

Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

Paul Teutli Etcheverry

Josip Slisko Ignjatov

(Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México)

Fecha de recepción: 13 de noviembre de 2020

Fecha de aceptación: 13 de abril de 2021

Resumen

El Test de Reflexión Cognitiva (TRC) es un instrumento que mide la capacidad de un individuo para rechazar una respuesta intuitiva pero incorrecta. Esta prueba revela diversas respuestas, además de las correctas e intuitivas. El presente estudio expone un análisis exploratorio de las respuestas y argumentos obtenidos después de aplicar el TRC a 363 estudiantes de nivel medio superior, con edades entre 15 y 19 años. Se encontró que, además de respuestas correctas sustentadas en argumentos válidos, algunas respuestas, a pesar de ser correctas, parten de argumentos incorrectos. Asimismo, se identificaron respuestas que surgen de interpretaciones erróneas del problema, justificaciones incoherentes, errores aritméticos o algebraicos o ligadas a la concepción matemática del “contrato didáctico”.

Palabras clave

Test de Reflexión Cognitiva, argumentación, errores, contrato didáctico.

Title

Cognitive Reflection Test: the various answers and arguments that reveal high school students

Abstract

The Cognitive Reflection Test (CRT) is an instrument that measures the ability of an individual to reject an intuitive but incorrect answer. This test reveals a variety of answers in addition to the correct and intuitive ones. This study presents an exploratory analysis of the responses and arguments obtained after applying the CRT to 363 upper secondary level students, aged between 15 and 19 years. It was found that, in addition to correct answers supported by valid arguments, some answers, despite being correct, start from incorrect arguments. Likewise, responses were identified that arise from erroneous interpretations of the problem, incoherent justifications, arithmetic or algebraic errors or linked to the mathematical conception of the “didactic contract”.

Keywords

Cognitive Reflection Test, argumentation, mistakes, didactic contract.

1. Introducción

Los procesos cognitivos implican la manifestación dinámica de la mente, de la cognición, sistema encargado de la construcción y procesamiento de la información que comprende obtener y asimilar el conocimiento (González y León, 2013). Kahneman (2011) ha resaltado el contraste entre dos tipos de procesos cognitivos: aquellos ejecutados rápidamente, con poca atención o deliberación y aquellos que



Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

P. Teutli Etcheverry, J. Slisko Ignjatoy

requieren mayor atención y tiempo de análisis. Estos procesos han sido identificados como: sistema de pensamiento 1 o intuitivo y sistema de pensamiento 2 o reflexivo (Stanovich y West, 2000).

De acuerdo con Frederick (2005), distinguir que el rostro de la persona que ingresa al aula pertenece al profesor de matemáticas, implica el sistema de pensamiento 1, el cual ocurre instantáneamente y sin esfuerzo. Contrariamente, encontrar la raíz cuadrada de 14863 con dos decimales sin utilizar calculadora, involucra al sistema de pensamiento 2, el cual implica operaciones mentales que requieren esfuerzo, concentración y la ejecución de las reglas aprendidas. Asimismo, el sistema de pensamiento 2 permite identificar y corregir los errores generados al emplear el sistema de pensamiento 1; por tanto, ambos sistemas coexisten e interactúan frecuentemente (Kahneman, Lovallo y Sibony, 2011; citado en Barón y Rotundo, 2018).

Un instrumento utilizado frecuentemente para evaluar las diferencias individuales en los procesos cognitivos intuitivo y reflexivo es el Test de Reflexión Cognitiva (TRC) (CRT por sus siglas en inglés) de Frederick (2005). Tal instrumento detecta el procesamiento de información que predice una serie de rasgos de toma de decisiones: el sesgo de creencia y la necesidad de cognición (Thomson y Oppenheimer, 2016). El sesgo de creencia surge cuando pensamos que la conclusión es correcta, determinando como válido un argumento incorrecto desde el punto de vista lógico (Evans, Barston y Pollard, 1983). Por su parte, la necesidad de cognición hace referencia a la estimulación de un individuo hacia la actividad de pensar. Aquellas personas con alta necesidad de cognición ostentan una fuerte motivación para realizar actividades mentales, lo que implica buscar información y pensar detenidamente en ella (Cacioppo, Petty y Kao, 1984; citado en Briñol, Becerra, Díaz, Valle, Horcajo y Gallardo, 2005).

El TRC es una prueba de lápiz y papel que resulta de gran interés ya que cada uno de sus elementos revela una respuesta rápida o intuitiva pero incorrecta, sobre la cual los participantes deben reflexionar para desecharla (Pennycook, Cheyne, Koehler y Fugelsang, 2016). La respuesta intuitiva es rechazada o no, dependiendo del nivel de reflexión cognitiva del encuestado (Thomson y Oppenheimer, 2016). Se considera como “pensador rápido” al sujeto que obtiene cero puntos (bajo nivel de reflexión cognitiva) y “pensador lento” a quien logra acertar a todas las respuestas (alto nivel de reflexión cognitiva).

La propuesta original del TRC consta de tres problemas (Frederick, 2005) y a partir de ella, se han realizado estudios que utilizan instrumentos con más ítems. Primi, Morsanyi, Chiesi, Donati y Hamilton (2016) ofrecen una propuesta alternativa, denominada CRT-Long, en la cual, de las preguntas incluidas, la mayoría se basa en la escala de prueba de reflexión cognitiva más larga de Frederick (2005) y el resto, se retoman de otros autores. Toplak, West y Stanovich (2014) establecen una propuesta de un instrumento de 7 ítems en la que incluyen cuatro preguntas más. Por su parte, Thomson y Oppenheimer (2016) proponen un conjunto de cuatro problemas, análogo al CRT original, denominado CRT-2.

Debido a que el TRC provoca determinadas respuestas rápidas o "intuitivas", se pueden distinguir dos aspectos fundamentales. En primer lugar, entre todas las posibles respuestas incorrectas que los resolutores podrían dar, predominan las respuestas intuitivas. En segundo lugar, entre los que respondieron correctamente, a menudo se consideró la respuesta intuitiva como primera opción (Frederick, 2005). Por tanto, investigadores como Thomson y Oppenheimer (2016) y Pennycook et al. (2016) han establecido tres categorías de respuestas para el TRC: errores intuitivos, errores no intuitivos y respuestas correctas no intuitivas.

Distintos estudios han aplicado el TRC con diversos propósitos. Entre los cuales, se han utilizado versiones del TRC con preguntas de respuesta abierta (p. ej. Johnson, Tubau y De Neys, 2016; Toplak et al., 2014) y con preguntas de opción múltiple (p. ej. Morsanyi, Busdragi y Primi, 2014; Sirota y Juanchich, 2018). En estas últimas, según la cantidad de opciones a elegir, se incluyen la respuesta correcta, la respuesta rápida o intuitiva y algunas otras respuestas incorrectas. Sin embargo, una diferencia importante del presente estudio con los trabajos citados es que, en este, se presentan los argumentos que los participantes otorgan con la finalidad de justificar sus respuestas.

De tal manera, el propósito de esta investigación consistió en analizar los argumentos que dan los participantes a las distintas respuestas del TRC y si tales argumentos parten de un razonamiento válido, especialmente si las respuestas no son correctas. Lo anterior considerando que un argumento es un enunciado al que recurre un individuo para validar algo y convencer a otros (Juárez, Hernández y Slisko, 2014).

2. Método

2.1. Tipo de estudio y participantes

El presente estudio es cualitativo de tipo interpretativo exploratorio (Hernández, Fernández y Baptista, 2010), lo que implica comprender la perspectiva de los participantes y profundizar en sus representaciones y opiniones. La muestra se eligió por conveniencia, ya que la investigación consistió en casos disponibles a los cuales se tuvo acceso. Asimismo, de acuerdo con Hernández et al. (2010) los resultados se aplican nada más a la muestra en sí o a muestras similares en tiempo y lugar. No son generalizables a una población.

Participaron 363 estudiantes de bachillerato en México (de grado 10 a grado 12), con edades entre 15 y 19 años, de los cuales 205 (54% mujeres y 46% hombres) cursaban el segundo semestre (grado 10) y 158 (59% mujeres y 41% hombres) el quinto semestre (grado 12) del ciclo escolar 2018-2019. Pertenecen a una escuela pública del municipio de Tepeaca de Negrete, Puebla, el cual se localiza a 35 km de la Ciudad de Puebla, México. Tepeaca es considerado una región de tipo urbano que colinda con municipios de marginación media, alta y muy alta. Por tanto, los participantes cuentan con características socioeconómicas diversas.

