

Implementación de un método gráfico para la enseñanza de las fracciones

Diana Marcela Parra Cortés (Institución educativa Técnica Agrícola el Guayabo. Colombia)

Luis Hernando Carmona-Ramírez (Universidad Católica de Manizales. Colombia)

Fecha de recepción: 06 de febrero de 2021

Fecha de aceptación: 25 de septiembre de 2021

Resumen

El aprendizaje de las fracciones sigue siendo un tema complejo de enseñar y por ende difícil de entender, debido en gran parte al método usado en la escuela. Este problema se presenta con mucha regularidad en todas las aulas de clase, y a pesar de que son variadas las estrategias para mejorar los procesos de aprendizaje, muchos maestros no cambian la manera de enseñarlas debido a que lo restringen a una sola representación, que es la numérica.

Este trabajo de investigación propende por el uso de otro registro que puede ser más llamativo para el aprendizaje como es el gráfico empleando un software dinámico llamado GeoGebra que ayuda al proceso enseñanza-aprendizaje, despertando el interés y la motivación de los estudiantes.

Palabras clave

Fracciones, GeoGebra, método gráfico, operaciones con fracciones.

Title

Implementation of a graphical method for teaching fractions

Abstract

Learning fractions remains a complex subject to teach and therefore difficult to understand, due in large part to the method used at school. This problem occurs very regularly in all classrooms, and although the strategies to improve learning processes are varied, many teachers do not change the way of teaching them because they restrict it to a single representation, which is the numerical.

This research work tends to use another register that may be more striking for learning, such as the graph, using dynamic software called GeoGebra that helps the teaching-learning process, awakening the interest and motivation of students.

Keywords

Fractions, GeoGebra, graphical method, operations with fractions.

1. Introducción

Hoy día siguen presentándose muchas dificultades para la comprensión de las fracciones y sobre todo de sus operaciones básicas. Algunas investigaciones sobre la enseñanza de las fracciones concuerdan en que es un problema que se presenta en todas las escuelas del mundo y se evidencia de manera importante en aspectos como: la falta de un conocimiento conceptual de parte – todo, la falsa representación de sus partes, la generalización de las operaciones algebraicas de la suma y la resta como si fueran simples números naturales, entre otros (Martínez & Lascano, 2001; Elena & Alvarez, 2010; Fazio & Siegler, 2011; Gómez-Rodríguez, 2019). Estas dificultades han hecho que el proceso enseñanza – aprendizaje en los primeros años de la educación básica secundaria sea un tema de vital importancia



ya que estas son esenciales para la comprensión del álgebra, la geometría y otros aspectos de las matemáticas (Fazio & Siegler, 2011).

Este proyecto de investigación fue desarrollado con un grupo de 20 estudiantes de 6° grado de educación básica secundaria en un contexto rural, para dicho trabajo se desarrollaron 4 aplicaciones con el software GeoGebra para favorecer las visualizaciones y además para evitar las falsas representaciones de las fracciones, es decir que los estudiantes expresaran las partes de un todo con tamaños diferentes o que hicieran representaciones pictográficas de las partes con diferentes tamaños y fueran interpretadas como iguales, ver ejemplo en la Figura 1.



Figura 1. En la gráfica se observa una falsa representación de las partes de una fracción.

2. Propuesta metodológica para realizar operaciones básicas con fracciones

Este trabajo tiene como propósito contribuir al aprendizaje de las operaciones básicas de las fracciones por medio del método gráfico o también denominado geométrico, este método tiene la particularidad de comportarse como un isomorfismo matemático, puesto que las operaciones básicas se pueden interpretar como una operación dados dos conjuntos. A continuación, se muestran los procedimientos necesarios para resolver ejercicios de operaciones con fraccionarios (suma, resta, multiplicación y división) y en dónde los estudiantes podrán practicar posteriormente con el software GeoGebra ya que la aplicación que se propone desde la didáctica tiene dos características muy importantes: La visualización y el dinamismo.

2.1. La suma de fracciones

Dadas dos fracciones (Homogéneas o heterogéneas), se pueden representar por medio de polígonos regulares (En este caso siempre se usarán cuadrados). La primera fracción (A), se puede dibujar como un cuadrado dividido en n partes iguales, (ver polígono rojo). La segunda fracción (B) también es un cuadrado que se puede dividir en n partes iguales, (ver polígono azul).

Reglas para la realización de la operación suma

1. Se tienen dos cuadrados divididos en n partes iguales cada uno de ellos, por convención se tomará un cuadrado rojo con divisiones iguales que han sido trazadas horizontalmente y un cuadrado azul dividido en n partes iguales con divisiones verticales. De ninguna manera se pueden dividir ambos cuadrados con líneas horizontales y/o con líneas verticales.
2. Se debe superponer el primer cuadrado sobre el segundo, nótese que al superponerse ambos cuadrados se forma un nuevo cuadrado compuesto por una rejilla de cuadrados más pequeños. Este proceso es la unión de las dos fracciones. En el método aritmético consiste en la

multiplicación de los denominadores de ambas fracciones, este paso permite determinar el término que forma el denominador de la nueva fracción.

3. Posteriormente, se cuentan cuantos cuadrados de color rojo y cuantos cuadrados de color azul se visualizan adentro de la rejilla (se cuentan de manera independiente sin importar las intersecciones formadas), seguidamente se hace la suma de los cuadrados que se contaron y esta expresión es el término del numerador. A continuación, se muestra el procedimiento gráfico y su análogo aritmético.

