CONTEXTOS EDUCATIVOS, 28 (2021), 29-50. http://doi.org/10.18172/con.4970

LA PROBABILIDAD EN LOS PROBLEMAS DE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA EN ESPAÑA

José Miguel Rubio-Chueca
José M. Muñoz-Escolano
Pablo Beltrán-Pellicer
Universidad de Zaragoza

RESUMEN: Es habitual que las olimpiadas matemáticas susciten la curiosidad del alumnado de alta capacidad matemática. Por tanto, desde el punto de vista de las altas capacidades, resulta interesante analizar cómo son los problemas propuestos en este tipo de pruebas. El objetivo de este trabajo es analizar la demanda cognitiva, los lenguajes y los procedimientos de las tareas matemáticas propuestas en los problemas sobre probabilidad en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa (1989-2019) y los problemas llevados a cabo en la prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional (1990-2019). Centramos nuestra atención en los problemas de probabilidad para caracterizar también la representatividad de este contenido en las olimpiadas. Los resultados muestran que todas las tareas propuestas en las olimpiadas son de nivel alto según el modelo de demanda cognitiva, lo cual es adecuado como propuesta para estudiantes de alta capacidad matemática, con inclusión de tareas del nivel superior según ese mismo modelo, cuya resolución satisfactoria podría convertirse en un indicador de alta capacidad matemática. Por otro lado, la escasez de problemas de probabilidad en estas pruebas evidencia la necesidad de proponer más en estos concursos, promoviendo su aprendizaje en la educación secundaria.

PALABRAS CLAVE: olimpiada matemática, tarea matemática, demanda cognitiva, enfoque ontosemiótico, aprendizaje de la probabilidad.

THE PROBABILITY IN THE PROBLEMS OF HIGH SCHOOL MATH OLYMPICS IN SPAIN

ABSTRACT: Among the participants in Mathematical Olympiads, it is usual to find mathematically gifted students. Therefore, from the point of view of the research about gifted students, it is interesting to analyze the problems proposed in these events. The objective of this work is to analyze the cognitive demand, the languages and the procedures of the mathematical tasks proposed in the problems on probability in the individual tests of both the semifinal and the final in the Aragonese Mathematical Olympiad (1989-2019) and the problems carried out in the individual test of the National Mathematical Olympiad (1990-2019). We focus our attention on probability problems to characterize the representativeness of this content in the Olympics. The results show that all the proposed tasks in the Olympics are of a high level according to the cognitive demand model, which is suitable as a proposal for the high mathematical ability students, including tasks of the higher level according to the same model, whose satisfactory resolution could become an indicator of high mathematical ability. On the other hand, the scarcity of probability problems in these tests, shows the need to propose more in these contests, promoting their learning in secondary education.

KEYWORDS: Mathematical Olympiad, mathematical tasks, cognitive demand, onto-semiotic approach, probability learning.

Recibido: 13/01/2021

Aceptado: 03/05/2021

Correspondencia: José M. Muñoz-Escolano, Facultad de Educación, Universidad de Zaragoza, Calle de Pedro Cerbuna, 12, 50009 Zaragoza. Email: jmescola@unizar.es

Introducción

Numerosos estudios e investigaciones consideran de suma importancia el estudio de la probabilidad. Cualquier persona, en su día a día, debe tener conocimientos de probabilidad para tomar decisiones que le pueden afectar, emitir juicios sobre relaciones entre sucesos o efectuar inferencias y predicciones (Gigerenzer, 2002). En este sentido, la conexión de la probabilidad con la vida cotidiana es mucho más directa que el resto de los bloques de contenido de las matemáticas escolares. Inspirados por la noción de alfabetización matemática (*mathematical literacy*), que surge en el contexto de los estudios PISA de la OCDE, diversos autores como Jones (2005) o Batanero (2006, 2014), señalan la necesidad de que toda la ciudadanía alcance un alto grado de alfabetización probabilística.

Así mismo, es destacable el creciente interés que recibe la enseñanza de la probabilidad y estadística debido a la necesidad mostrada por la UNESCO y otras instituciones, como el Instituto Internacional de Estadística (ISI), de ofrecer una formación estadística y probabilística a los estudiantes con la finalidad de que sean competentes en una sociedad dominada por la información (Engel, 2019). Tal demanda ha impulsado la enseñanza de la probabilidad incluyéndose en los currículos de secundaria y primaria de diferentes países. Esto responde al deseo de contar con ciudadanos alfabetizados estocásticamente. Siguiendo el modelo de alfabetización probabilística propuesto por Gal (2005) se trata de ofrecer a los alumnos herramientas para contestar a preguntas cuyas respuestas no son inmediatas, a la vez que les faciliten tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Desde esta perspectiva, y de acuerdo con Batanero et al. (2016), se requiere prestar especial atención a los problemas prácticos y pedagógicos vinculados a la incorporación y tratamiento de la estocástica.

A pesar de su importancia y presencia en los currículos escolares de educación obligatoria, no existen muchos trabajos que analicen cómo los estudiantes de altas capacidades resuelven problemas de probabilidad. Normalmente, los estudiantes tienden a enfrentarse a las situaciones y problemas de probabilidad desde la intuición, lo que es fuente de sesgos de razonamiento (Borovcnik y Kapadia, 2009). Baltaci (2016) reporta que los estudiantes de altas capacidades poseen un comportamiento y habilidades diferentes a las de sus pares cuando se enfrentan a problemas de probabilidad. En su estudio señala que emplean la lógica, organizan la información de forma sistemática y emplean conocimientos probabilísticos estructurados para su resolución. Esto sugiere que los problemas de probabilidad pueden mostrarse especialmente adecuados para este tipo de alumnado.

Jaime y Gutiérrez (2014) señalan cuatro tipos de acciones habituales de apoyo extraescolar a los estudiantes con alta capacidad matemática: acciones de tipo curricular, de tipo lúdico, actividades mixtas y de resolución de problemas. Dentro de esta última categoría se ubican las competiciones matemáticas (Ortega, Berciano y Pecharromán, 2018), donde las Olimpiadas Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria (para estudiantes de 13-14 años), organizadas en España por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, son un claro y exitoso ejemplo.

Este hecho no es solo propio del contexto español, puesto que las competiciones matemáticas son una actividad usualmente realizada por estudiantes con alta capacidad matemática de gran número de países. A partir de un estudio con entrevistas a más de 230 estudiantes con altas capacidades, Olszewski-Kubilius y Lee (2004) señalan que estos concursos son una actividad extraescolar que caracteriza a estos estudiantes, por encima de otras, tanto en áreas científicas como humanísticas.

Además, Jaime y Gutiérrez (2017, p. 83) apuntan que "los estudiantes con alta capacidad matemática se sienten con frecuencia solos en el contexto de sus clases ordinarias, porque ninguno de sus compañeros tiene su capacidad matemática ni su interés por resolver problemas difíciles". De esta manera, valoran positivamente el papel de las olimpiadas matemáticas, ya que la participación en estos concursos permite a los estudiantes dotados y talentosos obtener una imagen más realista de sus habilidades (Subotnik, Miserandino y Olszewski-Kubilius, 1996).

