triángulo. A pesar de ser un triángulo obtusángulo, en el esquema lo dibujó como agudo, lo que permitió ver que posiblemente la estudiante tenga solo una representación mental para los ángulos de triángulos: pensados como agudos, a pesar de ser obtusos. Esto responde al concepto de imágenes estereotipadas, entendidas como aquellas que omiten alguna información o característica del objeto a representar, y generan una representación incorrecta de la situación. Específicamente en este problema, se puede considerar que el uso que la estudiante hizo de las imágenes estereotipadas puede deberse a una enseñanza previa deficiente de dibujos en el plano de dos dimensiones (Barrantes et al, 2015). Al igual que la estudiante E, pudo comenzar la resolución (Figura 16) luego de realizado el esquema por parte de la docente.

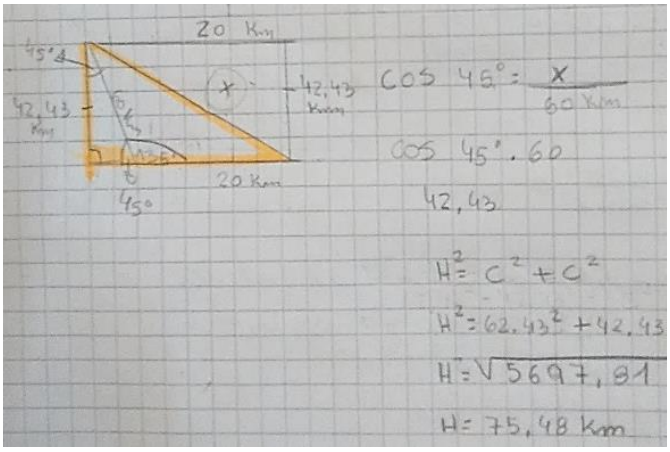

Figura 16. Resolución del problema sugerido 1 (estudiante D).

Esta estudiante recurrió, sin mayores inconvenientes, al uso de las razones trigonométricas, y calculó la incógnita pedida. Sin embargo, se vio que la estudiante llama con la letra "x" no solo a la que pidió el problema, sino a las auxiliares (como por ejemplo la medida calculada de 42,43 km). De todos modos, esto no impidió llegar a calcular la incógnita. Pareciera que, para ella, la exteriorización de un dato incógnita se efectúa solo con esa letra (x).

El estudiante C realizó en su carpeta el esquema que la docente había plasmado en el pizarrón (Figura 17), aunque localizó el ángulo de 45° en otra dirección, formando un cuadrilátero en lugar de un triángulo rectángulo. De este modo, su representación mental de la situación no fue correcta, e incluso que no pudo imaginar la situación adecuadamente. Además, las medidas indicadas en el dibujo fueron aparentemente copiadas y no producto de su resolución. Ante la pregunta de uno de los investigadores acerca de cómo había calculado esas medidas, intentó dar una explicación, pero no había plasmado cálculos que avalen dichas medidas. Durante esta explicación, resulta destacable un resultado obtenido por el estudiante, que al calcular $42{,}43^2$ obtiene 84,86, lo que evidencia que no tiene bien formado el concepto de potencia, ya que multiplica a la base por dos en lugar de hacerlo por sí misma dos veces.

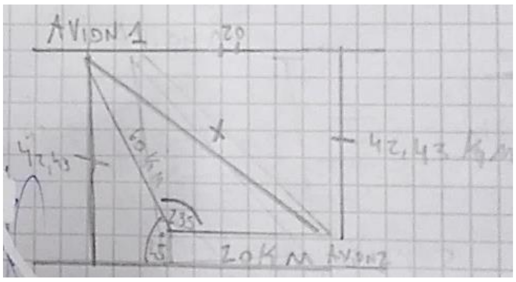

Figura 17. Esquema realizado en la resolución del problema sugerido 1 (estudiante C).

5.6. Problema sugerido 2

La duración de esta actividad fue de 10 minutos y se trabajó en forma individual. En general, se percibió que muchos estudiantes comenzaron a trabajar sin problemas.