Procedimiento

Se tienen las fracciones: $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$

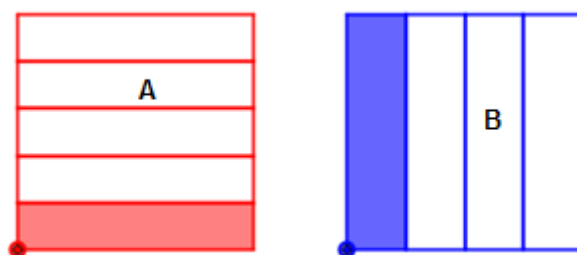


Figura 2. Formas de representación de dos fracciones con el método geométrico.

Ahora vamos a realizar la operación de la suma, para ello es necesario sobreponer cualquiera de los cuadrados (propiedad conmutativa), al estar superpuestos las líneas horizontales del cuadrado A (Rojo), se entrecruzan con las líneas verticales del cuadrado B (Azul), formando un polígono nuevo (C), al que lo conforma una rejilla de cuadrados más pequeños todos de igual tamaño (Figura 3).

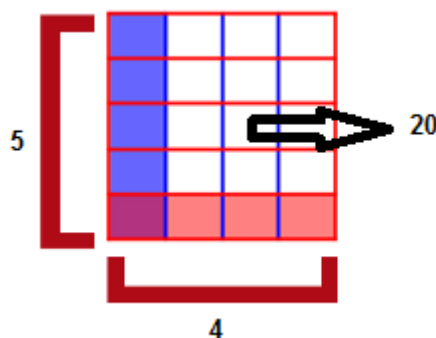


Figura 3. Forma para determinar el denominador de la nueva fracción en la suma.

En la operación aritmética esta superposición resulta de multiplicar los dos denominadores de cada una de las fracciones:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times a + 1 \times c}{5 \times 4} = \frac{a + c}{20}$$



La superposición de ambos cuadrados es la unión del polígono A, con el polígono B, y recordemos que una unión es la suma todos los elementos. Ahora comprobemos mediante el ejemplo:

Sumemos $\frac{1}{5} + \frac{1}{4}$

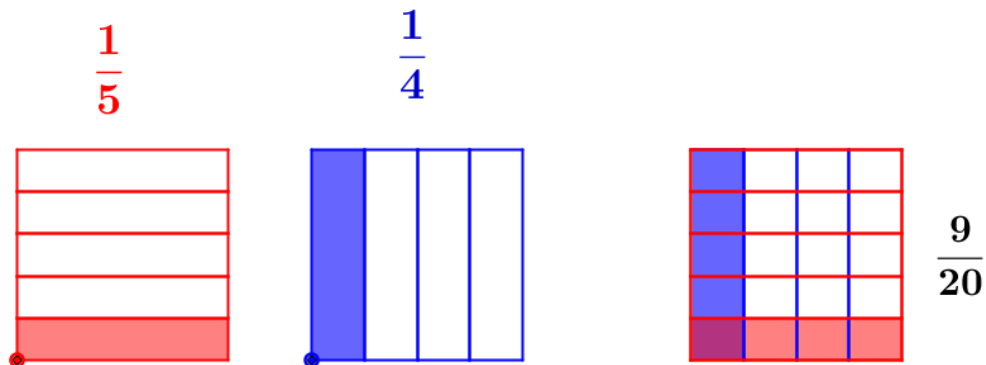


Figura 4. Ejemplo de una suma de fracciones mediante el método gráfico.

Como se puede observar en el último cuadrado se formaron 5 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos, $5 + 4 = 9$ que serán las partes iguales del numerador; y el denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{9}{20}$

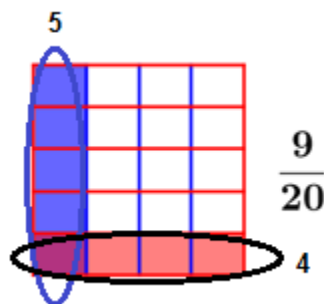


Figura 5. Forma para determinar el numerador de la nueva fracción.

Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben contar de a uno.

El objetivo final es que los estudiantes relacionen el método gráfico con el aritmético y puedan pasar de manera sencilla del pensamiento concreto al abstracto.

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1 \times 4 + 5 \times 1}{5 \times 4} = \frac{4 + 5}{20} = \frac{9}{20}$$

Para interactuar con el aplicativo de GeoGebra de la adición por medio del método gráfico puede ingresar a: <https://www.geogebra.org/m/rzfnqfja>

2.2. La resta de fracciones

El procedimiento para la resta de fracciones es el mismo que se hace para la suma. Se tienen los dos polígonos (Rojo y Azul), se superponen, pero hay que dejar claro que en la operación de la resta para fracciones positivas (Z^+), se debe cumplir una condición: “El minuendo siempre es mayor que el sustraendo”, para determinar esto bastará con dividir cada una de las fracciones, o sea el numerador entre el denominador y de esta manera se determina cual fracción tiene cociente mayor.