Por otro lado, Toh (2013) señala que las olimpiadas matemáticas, más allá de ser concursos matemáticos puntuales, pueden servir como banco de recursos útiles para que los profesores elaboren tareas "ricas" con finalidades instruccionales para alcanzar dos objetivos: el desarrollo del interés de los estudiantes de altas capacidades por las matemáticas y el desarrollo de habilidades de pensamiento de orden superior en la materia.

Las olimpiadas u otros concursos matemáticos plantean diversas líneas de investigación en el campo de la didáctica de las matemáticas, si bien nuestra búsqueda bibliográfica arroja pocas referencias en este sentido. Algunos trabajos se centran en los estudiantes y analizan cómo se comportan cuando resuelven algunas de las tareas de estos concursos (Gairín y Escolano, 2009; Guinjoan, Gutiérrez y Fortuny, 2015), otros trabajos se centran en el profesor y tratan de comprender el conocimiento que ponen en juego los evaluadores de olimpiadas matemáticas al analizar errores cometidos por estudiantes (Huitrado y Climent, 2014), mientras que otros estudian los recursos tecnológicos necesarios para la creación y diseño de materiales online para la formación y preparación de estudiantes (Rotger y Ribera, 2019).

En su amplia revisión de la literatura al respecto, Jaime y Gutiérrez (2017) señalan distintas investigaciones nacionales e internacionales sobre análisis de enunciados de tareas (no necesariamente de olimpiada). En una de ellas, Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015) emplean el constructo de demanda cognitiva de una tarea (Smith y Stein, 1998) para analizar teóricamente problemas de patrones geométricos con estudiantes de alta capacidad. Este modelo es refinado y adaptado por los autores cuando es contrastado con resoluciones reales a problemas de patrones geométricos de estudiantes de alta capacidad.

Es por tanto pertinente, analizar qué tareas sobre probabilidad se proponen en las olimpiadas y qué características tienen, objetivo que asumimos en este estudio. Para ello, abordaremos este análisis desde dos perspectivas. Por un lado, puesto que Batanero (2005) muestra la necesidad de abordar todos los significados de la probabilidad en un contexto rico de lenguajes y procedimientos, estudiamos los significados de la probabilidad y configuraciones de estos objetos matemáticos primarios intervinientes en los problemas. Por otro, analizamos la demanda cognitiva para constatar si esta es de nivel alto, como cabría suponer en los problemas que aparecen en estas pruebas, tal y como sugiere Toh (2013).

Marco teórico

Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS)

El EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero, y Font, 2007, 2019) proporciona herramientas para el análisis de la enseñanza, de los recursos involucrados en ella y del aprendizaje llevado a cabo por los alumnos. Este enfoque centra su interés en las prácticas matemáticas (Godino y Batanero, 1998) cobrando gran relevancia la noción de situación-problema (tarea, problema, etc.) y los objetos matemáticos intervinientes que emergen en tales prácticas. Desde esta perspectiva, Godino, Batanero y Font (2007, 2019), proponen tipos de objetos matemáticos primarios, entendidos como "cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización". Tales objetos matemáticos primarios se pueden clasificar en:

- *Situación-problema*: tanto intra como extra-matemáticas, ejercicios, problemas, tareas, etc. que requieran desarrollar una actividad matemática.
- *Lenguaje*: términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. empleados para enunciar o resolver problemas, sea de forma escrita, oral, etc.
- *Conceptos-definición*: definiciones evocadas por el estudiante, implícita o explícitamente, al resolver una situación-problema.
- *Proposiciones*: enunciados sobre relaciones o propiedades de los conceptos que deben ser utilizados para la resolución de problemas.

– *Procedimientos*: algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc. que los estudiantes deben conocer y aplicar para la resolución de problemas.
– *Argumentos*: enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos o la solución de los problemas.

La identificación de estos objetos y cómo se articulan en lo que se denomina configuraciones epistémicas, permite delimitar los significados matemáticos presentes en los sistemas de prácticas. Ortiz, Albanese, y Serrano (2016) realizan un análisis detallado de los lenguajes empleados en libros de texto de secundaria sobre probabilidad en el marco teórico del EOS debido a la importancia que este otorga al lenguaje matemático y la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar tal lenguaje. Mientras que Gómez (2014), también usando el mismo marco del EOS, estudia los procedimientos referidos a la probabilidad en libros de texto de primaria teniendo en cuenta el significado de la probabilidad que subyace en cada procedimiento. En nuestro caso, dada la importancia que tienen los lenguajes y procedimientos, emplearemos este marco para analizar las situaciones-problema sobre probabilidad propuestas en las olimpiadas teniendo en cuenta ambos objetos matemáticos primarios, pues el significado de la probabilidad involucrado en estas se define a partir del quehacer matemático y, por tanto, con los objetos que se describen y aplican para ello.

Categorización de tareas según su demanda cognitiva

Un posible criterio de categorización de los problemas es a partir de la demanda cognitiva que la tarea implica para el sujeto que las enfrenta y desarrolla. De acuerdo con Stein, Grover y Henningsen (1996) la demanda cognitiva de una tarea puede variar según sus características propias y según cómo estas sean presentadas o realizadas. Desde esta perspectiva proponen una categorización para las tareas matemáticas de acuerdo con el tipo de pensamiento que se requiere para solucionarlas, caracterizando a las tareas matemáticas en niveles de exigencia o demanda cognitiva: memorización, procedimientos sin conexión, procedimientos con conexión y construir matemática (Smith y Stein, 1998).

Este constructo ha sido empleado exitosamente como herramienta de análisis y comparación de tareas de probabilidad en textos escolares de sexto, séptimo y octavo grado en Estados Unidos (Jones y Tarr, 2007). Por medio de esta clasificación es posible identificar y seleccionar aquellas tareas que realmente promuevan el razonamiento y la resolución de problemas, de manera que fomenten una comprensión profunda de las matemáticas (NCTM, 2014). En nuestro caso, tareas que impulsen hacia el desarrollo de una comprensión profunda de la probabilidad.

Un resumen de los cuatro niveles de demanda cognitiva de una tarea enunciados por Smith y Stein (1998) sería:

– *Nivel 1*: tareas de memorización. Involucran la reproducción de definiciones, hechos, fórmulas o reglas previamente trabajadas o aprendidas. Son tareas con un propósito claramente establecido, sin ambigüedades, y en las que no existe conexión con los conceptos o con el significado subyacente a los hechos, fórmulas o reglas reproducidas.