2.2. Instrumento y procedimiento

Se empleó la versión de 7 ítems del TRC (Toplak et al., 2014), de la cual se aplicaron los ítems 1 al 6. El ítem 7 fue omitido porque su contexto (inversión bursátil) se consideró ajeno a la realidad socioeconómica de los participantes. Los primeros tres ítems corresponden al TRC original de Frederick (2005). Los ítems 4 y 5, fueron proporcionados por Frederick a los autores de la propuesta y, el sexto, fue una adaptación de Dominowski (1994; ver Gilhooly y Murphy, 2005; citado en Toplak et al., 2014). En seguida se presentan los seis ítems, además de sus correspondientes respuestas correcta e incorrecta intuitiva. Esto con la finalidad de que el lector identifique las principales respuestas generadas en la prueba, aunque más adelante se muestran otras respuestas incorrectas, además de la respuesta intuitiva.



1. Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota? (Respuesta intuitiva: 0.10 euros, respuesta correcta: 0.05 euros).
2. Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas? (Respuesta intuitiva: 100 minutos, Respuesta correcta: 5 minutos).
3. En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago? (Respuesta intuitiva: 24 días, respuesta correcta: 47 días).
4. Iván puede beber un barril de agua en 6 días y María puede beber el mismo barril de agua en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en beber tal barril de agua juntos? (Respuesta intuitiva: 9 días, respuesta correcta: 4 días).
5. Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja en la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase? (Respuesta intuitiva: 30 estudiantes, respuesta correcta: 29 estudiantes).
6. Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logró obtener? (Respuesta intuitiva: 10 pesos, respuesta correcta: 20 pesos).

El instrumento fue presentado a los participantes a manera de pregunta abierta. Se aplicó en el salón de clases en un lapso de 40 minutos, puesto que, además de la respuesta, se solicitó una justificación a la misma ya fuera con palabras, dibujos, tablas o lo que los estudiantes consideraran pertinente. Lo anterior con el propósito de analizar los argumentos expuestos y contrastarlos con las respuestas proporcionadas. Asimismo, previamente se informó a los estudiantes que los resultados no formarían parte de su calificación. Además, una vez entregada la prueba, se les cuestionó si anteriormente habían tenido contacto con alguno de los problemas del TRC, a lo que ningún estudiante dio una respuesta afirmativa. Esto debido a que, en otros estudios, algunos individuos enfrentados al TRC habían sido expuestos previamente a una o varias preguntas. Lo cual, podría implicar un sesgo en las respuestas proporcionadas (Thomson y Oppenheimer, 2016).

Las respuestas obtenidas se clasificaron, según el criterio de Thomson y Oppenheimer (2016) y Pennycook et al. (2016), en correctas e incorrectas. Asimismo, entre estas últimas, se consideraron las respuestas intuitivas, además de otras respuestas incorrectas. Por cada respuesta proporcionada se identificaron los argumentos más significativos, procurando abarcar la diversidad de respuestas y argumentos generados en la prueba. Es preciso señalar que, cada argumento se acompaña de una clave que identifica al estudiante que lo proporcionó; por mencionar dos ejemplos, la etiqueta E1 2A corresponde al estudiante 1 de segundo semestre grupo A, la etiqueta E23 5B, corresponde al estudiante 23 del quinto semestre grupo B.

3. Resultados

Se obtuvo un concentrado aproximado de 2000 respuestas, las cuales se clasificaron acorde con el criterio mencionado. Los estudiantes de segundo semestre obtuvieron un promedio de 0.43 aciertos con una desviación estándar de 0.6 y los de quinto semestre alcanzaron un promedio de 0.7 aciertos con

una desviación estándar de 0.9 (Etcheverry, Ignjatov y de Lourdes Juárez, 2020). La Tabla 1 presenta el total de respuestas correctas por cada pregunta de la prueba.

Grupos	Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Pregunta 4	Pregunta 5	Pregunta 6
Segundo	1 (0,3%)	6 (1,7%)	4 (1,1%)	8 (2,2%)	10 (2,8%)	57 (15,7%)
Quinto	8 (2,2%)	37 (10,2%)	16 (4,4%)	20 (5,5%)	7 (1,9%)	21 (5,8%)
Total	9 (2,5%)	43 (11,9%)	20 (5,5%)	28 (7,7%)	17 (4,7%)	78 (21,5%)

Tabla 1. Total de respuestas correctas del TRC en ambos semestres.

Nota: En esta y en las tablas subsecuentes los porcentajes han sido calculados sobre el total de participantes.

3.1. Pregunta 1

Una raqueta y una pelota cuestan 1.10 euros en total. La raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota. ¿Cuánto cuesta la pelota?

La Tabla 2 muestra el concentrado de respuestas obtenidas en la pregunta 1 del TRC.

Grupos	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas				No contestó	Total
		Intuitiva	Otras				
			10	0.5	Restantes		
Segundo	1 (0,3%)	135 (37,2%)	26 (7,2%)	4 (1,1%)	33 (9,1%)	6 (1,7%)	205 (56,5%)
Quinto	8 (2,2%)	84 (23,1%)	18 (5,0%)	17 (4,7 %)	16 (4,4%)	15 (4,1%)	158 (43,5%)
Total	9 (2,5%)	219 (60,3%)	44 (12,1%)	21 (5,8%)	49 (13,5%)	21 (5,8%)	363 (100%)

Tabla 2. Respuestas al problema 1 del TRC.

3.1.1 Respuesta correcta: 0.05 euros

Solamente el 2,5 % de todos los estudiantes obtuvo la respuesta correcta, de los cuales presentamos algunos argumentos. Aclaremos que, de aquí en adelante, se han corregido ortográficamente ciertas palabras en los argumentos presentados por los participantes, con el fin de posibilitar una mejor lectura del texto.



E5 2D: Porque al responder 10 centavos es un error, la raqueta cuesta 1.00 euro más que la pelota, lo que quiere decir que no costará un dólar más, tendría el mismo valor es decir 0.05 centavos.

E34 5C: Porque si fuese .10 al sumarle 1.10 euros serían 1.20 euros ya que dice un euro más que la pelota, no solo un euro. $0.05 + 1.05 = 1.10$

E40 5C: Porque al restarle 1 euro a lo que cuesta quedan 0.10 euros y si este lo dividimos a la mitad queda 0.05 y eso es lo que cuesta, ya que si sumamos 1.05 más 0.05 el resultado es 1.10

Si bien, el estudiante E5 2D fue el único de segundo semestre que proporcionó la respuesta correcta, su argumento es inconsistente. Reconoce que 0.10 euros es una respuesta incorrecta y que el valor de la raqueta debe ser mayor a 1.00 euro. No obstante, confunde dólares con euros. Además, aunque identifica que el resultado es 0.05, no percibe que, al expresarlo así, la respuesta debería ser en euros, no en centavos: “*tendría el mismo valor es decir 0.05 centavos*”.

Por su parte, los estudiantes de quinto semestre que contestaron correctamente identificaron que la diferencia entre ambos precios es de un euro y no que el precio de la pelota es la décima parte del precio de la raqueta. Sin embargo, no todos presentaron argumentos confiables. El estudiante E1 5A intentó resolver el problema mediante el planteamiento de una ecuación, lo cual muy pocos hicieron. No obstante, su procedimiento es incorrecto. Como se observa en la Figura 1, al plantear la ecuación, considera a “x” e “y” como las incógnitas que representan el precio de la raqueta y la pelota. Sin embargo, no advierte que el uso de dos incógnitas es innecesario puesto que ambos precios están relacionados. Además, tal ecuación no es posible resolver ya que consta de dos incógnitas. Al final, aparentemente, obtiene la respuesta correcta, pero con errores en el procedimiento. De hecho, concluye que tanto la raqueta como la pelota cuestan lo mismo (0.05 euros).

Raqueta x
Pelota y
 $(x + 1.00) + y = 1.10$
 $x + 1.00 + y = 1.10$
 $x + y = 1.10 - 1.00$
 $x + y = .10$
 $x = .05 \quad y = .05$

$(.05 + 1.00) + .05 = 1.10$
 $(1.05) + .05 = 1.10$
 $1.10 = 1.10$
comprobación

Figura 1. Planteamiento algebraico y solución del problema 1: E1 5A.

Asimismo, destacan algunos estudiantes que identificaron a 0.10 como una respuesta incorrecta: “...si fuese .10 al sumarle 1.10 euros serían 1.20 euros...” (E34 5C), “Porque al responder 10 centavos es un error...” (E5 2D). De hecho, como lo afirma Frederick (2005), es muy probable que inicialmente, hayan considerado tal respuesta como una posible opción.

3.1.2 Respuesta intuitiva (incorrecta): 0.10 euros

Aproximadamente, el 60% de los participantes proporcionó esta respuesta, reconocida como la principal respuesta incorrecta o intuitiva del problema 1 del TRC (Frederick, 2005). En seguida, se muestran algunos argumentos.