Reglas para la realización de la operación resta

1. Se tienen dos cuadrados divididos en n partes iguales cada uno de ellos, por convención se tomará un cuadrado rojo con divisiones iguales que han sido trazadas horizontalmente y un cuadrado azul dividido en n partes iguales con divisiones verticales. De ninguna manera se pueden dividir ambos cuadrados con líneas horizontales y/o con líneas verticales.
2. Se debe superponer el cuadrado rojo sobre el azul, recuerde el sustraendo es mayor que el minuendo, nótese que al superponerse ambos cuadrados se forma un nuevo cuadrado compuesto por una rejilla de cuadrados más pequeños. Este proceso es la unión de las dos fracciones.
3. Posteriormente, se deben observar los cuadrados de color rojo y los cuadrados de color azul que se formaron adentro de la rejilla. Ahora el procedimiento tiene una variación importante con respecto a la suma, puesto que restar es extraer cuadrados de la rejilla, para ello la operación que se aplicará es la siguiente: se extrae un cuadrado rojo por un cuadrado azul, se debe repetir la operación tantas veces se puedan extraer cuadrados uno a uno, el procedimiento se detiene al momento que ya no se puedan extraer los dos cuadrados a la vez, la cantidad de cuadrados que no fueron extraídos ahora se cuentan y dicha cantidad conformará el nuevo numerador de la fracción. A continuación, se muestra el procedimiento gráfico y su análogo aritmético.

Procedimiento

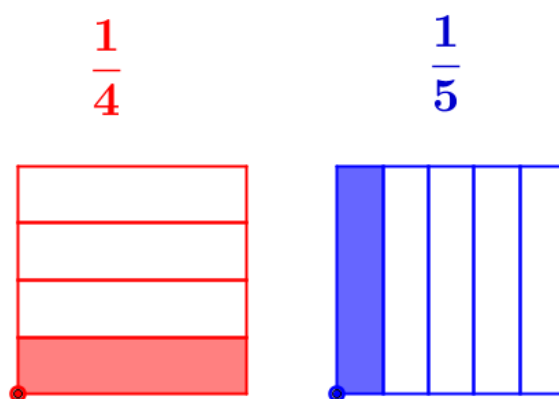


Figura 6. Posición correcta de la operación resta (el minuendo es mayor que el sustraendo).

El procedimiento de la resta es idéntico al de la suma, en este caso se superpone el polígono rojo sobre el azul y se aplica la operación de diferencia entre conjuntos. En la Figura 7 se observa la unión de los dos cuadrados, antes de aplicarle la operación diferencia.



Implementación de un método gráfico para la enseñanza de las fracciones

C. M. Parra-Cortés y L. H. Carmona-Ramírez

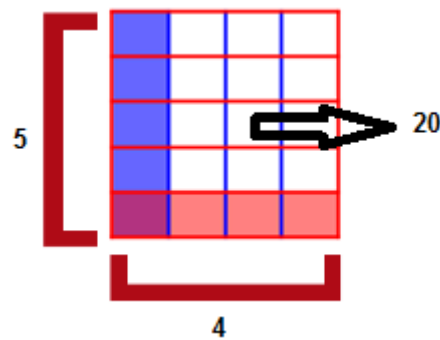


Figura 7. Forma para determinar el denominador de la nueva fracción en la resta.

Miremos en el ejemplo anterior propuesto en la suma si es posible realizar la resta de las dos fracciones.

$$\text{Restemos } \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$$

Primero hay que comprobar que un quinto sea mayor que un cuarto:

$$\frac{10}{5} = 2 \text{ y } \frac{10}{4} = 2.5$$

Lo anterior confirma que esta resta no se puede realizar en este subconjunto numérico; pero si se puede realizar la operación $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$.

Ahora con ayuda de un borrador o tapando los cuadrados se procede a retirar un cuadrado rojo por uno azul del polígono resultante tantas veces se repitan de la misma manera, en el momento que ya no existan diferencias, se anotan cuantos cuadrados quedan sin tapar y este será el resultado que llevará el numerador, entre tanto el denominador corresponde al total de cuadrados conformados por la superposición del polígono rojo sobre el azul.

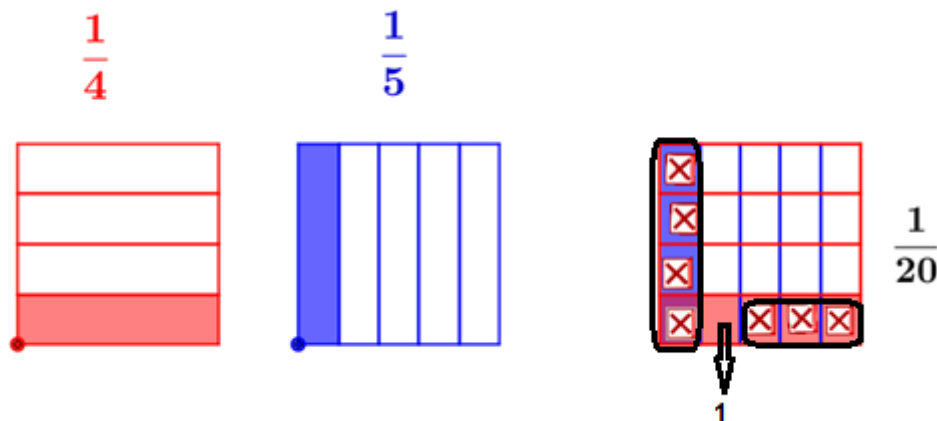


Figura 8. Ejemplo del procedimiento para la resta de fracciones por el método gráfico.