- *Nivel 2*: tareas de procedimientos sin conexiones. Tareas algorítmicas, donde se reclama la utilización de un procedimiento de forma muy evidente (por la instrucción o por las actividades previas). Requieren una demanda cognitiva limitada. Su propósito principal es la producción de respuestas correctas más que el desarrollo de comprensión matemática (sin conexiones con los conceptos o significados subyacentes a los procedimientos). Son tareas que no solicitan explicaciones, como mucho la descripción del procedimiento usado.
- *Nivel 3*: tareas de procedimientos con conexiones. Centradas en el significado de un concepto o procedimiento, buscando desarrollar la comprensión de conceptos e ideas matemáticas. Estas tareas sugieren pautas que seguir explícita o implícitamente, aunque son procedimientos más generales que tienen conexión con el significado o con diferentes representaciones de un concepto. Requieren cierto nivel de demanda cognitiva, al necesitar establecer una relación con las ideas conceptuales subyacentes para poder completar la tarea con éxito.
- *Nivel 4*: tareas que requieren "hacer matemáticas". Requieren de un pensamiento complejo y no algorítmico, sin sugerir un camino para seguir o responder a un camino anteriormente definido o ensayado. Estas tareas demandan la comprensión y exploración de la naturaleza de conceptos, procesos y relaciones matemáticas; y la autorregulación del propio proceso cognitivo: acceso y selección de conocimientos y experiencias relevantes, análisis de las posibles estrategias de resolución diseñadas para la tarea y sus condiciones. Por todo ello, son tareas que exigen una alta demanda cognitiva y que pueden provocar una ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.

En ocasiones, se consideran dos grandes niveles, correspondiendo los niveles 1 y 2 a una baja demanda cognitiva, y 3 y 4 a una alta demanda cognitiva.

Objetivos

El objetivo principal de este estudio es analizar los problemas que abordan contenidos de probabilidad de la Olimpiada Matemática Nacional y de la Olimpiada Matemática Aragonesa de Secundaria para 2º de ESO.

Nos planteamos caracterizar, en primer lugar, el tipo de problemas de probabilidad que se plantean en estas pruebas. Para ello, emplearemos el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), en especial su ontología de objetos matemáticos primarios, mencionados en el marco teórico, de cara a identificar los lenguajes usados en los enunciados de las tareas sobre probabilidad y significados de la probabilidad puestos en juego en los procedimientos empleados. Posteriormente, clasificaremos los problemas atendiendo a la demanda cognitiva del tipo de tareas implicadas (Smith y Stein, 1998).

De esta manera, seremos capaces de cuantificar el número de problemas de probabilidad en las olimpiadas, así como el significado de la probabilidad y procedimientos presentes en ellos. También comprobaremos si las tareas propuestas son de nivel alto de demanda cognitiva como corresponde a un concurso de este tipo, cuya resolución puede convertirse en un indicador de alumnos de altas capacidades matemáticas o nos pueden servir como recurso para atender la diversidad en las aulas de secundaria con este tipo de alumnado.

Metodología

En el estudio para la demanda cognitiva y análisis de los objetos matemáticos ligados a la probabilidad se utiliza como método el análisis de contenido (Krippendorff, 2013) realizando un estudio de tipo exploratorio-descriptivo. Para el análisis de contenido se adapta la metodología propuesta por Cobo (2003) para el análisis de objetos matemáticos primarios y de Jones y Tarr (2007) para el análisis de la demanda cognitiva en tareas de libros de texto. En primer lugar, se seleccionaron los problemas de las olimpiadas con tareas matemáticas relacionadas con la probabilidad en las fases de la semifinal y final Autonómica de Aragón y la final Nacional. En este sentido, hemos seguido un criterio similar al de Jones y Tarr (2007), basado en la identificación del término “probabilidad” y sus derivados en los enunciados de tareas de libros de texto. Posteriormente, los problemas se resolvieron por los autores del artículo, correctores de las pruebas de olimpiada de 2º ESO en Aragón, quienes discutieron posibles formas de abordarlos. Dicho análisis es el que se tomó como referencia para estudiar el significado de la probabilidad a través de los procedimientos asociados a cada problema, así como su demanda cognitiva, siendo este tipo de análisis realizado con anterioridad en distintos artículos científicos, entre otros, Jones y Tarr (2007) para la demanda cognitiva y Gómez (2014) para los procedimientos. Una vez establecidas las unidades de análisis se establecieron las categorías a considerar para codificar la información: indicadores referidos al lenguaje (Ortiz, Albanese y Serrano, 2016), indicadores referidos a los procedimientos puestos en juego para la resolución de las tareas (Gómez, 2014) e indicadores referidos a la demanda cognitiva (Smith y Stein, 1998). En cuanto a los indicadores referidos a la demanda cognitiva, las tareas que han contenido cuestiones múltiples han sido analizadas como un todo, por lo que se ha codificado cada tarea a un solo nivel. En caso de que hubiese varios niveles en una misma tarea, se escogió el nivel más alto. Finalmente, se categorizaron los problemas seleccionados realizando un análisis por triangulación por parte de los investigadores, tomando ejemplos específicos de tareas y objetos según las categorías.

Muestra y unidades de análisis

La muestra está compuesta por los problemas de probabilidad llevados a cabo en las pruebas individuales de la semifinal y final en la Olimpiada Matemática Aragonesa desde 1989 (I Olimpiada Aragonesa) al 2019 (XXVIII Olimpiada Aragonesa) y los problemas planteados en la prueba individual de la Olimpiada Matemática Nacional desde 1990 (I Olimpiada Nacional) al 2019 (XXX Olimpiada Nacional). En total se han revisado los 164 problemas de todas las olimpiadas matemáticas nacionales y los 327 problemas de las olimpiadas matemáticas aragonesas realizadas hasta la fecha, tanto en su fase semifinal como final.

Categorías de análisis

En cuanto a las categorías de análisis del lenguaje, en primer lugar, distinguimos las expresiones verbales, considerando el trabajo de Shuard y Rothery (1984), quienes distinguen las palabras del lenguaje cotidiano que se usan en los problemas con sentido específico para referirse a procedimientos que tengan que ver con la probabilidad. Dentro de las expresiones específicas, se ha diferenciado las propias de la probabilidad y las de juegos de azar (Gómez, 2014). Además del verbal, se han analizado otros registros lingüísticos siguiendo y adaptando el trabajo de Ortiz, Albanese, y Serrano (2016):

– *Lenguaje simbólico-numérico* empleado, encontrando expresiones numéricas relacionadas con los números enteros, decimales y fracciones.
– *Lenguaje simbólico-conjuntista*, que incluye en el análisis las expresiones de igualdad, operaciones aritméticas, desigualdades, aproximación, letras como símbolos y notación funcional.
– *Lenguaje tabular*, cuyo principal uso es la presentación de datos y se relaciona explícitamente con la probabilidad. La tabla de doble entrada implica un nivel de razonamiento complejo puesto que establece relaciones entre tres objetos matemáticos, relaciona las dos variables que se ubican en filas y columnas con las frecuencias absolutas que se ubican en sus celdas, además de verse como representación de un espacio muestral de un experimento compuesto. Esto es un concepto preliminar de la probabilidad conjunta permitiendo introducir de forma intuitiva su cálculo y facilitando la introducción de la probabilidad condicionada. Los tipos de tablas que analizaremos son: listado de datos, tabla de recuento, de frecuencia sin agrupar, con datos agrupados, de doble entrada y frecuencias relativas.
– *Lenguaje gráfico-diagramático*, donde se tienen en cuenta los diagramas de barra, de sectores y pictogramas puesto que sirven como base para la comprensión de la distribución de probabilidades y el significado frecuencial. Además, también podemos encontrar el diagrama en árbol para representar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio de varias etapas, pudiendo o no establecer una conexión explícita con el cálculo de probabilidades compuestas o condicionadas.

