ISOMETRÍA EN NUESTRO ENTORNO

Ceneida Fernández Verdú

Ceneida Fernández Verdú
Departamento de Matemáticas
E.U. de Magisterio de Albacete
ceneida.fernandez@uclm.es

1.- Introducción

Nuestro entorno está formado por objetos colocados en multitud de posiciones y formas. A veces, la naturaleza, o el hombre, se vuelven caprichosos en sus disposiciones apareciendo objetos con formas geométricas.

Por ello, aunque una isometría es una noción matemática, presenta gran conexión con el mundo real. Un hecho evidente es que el hombre puede observar su entorno y encontrar una gran variedad de elementos geométricos creados a partir de isometrías. Esta cualidad hace que, desde el punto de vista didáctico, se favorezca la enseñanza de las isometrías, resultando éstas atractivas para la mayoría de los estudiantes.

El artículo comienza con las nociones de transformación e isometría a través de los conceptos de traslación, giro y simetría. En la segunda parte se expondrán ejemplos de isometrías de nuestro entorno cotidiano y, en el último apartado, se mostrarán algunas teselaciones en el arte, la pintura y la arquitectura.

2.- ¿Qué son las isometrías?

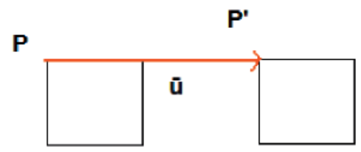
Para poder definir el término isometría hay que comprender el concepto de transformación. La idea de transformación está asociada a la de cambio. Cuando una transformación se aplica a un objeto provoca en él una alteración relativa a alguno de sus atributos. Hay varios tipos de transformaciones; entre ellas, las que cambian el tamaño o la forma de un objeto o una figura. Algunos ejemplos de este tipo de transformaciones son las *dilataciones* o *ampliaciones,* que cambian el tamaño de un objeto pero no cambian su forma; y las transformaciones, que no cambian ni el tamaño ni la forma, como por ejemplo las *traslaciones*, *rotaciones* y las *simetrías*.

Las transformaciones geométricas que conservan el tamaño (distancias) y la forma (ángulos) son conocidas como **isometrías** o movimientos. Luego las simetrías, rotaciones y traslaciones son isometrías.

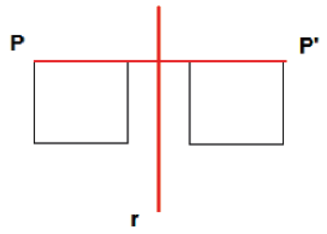
Habitualmente realizamos isometrías en nuestras actividades cotidianas; por ejemplo, al desplazarnos de un lado a otro de la clase en línea recta nos estamos *trasladando*; al conducir hacemos *giros* con el volante y, si nos miramos en un espejo, la imagen que se obtiene sería nuestra *simetría*.

No obstante, para que queden bien aclarados estos términos, pasaremos a mostrar la definición matemática de cada uno de estos movimientos[1]. Las traslaciones son transformaciones que quedan determinadas por un vector. Una traslación de vector $\bar{u}$ es una transformación que asigna a cualquier punto P del plano otro punto P’ de manera que PP’ = $\bar{u}$. Se dice que P’ es la imagen de P por la traslación de vector $\bar{u}$.

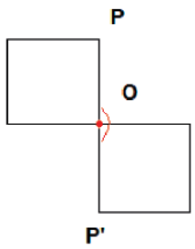
[1] Carrillo, J; Contreras, L.C. (2001), pp. 427-447



Las simetrías axiales o reflexiones son transformaciones que quedan determinadas por una recta (eje de simetría). Una simetría de eje r es una transformación que asigna a cualquier punto P del plano otro punto P' de manera que PP' es perpendicular a r y la distancia de P a r sea igual que la de P' a r.



Los giros o rotaciones son transformaciones que quedan determinadas por un punto (centro) y un ángulo orientado. Un giro de centro O y ángulo a es una transformación que asigna a cualquier punto P del plano otro punto P' de modo que a sea el ángulo formado por POP' y la distancia de P al centro sea la misma que la de P' al centro.