La estudiante E realizó en el esquema presentado en la consigna una construcción similar a la del problema anterior, determinando dos triángulos rectángulos adicionales. Calculó los ángulos interiores de los mismos y, a partir de estos, determinó los ángulos internos del triángulo oblicuángulo. Esto puso de manifiesto que la estudiante organizó una representación mental asociando este problema con el precedente, atribuyéndole características similares. Además, mostró una familiarización con el cálculo de ángulos y lo plasmó gráficamente. A partir de estos ángulos, y empleando el teorema del seno, calculó las distancias pedidas. El inconveniente se presentó al calcular la altura del avión, ya que la estudiante trazó correctamente el segmento que representa a la misma, pero no supo en primera instancia cómo calcularlo.

La estudiante evocó una situación trabajada con anterioridad en un triángulo isósceles (Figura 18), pero que no fue compatible con esta en particular. Se detectó, entonces, una representación incorrecta de la situación, pero una correcta identificación de la incógnita del problema, lo que manifestó que el enunciado fue interpretado, pero el plan de resolución resultó fallido. Luego de la puesta en común, la estudiante pudo calcular esta distancia utilizando los triángulos rectángulos auxiliares.

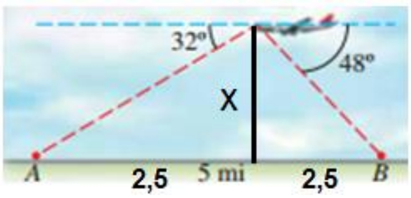

Figura 18. Construcción realizada en el problema sugerido 2 (estudiante E).

La estudiante A, en cambio, utilizó la propiedad de los ángulos alternos internos entre rectas paralelas, y no necesitó, en primera instancia, construir los triángulos auxiliares; pero para calcular la altura, trazó un segmento perpendicular al lado AB por fuera del triángulo, con uno de sus extremos en el punto A y lo utilizó empleando la razón trigonométrica seno. Esto puso en evidencia que trabajó con el problema de manera más fluida, calculando elementos auxiliares únicamente cuando los necesitó, lo que puede deberse al trabajo previo con este tipo de problemas.

En ambas resoluciones se pudo observar que recurrieron a situaciones que les eran conocidas. Pusieron de manifiesto el soporte gráfico como exteriorización de sus representaciones mentales, reforzado con el soporte verbal hablado. Se las notó mejor predispuestas y no presentaron mayores estados de malestar en este problema.

5.7. Problema sugerido 3

Este problema se analizó en base a una observación breve, desarrollada en la etapa final de una clase y duró 10 minutos. Solamente lo resolvió la estudiante A, mientras que las estudiantes D y E mostraron un bloqueo inicial y no pudieron hacerlo. La docente solicitó que miraran bien el dibujo, ya que se trataba de una situación en tres dimensiones.

La resolución de la estudiante A comenzó con una interpretación incorrecta porque supuso que la figura que planteaba el problema era similar a las realizadas hasta el momento, lo que evidenció que no pudo organizar inicialmente en su mente esta situación distinta a las trabajadas y a lo que venían acostumbrados (en dos dimensiones). Se la orientó para que comprendiera el dibujo e inmediatamente comenzó a resolver. Lo primero que realizó fue la descomposición de la figura en triángulos más simples, luego aplicó las razones trigonométricas y posteriormente el teorema del coseno. Con el desarrollo de este problema, se pudo ver que la estudiante no tenía bien formados los conceptos previos de figuras en diferentes planos, ni trabajadas las nociones de geometría en el espacio, pero sí en dos dimensiones.

5.8. Entrevistas individuales

Los estudiantes B y C fueron entrevistados con el fin de profundizar conductas observadas, y así poder ampliarlas y caracterizarlas.

El estudiante B comenzó relatando una situación personal, vivida en el ámbito escolar. Manifestó que fue agredido por un docente en la escuela agraria a la que concurría, que lo obligó a cambiarse de institución y, por consiguiente, a viajar diariamente desde una ciudad a otra para asistir a la nueva escuela. Esta actividad diaria, según comentó, lo lleva a dormir mucho y tener poco tiempo para dedicarle al estudio extra escolar. Ante la pregunta de si en todas las materias manifestaba actitudes negativas para el trabajo en clase, este manifestó que no en todas, que solo no trabaja en aquellas materias donde ya no tiene posibilidades de aprobar y debe rendirlas en examen final, como Matemática. Profundizó que en Matemática le cuestan algunos temas, pero cuando debe prepararse para ir a rendir, lo hace y aprueba -debió rendir Matemática en todos los años anteriores, exceptuando el primero-. Además, señaló que en primer año no tuvieron prácticamente clases por ausencia del docente y esto repercutió en los años posteriores.