Como se puede observar en el último cuadrado se retiraron 4 cuadrados azules y 4 cuadrados rojos del total que eran 9, así sólo quedó un cuadrado rojo que será el numerador; y el denominador equivale al total de cuadrados que conforman el nuevo polígono 20, resultando entonces la fracción $\frac{1}{20}$

Nótese que si se superponen cuadrados estos se deben quitar igual que una diferencia.

El objetivo final es que los estudiantes relacionen el método gráfico con el aritmético y puedan pasar de manera sencilla del pensamiento concreto al abstracto.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1 \times 5 - 4 \times 1}{5 \times 4} = \frac{5 - 4}{20} = \frac{1}{20}$$

Para interactuar con el aplicativo de GeoGebra de la resta por medio del método gráfico puede ingresar a: <https://www.geogebra.org/m/zh7a2src>

2.3. El producto de fracciones

Reglas para la realización de la operación multiplicación

1. Se tienen dos cuadrados divididos en n partes iguales cada uno de ellos, por convención se tomará un cuadrado rojo con divisiones iguales que han sido trazadas horizontalmente y un cuadrado azul dividido en n partes iguales con divisiones verticales. De ninguna manera se pueden dividir ambos cuadrados con líneas horizontales y/o con líneas verticales.
2. Se debe superponer el primer cuadrado sobre el segundo, nótese que al superponerse ambos cuadrados se forma un nuevo cuadrado compuesto por una rejilla de cuadrados más pequeños. Este proceso es la unión de las dos fracciones. En el método aritmético consiste en la multiplicación de los denominadores de ambas fracciones, este paso permite determinar el término que forma el denominador de la nueva fracción.
3. Posteriormente, se deben observar los cuadrados de color rojo y los cuadrados de color azul que se formaron adentro de la rejilla. Ahora el procedimiento tiene una variación importante con respecto a la suma, y es que por ser el producto una operación de intersección, sólo se cuentan los cuadrados de la rejilla que están superpuestos (rojo sobre azul), es decir sólo los que se intersectan.

Procedimiento

El procedimiento inicial es idéntico al de la suma, acá no hay problema si se superpone cualquiera de los cuadrados porque en la multiplicación se aplica también la conmutatividad y de la misma forma que la operación suma de conjuntos, el producto es la operación de la intersección, veamos la Figura 9.



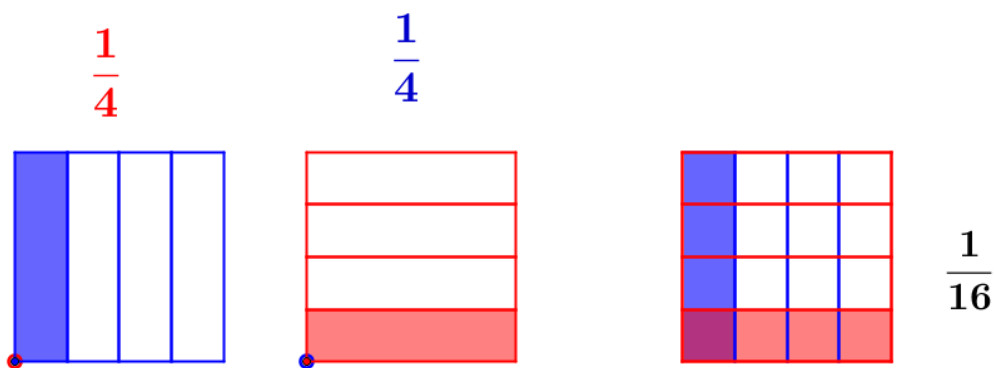


Figura 9. Ejemplo de una multiplicación de fracciones mediante el método gráfico.

Como se observa el procedimiento es muy simple al ser el producto una intersección, se puede observar que únicamente se intersecan un cuadrado rojo con uno azul, este será el numerador y el denominador lo conforma el total de cuadrados que resultan de superponer tanto el polígono rojo sobre el polígono azul, en la Figura 10, se muestra detallado el resultado de la operación.

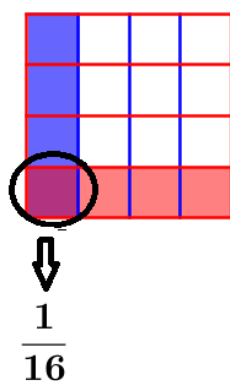


Figura 10. Procedimiento para realizar la multiplicación de dos fracciones.

Nótese que sólo se cuentan el total de cuadrados que se intersecan.

El objetivo final es que los estudiantes relacionen el método gráfico con el aritmético y puedan pasar de manera sencilla del pensamiento concreto al abstracto.

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1 \times 1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

Para interactuar con el aplicativo de GeoGebra del producto por medio del método gráfico puede ingresar a: <https://www.geogebra.org/m/zmauwnwb>

2.4. La división de fracciones

Reglas para la realización de la operación división

1. Se tienen dos cuadrados divididos en n partes iguales cada uno de ellos, por convención se tomará un cuadrado rojo con divisiones iguales que han sido trazadas horizontalmente y un cuadrado azul dividido en n partes iguales con divisiones verticales. De ninguna manera se pueden dividir ambos cuadrados con líneas horizontales y/o con líneas verticales.
2. Se debe superponer el cuadrado rojo sobre el azul, recuerde el sustraendo es mayor que el minuendo, nótese que al superponerse ambos cuadrados se forma un nuevo cuadrado compuesto por una rejilla de cuadrados más pequeños. Este proceso es la unión de las dos fracciones.
3. Posteriormente, se deben observar los cuadrados de color rojo y los cuadrados de color azul que se formaron adentro de la rejilla. Ahora es de suma importancia entender la posición de los términos de las dos fracciones. El producto de los extremos siempre se formará con las rejillas del cuadrado que tiene las divisiones horizontales; y el producto de los medios lo conforma las rejillas del cuadrado que tiene divisiones verticales.

