Experiencia con estudiantes de primer año de la educación secundaria al poner en juego la noción de proporcionalidad

María Florencia Cruz
Valentina Soledad Albrecht
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *Se presenta una experiencia en la que se aborda la noción de proporcionalidad con un grupo de estudiantes de primer año del nivel secundario de Santa Fe (Argentina). Se estudian errores que se manifiestan en las producciones escritas al resolver tareas en las que se modifican variables didácticas.*
El análisis de lo acontecido en la experiencia pone de manifiesto la necesidad de cambios que pueden ser beneficiosos para la formación de jóvenes en torno a la noción de proporcionalidad.
Palabras claves: *Educación secundaria, Errores, Proporcionalidad, Variables didácticas.*

Experience with first year high school students when bring into game the proportionality notion

Abstract: *Here we present an experience addressing the proportionality notion with a group of first year high school students from Santa Fe (Argentina). We study the errors showed up in written productions when solving tasks where the didactic variables are modified. The analysis of the experience manifests the necessity of changes that can be beneficial for the student's formation around the proportionality notion.*
Keywords: *High school education, Errors, Proportionality, Didactic variables.*

INTRODUCCIÓN

Se considera que las propuestas de enseñanza deben promover el "hacer matemático" en el aula, lo que implica, la construcción y producción de conocimientos matemáticos.

La presencia de conocimientos y experiencias, escolares y cotidianas, que resultan adecuados para la resolución de ciertas tareas son factores determinantes en la construcción de nuevos conocimientos. Sin embargo, aplicar conocimientos disponibles en nuevas situaciones puede producir respuestas inadecuadas.

Los razonamientos equívocos de los estudiantes se manifiestan con la presencia de errores en las resoluciones de tareas propuestas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje (Socas, 1997). Según Rico (1998) los errores forman parte del proceso de construcción y elaboración del conocimiento humano, y en particular, del conocimiento científico. Este autor, sostiene que en la mayoría de los casos los errores "no aparecen por azar, sino que surgen en un marco conceptual consistente, basado sobre conocimientos adquiridos previamente" (p.193).

Atendiendo a las consideraciones realizadas se presenta una experiencia de aula. De lo sucedido en la misma, se focaliza en el estudio de errores que manifiestan producciones escritas de estudiantes de primer año del nivel secundario de la provincia de Santa Fe (Argentina) cuando se modifican variables didácticas en tareas de proporcionalidad. En particular, se analiza una clase en su escenario natural con el fin de potenciar la comprensión de la propia práctica docente, repensar la misma y mejorarla. Un análisis cuidadoso puede redundar en beneficios para pensar los procesos de enseñanza y de aprendizaje que involucran la noción de proporcionalidad en la educación secundaria.

La importancia de abordar la temática mencionada se evidencia en los núcleos de aprendizaje prioritarios para 7º año de la educación primaria y 1º año de la educación secundaria (2011) formulados por el Ministerio de Educación de Argentina. Los mismos plantean la necesidad de que se pongan en juego tareas en las que se produzca "el análisis de variaciones en situaciones problemáticas que requieran reconocer y utilizar relaciones directamente proporcionales usando distintas representaciones" (p.20). A su vez, destacan la necesidad de que se analicen "propiedades de las relaciones de proporcionalidad directa (al doble el doble, a la suma la suma, constante de proporcionalidad)" (p.20).

Asimismo, diversas investigaciones en el campo de la educación matemática señalan que la noción de proporcionalidad sigue siendo un objeto que produce dificultad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, y por tanto es importante estudiar en torno a la misma para lograr impactos y cambios en el sistema educativo (Fernández y Llinares, 2012; Obando, Vasco y Arboleda, 2014 y Burgos y Godino, 2019)

Las consideraciones realizadas muestran la importancia y necesidad del trabajo reflexivo respecto a la noción de proporcionalidad.

MARCO TEÓRICO

En la experiencia se toman lineamentos teóricos de las Teorías de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau que se exponen a continuación.

Brousseau (2007) considera que la TSD unifica e integra aportes de diversas disciplinas educativas poniendo especial énfasis en mejorar y regular la enseñanza de la matemática. El autor afirma que la enseñanza se concibe a partir de relaciones entre estudiantes, sistema educativo y saber escolar. Bajo la convicción constructivista del aprendizaje, expresa que:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje (Brousseau, 2007, p.30).