Todo ello queda recogido en la Tabla 1 donde quedan definidos los siguientes indicadores que nos ayudan al proceso de codificación para analizar los tipos de lenguaje utilizados en los problemas de probabilidad.

En cuanto a los procedimientos, se analizan los procedimientos, algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, etc. presentes en los problemas de las olimpiadas ya sea de forma implícita o explícita para resolver las situaciones problema que se exponen en los mismos, categorizando, por tanto, las tareas de acuerdo aquellos que movilizan. Siguiendo el trabajo de Gómez (2014) se han tenido en cuenta los procedimientos relacionados con los significados de la probabilidad: intuitivo, clásico, frecuencial, subjetivo y axiomático (Batanero, 2005). Dichos procedimientos se han registrado en la Tabla 2.

Tabla 1. *Indicadores utilizados en el proceso de codificación del lenguaje*

Lenguaje	Indicadores
Expresiones Verbales	LV1. Expresiones cotidianas: agrupar, asociar, calcular, clasificar, colorear, pintar, completar, construir, dibujar, diseñar, elaborar, estimar, hallar el número, interpretar, lanzar, … LV2. Específicas de probabilidad: azar, casos (favorables, posibles), conjunto, equiprobable, espacio muestral, experiencia (aleatoria, irregular, regular), experimento, … LV3. Específicas de juegos de azar: baraja, bola, bolsa, caja, cara, carta, chincheta, cubo, cruz, dado, dardo, diana, …
Lenguaje simbólico-numérico	LN1. Expresiones numéricas: enteros LN2. Expresiones numéricas: decimales LN3. Expresiones numéricas: fracciones
Lenguaje simbólico-conjuntista	LSC1. Expresiones de igualdad LSC2. Operaciones aritméticas LSC3. Desigualdades LSC4. Aproximación LSC5. Letras como símbolos LSC6. Notación funcional
Lenguaje tabular	LT1. Listado de datos LT2. Tabla de recuento LT3. Tabla de Frecuencia sin agrupar LT4. Tabla con datos agrupados LT5. Tabla de doble entrada LT6. Frecuencias relativas
Lenguaje gráfico-diagramático	LGD1. Diagramas de barra LGD2. Diagrama de sectores LGD3. Pictogramas LGD4. Diagrama en árbol LGD5. Diagramas de Venn LGD6. Fotos e ilustraciones

Tabla 2. *Indicadores utilizados en el proceso de codificación de los procedimientos*

Procedimientos	Indicadores
Relacionados con el significado intuitivo	PRI1. Distinguir fenómenos aleatorios y deterministas. PRI2. Reconocer la impredecibilidad de un resultado. PRI3. Reconocer tipos de sucesos (posibles, imposibles, seguros). PRI4. Valorar cualitativamente posibilidades. PRI5. Comparar cualitativamente probabilidades.
Relacionados con el significado clásico	PRC1. Analizar juegos de azar. PRC2. Enumerar o contar casos favorables y posibles. PRC3. Diferenciar casos favorables y no favorables. PRC4. Distinguir sucesos elementales equiprobables. PRC5. Comparar probabilidades con razonamiento proporcional. PRC6. Aplicar la regla de Laplace en experimentos simples PRC7. Decidir si un juego es equitativo o no.

Procedimientos	Indicadores
Relacionados con el significado clásico	PRC8. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos o más etapas independientes. PRC9. Asignar probabilidad conjunta en un experimento compuesto de dos o más etapas dependientes.
Relacionados con el significado frecuencial	PRF1. Enumerar o discriminar atributos en un colectivo. PRF2. Calcular la frecuencia relativa (de atributos) a partir de observaciones o datos. PRF3. Representar una distribución de frecuencias en forma tabular o gráfica. PRF4. Leer e interpretar tablas de doble entrada (experimentos compuestos). PRF5. Estimar la probabilidad a partir de ensayos repetidos. PRF6. Reconocer el carácter aproximado de la estimación del valor de probabilidad. PRF7. Análisis de experimentos en los que puede aplicarse el significado frecuencial. PRF8. Reflexionar sobre la fiabilidad.
Relacionados con el significado subjetivo	PRS1. Analizar experimentos donde la probabilidad depende de información personal.

De acuerdo con la demanda cognitiva, las tareas matemáticas vinculadas al estudio de la probabilidad fueron clasificadas de acuerdo con la disposición y taxonomía (Shuard y Rothery, 1984). Para ello se definió un conjunto de indicadores que fueron utilizados en el proceso de codificación que han quedados recogidos en la Tabla 3.

Tabla 3. *Indicadores utilizados en el proceso de codificación de la demanda cognitiva*

Tipo de tarea	Indicadores
Memorización	I1: Foco en la reproducción memorística de aprendizajes previos asociados a la probabilidad. I2: Son tareas sobre probabilidad con un propósito claramente establecido, sin ambigüedades. I3: Uso de reproducción exacta de material visto previamente para el estudio de la probabilidad en su nivel curricular correspondiente, y lo que se reproduce se establece clara y directamente.
Procedimientos sin conexiones	I1: Se usan procedimientos relacionados con la probabilidad, con una intencionalidad específica, o bien son evidentes según el nivel curricular y el planteamiento del problema. I2: Existe poca ambigüedad sobre qué se hace y cómo se hace. I3: No tienen conexión con conceptos o significados subyacentes de los procedimientos vinculados a la probabilidad que se usan. I4: Están enfocadas en producir respuestas correctas en lugar de desarrollar una comprensión de nociones asociadas a la probabilidad. I5: No requiere explicaciones o estas solo se enfocan en describir el procedimiento utilizado.

Tipo de tarea	Indicadores
Procedimientos con conexiones	I1: Se focalizan en el uso de procedimientos con el propósito de desarrollar niveles profundos de comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad. I2: Sugieren, explícita o implícitamente, caminos a seguir que son procedimientos amplios y generales que tienen conexiones cercanas con el significado o con diferentes representaciones de un concepto vinculadas a la probabilidad. I3: Aunque se puede seguir un procedimiento general, no pueden seguirse sin pensar (requiere de cierto grado de esfuerzo cognitivo). Se necesitan ideas conceptuales que subyacen a los procedimientos usados para completar la tarea satisfactoriamente desarrollando una comprensión de los conceptos e ideas asociadas a la probabilidad.
Hacer matemáticas	I1: Requiere de un pensamiento complejo y no algorítmico en torno a la probabilidad. I2: El problema no sugiere, de forma explícita, un camino predecible. I3: Requiere que los estudiantes exploren y comprendan la naturaleza de los conceptos, procesos y relaciones vinculadas a la probabilidad. I4: Requiere que los estudiantes accedan a conocimientos y experiencias relevantes en torno a la probabilidad y que hagan uso de ellas al resolver el problema. I5: Requiere que se analice la tarea y se examinen las restricciones de la misma pudiendo darse alguna limitación. I6. Requiere una alta demanda cognitiva que puede provocar una cierta ansiedad inicial dada la naturaleza impredecible del proceso de resolución requerido.