Procedimiento

Es importante recordar que la división de una fracción es el producto cruzado de extremos por medios:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \text{ Los extremos son } a \text{ y } d; \text{ y los medios son } b \text{ y } c$$

$$\text{Luego } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Esta es la forma aritmética cómo funciona la división, ahora observemos como se hace de manera gráfica. El procedimiento es idéntico a todas las anteriores operaciones, se deben superponer los cuadrados el rojo encima del azul, por ejemplo dividamos $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5}$

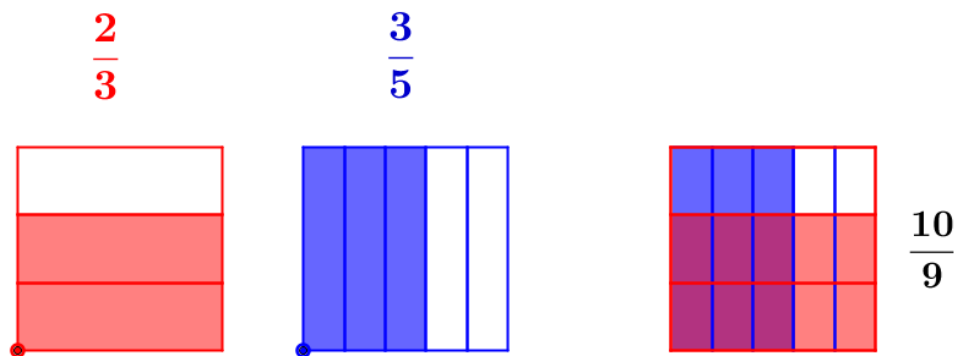


Figura 11. Ejemplo de una multiplicación de fracciones por el método gráfico.



Para este caso se debe ser cuidadoso, ya que la operación es meramente posicional, para conocer el numerador de la fracción contamos los cuadros que se forman horizontalmente (Rojos) y para conocer el denominador contamos los cuadros verticales (Azules). Nótese que no importan ya las rejillas o total de cuadros formados de la superposición. Observemos el procedimiento en la Figura 12.

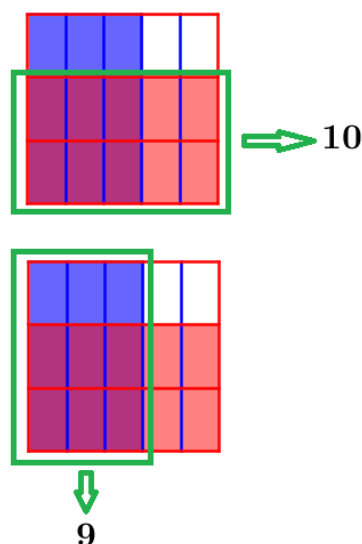


Figura 12. Procedimiento para realizar la división de dos fracciones.

Cómo se puede observar en la Figura 12, lo importante para conocer el resultado es la cantidad de cuadros que se forman tanto horizontalmente como verticalmente, sin importar las intersecciones, como se puede ver el resultado al dividir $\frac{2}{3} \div \frac{3}{5} = \frac{10}{9}$

Para interactuar con el aplicativo de GeoGebra de la división por medio del método gráfico puede ingresar a: <https://www.geogebra.org/m/rayrfysa>

3. Desarrollo de la propuesta

3.1. Diseño de la metodología

Este trabajo se enmarca dentro del enfoque cualitativo de tipo investigación acción educativa, en dónde el maestro desarrolla su práctica y la vez se convierte en investigador para transformar su quehacer pedagógico (Stenhouse, 1991), para ello se implementaron las 4 fases expuestas por Kemmis, & McTaggart (1988): Diagnóstico, planificación, observación y reflexión. En cada una de las fases enunciadas se describe el proceso metodológico utilizado para el desarrollo experimental del proyecto pedagógico de aula.

Fase Diagnóstico

Inicialmente se quería conocer el estado de conocimiento en el que se encontraban los estudiantes con respecto a las operaciones básicas de las fracciones, para ello se realizó una prueba inicial o diagnóstico y de esta forma determinar los vacíos o saberes previos de los estudiantes. Después de analizar los resultados se pudieron determinar cuáles eran los errores o dificultades de mayor frecuencia a la hora de resolver las operaciones, entre las que se destacan: Sumar o restar las fracciones como si fueran números naturales, La falsa representación de las partes de la fracción, la imposibilidad de resolver situaciones problemas que involucraran operaciones con fracciones, a continuación, se detalla la metodología utilizada en esta primera fase.