La rotación de la figura anterior corresponde a un giro de 180 grados, donde el centro de giro está marcado en rojo. A los giros de 180 grados también se les conoce como simetrías centrales. Hay que precisar que estas simetrías, por su definición, no poseen eje, sino centro de simetría. De esta forma, una simetría central de centro O es una transformación que asigna a cualquier punto P del plano otro punto P', de manera que O pertenece a la recta que pasa por P y P' y la distancia de P a O es la misma que la de P' a O.//

Para finalizar con estas definiciones, hay que mencionar que, en la práctica, no suele darse un movimiento simple, sino una composición de varios movimientos. Por ejemplo, si alguien dice: 'date la vuelta y ven hacia mí', se ha de efectuar un giro de 180 grados y una traslación. La realización consecutiva de dos movimientos se denomina composición o producto de movimientos.

3.- Isometrías de nuestro entorno cotidiano

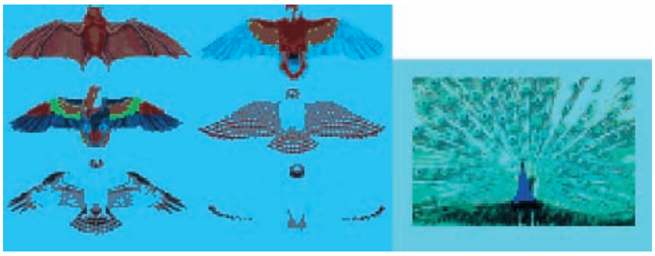
Pocas nociones matemáticas muestran una conexión mayor con el mundo real que las isometrías, ya que, sin duda, el origen de la observación de elementos geométricos por el hombre se encuentra en la naturaleza. Esto es importante no sólo por la abundante presencia de objetos, animales y plantas en los que apreciamos traslaciones, rotaciones y simetrías, sino que además, es relevante el hecho de que, al mostrar en la naturaleza este lado matemático, es posible que se convenzan hasta los más escépticos, de que la geometría, puede llegar a ser un arte de gran belleza. Sin más dilación, trataremos de dar sentido a estas palabras con las siguientes imágenes.


Si nos fijamos en la parte matemática de estos dibujos, podemos apreciar una simetría con respecto a un eje vertical situado justo en el centro de las mariposas. En este primer análisis visual, vemos cómo un insecto tan común como la mariposa es fascinante no sólo por la complejidad de sus colores y formas, sino por la parte geométrica. Seguidamente incluimos un conjunto de mariposas en el que se ve reflejado ese laberinto de colores y formas al que antes hacíamos referencia.

Además de las mariposas, existen otros insectos que también son comunes en nuestros paseos cotidianos en los que cabe destacar la presencia de isometrías. Podemos hablar de mariquitas, en las que, del mismo modo que sucedía con las mariposas, se observa una simetría con respecto a un eje vertical situado en el centro de dicho animal.

Pasemos ahora de los insectos al mundo marino, donde también encontramos una gran diversidad de ejemplares en los que podemos admirar isometrías. Así, vemos que las tortugas de mar tienen todo su caparazón repleto de hexágonos que encajan a la perfección unos con otros, y que consiguen ese deseoso efecto de armonía que tanto perseguimos. Además, otros animales marinos en los que podemos observar simetrías con respecto a ejes verticales son los peces manta y, cómo no, las estrellas de mar que poseen una simetría de rotación. A continuación mostramos la diversidad de imágenes a que dan lugar estos animales marinos.

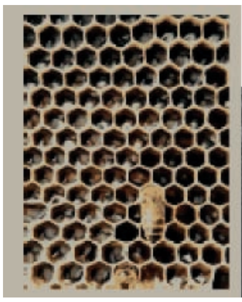
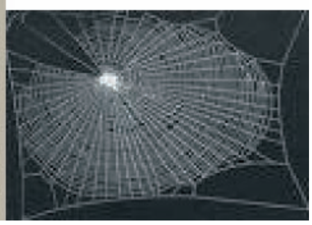
Ahora bien, ¿podemos también encontrar isometrías en el mundo de las aves? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, como se observa en las figuras que se exponen a continuación. Además, encontramos una amplia gama: halcones, murciélagos y loros; incluso la cola de un pavo real.



Mientras que en la primera figura se repite la idea de simetría con respecto a ejes verticales, en la segunda se observa la repetición de un mismo motivo fundamental que, con la ayuda de las traslaciones, hace de las plumas de este fantástico animal un espectáculo digno de admirar.

Fijémonos ahora en un animal terrestre, la cebra. Este es un gran ejemplar para nuestro estudio, debido a la gran abundancia de simetrías, como, por ejemplo, en la cabeza, y de traslaciones de esa especie de collares blancos y negros que se van reproduciendo sin cesar para acabar formando toda la piel que envuelve a este animal.