Es evidente, que la asignación de tareas a las categorías de la demanda cognitiva ha sido discutible. En todo caso, en la caracterización y asignación de la categoría, se ha tenido en cuenta las circunstancias (concursantes de olimpiadas), la edad (13-14) y los conocimientos (partimos del currículo oficial de 1º y 2º ESO).

Análisis de los resultados

Una vez seleccionadas las unidades de análisis se codificaron de acuerdo con los indicadores descritos. Para ello se dicotomizaron asignando puntuaciones a cada indicador según su presencia (1) o ausencia (0) en cada uno de los problemas sobre probabilidad. Ello nos ha proporcionado poder obtener unos resultados objetivos que manifestamos a continuación de nuestro estudio.

Representatividad de los problemas vinculados a la probabilidad

En la fase semifinal de la Olimpiada Autonómica, de 162 problemas, solo dos problemas (1,2%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad, mientras que, en la final de la Olimpiada Autonómica de 165 problemas, se identifican un total de cuatro (2,4%).

Tabla 4. *Distribución por Olimpiada de los problemas de probabilidad*

Olimpiada	Nº Problemas	Nº Problemas Probabilidad
Autonómica (semif.)	162	2
Autonómica (final)	165	4
Nacional	164	8

De la Tabla 4 se desprende que, en total, en la Olimpiada Autonómica de 327 problemas analizados seis (1,8%) tienen que ver con la probabilidad. De la misma manera, analizando los problemas de la fase nacional, de 164 problemas en ocho (4,8%) se tiene que realizar alguna tarea relacionada con la probabilidad. Por tanto, se analizaron 491 problemas, de los cuales 14 (2,8%) corresponden a tareas relacionadas con la probabilidad.

Lenguaje y procedimientos en los problemas de probabilidad propuestos

Veamos en primer lugar el lenguaje referido a las expresiones verbales empleadas en las tareas.

Tabla 5. *Expresiones verbales y frecuencia en los problemas de las Olimpiadas*

Categoría	Aut. (S)	Aut. (F)	Nac	Total
Expresiones cotidianas	7	8	32	47
Específicas de probabilidad	2	6	26	34
Específicas de juegos de azar	13	29	30	72

Observando la Tabla 5, es destacable el predominio de las expresiones verbales específicas de juegos de azar, seguidas de las cotidianas y específicas de probabilidad.

En cuanto a las expresiones numéricas, aparecen los números enteros en los problemas de las olimpiadas (Autonómica y Nacional). Sin embargo, no aparecen expresiones numéricas con decimales y solo en la fase nacional aparecen las fracciones. La importancia del tipo de expresión numérica en problemas de probabilidad es un aspecto tratado por algunos autores. Gigerenzer (1994) o Díaz y de la Fuente (2005) sugieren que la dificultad de los problemas de probabilidad y en particular, los de probabilidad condicional, es mucho menor si los datos se dan en términos de frecuencias absolutas (números enteros) que si se presentan como probabilidades (números decimales) o proporciones (fracciones) y, de hecho, también tiene una clara influencia en la validez que un corrector asigna a la resolución de una tarea de probabilidad (Gairín, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2013). En este sentido, mostramos en la Figura 1 un problema que contiene expresiones verbales cotidianas ("lanzar", "obtener", ...), específicas de probabilidad ("probabilidad") y específicas de juegos de azar ("moneda", "cara", ...) predominando las específicas de juegos de azar. Además, emplea el lenguaje simbólico numérico de enteros en el enunciado y fracciones en cuatro de las opciones que dan como solución.

Figura 1. *Problema con predominio lenguaje específico de juegos de azar y lenguaje numérico con números enteros y fracciones*

11.- Arturo lanza dos veces una moneda. Por cada cara obtiene 2 puntos, por cada cruz 1 punto. Benito lanza un tetraedro con las caras numeradas de 1 a 4.

¿Cuál es la probabilidad de que ambos obtengan la misma puntuación?

A) 3/4 ; B) 1/2 ; C) 1/3 ; D) 1/4 ; E) Nada de lo anterior

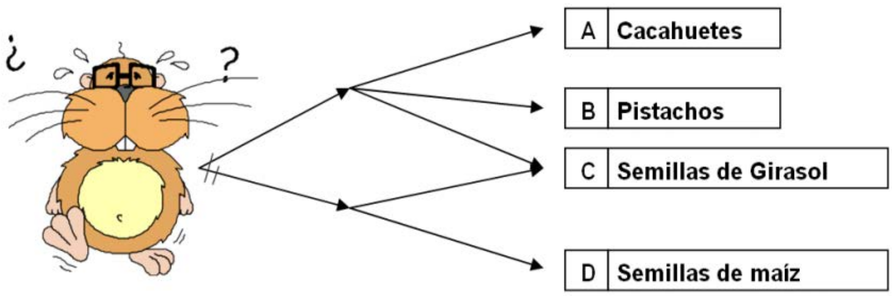
Un ejemplo del uso del diagrama de árbol se observa en el problema 5 en la XV Olimpiada Nacional de 2004 (Figura 2). Dicho gráfico representa un diagrama de árbol en dos etapas. El uso del diagrama de árbol se considera fundamental como recurso para la probabilidad y combinatoria (Roldán, Batanero y Beltrán-Pellicer, 2018).

Figura 2. *Problema con diagrama de árbol*

Problema 5 Hámster indeciso

Un hámster, para llegar a sus alimentos preferidos, ha de elegir entre los caminos que conducen a las cuatro salidas: A, donde están los cacahuetes; B, en la que hay pistachos; C, que tiene semilla de girasol y D, en la que hay semillas de maíz.

Averigua, fijándote en el gráfico de abajo, las probabilidades que tiene de llegar a cada una de esas salidas y a cuál llegará con más probabilidad.

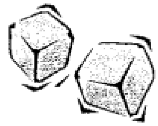


Las fotos e ilustraciones que aparecen en los problemas se usan para contextualizar los enunciados u ofrecer información relevante para su resolución. Mostramos dos ejemplos de fotos e ilustraciones de dados con finalidades distintas. Por un lado, en la Figura 3 se muestra una tarea en la que la ilustración sirve para contextualizar. En el enunciado del problema aparecen dos dados simulando el lanzamiento de estos, lo que enmarca el experimento aleatorio: lanzamiento de dos dados cúbicos. Otro ejemplo distinto, en contraste con el anterior, se aprecia en la Figura 4, una tarea en cuyo enunciado se muestra información necesaria y relevante para su resolución ya que en la ilustración aparecen los desarrollos de los tres dados cúbicos con los puntos correspondientes a cada cara.

Figura 3. *Problema con ilustración contextualizando la situación*

Problema 2

JUEGO PARA DOS (TÚ Y YO)



Tenemos tres dados con las caras pintadas: uno con tres caras azules y tres caras verdes, otro con dos caras azules y cuatro verdes y el tercero con todas las caras verdes.