Al grupo de los 20 estudiantes se les aplicó una prueba diagnóstico para conocer sobre las conceptualizaciones previas que tenían, para ello se realizó una test compuesto de 8 preguntas en las que se indagó acerca de las nociones fundamentales de fraccionarios, operaciones básicas y solución problemas donde se involucraban las fracciones, cada ítem tenía 4 opciones de resultado y una quinta opción con el ítem *No sé* (se recurrió a esta posible respuesta en el caso particular que el estudiante no conociera la respuesta dado que en los ambientes rurales de Colombia es posible que muchos estudiantes no hayan estudiado la temática por múltiples razones y sobre todo que la institución educativa recibe cada año para grado sexto estudiantes de diversas escuelas que llegan a cursar la postprimaria). Finalmente, el estudiante debía sustentar su respuesta.

6. Al terminar la fiesta organizada por Andrés, sobró más de chocolatina y media, tal como se muestra en el siguiente dibujo:



¿Cuál de las siguientes expresiones representa la chocolatina que sobró?

- a) Siete cuartos
- b) Un medio
- c) Tres cuartos
- d) Cuatro tercios
- e) No sé

Explicación _____

Figura 13. Muestra de la forma como se estructuraron las preguntas en el pretest.

Posterior a la aplicación de la prueba diagnóstica se revisaron los resultados obtenidos por los estudiantes, para ello se contabilizaron el total de preguntas correctas o incorrectas del grupo de los 20 estudiantes. En la Figura 18 se puede observar de forma detallada los resultados de la prueba y a su vez se contrastan con la prueba final. En general de los resultados se pudo concluir que existe una dificultad en la comprensión de las nociones básicas de fracción cuando estas se presentan de forma gráfica pero surge dificultad cuando se indaga a los estudiantes acerca de la fracción en un contexto. En cuanto a las operaciones matemáticas con fracciones se evidenció que solo en la multiplicación de fracciones no presentaban dificultades de forma generalizada,



presumiblemente por la linealidad de la operación, en las operaciones de suma, resta y división se presentó una deficiencia conceptual marcada.

Fase de Planificación

Una de las dificultades que encontramos los maestros a la hora de enseñar números fraccionarios tiene que ver con las operaciones aritméticas, dicha dificultad se torna compleja debido a la falta de motivación de los estudiantes por interiorizar los conceptos, tales como máximo común divisor y mínimo común múltiplo, ya que es un proceso monótono y mecánico con niveles de abstracción mayor. Pensamos entonces buscar una metodología que fuera más entretenida y que de forma lúdica ayudara a la comprensión de las operaciones, así mismo, como a las representaciones pictográficas de las fracciones propias. Una herramienta que favorece este proceso es el programa GeoGebra, lo que nos llevó a programar una serie de estrategias con ayuda del software. Es así como diseñamos 4 aplicativos para realizar las operaciones de la suma, la resta, la multiplicación y la división, posterior a ello diseñamos 4 hojas de trabajo con el propósito de que los estudiantes desarrollaran todo el trabajo para la aprehensión de los conceptos necesarios.

En un segundo momento de la planificación entrenamos a los chicos en el uso del programa para adquirir la experticia necesaria, antes de desarrollar cada una de las cuatro hojas de trabajo.

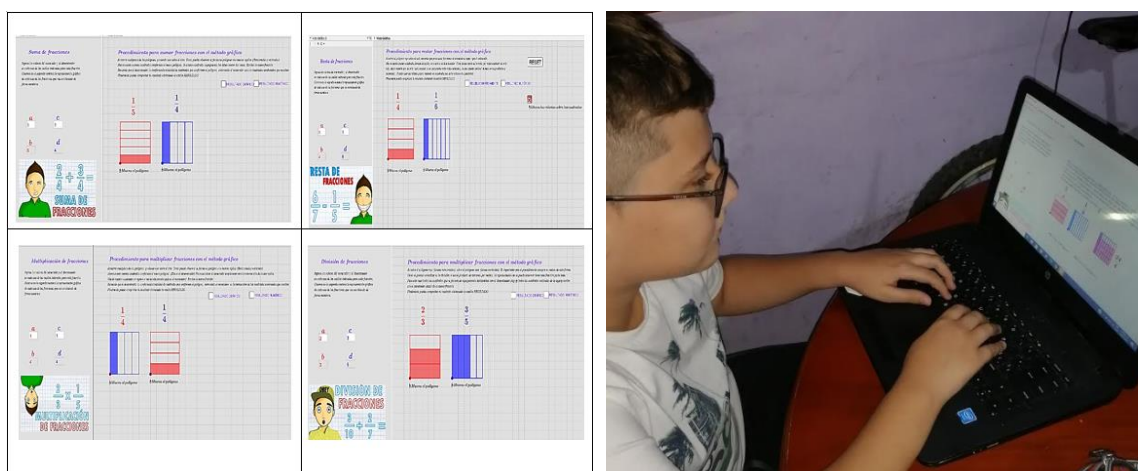


Figura 14 (a, b). a. Aplicativos desarrollados con GeoGebra., b. Momento de entrenamiento con el software.

Es importante destacar que una de los mayores limitantes de este proyecto se debió a la disrupción generada por el COVID 19, lo que obligó a la docente investigadora generar espacios de trabajo diferentes con los estudiantes y convertir su casa en el aula de clase como se aprecia en las figuras.



Figura 15. Se puede observar en cada fotografía el trabajo de entrenamiento y uso del aplicativo para resolver las hojas de trabajo.