*E22 2B: Porque es la décima parte de la raqueta, se quita lo de la raqueta y solo queda eso.
E8 2D: Siento que si en total por ambas es 1.10 y la raqueta cuesta 1 euro más, sería absurdo o muy barato una pelota de 0.10 euros.
E11 5A: Solo tomé en cuenta que por la raqueta y la pelota son en total 1.10 euros y si la raqueta cuesta 1 euro más que la pelota el sobrante son los otros 0.10 euros.*

De este grupo de estudiantes, la mayoría separó el costo de la raqueta y la pelota, no advirtiendo que la diferencia entre 1 euro y 0.10 euros no es 1, sino 0.9. De hecho, una parte fundamental del problema y que muchos no perciben es que “la raqueta cuesta un euro más”. Asimismo, destaca el comentario del participante E8 2D, quien, señala como “absurdo” el costo de la pelota. Al respecto, Palm (2006) establece que, la investigación ha realizado fuertes críticas basadas en diferentes experiencias empíricas acerca del impacto que tiene la falta de autenticidad de las tareas propuestas en el contexto escolar.

3.1.3 Respuestas incorrectas

3.1.3.1 Respuesta: 10 euros

Presentada por el 12,1 % de los participantes, a continuación, se muestran algunos argumentos.

*E40 2D: Porque en la pregunta dice que por las dos son 1.10 euros, pero si la raqueta cuesta un euro más, sería 1 y entonces la pelota cuesta 10.
E1 5B: Porque la raqueta cuesta un euro más y juntos cuestan 1.10 euros. Por lo tanto, quedan 10 y eso es lo que cuesta la pelota: $1.10 - 1.00 = 10$ euros.*

Este grupo de estudiantes exhibe un razonamiento análogo a quienes respondieron 0.10, separando el euro de los 10 centavos. No obstante, además de responder intuitivamente, indican que el precio de la pelota es de 10 euros, mas no de 0.10 euros. Probablemente, no identificaron que la respuesta se solicitó en euros. Otra posibilidad es el haber cometido un error aritmético, como así lo muestra el participante E1 5B: “ $1.10 - 1.00 = 10$ euros”

3.1.3.2 Respuesta: 0.5 euros

Esta respuesta fue obtenida por el 5,8 % de los participantes, mayormente de quinto semestre. No obstante, la hemos acentuado debido a la implicación de los argumentos proporcionados.

*E44 2C: Primero le resté 1.10 menos 1.00 y ya después el resultado que me salga lo divido en 2 que son la raqueta y la pelota y me sale que la pelota cuesta 0.5 euros.
E23 5D: Utilizando parte de la lógica. Pues la cantidad de euros en total que pagó (1.10) le resté el (1.00) que estaba de más, por lo que me sobró 0.10 que dividí entre 2 es decir el precio de la pelota y la raqueta.*

De inicio, se identifica un enfoque adecuado del problema. Obsérvese que los estudiantes reconocen el hecho de dividir 0.10 por 2 para obtener la respuesta solicitada. Sin embargo, al realizar la operación, cometen un error aritmético, dando como respuesta 0.5 euros en lugar de 0.05.



3.1.3.3 Otras respuestas incorrectas

Se encontraron respuestas, menos frecuentes, derivadas de interpretaciones incorrectas del problema. Por ejemplo, el estudiante E37 5A dio como respuesta 2.10, argumentando lo siguiente: “*Sólo sumé $1.10 + 1.00 = 2.10$ y ya me dio el resultado*”. Es posible que haya identificado la diferencia de un euro entre la raqueta y la pelota. Sin embargo, no advirtió que la cantidad proporcionada (1.10 euros) ya contemplaba el precio de ambos. Por otra parte, el estudiante E37 2B, dio como respuesta 0.54 euros, comentando: “*Lo único que se tiene que hacer es sacar la mitad y quitar un euro a la mitad de la pelota y ponérselo a la raqueta*”. Al parecer, trata de adecuar los costos según lo indicado en el problema. No obstante, después de obtener la mitad (0.55) de 1.10, intenta ajustar el euro de diferencia, aunque la cantidad que emplea es un centavo de euro. Finalmente, concluye que la raqueta cuesta 0.56 y la pelota 0.54 euros.

3.2 Pregunta 2

Si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, ¿cuánto tardarán 100 máquinas en fabricar 100 piezas?

La Tabla 3 muestra los resultados obtenidos en la segunda pregunta del TRC.

Grupos	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas					No contestó	Total
		Intuitiva	Otras					
	5	100	20	500	1	Restantes		
Segundo	6 (1,7%)	166 (45,7%)	11 (3%)	6 (1,7%)	4 (1,1%)	8 (2,2%)	4 (1,1%)	205 (56,5%)
Quinto	37 (10,2%)	80 (22%)	4 (1,1%)	7 (2%)	6 (1,7%)	12 (3,3%)	12 (3,3%)	158 (43,5%)
Total	43 (11,9%)	246 (67,8%)	15 (4,1%)	13 (3,6%)	10 (2,8%)	20 (5,5%)	16 (4,4%)	363 (100%)

Tabla 3. Respuestas al problema 2 del TRC.

3.2.1 Respuesta correcta: 5 minutos

Del total de participantes, 12% aproximadamente, obtuvo la respuesta correcta. De los cuales, presentamos algunos argumentos.

E48 2B: Porque cada máquina produce 1 pieza en 5 minutos, 5 máquinas producen 5 piezas en 5 minutos, 100 máquinas producen 100 piezas en 5 minutos.
E38 5D: Porque una máquina tarda 5 minutos en fabricar 1 entonces por lógica 100 máquinas hacían 100 piezas en 5 minutos.

Quienes dieron esta respuesta, acertadamente identificaron que cada máquina produce una pieza en cinco minutos, independientemente de la cantidad de máquinas que trabajen juntas. Esto implica que las máquinas trabajan simultáneamente, es decir, todas en un mismo lapso de tiempo.

3.2.2 Respuesta intuitiva (incorrecta): 100 minutos

El 67,8% de los estudiantes dio tal respuesta, reafirmando la como la respuesta intuitiva o incorrecta más frecuente del problema 2 (Frederick, 2005). En seguida se muestran algunos argumentos.

E12 2C: Pues es fácil solo es cosa de pensar, ya que cada máquina por un minuto hace una sola pieza y pues como son 100 máquinas tardarían 100 minutos en hacer 100 piezas.

E13 5C: Porque si 5 máquinas tardan 5 minutos en fabricar 5 piezas, quiere decir que 1 máquina tarda 1 minuto en fabricar 1 pieza, por lógica tardarán 100 minutos en fabricar 100 piezas.

De acuerdo con los argumentos de la mayoría de los estudiantes, observamos un enfoque secuencial del proceso. Esto implica suponer que cada máquina tarda 1 minuto en producir 1 pieza, es decir, que en el primer minuto trabaja la primera máquina, en el segundo minuto trabaja la siguiente máquina y así sucesivamente (ver Figura 2).

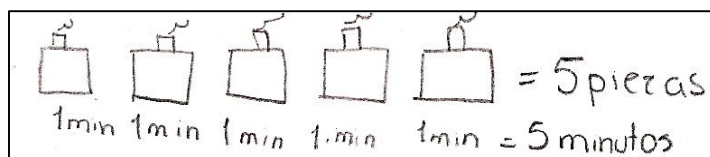


Figura 2. Interpretación secuencial del problema 2: E34 2B.

Por otra parte, identificamos argumentos de alumnos que, a pesar de no responder correctamente, su razonamiento inicial es correcto. Es el caso del estudiante E49 2D que comenta: “Cada máquina hace 1 piezas en 5 minutos”. Si bien, distingue que cada máquina realiza una pieza en 5 minutos (enfoque simultáneo), al final, asume que al trabajar todas juntas tardarán 100 minutos (enfoque secuencial).

3.2.3 Respuestas incorrectas

3.2.3.1 Respuesta: 20 minutos

E18 2C: Primero si dividimos las 100 máquinas entre 5 minutos dan como resultado 20 minutos y después multiplicamos 20 minutos x 5 que dan 100 piezas.

3.2.3.2 Respuesta: 500 minutos

E28 2D: Multipliqué 5 x 100 = 500.

El 7,7% de los participantes obtuvo estas respuestas, entre las cuales advertimos la presencia del “contrato didáctico” (ver Brousseau, 1998 y D’Amore, 2011). Eso implica que los estudiantes se limitan a utilizar los datos proporcionados en el problema y simplemente realizan alguna operación matemática sin un sustento o justificación válida.



3.2.3.3 Respuesta: 1 minuto

E7 5B: Yo considero que en un minuto ya que cada máquina utiliza un minuto para fabricar una pieza, entonces si tomamos en cuenta eso las 100 máquinas en un minuto fabrican las 100 piezas.