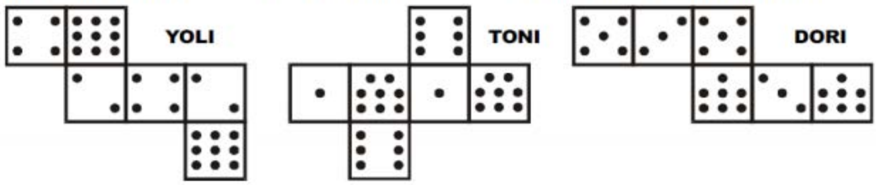
El juego consiste en lanzar dos dados (uno tú y otro yo): si las caras son del mismo color ganas tú y si salen de distinto color gano yo.

Si yo elijo para lanzar el dado de las tres caras verdes y tres caras azules ¿qué dado elegirías tú?

Figura 4. *Problema con información relevante en la ilustración y demanda cognitiva "hacer matemáticas" con indicadores 1, 2, 3, 4*

Problema 6 Dados en La Barrosa

Yoli, Toni y Dori veranean en la chiclanera playa de La Barrosa. Una tarde, mientras hacen la digestión del bocata de tortilla, los tres amigos juegan lanzando sus particulares dados sobre la toalla de Yoli. Los desarrollos de cada uno de los dados son los siguientes:



En cada partidilla lanzan sus dados los dos amigos que se enfrentan y gana quién obtiene más puntos. Pues bien:

a) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Yoli y Toni?
b) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Toni y Dori?
c) ¿Quién tiene más posibilidades de ganar si se enfrentan Dori y Yoli?
d) Como Yoli es más alta que Toni y Toni más alto que Dori, obviamente Yoli es más alta que Dori. ¿Se cumple esa lógica en el juego anterior? ¿Podrías elegir entonces uno de los tres dados para tener más posibilidades de triunfar?

En cuanto a los procedimientos, en la Tabla 6 se puede observar el número de veces que aparecen en los problemas de las distintas olimpiadas. Varios de los procedimientos vistos en la tabla pueden ser usados en un mismo problema.

Se observa en dicha tabla que el 96,7% de los procedimientos identificados en las tareas se corresponden a procedimientos relacionados con el significado clásico, destacando la regla de Laplace (23%) y enumerar casos favorables (23%). En efecto, en todos los problemas, aparece en algún momento como procedimiento la aplicación de la regla de Laplace y enumerar casos favorables en el experimento. Los porcentajes respecto a los procedimientos son similares tanto en la olimpiada nacional como en la autonómica (fase semifinal y final), variando menos de cinco puntos.

Tabla 6. *Procedimientos y frecuencia de veces que aparecen*

Procedimientos	Indicadores	Aut. (S)	Aut. (F)	Nac.	Total
Procedimientos (significado clásico)	PRC1	1	3	4	8
	PRC2	2	4	8	14
	PRC3	1	3	7	11
	PRC4				
	PRC5				
	PRC6	2	4	8	14
	PRC7		1		1
	PRC8	1	3	4	8
	PRC9	1	1	1	3
Procedimientos (significado frecuencial)	PRF1				
	PRF2				
	PRF3				
	PRF4				
	PRF5				
	PRF6		1	1	2
	PRF7				
	PRF8				

Por otro lado, no aparecen como era de suponer, procedimientos con significados intuitivos y subjetivos. Y, pese a estar en el currículo básico como contenido en el bloque 5 (estadística y probabilidad) de 1º y 2º ESO, solo el 3,3% de los procedimientos puestos en juego para la resolución de los problemas asociados en nuestro estudio a la probabilidad se relacionan con el significado frecuencial.

En el siguiente ejemplo (Figura 5) se muestra el problema correspondiente a la fase final de la XXIII Olimpiada Aragonesa con procedimientos relacionados con el significado clásico (PRC1, PRC2, PRC3, PRC6, PRC7, PRC8 y PRF6). Para resolverlo debemos averiguar las piruletas que se debería llevar cada concursante cuando gana el juego, comparando las probabilidades.

Figura 5. *Problema con procedimientos: PRC1, PRC2, PRC3, PRC6, PRC7, PRC8, PRF6*

Problema 4. *Juego para dos*

Tenemos un montón de piruletas. Se lanzan dos dados cúbicos y se calcula el producto de los dos números que salen. Si el resultado es par Carlos coge una piruleta; si el resultado es impar, ¿cuántas piruletas debe coger Pilar para que el juego sea justo? (que el juego sea justo significa que si se repite un número elevado de veces los dos se llevan aproximadamente el mismo número de piruletas)

En la Figura 6, encontramos un ejemplo en el que se debe tener en cuenta un procedimiento relacionado con el significado frecuencial es el correspondiente al problema 5 de la XII Olimpiada Nacional (2001). Tanto en el apartado 5.1 como en el 5.2 debemos justificar el resultado basándonos en la ley de los grandes números como aproximación a la probabilidad teórica. Ello nos ayudará a dar una estimación del posible resultado.

Figura 6. *Problema con procedimientos: PRC1, PRC2, PRC3, PRC6, PRC8, PRF6*

Problema 5 ¿Confías en el azar?

5.1.- Se tiene once galgos con dorsales numerados de 2 al 12, ambos inclusive.

Se lanzan dos dados y la suma de las caras superiores de ambos indica el galgo elegido, que avanza una FILA. Gana la carrera el galgo que llega primero a la FILA número 10.

a) Si tuvieras que elegir un galgo, ¿qué dorsal prefieres? ¿Por qué?

b) Haz una clasificación de cómo crees que llegarán a la meta los distintos galgos. Explícalo.

5.2.- Rafael y Noemí realizan un juego que consiste en lanzar al aire dos dados. Calculan el producto de los números que aparecen en las caras superiores. Si el producto sale par gana Rafael y si sale impar gana Noemí.

a) ¿Te parece justo el juego? ¿Por qué?

b) Si se repitiera el juego 360 veces, ¿cuántas veces crees que ganaría cada uno?

Demanda cognitiva de los problemas de probabilidad propuestos

En las Tablas 7 y 8 se observa el número de problemas de probabilidad según el nivel de demanda cognitiva y el número de indicadores asociados al nivel cognitivo en los problemas de probabilidad en las diferentes olimpiadas (Autonómica Semifinal, Autonómica Final, Nacional).

Tabla 7. *Número de problemas según el nivel de demanda cognitiva*

Nivel Cognitivo	Aut. (S)	Aut. (F)	Nac.
Memorización	0	0	0
Procedimientos sin conexión	0	0	0
Procedimientos con conexión	2	4	4
Hacer matemáticas	0	0	4

Tabla 8. *Porcentaje de presencia de los indicadores que caracterizan a las tareas matemáticas sobre probabilidad para cada Olimpiada*

Nivel Cognitivo	Indicadores	Aut. (S)	Aut.(F)	Nac.	Total
Procedimientos con conexión	I1	33,3	33,3	14,3	21,7
	I2	33,3	33,3	14,3	21,7

Nivel Cognitivo	Indicadores	Aut. (S)	Aut.(F)	Nac.	Total
Procedimientos con conexión	I3	33,3	33,3	14,3	21,7
TOTAL		100 %	100 %	42,9%	65,2%
	I1			14,3	8,9
	I2			14,3	8,9
Hacer matemáticas	I3			14,3	8,9
	I4			14,3	8,9
	I5			0	0
TOTAL				57,1%	34,8%

Desgranando la información obtenida en la última columna de la Tabla 8 se observa, en promedio, un predominio total de tareas matemáticas que satisfacen los indicadores de un alto nivel de exigencia cognitiva (100%) en los problemas propuestos en las olimpiadas, destacando aquellas tareas vinculadas al uso de procedimientos con conexión (64,4%). También cabe destacar la presencia de tareas vinculadas al "hacer matemáticas" en la nacional (57,1%) frente a la autonómica (0%).