Fase de la observación

En este momento se determinó si la aplicación de la estrategia había resultado efectiva, si las actividades eran relevantes, o cuáles se notaron de mayor dificultad para los estudiantes, se indagó de manera particular a los pupilos si había sido de fácil comprensión, si los motivaba y los llevaba a aprender de una manera más lúdica. A continuación, se enumeran algunos de los hallazgos más significativos a la hora de resolver las hojas de trabajo con ayuda del software.

1. Se notó en todo el grupo la fácil comprensión de ejercicios (Aplicación de algoritmos gráficos)

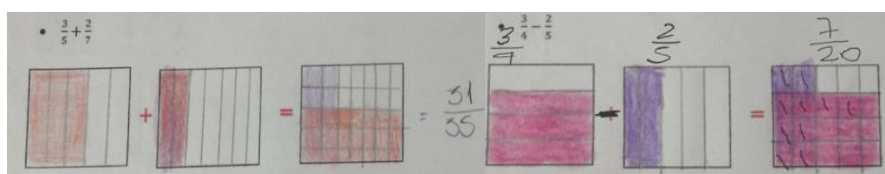


Figura 16 (a, b). a. Operación de la suma de fracciones., b. Operación de la resta de fracciones.

2. Se ganó en el uso correcto de las representaciones gráficas de las fracciones propias en la mayoría de los estudiantes.
3. La mayor dificultad presentada en el grupo tuvo que ver con la interpretación y resolución de problemas que involucraran las operaciones mixtas con fraccionarios.

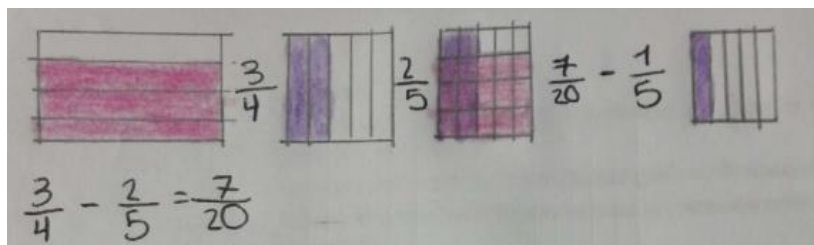


Figura 17. La mayoría de los estudiantes resolvieron la primera parte sobre la suma, pero dejaron sin terminar la parte de la resta.

Fase de reflexión

Después de hacer todo el proceso diagnóstico, planificar la estrategia, implementarla y hacer el análisis, se reflexionó sobre la eficacia de la estrategia, para ello se recurrió a varios momentos.

1. Se aplicó una prueba de salida para verificar si la intervención fue efectiva y se comparó contra la prueba diagnóstica. En la Figura 18 se muestran los resultados cuantitativos obtenidos al aplicar la misma prueba en sus dos momentos, el diagnóstico y la prueba final. Para el análisis de las respuestas los ítems fueron clasificados en tópicos, el primero se denominó noción de fracción, el segundo operación de la suma, el tercero operación resta, el cuarto operación multiplicación, el quinto operación división y el último resolución de problemas con fracciones. Como se observa en la figura mostrada, las barras de color verde representan el porcentaje de aciertos de la prueba diagnóstica por cada tópico, y las barras azules representan el porcentaje de aciertos obtenidos después de aplicar la estrategia, el contraste de ambas pruebas muestra los avances obtenidos por los estudiantes.

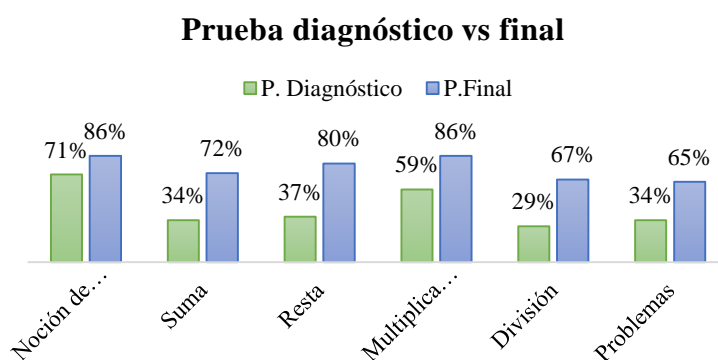


Figura 18. Resultados obtenidos de la prueba diagnóstica versus prueba final.

Los resultados muestran que luego de la intervención con la estrategia didáctica se obtuvo un crecimiento porcentual considerable en todos los aspectos que se tuvieron en cuenta en cuanto

a las operaciones con fracciones para tal efecto se muestran los porcentajes de las respuestas correctas. En las nociones de fracciones el incremento fue de un 15%, teniendo en cuenta que en el diagnóstico inicial se había tenido un acierto del 71%. La suma de fracciones aumentó un 38% teniendo en cuenta que se partió de un 34%. La resta de fracciones aumentó un 43% partiendo de un acierto inicial de 37%. La multiplicación de fraccionarios aumento un 28% partiendo de un 59% de aciertos en la prueba inicial. La división de fracciones aumento un 38% a partir de un 29% de aciertos en la prueba diagnóstica. Finalmente, la resolución de problemas con fracciones aumentó un 31% a partir de un 34% en la prueba de diagnóstico.