No sólo hay que pensar en la percepción de simetrías en los propios animales, sino también en creaciones propias de ellos. Así, volviendo a los insectos, las pequeñas abejas consiguen, mediante el uso de celdillas básicas hexagonales, fabricar lo que conocemos como panales de miel. Estos están formados mediante traslaciones, giros y simetrías. Pero esta no es la única creación propia de los animales. De modo semejante, la tela de araña también está construida a través de estas isometrías.

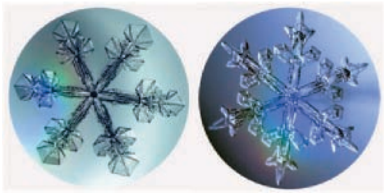
Este hecho es sorprendente, dado que nosotros hemos necesitado de todo un análisis para entender el procedimiento que conlleva la construcción de un enrejado, y luego descubrimos que la madre naturaleza les inyecta este conjunto de sabiduría desde el momento en que nacen.//

Pasemos ahora del mundo animal al mundo de las plantas. Aquí también tenemos una gran diversidad de ejemplos.

En la primera imagen y en la última se observa de nuevo esa simetría con respecto a un eje, en cambio la segunda imagen posee una simetría de giro.

No obstante, nuestros ejemplos todavía no terminan aquí. Cabe destacar que cosas tan básicas como algunas letras del abecedario, así como también varios números de nuestro sistema decimal, e incluso frutos de algunos árboles, también se prestan a nuestro servicio para proponer ejemplos que reflejan esta rama de la geometría que estamos tratando. Como veremos ahora, se puede observar la aparición de simetrías que vienen marcadas mediante líneas discontinuas en el primero de ellos, y en el segundo la simetría viene dada a través de una estrella.

Existen también algunas configuraciones naturales en las que se observan elementos geométricos, como la cristalización perfecta de un copo de nieve.

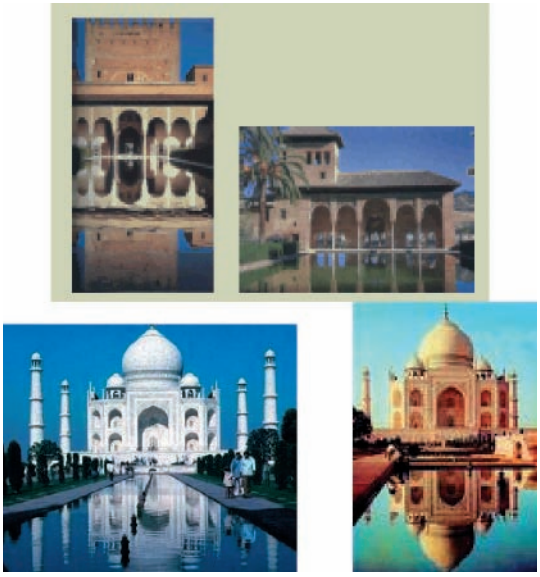


Para dar el broche final a este apartado de isometrías en nuestro entorno cotidiano, abordaremos estos movimientos, desde un punto de vista distinto al anterior, pero con el mismo pensamiento de que la geometría está presente en nuestro mundo y que vivimos con ella.



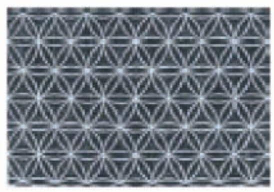
Si nos fijamos en el edificio acristalado de la primera figura, observamos que es simétrico también con respecto a un eje vertical. De forma semejante sucede en las otras dos imágenes, en las que belleza, armonía, consistencia y matemáticas, se entremezclan en un sin fin de estructuras que nos hacen más agradables nuestros paseos por la ciudad.//

Ahora bien, ya que estamos hablando de edificios, veamos cómo un espejo de agua puede dar como resultado una imagen simétrica. Las dos primeras ilustraciones se han tomado de la Alhambra.



4.- Embaldosados o Teselaciones

Cuando se buscan aplicaciones de las isometrías del plano, los cubrimientos del plano son unas de las más utilizadas en el ámbito escolar. Estos cubrimientos tienen a su favor la componente gráfica y artística, que resulta muy atractiva para la mayoría de los alumnos. Desde el punto de vista práctico, construir un cubrimiento de una región, embaldosar o teselar consiste en colocar figuras cubriéndolas, de manera que éstas no se superpongan ni dejen huecos entre ellas.