Aunque esta respuesta fue proporcionada por el 2,8% de los estudiantes, llama la atención debido a que, al igual que en casos anteriores, convergen dos enfoques. Inicialmente perciben el problema de manera secuencial, al responder que cada máquina demora un minuto en fabricar una pieza. Pero, al analizar el tiempo empleado por las 100 máquinas, la perspectiva cambia a un enfoque simultáneo, ya que asumen que las cien máquinas tardan un minuto trabajando al mismo tiempo.

3.2.3.4 Otras respuestas incorrectas

Además de las respuestas anteriores, hubo otras menos frecuentes, entre las cuales, nuevamente, advertimos la influencia del “contrato didáctico” (Brousseau, 1998; D’Amore, 2011). Es el caso de aquellos que dieron como respuesta 15 minutos, argumentando: “Porque juntando los números $5 + 5 + 5 = 15$ ” (E40 2B), “Solo sumé las máquinas, los minutos y las piezas...” (E15 5A). O, del estudiante E14 2A que dio como respuesta 25 minutos: “Pues solo multipliqué $5 \times 5 = 25$...”.

3.3 Pregunta 3

En un lago hay una zona cubierta de lirios. El área de lirios se hace el doble de grande cada día. Si el área de lirios tarda 48 días en cubrir el lago entero, ¿cuántos días tardarán los lirios en cubrir la mitad del lago?

La Tabla 4, muestra los resultados obtenidos en la tercera pregunta del TRC.

Grupos	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas					No contestó	Total
		Intuitiva	Otras					
	47	24	12	48	96	Restantes		
Segundo	4 (1,1%)	173 (47,7%)	6 (1,7%)	3 (0,8%)	2 (0,6%)	14 (3,9%)	5 (1,4%)	205 (56,5%)
Quinto	16 (4,4%)	88 (24,2%)	18 (5%)	3 (0,8%)	3 (0,8%)	13 (3,6%)	17 (4,7%)	158 (43,5%)
Total	20 (5,5%)	261 (71,9%)	24 (6,6%)	6 (1,7%)	5 (1,4%)	27 (7,4%)	22 (6,1%)	363 (100%)

Tabla 4. Respuestas del problema 3 del TRC.

3.3.1 Respuesta correcta: 47 días

Del total de estudiantes, el 5,5% ofreció tal respuesta, encontrando argumentos como los siguientes.

E48 2B: Si en un día el área de lirios se hace le doble de grande que en el anterior entonces la mitad sería un día anterior al que cubrió entero el lago.
E23 5D: Pues el lago entero se cubría en 48 días, pero cada día se duplica el área, entonces 1 día antes, es decir día 47 se encontraba a la mitad y al día 48 se duplicó formando el área total.

Este conjunto de estudiantes logró evadir la “trampa matemática” que intuitivamente lleva a dividir los 48 días a la mitad para conocer el tiempo que tardan los lirios en cubrir la mitad del lago. De tal modo, identificaron que un día antes (día 47), la mitad del lago se encuentra cubierta, ya que al día siguiente (día 48) se cubre por completo (ver Figura 3), puesto que el área se duplica cada día.

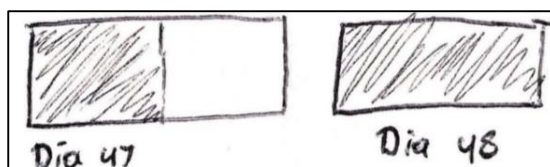


Figura 3. Representación del lago cubierto por lirios: E48 2B.

3.3.2 Respuesta intuitiva (incorrecta): 24 días

Siendo la respuesta intuitiva o incorrecta más frecuente del problema 3 (Frederick, 2005), presentándola el 71,9 % de los participantes, se exponen algunos argumentos.

E46 2B: En 48 días los lirios cubren todo el lago. Le tendremos que sacar la mitad de 48 para saber cuántos días se cubre la mitad del lago con lirios. $48/2=24$.
E32 5A: Dividí el número de días que tardan los lirios para cubrir el lago por completo (48) entre dos para obtener la mitad de lirios que cubrirían la mitad del lago.

La mayoría de los participantes dio como respuesta 24 días, sin advertir que, al duplicarse la cantidad de lirios, un día antes (día 47) el lago se encuentra cubierto a la mitad. De hecho, confunden los lirios que hay en el lago con los días que tarda en cubrirse su área (ver Figura 4).

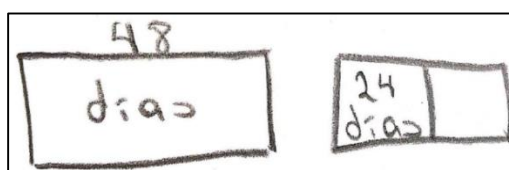


Figura 4. Representación del lago cubierto por lirios: E32 2C.

3.3.3 Respuestas incorrectas

3.3.3.1 Respuesta: 12 días

E52 2B: Porque si los lirios tardan 48 días para cubrirlo todo y si dice que cada día es el doble. Pues la mitad de 48 es 24 y si lo dividimos es 12 y esa es la respuesta.
E32 5D: Dividiendo por partes la numeración por cuartos y medios.

Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

P. Teutli Etcheverry, J. Slisko Ignjatoy

Esta respuesta resulta interesante, puesto que la obtuvo una cantidad significativa de estudiantes (6,6%). Es así que, a partir de los argumentos presentados, nuevamente se percibe la idea intuitiva de los estudiantes de dividir los días a la mitad. Sin embargo, además de obtener la mitad de 48 días, consideraron que a 24 días tuvo que antecederle su mitad, que corresponde a 12 días. Posiblemente, asumieron que la superficie se cubre por partes; la primera en 12 días (un cuarto), la segunda en 24 días (la mitad) y la superficie total en 48 días (ver Figura 5). Tal como lo afirma el participante E32 5D.

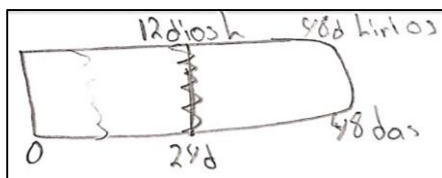


Figura 5. Representación del lago cubierto por lirios: E33 5B.

3.3.3.2 Respuesta: 48 días

E12 5A: Si el área de lirios se hace el doble de grande entonces ya son 96 días en cubrir el lago entero entonces la mitad se cubre en 48 días.

3.3.3.3 Respuesta: 96 días

E25 5A: Multiplicando los días que tarda por el doble de grande que se hace cada día.

El 3,1% de los estudiantes contempló alguna de estas respuestas. Al analizar los argumentos, se percibe un enfoque similar a quienes confunden la cantidad de lirios con los días que tarda en cubrirse el lago. No obstante, este grupo de estudiantes consideró que el lago se cubre por completo a los 96 días y, por tanto, suponen que 48 días corresponden a la mitad. Aunque, se distinguen dos interpretaciones, quienes respondieron 48 días, asumieron que debían obtener la mitad de 96; los que contestaron 96, consideraron como respuesta la cantidad total de días.

3.3.3.4 Otras respuestas incorrectas

Como en casos anteriores, observamos respuestas derivadas de interpretaciones incorrectas. Por ejemplo, el estudiante E16 2A, dio como respuesta 22 días, argumentando que: “Si en 48 días se llena por completo el lago, la mitad son 24, pero ya que había una zona cubierta por lirios, le resté dos días...”. Además de considerar la respuesta intuitiva (24 días), asume que ya existía una zona cubierta por lirios. Esto posiblemente lo interpreta así puesto que, al inicio, el problema indica que: “En un lago hay una zona cubierta de lirios”. De igual manera, identificamos respuestas ligadas al “contrato didáctico” (Brousseau, 1998; D’Amore, 2011): “Sumando $2 + 48 = 50$ ” (E40 5B).

3.4 Pregunta 4

Iván puede beber un barril de agua en 6 días y María puede beber el mismo barril de agua en 12 días. ¿Cuántos días tardarán en beber tal barril de agua juntos?

La Tabla 5, presenta los resultados obtenidos en la pregunta 4 del TRC.

Grupos	Res- puesta correcta	Respuestas incorrectas						No contes- tó	Total
		Intuiti- va	Otras						
	4		9	18	6	3	12		
Segun- do	8 (2,2%)	109 (30%)	27 (7,4%)	19 (5,2%)	9 (2,5%)	8 (2,2%)	17 (4,7%)	8 (2,2%)	205 (56,5%)
Quinto	20 (5,5%)	50 (13,8%)	16 (4,4%)	19 (5,2%)	12 (3,3%)	11 (3%)	16 (4,4%)	14 (3,9%)	158 (43,5%)
Total	28 (7,7%)	159 (43,8%)	43 (11,9%)	38 (10,5%)	21 (5,8%)	19 (5,2%)	33 (9,1%)	22 (6,1%)	363 (100%)

Tabla 5. Respuestas del problema 4 del TRC.