El estudiante C compartió con su compañero la realidad de que le cuesta Matemática y que, periódicamente, debe rendirla; aunque presentó mayor predisposición que el estudiante B. Reconoció una trayectoria escolar en Matemática deficiente marcada por su dificultad para entender algunos conceptos y su poca dedicación al estudio, que condiciona el cursado del espacio curricular. Atribuyó mucha importancia a las calificaciones, al punto de considerarlas determinantes de su desenvolvimiento en la escuela. Para él, las materias se dividen por año justamente para rendirlas, obtener determinada calificación y pasar de año. Fue destacable la figura de una persona que lo ayuda con las actividades en Matemática. Esta persona, según se pudo interpretar, cumple un rol materno ante la falta de su verdadera mamá desde la infancia. A este hecho se lo consideró un factor fundamental en la organización emocional que este estudiante experimenta. El estudiante mostró una actitud de vergüenza ante las calificaciones obtenidas y se le preguntó por qué se avergonzaba de tener una nota baja, a lo que contestó: “el uno te condena”. Esta frase resaltó la importancia atribuida a las calificaciones como indicador de su desempeño.

Estas breves conversaciones muestran a un tipo de estudiante que, frente a posibilidades nulas de aprobar la asignatura, se resiste a estudiar y recuperar contenidos, donde todos los esfuerzos que hace se canalizan en “aprobar para pasar”. En sintonía con lo expresado por la docente del curso, se trata de un estudiante marcado por sus experiencias y vivencias anteriores, en Matemática y más generales, que se resiste a mejorar su trayectoria por considerarla perdida.

6. Interpretación desde las categorías de análisis

La Tabla 1 muestra sintéticamente los desempeños estudiantiles en los cuatro problemas propuestos, de acuerdo a las categorías de análisis presentadas en el apartado 3.

La estudiante A tuvo un desempeño destacable en la resolución de los problemas propuestos, pero no estuvo ajena a la presencia de obstáculos en algunas pocas oportunidades. Cuando estos obstáculos aparecieron, se pudo percibir que fue por la falta de algún problema modelo previo o de contenidos que sirvieran de conectores entre lo sabido por la estudiante y la nueva situación (Mondino, 2014). Sin embargo, siempre se mostró segura en sus resoluciones y hasta en ocasiones se la percibió crítica; por ejemplo, al emplear un procedimiento inadecuado advertía el error y lo corregía.

La estudiante D se desempeñó de manera poco favorable y en muchos casos, nula, porque no resolvió los problemas producto de su negación, lo que le produjo bloqueos. Se notó cierta falta de ideas de anclaje como soporte para resolver las nuevas situaciones, evidenciada por la falta de saberes previos necesarios y, en los casos en que se pudo registrar, se percibió una deficiente interpretación de los enunciados. En las ocasiones que sí resolvió, mostró una gran dependencia de la docente o del investigador, quienes debían confirmar o corregir su resolución, denotando también falta de seguridad.

La estudiante E tuvo un desempeño que puede considerarse ascendente ya que, conforme fueron sucediendo las resoluciones, se pudo observar que mejoró su proceder y su actitud, aunque siempre estuvo sujeta a bloqueos que en algunos casos pudo superar y en otros no. El nerviosismo se presentó como actitud recurrente de la estudiante en las resoluciones, producto de su inseguridad. Por otra parte, las interpretaciones de los enunciados fueron en general regulares, en tanto no se vio reflejada en sus resoluciones una lectura y análisis de los mismos, tal como plantea Polya (1989).

La estudiante A mostró buena predisposición, gestos y actitudes acordes a una buena resoluta de problemas, mientras que las otras dos no tuvieron siempre una actitud propensa a aprender, en especial la estudiante D.