El autor señala la importancia de modificar "variables" en una misma situación con el fin de que los estudiantes desarrollen diferentes estrategias y por tanto evolucionen sus conocimientos. También afirma que se llama "variable cognitiva a una variable de la situación tal que por la elección de valores diferentes puede provocar cambios en el conocimiento óptimo. Entre las variables cognitivas las variables didácticas son las que puede fijar el docente" (Brousseau, 2007, p.32).

A su vez, Brousseau (2007) afirma que las variables didácticas que emplea el docente causan diferencias de complejidad a pesar de que se ponga en juego un mismo saber matemático. Como consecuencia, se pueden producir obstáculos cuando el conocimiento disponible en los estudiantes no se adapta directamente a la nueva situación en la que se involucran variables didácticas diferentes.

Se analizan las producciones de estudiantes poniendo especial atención a la noción de error que exponen los autores: Socas (1997) y Rico (1998).

Socas (1997) destaca que las dificultades se originan a partir de diferentes elementos: el desarrollo cognitivo de los estudiantes, el currículo de matemática y los métodos de enseñanza que se ponen en juego. "Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores" (p. 125). Además, manifiesta que los errores surgen por un conocimiento adquirido que resulta inadecuado para la situación y no únicamente por una falta de conocimiento. El autor, tomando aportes de Brousseau, expresa que los obstáculos en el aprendizaje de matemática poseen diferentes orígenes: ontogénico o psicogénico, didáctico y/o epistemológico.

Cabe mencionar también, que Socas (1997) sostiene que el análisis de los errores tiene un doble interés. Por una parte, sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor los procesos de enseñanza y de aprendizaje, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades. Por otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos.

Para intervenir eficazmente en los procedimientos de los estudiantes el profesor debe detectar y clasificar los errores según sus causas: a) errores que tienen su origen en un obstáculo, b) errores que tienen su origen en la ausencia de sentido, y c) errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales. La regularidad con la que aparecen ciertos errores favorece el conocimiento de sus causas, y es información útil para entender y abordar los errores de los estudiantes, como así también para promover un mejor aprendizaje (Socas, 1997).

Por su parte, Rico (1998) retomando a Radatz, realiza una clasificación de errores a partir del procesamiento de la información:

- Errores debidos a dificultades de lenguaje: surgen en la utilización de conceptos, símbolos y vocabulario matemático.
- Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: son los cometidos en una representación espacial o en un problema geométrico.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: aparecen por las insuficiencias de destrezas, procedimientos y conceptos previos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento: aparecen por la inflexibilidad del pensamiento para adaptarse a nuevas situaciones.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: producto de la utilización de reglas o estrategias similares en contenidos diferentes.

Finalmente se destaca que diversos investigadores en educación matemática (Rico, 1997; Socas, 1997; Brousseau, 2007; Godino, y Batanero 2002) manifiestan que considerar al error como parte del proceso de enseñanza y de aprendizaje es fundamental en el marco de la concepción constructivista de la matemática. Independientemente de la causa del error, que los alumnos participen activamente de la superación del error, que sean conscientes y que aprendan de ellos, que argumenten y revean sus conocimientos es necesario en instancias de aprendizaje.

MODALIDAD DE TRABAJO

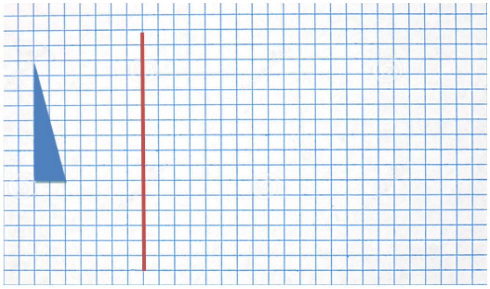
En este trabajo se presenta una experiencia en la que participan catorce estudiantes de primer año (12-13 años) de una escuela de educación secundaria de la ciudad de Santa Fe (Argentina). En la clase la docente presenta a los estudiantes un cuestionario cerrado con respuestas abiertas (Bressan, 2001).

Es de destacar que el diseño del cuestionario queda a cargo de la docente del curso. La misma, propone dos tareas en las que se pone en juego la noción de proporcionalidad donde se modifican las variables didácticas.