Si observamos y analizamos estos embaldosados, comprobaremos que se construyen en base a transformaciones isométricas. Las traslaciones, rotaciones y simetrías son transformaciones isométricas mediantes las cuales se puede hacer coincidir una figura consigo misma. Para su construcción, se comienza a partir de un conjunto de figuras a las cuales se les aplica movimientos y, a continuación, se reitera el proceso sobre las sucesivas imágenes que se vayan obteniendo hasta cubrir completamente la región.//

Hay tres tipos diferentes de cubrimientos: los rosetones, los frisos y los mosaicos.

4.1- Rosetones

Un rosetón es un cubrimiento de la región del plano formada por un polígono regular[2]. El motivo que se repite en éste es el triángulo obtenido al unir el centro del polígono regular con dos vértices consecutivos o con un vértice y el punto medio

[2] Basándose en la definición de Jaime, A; Gutiérrez, A. (1996), pp. 43-49.

de uno de sus lados adyacentes. No obstante, puesto que en el artículo estamos mostrando toda esta geometría en nuestro entorno cotidiano, prosigamos con algunas imágenes.

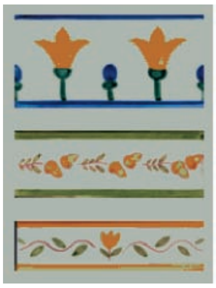
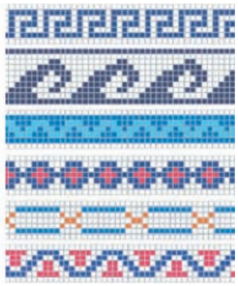
4.2- Frisos

Los frisos son cubrimientos de la región del plano limitada por dos rectas paralelas, es decir, son la ‘repetición’ de un mismo motivo a lo largo de una línea recta. Los frisos aparecen muy a menudo en la ornamentación arquitectónica, pero, aunque el arquitecto o decorador tiene libertad a la hora de escoger el elemento decorativo inicial, existen únicamente siete frisos distintos.//

A continuación, vamos a hacer un recorrido por algunas de las aplicaciones de este elemento tan sencillo y básico en la escultura, la arquitectura y la decoración.

Se observa cómo la arquitectura y la escultura emplean los frisos para embellecer sus obras. Tanto en la primera imagen como en la segunda, un mismo motivo es el que se repite mediante el uso de traslaciones, formando una estructura de geometría y armonía.//

Pero el uso de frisos no solo aparece en estos contextos, sino que a menudo aparece como elemento decorativo. Al entrar en cualquier hogar familiar de este país, es usual que encontremos que parte o la totalidad del suelo está constituido por una teselación o un friso de baldosas. Además, si observamos con más detalle, seguro que encontraremos algún cuadro cuyo marco esté ornamentado con algún motivo que constituirá, con gran seguridad, un friso. No obstante, el lugar de la casa más propicio a albergar frisos es, sin duda, el cuarto de baño y la cocina. La mayoría de hogares embaldosan sus cuartos de aseo y cocinas con teselaciones que combinan con algún friso que 'rompe' la continuidad del empapelado. En las siguientes ilustraciones mostramos algunos ejemplos de cenefas que dan lugar a nuestros agradables frisos.

Todos estos ejemplos se forman a partir de una de las isometrías: las traslaciones. Pero también podemos encontrar frisos construidos a partir de simetrías o giros.

Pero en nuestro entorno cotidiano no siempre aparecen los frisos en la decoración; también los encontramos, aunque menos bellos, en otros lugares, como, por ejemplo, en unas escaleras mecánicas o en los monitores de un hospital. Con ello queremos decir que en el presente documento sólo se ha expuesto una parte de la gran diversidad de ejemplos que podemos encontrar.

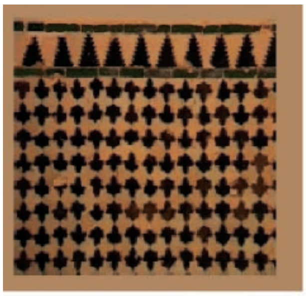
4.3- Mosaicos

Se llama mosaico a un cubrimiento de todo el plano. Se puede demostrar que hay exactamente 17 mosaicos diferentes, construidos, al igual que los frisos y rosetones, gracias a las isometrías. //

Para ilustrar los mosaicos en algunos contextos de nuestro entorno, nos centraremos en la obra del artista holandés Mauricio C. Escher y en La Alhambra. En esta última podemos encontrar estos 17 mosaicos diferentes que hemos nombrado anteriormente.