Categorías	1	2	3	4
Predisposición para la resolución de problemas	A: Buena D: Mala E: Mala	A: Buena D: Mala E: Regular	A: Buena D: Mala E: Buena	A: Buena D: Regular E: Regular
Gestos y actitudes que se manifiestan cuando se asigna la tarea de resolver un problema	A: Tranquilidad D: Nerviosismo E: Nerviosismo	A: Tranquilidad D: Negación E: Nerviosismo	A: Tranquilidad D: Negación E: Tranquilidad	A: Tranquilidad D: Tranquilidad E: Nerviosismo
Saberes previos para la resolución	A: Disponibles D: Ausentes E: Ausentes	A: Disponibles D: Ausentes E: Escasos	A: Disponibles D: Ausentes E: Escasos	A: Disponibles D: Escasos E: Escasos
Nivel de comprensión que se evidencia con relación al enunciado	A: Bueno D: Deficiente E: Deficiente	A: Bueno D: Deficiente E: Regular	A: Bueno D: No registra E: Regular	A: Regular D: Malo E: Regular
Formas de representación que se utilizan	A: Imagen D: No registra E: No registra	A: Imagen D: No registra E: Imagen	A: Imagen D: No registra E: Imagen y proposición	A: Imagen y proposición D: No registra E: Imagen y proposición
Asociación de datos con incógnita/s del problema	A: Correcta D: No asocia E: No asocia	A: Correcta D: No asocia E: Parcial	A: Correcta D: No asocia E: Correcta	A: Correcta D: No asocia E: Parcial
Confección y ejecución de un plan de resolución	A: Correcta D: No confecciona E: No confecciona	A: Correcta D: No confecciona E: Parcial	A: Correcta D: No confecciona E: Correcta	A: Correcta (con ayuda) D: No confecciona E: Parcial
Revisión de la resolución	A: No revisa D: No revisa E: No revisa	A: No revisa D: No revisa E: No revisa	A: No revisa D: No revisa E: No revisa	A: No revisa D: No revisa E: No revisa

Tabla 1. Desempeño de las estudiantes en los problemas propuestos.

Las representaciones mentales (Johnson-Laird, 1983) más frecuentes estuvieron exteriorizadas por medio de imágenes, en su mayoría, y de proposiciones verbales en algunas ocasiones (Duval, 2016). Estas últimas surgieron como producto de inquietudes que las estudiantes A y E tuvieron en algunos de los problemas. Asimismo, la estudiante A manifestó representaciones asociadas al desglose del problema en partes, aludiendo al concepto de mente computacional, y propuso una resolución a partir de resoluciones más sencillas. Por último, es para destacar que ninguna revisó su resolución, incluso luego de haber llegado a un resultado, y depositaron en la docente la concreción de este paso.

En los problemas sugeridos (Tabla 2), fue menos evidente la utilización de diferentes formas de representación producto de que los problemas ya contenían un dibujo previo; sin embargo, es más profundo el análisis que puede hacerse acerca de la puesta en marcha de un plan de resolución, comprensión del enunciado y evocación de saberes previos.

Categorías	1	2	3
Predisposición para la resolución de problemas	A: Buena D: Regular E: Buena	A: Buena D: Mala E: Buena	A: Buena D: Regular E: Regular
Gestos y actitudes que se manifiestan cuando se asigna la tarea de resolver un problema	A: Tranquilidad D: Nerviosismo E: Tranquilidad	A: Tranquilidad D: Negación E: Tranquilidad	A: Tranquilidad D: Negación E: Negación
Saberes previos para la resolución	A: Disponibles D: Escasos E: Escasos	A: Disponibles D: Ausentes E: Disponibles	A: Escasos D: Ausentes E: Ausentes
Nivel de comprensión que se evidencia con relación al enunciado	A: Bueno D: Regular E: Regular	A: Bueno D: No registra E: Bueno	A: Regular D: No registra E: No registra
Formas de representación que se utilizan	A: Construcción gráfica D: Imagen (estereotipada) E: Construcción gráfica	A: Imagen D: No registra E: Construcción gráfica	A: Proposición D: No registra E: No registra
Asociación de datos con incógnita/s del problema	A: Correcta D: Correcta E: Parcial	A: Correcta D: No asocia E: Correcta	A: Parcial D: No asocia E: No asocia
Confección y ejecución de un plan de resolución	A: Correcta D: Correcta E: Parcial	A: Correcta D: No confecciona E: Parcial	A: Correcta D: No confecciona E: No confecciona
Revisión de la resolución	A: No revisa D: No revisa E: No revisa	A: No revisa D: No revisa E: No revisa	A: No revisa D: No revisa E: No revisa

Tabla 2. Desempeño de las estudiantes en los problemas sugeridos.