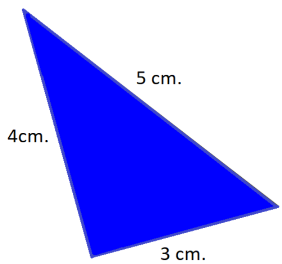
Los estudiantes previamente a la implementación del cuestionario han explorado figuras semejantes, ampliadas y reducidas, en diversos contextos. El cuestionario se propone en instancias de trabajo individual y no se realizan aclaraciones respecto a enunciados, atendiendo a que el objetivo principal de la tarea es evidenciar la puesta en juego de conocimientos previos de los estudiantes al emplear la noción de proporcionalidad. Se presenta a continuación el cuestionario:

Tabla 1. Cuestionario presentado a los estudiantes.

TAREA 1: El segmento rojo es un lado ampliado del triángulo azul. Completa el triángulo con los dos lados que faltan. Explicá qué tuviste en cuenta para dibujarlo.



TAREA 2: Se quiere ampliar un triángulo teniendo en cuenta las medidas de los lados que se presentan en la figura de análisis[1] de abajo. Si el lado que mide 3cm se transforma en uno de 9cm ¿Cuánto miden los otros dos lados del triángulo ampliado?



Se distribuye a cada estudiante una hoja con las tareas propuestas. En la puesta en acto la docente aclara oralmente que en ambas tareas los triángulos presentados son rectángulos, cuál es el ángulo recto en cada caso (en la primera tarea el ángulo formado por los lados que se encuentran en posición horizontal y vertical, y en la segunda el formado por los lados de 3cm y 4 cm) y que en la segunda tarea deben construir el triángulo ampliado debajo de la consigna en hoja lisa. El análisis de los datos se realiza a partir de sus producciones escritas.

ANÁLISIS PREVIO

Para la resolución del cuestionario diseñado los estudiantes deben poner en juego conocimientos disponibles, entre ellos: ángulos, rectas perpendiculares y paralelas, unidades de

1. La expresión figura de análisis refiere a las "figuras o bosquejos que no poseen rigurosidad geométrica, en donde se vuelca la información dada como primer paso ya sea para resolver un problema geométrico, una demostración o realizar una construcción geométrica" (Micelli, 2010, pp. 11).

medida de longitud (convencionales y no convencionales), ampliación de figuras, triángulos, números racionales y operatoria con ellos, semejanza y proporcionalidad. A su vez, es necesario que conozcan el modo en que se emplean los instrumentos de geometría.

A continuación se presenta el análisis previo de cada una de las tareas. No pretende ser exhaustivo, pero potencia el conocimiento de la situación y de los modos en que pueden proceder los estudiantes.

Análisis previo tarea 1

La figura presentada es un triángulo rectángulo escaleno. El enunciado no especifica a qué lado corresponde el lado dado ampliado, por lo que, se tienen tres respuestas diferentes posibles. Sin embargo, el enunciado no admite pluralidad de respuestas, puesto que solicita que se complete la construcción, por lo que puede presentarse cualquiera de las tres.

- <u>Caso 1:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado y se emplea como unidad de medida el lado del cuadrado de la hoja cuadriculada (unidad no convencional). Por lo tanto, todos los lados aumentan el doble para que se mantenga la proporción.
- <u>Caso 2:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con el cateto menor del triángulo dado y se emplea como unidad de medida el lado del cuadrado de la hoja cuadriculada (unidad no convencional). Por lo tanto, todos los lados aumentan el óctuplo para que se mantenga la proporción.
- <u>Caso 3:</u> Se considera que el lado dado ampliado se corresponde con la hipotenusa del triángulo dado y se utiliza como unidad de medida los centímetros (unidad convencional). Por lo tanto, se debe multiplicar a todos los lados por 1,93 para que se mantenga la proporción.

Es de destacar que en la tarea se solicita la construcción de la figura y su explicación, con el fin de: permitir la comprensión por parte de la docente del razonamiento puesto en juego, inducir a los estudiantes a encontrar una estrategia de resolución y potenciar la validación matemática.

Las variables didácticas puestas en juego en esta tarea son: uso de unidad de medida no convencional (lado del cuadrado de la hoja cuadriculada) o convencional (cm), empleo de hoja cuadriculada, presentación de la figura en posición estereotipada, presentación que condiciona la unicidad de respuesta a la tarea (a pesar de que existen tres respuestas correctas diferentes) y presentación de información a partir de una figura y un lado ampliado de la misma.