La Alhambra constituye una de las manifestaciones más grandiosas de arte geométrico. No hay que olvidar que La Alhambra fue palacio, ciudadela y fortaleza; residencia de los sultanes Nazaríes, de los altos funcionarios, de los servidores de la corte y de los soldados de élite desde los siglos XIII al XIV. El principal motivo por el que se produjo esta gran expansión de la geometría en el arte Hispano-musulmán es de carácter fundamentalmente religioso, puesto que el Corán prohibía cualquier representación icónica de Alá. Además, identificaban la debilidad con el uno, con la singularidad, lo que hacía que ningún punto de los mosaicos fuera más importante que los demás.//

Los artistas musulmanes no sólo recurrieron a la geometría para ornamentar sus obras sino a la geometría dinámica basada en la composición de isometrías en el plano, que, como ya hemos dicho, son las traslaciones, simetrías y giros. Esa gran belleza se conseguía gracias a dos factores: la aplicación de recursos de simetría y la obsesión por llenar todo el plano de forma regular y armoniosa.



Todos estos mosaicos los podemos admirar en La Alhambra. Aunque a simple vista parece que el motivo que rellena el plano no tiene relación con ningún polígono regular, podemos decir que el primero, llamado pez volador, se construye mediante la deformación de un cuadrado. A la figura que se repite en la segunda ilustración se la conoce con el nombre de hueso, y éste también se obtiene modificando un cuadrado. En cambio, la última, conocida como pétalo, se obtiene alterando un rombo.//

Pero nuestros ejemplos no finalizan aquí. Fijémonos en la siguiente imagen que corresponde a los Baños de la Alhambra. En ella podemos observar otro de los motivos que emplearon los artistas musulmanes para rellenar el plano, la pajarita nazarí, que se construye mediante la modificación de un triángulo equilátero. Además, podemos observar uno de los 17 tipos de mosaicos; en este caso, el constituido por dos traslaciones de vectores independientes.

Observemos ahora las ilustraciones que se muestran a continuación, ya que están formadas por otras composiciones de grupos de mosaicos.

El primer mosaico está formado únicamente por simetrías respecto a líneas paralelas al eje de abscisas. El segundo también se constituye por simetrías respecto a ejes horizontales, pero con la salvedad de que en éste encontramos deslizamientos, esto es, traslaciones. El último mosaico se construye mediante giros.//

Y, para finalizar, acabamos con estas imágenes, donde se aprecia que la Alhambra es un lugar espectacular y digno de admirar en cuanto a su belleza y riqueza geométricas.

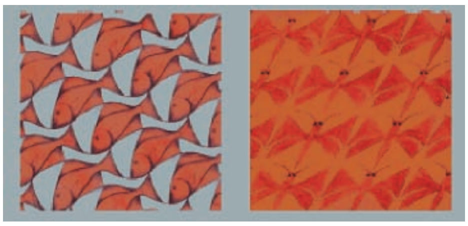
Maurits Cornelis Escher nació en el año 1808 en la provincia holandesa de Friesland. La familia Escher vivía en una majestuosa casa llamada ‘Princessehof’, que más tarde se convertiría en un museo que albergaría exhibiciones de los trabajos del propio M.C. Escher. Desde que asistió a la escuela elemental, su profesor de dibujo se interesó por su talento para la pintura, enseñándole nuevos estilos. Comenzó sus estudios en la escuela de Arquitectura y Artes Decorativas, aunque no los finalizó. Viajó por países de Europa del Sur, entre ellos Italia y España, donde visitó el museo del Prado y la Alhambra.//

A partir del año 1936, Escher comenzó a dar más prioridad a la expresión artística de las imágenes de su mente que a las de sus observaciones y sus viajes. En 1937, Escher mostró al profesor de geología, Beer, los proyectos en los que había estado trabajando: embaldosados que rellenaban el plano. Beer quedó tan impresionado por el trabajo y sus aplicaciones potenciales a la cristalografía que lo animó a que continuara en esa línea, lo cual provocó que Escher siguiera experimentando con dichas técnicas, formas y transformaciones.//