La estudiante A mantuvo su perfil de buena resolutora, aunque presentó algunos inconvenientes en el último problema, lo cual pudo deberse a la falta de conocimientos previos en geometría del espacio. No obstante, en los tres problemas mostró una buena comprensión de los enunciados y la puesta en marcha de un plan de resolución. Las representaciones mentales no estuvieron ausentes, ya que, sobre los dibujos ya presentados por el problema, la estudiante realizó construcciones auxiliares e identificó incógnitas secundarias a las del problema, y hasta exteriorizó por medio de proposiciones verbales algunas dificultades que le presentó alguno de los problemas, como el problema propuesto 4.

La estudiante E, por su parte, mejoró bastante en su desempeño, aunque presentó bastantes bloqueos producto de su inseguridad. Se destaca que esta mejoría puede deberse a la presentación del dibujo en el enunciado. Asimismo, y al igual que la estudiante A, realizó en los dos primeros problemas construcciones auxiliares (algunas con ayuda de la docente o del investigador), e identificó y asoció datos e incógnitas principales y auxiliares, aunque a veces de manera parcial.

La estudiante D tuvo una negación casi permanente que, en algunos casos, no le permitió resolver los problemas. Las representaciones mentales que pudieron ser exteriorizadas por la estudiante tuvieron el formato de imágenes, y permitieron ver la réplica de una imagen del problema 1 con características distintas a la original. En este sentido, la representación de la estudiante tuvo el formato de imagen estereotipada, y esto puede deberse a la falta de experiencias previas en construcciones geométricas, mostrando una carencia de saberes previos también.

7. Respuesta a los interrogantes del estudio

Como respuesta a la primera inquietud (*¿Cómo son las representaciones mentales que organiza el estudiante cuando debe afrontar la resolución de un problema de trigonometría?*), se efectúa una caracterización de las representaciones mentales observadas. En la resolución de los problemas propuestos, donde no se proporcionaba una figura o esquema que representara la situación, los estudiantes debieron primero armarse de una figura mental que luego, en algunos casos, pudieron plasmar en una hoja. Los alumnos recurrieron fundamentalmente a la imagen tomada como esquema y a las proposiciones que se manifestaron como preguntas o justificaciones. Respecto de las imágenes externas, en muchos casos no fueron ni reflejaron tal cual lo que planteaba la situación y eso puede deberse a la falta de trabajo previo con representaciones geométricas, incurriendo en imágenes estereotipadas. Además, se percibieron obstáculos intermedios durante la resolución, que muy pocos pudieron superar en ese momento. Algunos fueron propios del problema y tenían que ver con el planteo, pero otros estaban asociados a una representación incorrecta del problema y a la suposición de medidas auxiliares que no se correspondían con lo planteado. Se refuerza, en este sentido, lo observado por Istadi et al (2017) en cuanto a la necesidad de reforzar el trabajo en clase en la instancia de traducción del problema atendiendo a la diversidad de representaciones, principalmente en las fases iniciales de comprensión y planificación (Polya, 1989).

Por su parte, los problemas sugeridos ya poseían el dibujo. De este modo, los estudiantes tuvieron que resolver sin pasar por ese momento previo de realizar un esquema; asimismo, mostraban un bloqueo que a veces se podía superar y otras no. Esta característica, por lo general, está vinculada con la falta de confianza consigo mismo. Otra cuestión destacada en las resoluciones fue la "estereotipada" forma de representar a los símbolos; en particular, a las incógnitas. Si bien la docente había presentado actividades que contenían diferentes datos desconocidos, con la necesidad de incorporar distintas letras para representarlos, los estudiantes solo utilizaron como incógnita a la letra "x". Se atribuye esta asignación a un posible y marcado trabajo previo con ecuaciones, donde prevalece la asociación de las incógnitas con esta letra, sin variedad. No se vieron, al menos en las estudiantes observadas, ideas auxiliares explícitas tendientes a identificar la incógnita del problema; aunque sí, en general, tenían relativamente clara la meta a alcanzar. Acorde a lo planteado por Cetin (2015), las estudiantes se encuentran en un nivel de reconocimiento de los objetos en cuestión (ángulos, lados, figuras) pero restan mayores asociaciones (inter)conceptuales puestas en juego al momento de resolver problemas trigonométricos.