3.4.1 Respuesta correcta: 4 días

El 7,7% de los estudiantes obtuvo la respuesta correcta. Sin embargo, no todos aportaron justificaciones adecuadas. En seguida se presentan algunos argumentos.

E13 2B: Porque Iván en 4 días se tomaría un poco más de la mitad del barril de agua y María se toma lo que sobre (como en los dibujos) (ver Figura 6).



Figura 6. Representación de la distribución del barril: E13 2B.

E37 2B: [El estudiante realiza un dibujo para justificar su respuesta] (ver Figura 7).

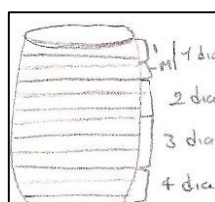


Figura 7. Representación de la distribución del barril: E37 2B.

E43 2C: Supuse que el barril es de 12 litros. María toma 1 litro diario mientras que Iván toma 2 litros diarios. En cuatro días Iván habrá tomado 8 litros y María en cuatro días habrá tomado 4 litros.

$$E23 5C: 1/6 + 1/12 = 1/x$$

$$3/12 = 1/x$$

$$1/4 = 1/x$$

Por lo que $x=4$

E35 5C: Cada día ella toma 1/12 del barril y él 1/6. En promedio toman 3/12 por día, solo tenemos que ver cuántas veces 3/12 hacen 1 entero.

Encontramos participantes (por ejemplo, E35 5C) que justificaron su respuesta por medio de un análisis fraccionario, aunque con distintos planteamientos. Algunos otros, muy pocos, establecieron un procedimiento algebraico utilizando fracciones, es el caso del participante E23 5C que planteó la ecuación: “ $1/6 + 1/12 = 1/x$ ”. La cual, es equivalente a la ecuación: $x/6 + x/12 = 1$.

Asimismo, se observan algunos dibujos que advierten un razonamiento correcto de los estudiantes (ver Figura 7), aunque, no todos exhiben tal situación. Es el caso del estudiante E13 2B (ver Figura 6) quien supone que Iván ha consumido $2/4$ del barril y María $2/6$. Sin embargo, como se puede constatar sin mayor problema, la suma de ambas cantidades es $5/6$, no $6/6$ o un entero.

Por otra parte, llamó nuestra atención que el estudiante E43 2C, fijó una cantidad de agua al barril: “*Supuse que el barril es de 12 litros...*”, lo cual le permitió obtener la respuesta correcta. Al respecto, Lago, Rodríguez, Dopico y Lozano (2001) establecen que la reformulación del enunciado verbal de un problema matemático puede favorecer un mejor desempeño de los estudiantes.

3.4.2 Respuesta intuitiva (incorrecta): 9 días

Siendo la repuesta intuitiva o incorrecta más frecuente reportada en la literatura (Frederick, 2005), se consideró por el 44,8% de participantes, de los cuales se muestran los argumentos siguientes.

E16 2D: Porque ahora ya son dos y técnicamente no sabemos de cuantos litros es el barril así que yo los sumé los días y después los dividí entre 2.

E32 5A: Si van a tomar entre los dos 1 barril de agua juntos, se divide a la mitad el barril, por lo tanto, cada uno solo tiene que beber medio barril, lo único que se tiene que hacer es dividir en dos los días que tarda cada uno en beber el barril y después sumar la mitad de cada uno.

Identificamos que la mayoría de los estudiantes consideró la idea de un reparto “justo”, independientemente de la rapidez de consumo de cada uno. Lo que implica que, tanto Iván como María, beberán el barril de manera equitativa, consumiendo solamente la mitad. Por ejemplo, el estudiante E32 5A subraya: “...cada uno solo tiene que beber medio barril...”. Por tanto, además de un consumo equitativo, se percibe un enfoque secuencial en la conceptualización del problema. En tal conceptualización, la respuesta correcta sería obviamente “nueve días”.

Asimismo, destaca el argumento del estudiante E16 2D, que comenta: “...técnicamente no sabemos de cuantos litros es el barril...”. Al igual que, anteriormente, el estudiante E43 2C, reparó en la capacidad del barril. Sin embargo, no asignó ningún valor y finalmente otorga la respuesta intuitiva.

3.4.3 Respuestas incorrectas

3.4.3.1 Respuesta: 18 días

Llama la atención esta respuesta, ya que fue contemplada por un número importante de participantes, 12% aproximadamente. En seguida, se muestran algunos argumentos.

E12 2C: Pues como ellos toman de su barril el tiempo quedaría 18 días solo sumé la misma cantidad de sí mismos 6 días de Iván y 12 días de María y me daría un total de 18 días.
E36 5C: Iván bebe el agua en 6 días, María en 12 días. Al sumar los días de ellos juntos se tardarán en beber el agua del barril juntos en 18 días.

La mayoría de los estudiantes que proporcionaron esta respuesta sumó los tiempos de consumo sin advertir que, tanto Iván como María, beberán del mismo barril, no de barriles separados, tal como lo expresa el estudiante E12 2C: “Pues como ellos toman de su barril...”. Finalmente, quienes asumieron que el barril debe consumirse en un tiempo igual al que cada uno lo hace por separado caen en una contradicción ya que el problema especifica que se trata del mismo barril y, además, tanto Iván como María beben a distintos ritmos y mantendrán su ritmo de consumo al consumir el barril.

3.4.3.2 Respuesta: 6 días

Esta es una de las respuestas incorrectas más frecuentes del problema 4, obtenida por el 10,5% de los participantes. En seguida se muestran algunos argumentos.

E14 2B: Tardarán 6 días porque por la velocidad que lleva Iván a comparación de María se harán 6 bueno eso creo.
E22 2D: Yo creo que solo tardarían 6 días ambos en beber el agua porque se supone que María podría hacerlo, pero en 12 días con ayuda de Iván reducirían 6 días y solo les tomaría 6 días para beber tal barril.

Como se observa, predomina la idea de que María debe ajustarse al tiempo de Iván: “...por la velocidad que lleva Iván a comparación de María...” (E14 2B), “...con ayuda de Iván reducirían 6 días y solo les tomaría 6 días...” (E22 2D). Sin embargo, aunque así fuera, el tiempo de consumo entre ambos tendría que ser menor a 6 días, ya que Iván, por sí solo, consume toda el agua del barril en 6 días.

3.4.3.3 Respuesta: 3 días

El 5,8% de los participantes dio tal respuesta, proporcionando argumentos como los siguientes.

E46 2B: Si Iván puede beber el barril de agua en 6 días con la ayuda de María puede terminar de beberlo en la mitad de tiempo que se hizo él solo.
E20 5C: Porque como van a beber el mismo barril tardaran solo 3 días, ya que María la toma en 12 días, pero Iván en 6 entonces le quitamos 6 días a los 12 días de María y quedan 6, pero Iván no puede beber él solo el barril de agua, entonces se divide el 6 entre los 2 y queda 3.



Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

P. Teutli Etcheverry, J. Slisko Ignjatoy

La mayoría de los participantes en este grupo consideró que María, aunque tarda más, debe ajustarse al ritmo de Iván. Por tanto, asumieron que María debe aumentar su ritmo de consumo, igualándolo con el de Iván para terminar de beber el barril en tan solo 3 días.

3.4.3.4 Respuesta: 12 días

El 5,2% consideró esta respuesta, de la cual presentamos los siguientes argumentos.

E27 2A: Pues María se tarda el doble que Iván, y pues yo digo que Iván puede esperar a María e Iván puede irse bebiendo menos en esos 12 días.

E26 5B: Porque como comienzan juntos Iván solo tarda 6 días que es la mitad del tiempo que María tarda entonces mientras que Iván ya terminó María seguiría bebiendo y terminaría en 12 días.

La mayoría de quienes dieron tal respuesta, afirmaron que Iván debe ajustarse al tiempo de María y esperarla, consumiendo menor cantidad de agua o con mayor lentitud. No obstante, pierden de vista que por sí sola María bebe el barril en 12 días, por lo cual, aunque Iván se adaptara al ritmo de ella, el tiempo de consumo debería ser menor a 12 días. Algunos más, consideraron 12 días de consumo debido a que Iván termina en 6 días, pero María tarda otros 6 días, por lo cual el barril se termina en 12 días, así como lo afirma el estudiante 26 5B. No obstante, tal situación no sería posible porque al ser el mismo barril, si Iván lo termina en 6 días María ya no tendría más agua que beber.