- Para valorar el aplicativo diseñado con GeoGebra se empleó un modelo de rúbrica llamado COdA, la herramienta COdA fue desarrollada en el marco de los Proyectos de Innovación y Mejora de la Calidad de la Docencia de la Universidad Complutense de Madrid (Fernández-Pampillón et al., 2011). Los ítems fueron valorados con una rúbrica que se muestra en la tabla 1, de acuerdo con una escala de valoración tipo Likert así: 5 = Totalmente de acuerdo; 4 = De acuerdo; 3 = Ni de acuerdo ni en desacuerdo; 2 = En desacuerdo; 1 = Totalmente en desacuerdo.

Formato de Evaluación del aplicativo	1	2	3	4	5
1. Los aplicativos diseñados con GeoGebra cumplen con el propósito para el aprendizaje de las fracciones.					
2. Los contenidos desarrollados en los aplicativos fueron amenos y didácticos.					
3. Los aplicativos ofrecen alternativas para desarrollar el pensamiento crítico.					
4. Los aplicativos son de fácil interactividad y adaptabilidad para el aprendizaje.					
5. Los aplicativos son interactivos y contribuyen con el aprendizaje y la motivación.					
6. El Formato y diseño empleado por los aplicativos es muy adecuado.					
7. Los aplicativos son de fácil uso para el aprendizaje y para su manipulación.					
8. La accesibilidad a los aplicativos es fácil y sencilla.					
9. Los aplicativos se puede usar siempre sin presentar fallas técnicas.					

Tabla 1. Modelo de rúbrica CodA para evaluar los aplicativos de GeoGebra. Fuente: Adaptada de (Fernández et al., 2011).

En general el aplicativo obtuvo respuestas satisfactorias en los 9 ítems propuestos dónde se destacan por parte de los estudiantes que el aplicativo si cumple con los propósitos de los aprendizajes, los aplicativos son didácticos, ayudan a desarrollar el pensamiento crítico, son de fácil interactividad, son motivadores para el aprendizaje ya que permiten de forma lúdica interactuar, el diseño es adecuado y además es de fácil uso permitiendo la reusabilidad.



4. Conclusiones

El trabajo con el software GeoGebra y las hojas de trabajo utilizando el método gráfico para las operaciones básicas de las fracciones demostró que es una propuesta didáctica muy útil y práctica para el trabajo de las matemáticas en el aula. El promover una estrategia que incluya el uso de la tecnología es muy atrayente para los estudiantes que se ven más motivados cuando abordan determinados temas en un aula clásica. Adicionalmente la favorabilidad que presenta el software GeoGebra en cuanto a la capacidad ilustrativa que permite visualizar los resultados en el momento en que se está generando el proceso de aprendizaje, permite que el estudiante realice los ajustes pertinentes en el momento y sienta más satisfactorios los resultados de tener una mayor autonomía y auto aprendizaje.

Bibliografía

- Elena, M., y Alvarez, V. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Relime*, 13(4-II), 423-440.
- Fazio, L., y Siegler, R. (2011). Teaching Fractions. Educational Practices Series-22. *UNESCO International Bureau of Education*.
- Fernández-Pampillón Cesteros, A. M., Domínguez Romero, E., Armas Ranero, I. de, Fernández-Pampillón Cesteros, A. M., Domínguez Romero, E., y Armas Ranero, I. de. (2011). *Herramienta para la revisión de la Calidad de Objetos de Aprendizaje Universitarios (COdA): guía del usuario*. v.1.1.
- Gómez Rodríguez, M. (2019). *Identificación de dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones y la resolución de problemas en Educación Primaria*. [Trabajo de Fin de Grado, Universitat Jaume I] <http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/184791>
- Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Laertes.
- Martínez, C., y Lascano, M. (2001). Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, *Revista EMA*, 6(2), 159-179.
- Stenhouse, L. (1991). *Investigación y Desarrollo del currículo - Versión española de Alfredo Guerra Miralles*. Morata.

Webgrafía

- Carmona-Ramírez, L. H. (2021). Recursos GeoGebra. Obtenido de <https://www.geogebra.org/u/luiskar192>

Diana Marcela Parra Cortés. Docente de educación básica Institución educativa Técnica Agrícola el Guayabo del Departamento de Tolima - Colombia, Magister en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Caldas – Colombia.
Email: dianamarcelaparracortes@gmail.com

Luis Hernando Carmona Ramírez. Docente de la Universidad Católica de Manizales – Colombia. Grupo Educación y Formación de Educadores - EFE, Magister en didáctica de las matemáticas de la Universidad de Caldas – Colombia. Especialista en Didáctica de las ciencias: matemáticas y física de la Universidad Pontificia Bolivariana Medellín – Colombia. Docente de educación básica y media adscrito a la secretaría de educación de Manizales – Colombia. Artículos publicados:

Determinación de la Ganancia en el Aprendizaje de La Cinemática Lineal Mediante el uso de Métodos Gráficos con Estudiantes de Ingeniería en la Universidad de Caldas. *Scientia Et Technica*, 23(1), 99-103. <https://doi.org/10.22517/23447214.18641>

Validación de un micromundo para la enseñanza de las matemáticas en un contexto rural. *Revista ESPACIOS*, 41(28), 290 – 300.

<https://www.revistaespacios.com/a20v41n28/a20v41n28p22.pdf>

Email: lucarmona@ucm.edu.co

Recursos GeoGebra: <https://www.geogebra.org/u/luiskar192>