En lo que respecta a las tareas que implican un bajo nivel de demanda cognitiva, se observa que las tareas relacionadas con procedimientos sin conexión y memorización, como cabía esperar, no aparecen en ninguna de las pruebas analizadas.

Desde el punto de vista de los indicadores que se han definido para caracterizar cada uno de los tipos de tareas (Tabla 3) a partir de los resultados recogidos en la Tabla 8, es posible evidenciar cuáles son los indicadores que predominan en relación con el total de las tareas sobre probabilidad analizadas para cada olimpiada. Es importante tener presente que una misma tarea matemática puede atender a uno o más de los indicadores definidos.

En el caso de la Olimpiada Autonómica, tanto en la fase semifinal como en la final, todos los problemas requieren procedimientos con conexión, donde los indicadores que presentan mayor presencia son los indicadores 1, 2 y el 3 a partes iguales (Tabla 8).

Un ejemplo de los indicadores 1, 2 y 3 que requieren procedimientos con conexión lo vemos en el problema que exponemos en la Figura 7, correspondiente a la fase semifinal de la II Olimpiada Matemática de Aragón (1990).

Figura 7. *Problema demanda cognitiva: procedimiento con conexión. Indicadores 1, 2 y 3*

Problema 2

DADOS

Dos amigos quieren renovar el juego de los dados. Cada uno de ellos tiene un pequeño cubo en el que ha pintado varias caras de verde y el resto de amarillo.

Los dos lanzan su dado a la vez. Si salen dos caras del mismo color gana Aurora, y si los colores son distintos (una verde y otra amarilla) gana Arturo.

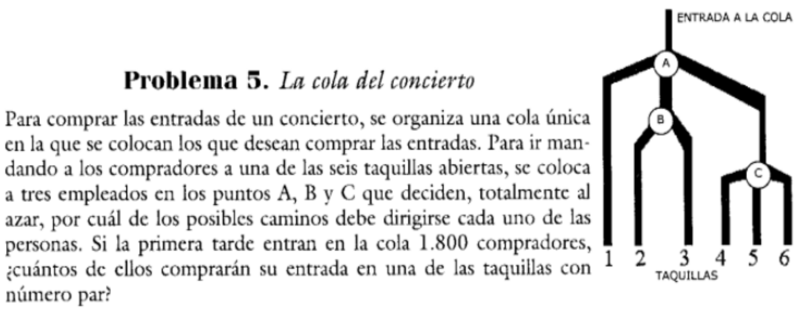
Aurora sabe que Arturo ha pintado su dado con tres caras verdes y tres amarillas. Entonces se dijo: «¿Habrá alguna manera con la que pueda aumentar mis posibilidades de ganar? ¿Cómo lo hago?».

¿Cómo crees que debería pintar el dado Aurora?

En dicho problema se determina, analizando el enunciado que se trata de un experimento aleatorio que consiste en lanzar dos dados y registrar los resultados considerando lo que sucede. Se busca desarrollar un nivel más profundo en la comprensión de la regla de Laplace, donde el alumno focaliza su atención en encontrar el espacio muestral cuando lanzamos los dos dados variando los colores. Además, se puede resolver mediante la realización de un diagrama de árbol o la construcción de una tabla de doble entrada, procedimientos sistemáticos que permiten explorar todos los casos posibles. Por último, para llevar a cabo la resolución de la tarea se considera que no puede realizarse solo con la intuición. En este caso, es necesario cierto esfuerzo cognitivo para comprender y articular el papel que juega la probabilidad del suceso intersección y la probabilidad condicionada.

En la Figura 8 mostramos como ejemplo un problema propuesto en la final de la XVII Olimpiada Matemática Aragonesa (2007), donde identificamos los indicadores de procedimientos con conexión 1, 2 y 3. Para resolver este problema, el resolutor no puede responder a la pregunta del número de personas que van a parar a una entrada con número par de forma intuitiva, debiendo usar un razonamiento probabilístico. Se busca de nuevo, un nivel más profundo del uso de la regla de Laplace en un contexto distinto que en el problema anterior. Para completar el problema de manera satisfactoria el resolutor debe poner en juego ideas y conceptos asociados a la probabilidad, como la equiprobabilidad, al elegir al azar cada persona que pasa por los puntos A, B y C para determinar un camino. El dibujo de la situación que acompaña al enunciado sugiere de forma bastante explícita un diagrama de árbol para su solución, representación vinculada al estudio de la probabilidad condicionada, lo que permitiría establecer conexiones con este objeto. No obstante, estas conexiones tendrían lugar en cursos superiores, ya que en España la probabilidad condicionada se trabaja en 4º de ESO. Para resolver el problema basta con interpretar el dibujo e ir aplicando la regla de Laplace en cada una de las divisiones de la cola.

Figura 8. *Problema demanda cognitiva: procedimiento con conexión. Indicadores 1, 2 y 3*


Problema 5. *La cola del concierto*

Para comprar las entradas de un concierto, se organiza una cola única en la que se colocan los que desean comprar las entradas. Para ir mandando a los compradores a una de las seis taquillas abiertas, se coloca a tres empleados en los puntos A, B y C que deciden, totalmente al azar, por cuál de los posibles caminos debe dirigirse cada uno de las personas. Si la primera tarde entran en la cola 1.800 compradores, ¿cuántos de ellos comprarán su entrada en una de las taquillas con número par?

En la Olimpiada Nacional predominan los problemas con procedimientos con conexión (42,87%) y "hacer matemáticas" (57,13%), donde los indicadores que presentan mayor presencia son los indicadores de procedimientos con conexión

1(14,29%), 2 (14,29%) y el 3 (14,29%) y los indicadores de "hacer matemáticas" 1 (14,29%), 2 (14,29%), 3 (14,29%), 4 (14,29%).

Un ejemplo de problema en la Olimpiada Nacional cuyos indicadores pertenecen al "hacer matemáticas" se encuentra en la Figura 4 anterior. Dicho problema se llevó a cabo en la XIII Olimpiada Nacional (2002). Para resolver el último apartado se requiere un pensamiento complejo de la probabilidad al lanzar los tres dados a la vez. El registro de datos es bastante más complejo para determinar el espacio muestral que cuando se lanzan dos dados. Además, requiere que los alumnos estudien los diferentes casos propuestos en la parte a), b) y c) del problema explorando y comprendiendo el concepto de experimento aleatorio, registro del espacio muestral (lanzamiento de dos dados) y cálculo de la probabilidad utilizando para ello la regla de Laplace para hallar quién, de los tres, tiene más probabilidades de ganar. Para averiguar el apartado d) requiere acceder a conocimientos de combinatoria para averiguar los casos favorables a cada uno de los tres jugadores al lanzar los respectivos dados. Además, requiere que los concursantes analicen y examinen activamente el enunciado comprobando que no se cumple la misma lógica argumentando el resultado con conceptos probabilísticos.