3.4.3.5 Otras respuestas incorrectas

Además de las respuestas anteriores, observamos algunas menos frecuentes; entre ellas, 24 días. Por ejemplo, el participante E48 2D argumentó: "... Iván tendría que tomar el doble para que pudiera estar igual que maría...". De tal modo, se observa un razonamiento análogo a quienes contestaron 18 días, ya que se suman los "supuestos" tiempos de consumo. Aunque, en este caso, se consideró que Iván requiere beber el doble para equipararse con María, lo cual resulta inadmisibile, puesto que se necesitarían más barriles.

Asimismo, al igual que en casos anteriores, se destacan respuestas derivadas del "contrato didáctico" (Brousseau, 1998; D'Amore, 2011): "*Porque se divide los días que toman los dos: $12/6=2$ días*" (E34 2B).

3.5 Pregunta 5

Julio ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja en la clase. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase?

Los resultados obtenidos en la quinta pregunta del TRC, se muestran en la Tabla 6.

Grupos	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas					No contestó	Total
		Intuitiva	Otras					
	29		30	15	20	31	Restantes	
Segundo	10 (2,8%)	78 (21,5%)	62 (17,1%)	10 (2,8%)	8 (2,2%)	19 (5,2%)	18 (5%)	205 (56,5%)
Quinto	7 (1,9%)	58 (16%)	49 (13,5%)	4 (1,1%)	2 (0,6%)	20 (5,5%)	19 (5,2%)	158 (43,5%)
Total	17 (4,7%)	136 (37,5%)	111 (30,6%)	14 (3,9%)	10 (2,8%)	39 (10,7%)	37 (10,2%)	363 (100%)

Tabla 6. Respuestas del problema 5 del TRC.

3.5.1 Respuesta correcta: 29 estudiantes

Del total de participantes el 4,7% dio como respuesta correcta 29 días, de los cuales, se presentan las siguientes justificaciones.

E32 5A: Julio está a la mitad si ha sido el decimoquinto más alto se tiene que hay 14 más bajos que él y si tiene decimoquinta más baja hay 14 más altos que él, si se suma se obtiene un resultado de 28 y a ellos se les suma Julio es uno más, obteniendo un resultado de 29 estudiantes.

Los participantes de este grupo identificaron adecuadamente que, al obtener Julio, tanto la decimoquinta calificación más alta como la más baja, este ocupa la posición central o el lugar quince (ver Figura 8). Por consiguiente, debe haber 14 estudiantes por arriba y 14 por debajo de él.

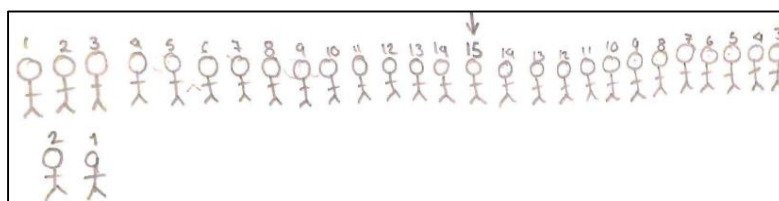


Figura 8. Posición que ocupa Julio en la clase: E10 5C.

3.5.2 Respuesta intuitiva (incorrecta): 30 días

Es considerada como la respuesta intuitiva o incorrecta más frecuente de la pregunta 5 (Frederick, 2005). Del 37,5% de los participantes que dio tal respuesta, se presentan algunos argumentos.

E30 2A: Decimoquinta son 15 alumnos más la otra parte decimoquinta son otros 15 por lo cual se suman 15 y 15 = 30.
E38 2D: Porque tiene el lugar 15 en calificación más alta como la baja entonces está en medio de todos así que los 29 que sobran se dividen entre los más bajos y los más altos de calificación.

Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

P. Teutli Etcheverry, J. Slisko Ignjatoy

En general, este grupo de estudiantes únicamente consideró sumar la cantidad de alumnos que, supuestamente, se encuentran por debajo y por arriba de Julio. Sin embargo, no identificaron que, al considerar a Julio en la decimoquinta posición este ya está incluido en los 15 alumnos.

Otros más, como el estudiante E38 2D, reconocieron que Julio ocupa la posición central. Sin embargo, no se percataron que, si fueran 30 estudiantes como así lo determinaron, Julio no estaría en la parte central (ver Figura 9). Para ello, tendrían que haber 15 alumnos antes y 15 después, lo que arrojaría un total de 31 estudiantes, no de 30.

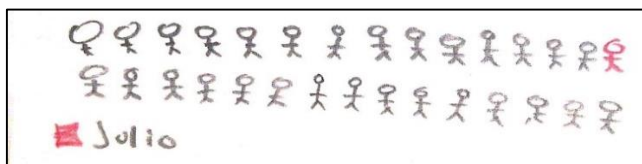


Figura 9. Posición que ocupa Julio: E2 2C.

3.5.3 Respuestas incorrectas

3.5.3.1 Respuesta: 15 estudiantes

Esta respuesta, en particular, llama la atención puesto que resultó muy frecuente. Incluso, el porcentaje (30,6%) de estudiantes que la proporcionó es muy cercano al porcentaje (37,5 %) de estudiantes que dio la respuesta intuitiva. En seguida presentamos algunos argumentos.

E5 5C: Porque si son 15 estudiantes, significa que Julio ha recibido la calificación más alta, como la más baja.

E14 5D: Porque ha tenido la calificación más alta de 15 personas, pero también ha recibido la más baja. No especifica si fue el mismo día, pudo haber sido durante todo el año.

Se observa que los estudiantes de este grupo consideraron que Julio, al obtener la calificación más alta, fue el primero y al obtener la calificación más baja fue el último de quince alumnos. No obstante, el que haya obtenido la decimoquinta calificación más alta no implica que Julio sea el primero de la clase. Por el contrario, si obtuvo la decimoquinta calificación más baja, no significa que sea el último de la clase.

Por otra parte, destaca el comentario del participante E14 5D quien señala: "...No especifica si fue el mismo día, pudo haber sido durante todo el año...". Por tanto, si se considerara que Julio recibió las calificaciones en días diferentes, no se podría establecer con precisión cuántos alumnos hay en la clase. Un día pudo haber obtenido la decimoquinta calificación más alta, sin que esto garantice el total de alumnos en la clase. Análogamente, se podría considerar que un día diferente obtuvo la decimoquinta calificación más baja y, tampoco sería posible determinar la cantidad de alumnos. Además, el enfoque del problema implica que Julio ha recibido una sola calificación, no dos.

3.5.3.2 Respuesta: 20 estudiantes

De tal respuesta, proporcionada por el 3,9% del total de participantes, se presentan los argumentos siguientes.

E53 2B: *Sumando los décimos $10 + 10 = 20$.*

E8 5A: *Porque salió a mitad de la calificación y menciona dos veces decimoquinta.*

Se observa que los estudiantes asocian la palabra décimo con el número 10, pero no distinguen que también está relacionada con la palabra quinta, es decir, decimoquinta (15). Por lo tanto, suman dos veces 10, cantidad que establecieron como la posición de Julio.

Por otra parte, identificamos argumentos incoherentes, como el que presentó el participante E25 2B: *“Porque el décimo es 10 y quinta es 5 o sea que “participa” 5 veces y son 10 alumnos esa es mi opinión”*

3.5.3.3 Respuesta: 31 estudiantes

El 2,8% de los participantes dio esta respuesta, de la cual se muestran algunos argumentos.

E30 2D: *La decimoquinta son 15 estudiantes que se encuentran con la calificación más alta y 15 estudiantes con la calificación baja, él está en medio.*

E40 5C: *Él se encuentra a la mitad de todos y si sumamos los quince más altos y los quince más bajos da 30 pero falta Julio y si lo sumamos es 31.*

El enfoque es similar a quienes dieron la respuesta intuitiva (30 estudiantes). Sin embargo, para ellos, la palabra decimoquinta implica que hay quince estudiantes antes o después que Julio y él se encuentra en la posición central. No se percatan que, desde su perspectiva, Julio ocuparía la posición dieciséis, no la quince.

3.5.3.4 Otras respuestas incorrectas

Algunos participantes respondieron 10 estudiantes: *“Porque su propio nombre lo dice decimoquinta”* (E53 2C), *“Porque dice que recibió la decimoquinta y pues son 10 estudiantes”* (E11 5C). De esta manera, se observa que, al igual que quienes respondieron 20 estudiantes, interpretan equivocadamente decimoquinta como el equivalente a 10 estudiantes en total. Sin embargo, a diferencia de quienes respondieron 20, que tomaron en cuenta que hay más alumnos por arriba y por debajo de Julio, solo consideraron un grupo de estudiantes, ya sea por debajo o por arriba de éste.