La aplicación de procedimientos y la ejercitación por medio de mecanismos no fueron un inconveniente para este grupo en particular, lo que refuerza la idea de que los estudiantes están más familiarizados con este tipo de tareas que con la resolución de problemas. Más aún, en ningún caso se detuvieron a analizar sus respuestas y a evaluarlas en el contexto del problema planteado (C8). Este paso básicamente fue suprimido debido a la confianza depositada en la docente y a su figura idealizada como la encargada de la puesta en común de las resoluciones.

En relación con los saberes previos disponibles para resolver los problemas (segundo interrogante: *¿Cuáles son los saberes previos a los que recurre el estudiante para abordar este tipo de problemas?*), los estudiantes recurrieron frecuentemente a los contenidos trabajados en clases anteriores, como las razones trigonométricas o los teoremas del seno y del coseno, y en muy raras ocasiones se remitieron a contenidos de otros años. Sin embargo, la excepción a esto la marca el teorema de Pitágoras, que sí se consideró un contenido bien arraigado en los saberes de los estudiantes, pero no así su contexto de aplicación. De esta manera, en problemas que trataban de triángulos oblicuángulos, los estudiantes intentaron aplicar este teorema. Por otro lado, se destaca también la evocación de algunos conceptos y de algunas relaciones matemáticas, como teoremas o fórmulas, que los estudiantes hicieron durante las resoluciones. En algunas ocasiones, los apuros por terminar de resolver hicieron que se equivocaran y eligieran un procedimiento incorrecto. Esta característica se vincula con la proporcionada por la docente del curso acerca de que los estudiantes quieren resolver de un modo rápido, y muchas veces, poco crítico. Entre los contenidos de otros años se pudo observar que uno que emergió en algunos estudiantes fue el de ángulos determinados por rectas paralelas cortados por una transversal, mientras que muchos contenidos previos aparentemente necesarios para resolver los problemas debieron ser introducidos por la docente.

Una conducta muy recurrente, atendiendo a la tercera cuestión (*¿Cuáles y cómo son, desde el punto de vista disciplinar y psicológico, los obstáculos y facilidades que surgen en la resolución de problemas de este tipo?*), que se puede dilucidar a partir de la observación en la fase inicial de las resoluciones de los problemas, es el enojo y la molestia que presentaron los estudiantes que no sabían cómo comenzar a resolver. Esto se convirtió en el aspecto emocional más frecuente, también en momentos donde no procedían de manera correcta y debían revisar su resolución. Se puede concluir que, en base a lo evaluado por la docente acerca del error y a partir de lo manifestado por uno de los estudiantes entrevistados, en este grupo se establece al error como una condena evidente y un indicio de fracaso, y no como elemento constitutivo del aprendizaje. Esto se sustenta en una fuerte presencia de situaciones vividas anteriormente que median entre el estudiante y sus resoluciones, e influyen negativamente. Específicamente, la idea que tienen de las calificaciones como componente fundamental de sus trayectorias escolares, genera una fuerte carga para ellos, al mismo tiempo que para sortearla recurren directamente a rendir la asignatura luego del cursado. Por otro lado, los estados emocionales que son producto de situaciones personales vividas fuera de la escuela, inciden en las trayectorias estudiantiles, y muy especialmente durante la resolución de problemas en Matemática, porque suponen que los estudiantes están focalizados en otras cosas y no en las actividades propuestas.