"La expresión representación gráfica en posición estereotipada refiere a las representaciones gráficas de figuras que poseen ciertas características visuales irrelevantes para el concepto, pero que influyen en la apreciación de los estudiantes" (Moriena y Scaglia, 2003, p.6). Al respecto Bertè (2000) plantea que normalmente los estudiantes al referirse a un ángulo recto piensen en rectas en posición horizontal y vertical, lo cual puede producir un obstáculo en la comprensión de este concepto.

Análisis previo tarea 2

En esta tarea se solicita hallar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo escaleno al ampliarlo. En la figura de análisis se explicita que un cateto mide 3cm, otro 4cm y la hipotenusa 5cm. El cateto que en el triángulo original mide 3cm se transforma en uno de 9cm, por lo que se debe multiplicar a todos los lados por 3 para que se mantenga la proporción.

En esta tarea las variables didácticas puestas en juego son las siguientes: empleo de hoja blanca, presentación de la figura de análisis en posición no estereotipada, uso de unidad de medida convencional (cm) y el modo de presentación de los datos del problema (figura de análisis, coloquialmente y oralmente).

ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

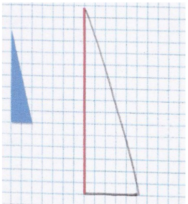
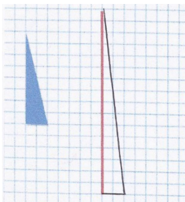
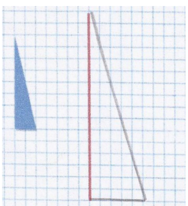
Se presenta en este apartado el estudio de las respuestas producidas por los estudiantes durante la experiencia llevada a cabo. Se nominan A_1, A_2,…, A_{14} con el motivo de preservar la identidad. Se organiza el análisis por alumno y se destaca que se presentan en letra formato cursiva (itálica) las expresiones textuales que se encuentran en el texto escrito de los estudiantes.

Análisis de las producciones de los estudiantes tarea 1 (Ver tabla 2)

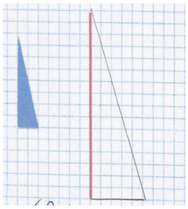
Los estudiantes A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13} y A_{14} realizan la construcción correctamente y argumentan:

> *A_5: Tuve en cuenta los cuadraditos de la hoja y la figura azul la comparé con el fragmento rojo.*
>
> *A6: Se expandió el lado A* (cateto mayor) *al doble del original y por lo tanto el lado B* (cateto menor) *se multiplicó por 2.*
>
> *A_7: El tamaño se multiplicó por 2 entonces intento que el lado B* (cateto menor) *sea el doble.*
>
> *A_8: En vez de poner 2 cuadraditos como el del triángulo dado, le puse 4.*
>
> *A_9: Tuve en cuenta la forma del triángulo, la línea roja* (lado ampliado dado) *y la explicación del problema.*
>
> *A_{10}: Los lados se duplican.*
>
> *A_{11}: Multipliqué los lados por 2.*
>
> *A_{12}: Tuve en cuenta el triángulo dado.*
>
> *A_{13}: Tuve en cuenta la base del triángulo, porque multipliqué la cantidad de cuadraditos que ocupaba la base por 2.*
>
> *A_{14}: El lado ampliado dado ocupa 16 cuadraditos y el original 8 cuadraditos, expresa que 8+8=16 entonces 2+2=4.*