Conclusiones

De los 491 problemas olímpicos revisados, solo en 14 de ellos se observa presencia de contenidos propios de probabilidad (lenguajes y procedimientos) lo que nos permite concluir que existe poca presencia en cuanto a contenidos de probabilidad en las Olimpiadas Matemáticas Nacionales y Autonómicas. Desde 2013 se vienen celebrando Olimpiadas de Estadística (conocidas desde 2017 como Competición Estadística Europea) y, dado que forman parte de los contenidos curriculares, pensamos que en las Olimpiadas de Matemáticas deberían tener una mayor presencia la probabilidad y la estadística. Esto es algo que podría estar relacionado con los sistemas de creencias del profesorado que imparte matemáticas en las diferentes etapas educativas (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004), lo cual abre una posible línea de investigación.

En cuanto al lenguaje, es sorprendente que en ningún momento aparezca ninguno de los múltiples registros propios del lenguaje tabular en los enunciados de los problemas. No obstante, dicho lenguaje podría aparecer de forma implícita en los procedimientos llevados a cabo en la resolución de problemas propuestos para facilitar el recuento de casos favorables y el espacio muestral. La ausencia de tal registro se relaciona directamente con la ausencia de objetos asociados al significado frecuencial (Batanero, 2005). Toh (2013) señala que los problemas de olimpiadas son una fuente de tareas adecuadas para estudiantes de alta capacidad matemática. El hecho de que en la mayoría de las tareas analizadas sobre probabilidad solo aparezca representado el significado clásico puede conducir a que dichos estudiantes desarrollen un significado parcial de la probabilidad llevando a errores en razonamientos probabilísticos importantes.

Constatar, en este análisis a priori que hemos realizado, que las tareas que plantean los problemas en las olimpiadas son de demanda cognitiva alta correspondiendo en su mayoría a lenguajes específicos de juegos de azar y probabilidad con procedimientos relacionados con enumerar casos favorables y aplicación de la regla de Laplace. Únicamente encontramos tareas de nivel superior "hacer matemáticas" en la Olimpiada Nacional, lo cual sugiere que la selección de los problemas considera que los participantes en esa fase tendrán un perfil de alta capacidad matemática. Si bien este tipo de tareas de probabilidad con una alta demanda cognitiva ha estado tradicionalmente ausente en los libros de texto, recientemente se detecta una mayor presencia en las propuestas editoriales (Jones y Tarr, 2007) favoreciendo con ello la atención a la diversidad. El hecho de analizar y contar con este tipo de tareas propuestas en las olimpiadas aumenta este tipo de actividades susceptible de ser trabajadas en las aulas.

Finalmente, como limitación al estudio, hay que señalar que únicamente se han analizado los enunciados de las tareas, por lo que sería interesante analizar también cómo resuelven los problemas los participantes en las olimpiadas. Por un lado, como señalan Benedicto, Jaime y Gutiérrez (2015), los niveles de demanda cognitiva a priori pueden no corresponderse con la actividad que realiza el resolutor y, por otro lado, nos permitiría caracterizar otros objetos matemáticos primarios, como las argumentaciones, que son subyacentes a los procedimientos empleados por los estudiantes en la resolución de las tareas.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias bibliográficas

Baltaci, S. (2016). Examination of Gifted Students' Probability Problem Solving Process in Terms of Mathematical Thinking. *Malaysian Online Journal of Educational Technology, 4*(4), 18-35.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. (2006). Razonamiento probabilístico en la vida cotidiana: un desafío educativo. *Jornadas de Investigación en el Aula de Matemáticas. Estadística y azar.* Granada: Thales.

Batanero, C. (2014). Probability teaching and learning. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.

Benedicto, C., Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2015). Análisis de la demanda cognitiva de problemas de patrones geométricos. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 153-162). Alicante: SEIEM.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 4*(3), 111-130.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon, 59*, 245-260.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación matemática, 16*(1), 89-111.

Gairín, J. M. y Escolano, R. (2009). Proporcionalidad aritmética: buscando alternativas a la enseñanza tradicional. *Suma, 62*, 35-48.

Gairín, J. M., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2013). Anomalías en los procesos de identificación de errores en las pruebas escritas de matemáticas de las P.A.U. *Campo abierto: Revista de educación*, *32*(2), 27-51.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York: Springer.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice versa). In *Subjective probability* (pp. 129-161). Wiley.

Gigerencer, G. (2002). *Calculated risks: How to know when numbers deceive you*. New York: Simon & Schuster.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Gómez, E. (2014). Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria. *Tesis doctoral*. Universidad de Granada.

Guinjoan, M., Gutiérrez, Á. y Fortuny, J.M. (2015). Análisis del comportamiento de alumnos expertos resolutores de problemas en el contexto del concurso matemático Pruebas Cangur. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(1), 29-46.

Huitrado, J.L. y Climent, N. (2014). Conocimiento del profesor en la interpretación de errores de los alumnos en álgebra. *PNA, 8*(2), 75-86.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (2014). La resolución de problemas para la enseñanza a alumnos de Educación Primaria con altas capacidades matemáticas. En B. Gómez, L. Puig (Eds.)*, Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán* (pp. 147-190). Valencia: PUV.

Jaime, A. y Gutiérrez, Á. (2017). Investigación sobre estudiantes con alta capacidad matemática. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp.71-89). Zaragoza: SEIEM.

Jones, G. A. (Ed.) (2005). *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*. New York: Springer.

Jones, D. L. y Tarr, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle grades mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal,* 6(2), 4-27.

Krippendorff, K. (2013). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

NCTM. (2014). *Principles to action: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics: United State of America.

Olszewski-Kubilius, P. y Lee, S. (2004). The role of participation in in-school and outside-of-school activities in the talent development of gifted students. *Journal of Secondary Gifted Education, 15*(3), 107-123.

Ortega, T., Berciano, A. y Pecharromán, C. (2018). *Complementos de formación matemática*. Madrid: Síntesis.

Ortiz, J.J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM

Roldán, A., Batanero, C. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). El diagrama de árbol: un recurso intuitivo en Probabilidad y Combinatoria. *Epsilon, 100*, 49-63.

Rotger, L., y Ribera, J. M. (2019). Designing a Video Course. The Case of the Online Course of Mathematical Olympiads. En *International Workshop on Learning Technology for Education in Cloud* (pp. 79-89). Springer, Cham.

Smith M. S. y Stein, M. K. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 344-350.

Shuard, H. y Rothery, A. (Eds.) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American educational research journal*, *33*(2), 455-488.

Subotnik, R. F., Miserandino, A. D. y Olszewski-Kubilius, P. (1996). Implications of the Olympiad studies for the development of mathematical talent in schools. *International Journal of Educational Research, 25*, 563–573.

Toh, T. L. (2013). Mathematics Competition Questions and Mathematical Tasks for Instructional Use. En B. Kaur (Eds.) *Nurturing Reflective Learners in Mathematics: Yearbook 2013* (pp. 189-207). Singapore: World Scientific, AME.