Para finalizar, en cuanto a la inquietud general del trabajo (*¿Cuáles son las representaciones mentales que organiza un estudiante de cuarto año del nivel secundario cuando resuelve problemas de trigonometría, interpretando el enunciado y buscando resolverlo desde sus saberes previos?*), cabe advertir que tales representaciones mentales están vinculadas, especialmente, a las fases inicial y de desarrollo de un problema, y muy pocas veces a la etapa final. Estas se exteriorizan de manera gráfica mediante un dibujo o esquema durante la fase inicial, y de forma algebraica durante el desarrollo, de manera que la incógnita se representa en general con una misma letra que es, casi siempre, la "x". En este sentido, muy pocos estudiantes distinguen entre incógnitas distintas desde lo representacional. En cuanto a los enunciados, algunos estudiantes evidencian no leerlos de manera completa, y lo manifiestan con la representación parcial de la situación, o realizando preguntas sobre información que se encuentra explícita en el problema. Por último, los saberes previos a los que recurren para resolver los problemas de trigonometría son los más recientes, y en raras ocasiones pertenecen a otro año de la escolaridad, salvo que los evoque la profesora durante una puesta en común.

8. Reflexiones finales

El motor principal que ha motivado este trabajo es la necesidad de mejorar en algunos aspectos las prácticas en aula y esto se supone posible si se cumplen los lineamientos curriculares que presentan la figura de un estudiante con herramientas para enfrentarse a un mundo lleno de problemas. En efecto, un mundo globalizado demanda de personas bien preparadas, críticas y creativas, que no abundan en las aulas del sistema educativo actual. Particularmente, con relación a la trigonometría, es prudente decir que la forma de enseñar el contenido incide en los desempeños estudiantiles, ya que mostraron más seguridad y compromiso en actividades de tipo mecánicas, y mayores deficiencias e inseguridades en la resolución de problemas.

Asimismo, no se pretende que el estudiante llegue completamente dotado de estas herramientas, sino que en la escuela se provoque la necesidad de desarrollarlas y se lo ayuda a formarse como ciudadano capaz de enfrentarse a este mundo que se describe. Al respecto, este trabajo dejó entrever que la figura de estudiante que prevaleció en el caso de estudio es la de uno poco crítico y preparado, tal vez por una deficiente enseñanza en los años anteriores, o la falta de actividades significativas que motiven un aprendizaje significativo, acorde a lo señalado por Moreira (2012).

En muchas ocasiones, la falta de creatividad se debe a una concepción instalada en el estudiante de que debe reproducir lo que el docente hace. Esta representación de la enseñanza y del aprendizaje tiene sus raíces en una trayectoria marcada por una enseñanza de tipo tradicional, con pocas situaciones activas para el estudiante, acarreando una pasividad que se va acentuando en el sistema con el pasar de los años. Esto puede reflejarse, por ejemplo, cuando el estudiante se inhibe por las herramientas que utiliza al resolver problemas. En particular, el uso acrítico de la calculadora lo vuelve dependiente de un resultado, como indican D'Amore y Martini (1997). Puntualmente en este trabajo, el uso de la calculadora fue muy importante para los cálculos auxiliares y se pudo observar esta falencia en la no revisión de los procedimientos y resultados en los diversos problemas. Otra dificultad en la resolución de problemas, y que explicitan Araya y Parraguez (2014), es la falta de saberes previos o la conexión entre contenidos. Este trabajo no fue ajeno a esta circunstancia, en especial cuando se trata de temas de otros años.

La realización de este estudio permitió reafirmar aspectos que median entre el estudiante y los problemas. Se puede concluir que cuando el trabajo que se pretende en el aula es de tipo no tradicional, con resolución autónoma de problemas, se presentan obstáculos de diferentes tipos: emocionales, didácticos, de comprensión de enunciados. Algunas veces estos obstáculos se pueden superar y otras tantas, no. La existencia de muchos obstáculos dificulta el desempeño de los estudiantes que, atravesados por su bagaje personal, ponen resistencia a la resolución de problemas. Este panorama muchas veces conlleva un trabajo rutinario, muy frecuente en el área Matemática.

La falta de sentido que muchos estudiantes le atribuyen a la resolución de problemas en Matemática, puede aflorar de una vasta cantidad de experiencias previas de aparente configuración vinculada al fracaso. Como apreciación final, se comparte que un aprendizaje basado en problemas es posible y, llevado a cabo a tiempo, puede producir muy buenos resultados en los últimos años del nivel secundario, atendiendo a variables cognitivas, emocionales e históricas de cada persona en el marco escolar y más allá de él.