Tabla 2. Análisis de errores cometidos en tarea 1

Alumno	**Producción alumno**	**Clasificación de error**	**Análisis**
A_1	*Tuve en cuenta que se expandieron de 8* (la cantidad de cuadrados) *a 16 por la línea dibujada y luego dibujé las otras líneas completando la figura.* 	Según Rico (1998), el error cometido se produce debido a un aprendizaje deficiente de destrezas, procedimientos y conocimientos previos, dado que si bien compara la longitud de los lados, no logra establecer la relación entre ellos (8 y 16). La respuesta final presentada no corresponde a una construcción correcta, debido a que las medidas de los lados no son proporcionales. A su vez, el error se manifiesta debido a la ausencia del sentido por no lograr la utilización de una estrategia matemática para dar la respuesta (Socas, 1997).	Considera que el lado ampliado dado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado. Sin embargo, no explicita que una medida es el doble de la otra. El lado que originalmente mide 2 unidades[2] es ampliado por el estudiante a 5 unidades y mantiene el ángulo recto determinado por este último y el lado dado. No reconoce la relación de proporcionalidad entre las longitudes de los lados.
A_2	*Tuve en cuenta la base del triángulo.* 	Las longitudes de los lados de la construcción presentada no son proporcionales respecto a las del triángulo dado. Se considera un error debido a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento de los planteados por Rico (1998), puesto que no se evidencia el empleo de estrategias que posibiliten la ampliación del triángulo, se observa una resistencia al nuevo conocimiento. De la clasificación propuesta por Socas (1997) este error se origina debido a una ausencia de sentido.	Se aprecia que el lado que originalmente mide 2 unidades se mantiene de la misma longitud en la construcción propuesta y mantiene el ángulo recto determinado por este último y el lado dado.
A_3	*Conté los cuadraditos de la figura hecha.* 	El error cometido coincide con la producción de A_1, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	

2. A partir de este momento cuando se presenta en el texto el término "unidades" se hace referencia a la unidad "cantidad de cuadrados de la hoja cuadriculada".

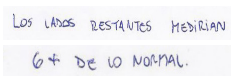
Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_4	*Tuve que hacer la primera raya corta* (refiere al cateto de menor longitud del triángulo) *porque si no, no quedaría como el dado azul y la raya larga fue para llegar al otro extremo de la raya roja y porque igualé al dado azul* (determinando la hipotenusa). 	El error cometido coincide con la producción de A_1 y A_3, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	

Análisis de las producciones de los estudiantes tarea 2 (Ver tabla 3)

Los estudiantes A_{10}, A_{11}, A_{12}, A_{13} y A_{14} realizan la construcción correctamente y argumentan:

A_{10}: Los lados se triplican.
A_{11}: Multiplique los lados por 3.
A_{12}: Multipliqué por tres las medidas dadas.
A_{13}: Multipliqué por 3 las longitudes dadas.
A_{14} no realiza consideraciones del procedimiento llevado a cabo, sin embargo, es evidente que multiplica las longitudes de los lados dados por 3.

Tabla 3. Análisis de errores cometidos en tarea 2

Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_1		El error se debe a la rigidez del pensamiento y a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, dado que no logra adaptarse a la nueva situación (Rico, 1998). De la clasificación propuesta en Socas (1997) este error se origina por un obstáculo, puesto que probablemente surge por la génesis del concepto a aprender.	No realiza la construcción. Afirma que se debe sumar 6cm a cada una de las longitudes de los lados, utiliza un razonamiento aditivo de modo incorrecto. Respecto a este error Bertè (2000) señala que es frecuente que los estudiantes consideren que la relación de proporcionalidad se mantiene si se suma una constante a las longitudes dadas.

Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_2	3CM ⇒ 9CM 4CM ⇒ 10CM 5CM ⇒ 11CM PORQUE A CADA MEDIDA SE LE SUMAN 6CM.	El error cometido coincide con la producción de A_1, por tanto la clasificación y el análisis coinciden. Si bien no logra una construcción proporcional con respecto al triángulo dado, se evidencia que en este caso amplia la medida de todos los lados. Esto último se considera un avance respecto a la respuesta dada en la tarea 1 por este estudiante, ya que se ponen en juego variables didácticas que influyen en las estrategias que se deben llevar a cabo y la complejizan.	
A_3	El lado de 5 pasa a 11 cm. El lado de 4 cm pasa a 10 cm	El error cometido coincide con la producción de A_1 y A_2, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	
A_4	5cm paso a 15cm 4cm paso a 14 cm 3 cm paso a 9 cm.	Este error según Rico (1998) se debe, por un lado, a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento, ya que para uno de los lados del triángulo utiliza de modo correcto una estrategia en la que se pone en juego el nuevo conocimiento, pero el otro lado lo amplia utilizando otra estrategia dando una respuesta errónea. Por otro lado el error se debe a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes, dado que utiliza en un caso una estrategia multiplicativa (correcta) y en el otro caso una estrategia aditiva (incorrecta). El error es causado debido a una ausencia de sentido, según lo planteado por Socas (1997).	Se considera que para el primer caso el estudiante multiplica por 3 la longitud dada, sin embargo, para el otro lado "pareciera" que suma 10cm a la longitud. Esta última relación coincide con la relación que se establece entre 5cm y 15 cm. Por lo mencionado, se destaca que en principio parece que el estudiante encuentra la estrategia correcta de resolución, sin embargo, no logra llevarla a cabo al ampliar cada uno de los lados del triángulo.
A_5		El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2 y A_3, por tanto la clasificación coincide.	Intenta validar su afirmación realizando la construcción geométrica, sin embargo, al observar la misma da cuenta que la respuesta es incorrecta y lo afirma explicitando *"sumándole 6 no se forma la figura"*. Si bien no emplea correctamente la noción de proporcionalidad, se destaca que detecta el error cometido, a pesar de que no logra franquearlo.