A continuación, mostraremos algunas láminas del pintor M.C. Escher, donde se verá reflejado que el estudio de los 17 grupos de mosaicos no sólo tiene interés matemático, sino que también juega un importante papel en el arte, proporcionando a los pintores técnicas para conseguir deslumbrantes resultados. A partir de ahora, nuestro objetivo se centrará en llevar acabo un estudio de una serie de grabados, intentando dilucidar ante qué grupo de empapelado nos encontramos.//

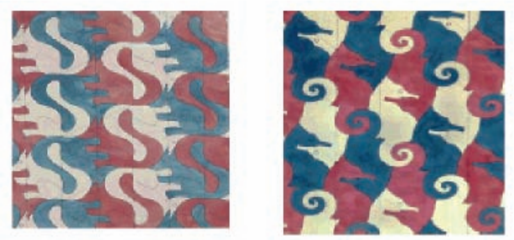
En primer lugar, hemos escogido la lámina que lleva por título *Bird*. A la vista de la figura, se observa que este mosaico se crea únicamente desplazando el pájaro que en él aparece. Luego se deduce que estaríamos ante el grupo formado por dos traslaciones de vectores independientes.

Si el lector observa los siguientes empapelados, también podrá comprobar que están constituidos por el mismo grupo que la lámina *Bird*.



Centraremos ahora nuestra atención en otro de los grabados que lleva de nuevo por título *Bird*. En este caso, el motivo que se repite es una paloma, y se observa que no siempre se encuentra en la misma posición. Luego ahora no son las traslaciones el movimiento que genera este empapelado, sino que debemos hablar de giros de 180 grados.

Al igual que en el caso anterior, observemos más grabados construidos a partir de este grupo. Las siguientes láminas tienen por título, *Squirrel* y *Sea Horse*, respectivamente.



Consideremos ahora las láminas de Escher que llevan el nombre de *Crab* y *Beetle*. En este caso, se observa con claridad que, para poder pasar el cangrejo o el escarabajo a la otra columna del empapelado, se debe hacer una simetría y, después, una traslación. A este tipo de movimiento se le conoce con el nombre de simetría con deslizamiento.

En último lugar, observemos el siguiente grabado que recibe el nombre de *Lizard*. El motivo que se repite ahora es un lagarto y, para poder rellenar el plano, se deben realizar giros de 120 grados a esta figura desde diferentes centros de giro.

Pero Escher no sólo exploró este mundo, sino que en la segunda mitad de la década de los cincuenta se interesó especialmente por los temas que comprenden la aproximación del infinito (otro concepto matemático) y el embaldosado del plano. El objetivo que perseguía el artista era expresar la infinidad dentro de los límites de un grabado. De esta época proceden la mayoría de las láminas en las cuales se aprecia cómo un mismo motivo 'encoge' hacia el centro o hacia la frontera de la pintura.

En los anteriores grabados se observa cómo haciendo uso de reptiles o demonios realiza teselaciones del plano hiperbólico.

Después de estas últimas imágenes, esperamos que este escrito haya servido para despertar la curiosidad del lector por el arte geométrico que nos envuelve y le permita observar toda esa belleza matemática que le rodea.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- Cañizares, M.J.; Serrano, L. (2001). Introducción a la geometría. *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*. Enrique Castro (Editor) pp. 369-377.
- Carrillo, J; Contreras, L.C. (2001). Transformaciones geométricas. *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria*. Enrique Castro (Editor) pp. 427-447.
- Jaime, A; Gutiérrez, A. (1996). *El grupo de las Isometrías del plano*. Editorial Síntesis, S.A. pp. 43-49.
- Pérez, A. La geometría se hace arte. (Video)
- Pérez, A. Movimientos en el plano. (Video)
- Núñez, J.A. (2000). *La Alhambra de cerca*. Granada: Edilux.
- Washington, I. (1971). *Cuentos de la Alhambra*. León: Everest.
- http://www.alhambradegranada.org/ (Última consulta: 22/01/2008)
- http://es.wikipedia.org/wiki/Maurits_Cornelis_Escher (Última consulta: 22/01/2008)
- http://aixa.ugr.es/Escher/table.html (Última consulta: 22/01/2008)
- http://www.geocities.com/SoHo/Gallery/5885/ (Última consulta: 22/01/2008)
- http://www.webcultura.net/ (Última consulta: 22/01/2008)