Bibliografía

Araya, G. y Parraguez, M. (2014). Construcciones y mecanismos mentales asociados a las ecuaciones trigonométricas del tipo ab=0. *Unión*, (39), 57-79.

Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*, *9*(2), 107-126.

Caballero, A., Cárdenas, J. y Gómez del Amo, R. (2014). El dominio afectivo en la resolución de problemas matemáticos: una jerarquización de sus descriptores. *INFAD*, *7*(1), 233-246.

Cetin, O. (2015). Students perceptions and development of conceptual understanding regarding trigonometry and trigonometric function. *Educational Research and Reviews*, *10*(3), 338-350.

D'Amore, B. y Martini, B. (1997). Contrato didáctico, modelos mentales y modelos intuitivos en la resolución de problemas escolares típicos. *Números*, *32*, 26-42.

Dirección General de Cultura y Educación de la provincia de Buenos Aires (2010). *Diseño curricular para la Educación Secundaria Ciclo Superior ES4: Matemática*. La Plata: Autor. Recuperado de http://servicios.abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/secundaria/materias_comunes_a_todas_las_orientaciones_de_4anio/matematica_4.pdf.

Duval, R. (2016). Un análisis cognitivo de problemas de comprensión en el aprendizaje de las matemáticas. En R. Duval y A. Sáenz-Ludlow (Eds.). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp.61-94). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Eysenck, M. y Keane, M. (1990). *Cognitive Psychology. A student's handbook*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4ta ed.). México: Mc Graw Hill.

Istadi, T., Kusmayadi, A. y Sujadi, I. (2017). Students' mathematical representations on secondary school in solving trigonometric problems. *Conference Series*, *855*, 1-9.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models. Towards a Cognitive Science of Language, Inference, and Consciousness*. Cambridge: Harvard University Press.

Krulik, S. y Rudnick, J. (1987). *Problem solving: A handbook for teachers* (2da ed.). Boston: Allyn and Bacon.

Meavilla, V. y Oller, A. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales matemáticos en textos matemáticos antiguos. *Números*, *82*, 89-100.

Mellado, V., Blanco, L., Borrachero, A. y Cárdenas, J. (2012). *Las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las ciencias y las Matemáticas. Volumen I*. Badajoz: DEPROFE.

Mondino, G. (2014). Modelos conceptuales y mentales: Elementos para repensar la enseñanza y el aprendizaje. *Enfoques*, *26*(1), 57-78.

Montiel, G. (2013). *Desarrollo del pensamiento trigonométrico*. México: Secretaría de Educación Pública.

Moreira, M. (2012). La Teoría del Aprendizaje Significativo Crítico: un referente para organizar la enseñanza contemporánea. *Unión*, (31), 9-20.

Polya, G. (1989). *Como plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, P. (1986). *Curso de Geometría Métrica. Tomo II*. Madrid: Euler.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu y M. Rodríguez (Comps.). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp.153-174). Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Salinas, N. y Sgreccia, N. (2017). Concepciones docentes acerca de la Resolución de Problemas en la escuela secundaria. *Números*, *94*, 23-45.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo* (6ta ed.). México: Cengage Learning.

Usman, M. y Hussaini, M. (2017). Analysis of Students' Error in Learning of Trigonometry Among Senior Secondary School Students in Zaria Metropolis, Nigeria. *IOSR-JM*, *13*(2), 1-4.

Gonzalo Rodríguez. Se desempeña en el Instituto Superior de Formación Docente y Técnica N° 122 (Pergamino, Buenos Aires, Argentina). Nació el 17 de julio de 1991 en Pergamino (Buenos Aires, Argentina). Posee los títulos de Profesor de Educación Secundaria en Matemática (ISFD 122) y Licenciado en Enseñanza de la Matemática (UTN).
Email: mailto:gonzalo1891@yahoo.com.ar.

Natalia Sgreccia. Se desempeña en la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario (Rosario, Santa Fe, Argentina). Nació el 24 de octubre de 1979 en Las Parejas (Santa Fe, Argentina). Posee los títulos de Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática (UNR), Magíster en Didácticas Específicas mención Matemática (UNL) y Doctora en Humanidades y Artes mención Ciencias de la Educación (UNR).
Email: mailto:nataliasgreccia@gmail.com.