Otros más, respondieron 1 estudiante: *“Porque es el único que está en el salón como tanto saca buenas calificaciones como malas calificaciones por ser el único”* (E25 5C), *“Porque recibe la misma calificación tanto baja como alta”* (E27 5C). Según su perspectiva, Julio es el único alumno en la clase, puesto que es el único que recibe alguna calificación, alta o baja. Aunque esto resulta incoherente, recordemos que el problema menciona que *“...ha recibido tanto la decimoquinta calificación más alta como la decimoquinta calificación más baja...”*, por lo tanto, debe haber más estudiantes en la clase. No obstante, es posible que hayan confundido que Julio solamente recibe una calificación.

Por otra parte, identificamos más respuestas derivadas del “contrato didáctico” (Brousseau, 1998; D’Amore, 2011). Es el caso de los participantes que respondieron 25 estudiantes: *Porque multipliqué 5 x 5 y ese fue el resultado* (E16 2D). Al igual que otros más que contestaron 50 estudiantes, por ejemplo, el participante E30 5C quien argumenta: *“Tomando en cuenta la suma de 5 veces 10”*.



3.6 Pregunta 6

Un hombre compra una mercancía por 60 pesos, la vende por 70 pesos, la compra de nuevo por 80 pesos y, finalmente, la vende por 90 pesos. ¿Cuánta ganancia logró obtener?

Los resultados obtenidos en la sexta pregunta del TRC, se muestran en la Tabla 7.

Grupos	Respuesta correcta	Respuestas incorrectas				No contestó	Total
		Intuitiva	Otras				
	20		10	0	30	Restantes	
Segundo	57 (15,7%)	97 (26,7%)	10 (2,8%)	15 (4,1%)	16 (4,4%)	10 (2,8%)	205 (56,5%)
Quinto	21 (5,8%)	82 (22,6%)	26 (7,2%)	5 (1,4%)	5 (1,4%)	19 (5,2%)	158 (43,5%)
Total	78 (21,5%)	179 (49,3%)	36 (9,9%)	20 (5,5%)	21 (5,8%)	29 (8%)	363 (100%)

Tabla 7. Respuestas del problema 6 del TRC.

Siendo el problema con mayor número de aciertos (21,5%), particularmente de los estudiantes de segundo semestre, en seguida presentamos algunos argumentos.

3.6.1 Respuesta correcta: 20 pesos

<p><i>E46 2A: Porque solo va sumando la ganancia de cómo lo vende y lo compra</i> $- 60 + 70 - 80 + 90 = 20$.</p> <p><i>E18 2B: Ganó 20 porque primero la compró de 60 y la vendió en 70 ganó 10 luego la compra en 80 y la vendió en 90 y ganó otros 10 que son 20.</i></p> <p><i>E28 2B: Porque la compra por 60 y la vende en 70 donde gana 10 pesos, pero la compra de nuevo en 80 donde tuvo que poner 10 pesos más (perdió esos 10) y finalmente la vende en 90, donde recupera sus 60 pesos con que empezó, más 10 pesos más que puso, dan un resultado de 70, y para 90 son 20 pesos y ganó 20 pesos.</i></p> <p><i>E32 5A: Se suman el primer precio (\$60) con el segundo precio (\$80) y se obtiene el resultado (\$140). Después se suma la primera venta (\$70) con la segunda venta (\$90) y resulta (\$160). Para obtener la ganancia se resta el total de la inversión (\$140) al total de la venta (\$160) y se obtiene una ganancia de \$20.</i></p>
--

Ciertos alumnos, como el participante E32 5A, identificaron que la inversión y la ganancia total fueron de 140 y 160 pesos respectivamente. Otros, como el estudiante E46 2A, realizaron un procedimiento algebraico, considerando negativo a lo invertido y positivo a lo vendido: "... $- 60 + 70 - 80 + 90 = 20$ ". Algunos más, analizaron el problema por partes, es decir, de acuerdo con el proceso de compra venta descrito: "...primero la compró de 60 y la vendió en 70 ganó 10 luego la compra en 80 y la vendió en 90 y ganó otros 10..." (E18 2B).

Otros, distinguieron que en total se invirtieron 70 pesos, los cuales restan al precio de la mercancía (90 pesos) que se fija en la segunda venta: “Porque la compra por 60 y la vende en 70 donde gana 10 pesos, pero la compra de nuevo en 80 donde tuvo que poner 10 pesos más (perdió esos 10) y finalmente la vende en 90, donde recupera sus 60 pesos con que empezó, más 10 pesos más que puso, dan un resultado a 70, y para 90 son 20 pesos...” (E28 2B). Este enfoque resulta interesante, puesto que se puede entender como una sola transacción. De tal manera, al vender la mercancía en 70 pesos se recuperan los 60 pesos invertidos inicialmente y se ganan 10, pero al comprar nuevamente la mercancía en 80, se deben invertir 10 pesos más. Por lo tanto, al sumar los 60 pesos con los 10 pesos invertidos posteriormente, es como haber invertido 70 pesos. Finalmente, se obtiene la diferencia entre la segunda venta de la mercancía (90 pesos) y los 70 pesos invertidos.

3.6.2 Respuesta intuitiva: 10 pesos

Considerada la respuesta intuitiva o incorrecta más frecuente (Frederick, 2005), fue proporcionada por el 49,3% de los participantes. Veamos algunos argumentos.

E50 2C: La ganancia es de \$10 porque primero gana \$10 pero después la compra y pone \$10 entonces eso hace que es como si no hubiera perdido ni ganado nada y al final lo vuelve a vender y es cuando gana solo \$10.

E28 5A: Primero compró su mercancía por \$60 y la vende por \$70, entonces tenía \$10 de ganancia. Después la compró por \$80 de más así que sus \$10 se fueron a la nueva mercancía, pero al final vende \$90 y así la queda \$10 de ganancia.

Este grupo de estudiantes consideró que en la primera venta el hombre gana 10 pesos, pero al comprar nuevamente la mercancía en 80 pesos, pierde esos 10 pesos y solo gana 10 al vender la mercancía en 90 pesos. A primera vista, este enfoque resulta muy atractivo. Sin embargo, lo que no advierten es que en realidad la inversión en la segunda compra es de 70 pesos. Recordemos que al vender la mercancía en 70 pesos el hombre recupera los 60 pesos invertidos y gana 10. Al comprar nuevamente la mercancía en 80, invierte 10 pesos más. Por lo tanto, al sumar los 60 pesos iniciales con los 10 pesos invertidos posteriormente, es como haber invertido 70 pesos.

3.6.3 Respuestas incorrectas

3.6.3.1 Respuesta: 0 pesos

Del 9,9% de participantes que dio esta respuesta se presentan algunos argumentos.

E35 5C: Cuando la vendió en 70 pesos su ganancia era de 10 pesos, pero compró una nueva por 80 ahí habrá perdido \$10 y al venderla a \$90 solo recupera lo que invirtió.

E4 5D: No gana nada porque la segunda vez que compró la mercancía él puso \$10 de su bolso y finalmente la vendió en \$90 y recuperó los \$10 perdidos.

De este grupo de participantes, la mayoría consideró que en la primera venta el hombre gana 10 pesos. Posteriormente, aseguran que pierde su ganancia puesto que al comprarla en 80 pesos debe poner lo ganado más otros 10 pesos, los cuales recupera al realizar la segunda venta. Por tanto, según esta interpretación, implica una ganancia nula.



3.6.3.2 Respuesta: 30 pesos

Este grupo corresponde al 5,5% del total. En seguida se muestran algunos argumentos.

E7 2A: Pues se supone que la compró en 60 pesos y que al final la vendió en 90 es obvio que le gano 30 pesos.
E31 5C: Obtuvo \$30 pesos por que a cada venta le iba sumando 10.

Algunos estudiantes solamente consideraron la diferencia entre la última venta (90 pesos) y la inversión inicial (60). Otros más (E31 5C) supusieron tres ventas, resultando una ganancia de 10 pesos en cada una. De hecho, de este último argumento, podemos inferir que el razonamiento es correcto, puesto que se identifica que en cada venta se obtiene una ganancia de 10 pesos; sin embargo, existe una confusión con la cantidad de ventas, contemplando tres en vez de dos.

3.6.3.3 Otras respuestas incorrectas

Hubo quienes interpretaron incorrectamente el problema dando como respuesta 160 pesos. De hecho, probablemente, hayan confundido la ganancia con la venta total de las transacciones realizadas: “Porque primero la vendió en 70 y la segunda en 90 y sumándolas dan 160” (E38 2A).

Otros más, fueron víctimas, una vez más, del “contrato didáctico” (Brousseau, 1998; D’Amore, 2011). Por ejemplo, el estudiante E53 2B quien respondió 75 pesos: “Sumando 60, 70, 80, 90 y lo dividí entre 4...”. O el estudiante E34 5C que respondió 300 pesos, afirmando lo siguiente: “Sumando las cantidades y te da 300, $60 + 70 + 80 + 90 = 300$ ”.

Asimismo, detectamos respuestas con argumentos inconsistentes. Por ejemplo, el alumno E17 2A dio como respuesta 80 pesos, argumentando que: “En si iba bien, pero a él le faltaban 10 pesos así que pierde y gana \$80, 60 pesos, la vendió por 70 pesos, la compra de 80 pesos y termina siendo 90”. Aunque tiene noción del proceso de compra venta que se da, no explica adecuadamente por qué menciona que “iba bien” y por qué le faltaban 10 pesos y después gana 80 pesos.

3.7 Discusión y conclusiones

El TRC se ha utilizado en diversos estudios por gran cantidad de investigadores. Su aplicación es muy recurrente porque permite evaluar con precisión el empleo del sistema de pensamiento 1 o intuitivo y del sistema de pensamiento 2 o reflexivo (Kahneman, 2011). Al resolver la prueba, el sistema de pensamiento 1 detona una respuesta casi inmediata y aparentemente aceptable, pero incorrecta, sobre la cual los participantes deben reflexionar, empleando el sistema de pensamiento 2, para desecharla (Pennycook et al., 2016).

A partir del TRC original (Frederick, 2005) se han realizado diversas adaptaciones a la prueba, cada una con propósitos específicos (Thomson y Oppenheimer, 2016; Primi et al., 2015, Toplak et al., 2014). Por lo tanto, existe una amplia evidencia de las respuestas derivadas del TRC, tanto correctas como intuitivas incorrectas, además de otras posibles respuestas incorrectas. Sin embargo, se ha documentado muy poco acerca de las razones auténticas detrás de cada respuesta.

De tal manera, nos propusimos clasificar y analizar las distintas respuestas y argumentos derivados de la aplicación del TRC, considerando, además de las respuestas correctas e intuitivas incorrectas (Frederick, 2005), las diversas respuestas incorrectas, algunas de ellas reportadas en otros estudios (Sirota y Juanchich, 2018).

Un aspecto medular en el que se situó nuestro trabajo y que implica una diferencia fundamental con otros trabajos que hemos revisado en la literatura, consistió en analizar los argumentos proporcionados por los participantes, ya que nos interesaba conocer su interpretación para cada pregunta del TRC y la razón por la cual proporcionaron determinada respuesta. De este modo, identificamos que no todas las respuestas correctas derivan de un razonamiento correcto, al igual que no todas las respuestas incorrectas se sustentan en razonamientos incorrectos. En este sentido, Pennycook et al. (2016), aseguran que, aunque las respuestas correctas generalmente requieren un proceso reflexivo, no implica que una respuesta incorrecta indique una falta de reflexión. De igual manera, afirman que algunos participantes intentan contrarrestar la respuesta intuitiva por medio del pensamiento reflexivo, aunque no siempre lo hacen de manera exitosa.

Por otra parte, además de interpretaciones incorrectas del problema o argumentos carentes de coherencia, identificamos errores aritméticos o algebraicos e interpretaciones derivadas del “contrato didáctico” (Brousseau, 1998; D’Amore, 2011). Al respecto, Socas (2007) afirma que los errores no son fortuitos, sino que surgen por estrategias personales que los alumnos emplean en situaciones problemáticas y son consecuencia de experiencias matemáticas previas. Incluso, señala que, en determinado momento, los alumnos con un desempeño aparentemente satisfactorio en matemáticas, probablemente ocultan problemas operacionales, estructurales y procesuales. Asimismo, D’Amore (2011) advierte que, en ocasiones, los estudiantes tienden a utilizar operaciones sin sentido, desligadas del problema en cuestión, empleando como operadores los datos numéricos presentes en el texto, lo cual refiere a la concepción matemática identificada como “contrato didáctico”.

Finalmente, consideramos importante y recomendable que, al aplicar instrumentos como el TRC, de ser posible, se solicite a los participantes una justificación para conocer la razón por la cual obtienen determinada respuesta. Esto permitiría tener un diagnóstico más certero acerca del perfil reflexivo o intuitivo del encuestado y diseñar las secuencias de aprendizaje que permitan a los estudiantes superar, por sí mismos, las conceptualizaciones inadecuadas de las situaciones involucradas en los problemas.

Bibliografía

- Barón, L., & Rotundo, G. Z. (2018). Los sesgos cognitivos: de la psicología cognitiva a la perspectiva cognitiva de la organización y su relación con los procesos de toma de decisiones gerenciales. *Ciencia y Sociedad*, 43(1), 31-48.
- Briñol, P., Becerra, A., Díaz, D., Valle, C., Horcajo, J., & Gallardo, I. (2005). El efecto de la necesidad de cognición sobre la influencia interpersonal. *Psicothema*, 17(4), 645-650.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Paris: La pensée sauvage.
- D'Amore, B. (2011). *Didáctica de la matemática*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Etcheverry, P. T., Ignjatov, J. S., & de Lourdes Juárez, E. (2020). Influencia de la escolaridad en el desarrollo del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en estudiantes de bachillerato. *UNIÓN-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 16(60), 212-232.
- Evans, J., Barston, J., & Pollard, P. (1983). On the conflict between logic and belief in syllogistic reasoning. *Memory & Cognition*, 11(3), 295-306.



Test de Reflexión Cognitiva: las diversas respuestas y los argumentos que revelan estudiantes de bachillerato

P. Teutli Etcheverry, J. Slisko Ignjatov

- Frederick, S. (2005). Cognitive Reflection and Decision Making. *Journal of Economic Perspectives*, 19(4), 25–42.
- González, B., & León, A. (2013). Procesos cognitivos: De la prescripción curricular a la praxis educativa. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, (19), 49-67.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México, D. F.: Mc Graw Hill.
- Johnson, E. D., Tubau, E., & De Neys, W. (2016). The doubting system 1: Evidence for automatic substitution sensitivity. *Acta Psychologica*, 164, 56–64.
- Juárez, J. A., Hernández, L. A., & Slisko, J. (2014). Aceptando la existencia de un terreno inexistente en un problema matemático: el uso prevalente de argumentos pragmáticos por docentes de primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 6, 45 - 61.
- Kahneman D. (2011). *Thinking, Fast and Slow*. New York, NY: Farrar, Straus and Giroux.
- Lago, M. O., Rodríguez, P., Dopico, C., & Lozano, M. J. (2001). La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *Suma*, 37, 55-62.
- Morsanyi, K., Busdraghi, C., & Primi, C. (2014). Mathematical anxiety is linked to reduced cognitive reflection: a potential road from discomfort in the mathematics classroom to susceptibility to biases. *Behavioral and Brain Functions*, 10(1), 1-13.
- Palm, T. (2006). Word problems simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42-47.
- Pennycook, G., Cheyne, J. A., Koehler, D. J., & Fugelsang, J. A. (2016). Is the cognitive reflection test a measure of both reflection and intuition? *Behavior Research Methods*, 48(1), 341-348.
- Primi, C., Morsanyi, K., Chiesi, F., Donati, M. A., & Hamilton, J. (2016). The development and testing of a new version of the cognitive reflection test applying item response theory (IRT). *Journal of Behavioral Decision Making*, 29(5), 453-469.
- Sirota, M., & Juanchich, M. (2018). Effect of response format on cognitive reflection: Validating a two- and four-option multiple choice question version of the Cognitive Reflection Test. *Behavior research methods*, 50(6), 2511-2522.
- Stanovich, K. & West. R. (2000). Individual Differences in Reasoning: Implications for the Rationality Debate? *Behavioral and Brain Sciences*. 23(5), 645–726.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, pp. 19-52.
- Thomson, K. S., & Oppenheimer, D. M. (2016). Investigating an alternate form of the cognitive reflection test. *Judgment and Decision making*, 11(1), 99.
- Toplak, M., West, R., & Stanovich, K. (2014). Assessing Rational Thinking Using an Expansion of the Cognitive Reflection Test. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 68(4).

Paul Teutli Etcheverry. Profesor de bachillerato (Matemáticas). Estudiante de la Maestría en Educación Matemática en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Hoy en día realiza una investigación sobre la aceleración cognitiva a través del aprendizaje activo en matemáticas.
Email: etcheverrypaul81@gmail.com

Josip Slisko Ignjatov Profesor-investigador en la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. Miembro del Sistema Nacional de Investigadores, México, en el área de Humanidades. Doctor en Ciencias Filosóficas. Docente en la Licenciatura en Física y en la Maestría en Educación Matemática.
Email: jslisko@cfm.buap.mx