Alumno	Producción alumno	Clasificación de error	Análisis
A_6	EL LADO "A" = 10cm "B" = 9 cm "C": 11cm	El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2, A_3, y A_5, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	
A_7	Del lado "A" son 10cm, lado "B" 9cm y lado "C" 11cm	El error cometido coincide con la producción de A_1, A_2, A_3, A_5 y A_6, por tanto la clasificación y el análisis coinciden.	
A_8	No presenta respuesta.		
A_9	EL DE 3cm PASA A 9cm EL DE 4cm PASA A 8cm EL DE 5cm PASA A 15cm.	Según Rico (1998) el error presentado se debe a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento, dado que si bien emplea la nueva estrategia adquirida no logra utilizarla correctamente al ampliar todas las longitudes de los lados del triángulo, por lo tanto, se considera que no logra adaptarse totalmente a la nueva situación. Según Socas (1997) el error es causado debido a una ausencia de sentido, dado que no logra mantener su estrategia de resolución durante toda la tarea.	Responde de forma errónea, sin realizar consideraciones respecto a la estrategia empleada. Se aprecia que en el primer caso mencionado duplica la medida del lado tal como se realiza en la primera tarea presentando una respuesta errónea, y en el segundo caso triplica la longitud dada obteniendo una respuesta correcta. Se destaca que la estrategia utilizada es multiplicativa en ambos casos, a pesar de que no mantiene la constante de proporcionalidad para la ampliación de todos los lados.

REFLEXIONES FINALES

En la primera tarea la mayor parte de los estudiantes realizan la ampliación de modo correcto, cuatro de los catorce estudiantes manifiestan error. En particular, los errores que se manifiestan de la clasificación propuesta por Rico (1998) surgen debido a aprendizaje deficiente de destrezas, procedimientos y conocimientos previos, y a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento. De la clasificación que se presenta en Socas (1997) la totalidad de errores se producen debido a la ausencia de sentido.

De las tres respuestas posibles explicitadas en el análisis previo se aprecia que los estudiantes emplean la que se obtiene al considerar que el lado ampliado dado se corresponde con el cateto mayor del triángulo dado. Recurren a esta condición de modo "automático". Esto último evidencia el poder de la imagen estereotipada, y en este caso, como una tarea que puede tener diferentes respuestas se limita a una única. Al respecto, Mántica (2006) afirma que en diversas situaciones los estudiantes se guían "por lo que ven" realizando una mirada no matemática de figuras.

Es de destacar que en todos los casos los estudiantes utilizan como unidad de medida el “lado del cuadrado de la hoja cuadriculada” a pesar de que disponen de regla y compás que pueden emplear en la resolución de la tarea. También se destaca que en todos los casos trazan en principio el cateto que consideran menor y luego a partir de los dos catetos la hipotenusa, sin analizar si la misma cumple la estrategia matemática puesta en juego.

En la segunda tarea cinco de los catorce estudiantes responden de modo correcto. Los errores que se manifiestan en las producciones se deben a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento y a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes (Rico, 1998). De la clasificación propuesta en Socas (1997) los errores se originan por un obstáculo. Al explicitar la estrategia matemática utilizada en la segunda tarea, 6 estudiantes utilizan (de modo incorrecto) como estrategia la aditividad de una constante para obtener la respuesta final. Este resultado es similar al presentado en Bertè (2000).

A partir del análisis realizado se considera importante que al diseñar una secuencia que involucre la noción de proporcionalidad se:

- agregue una variable didáctica a la vez, con el fin de que la construcción del conocimiento matemático sea progresivo. La incorporación en la segunda tarea de un número excesivo de variables didácticas (hoja blanca, posición no estereotipada y unidad de medida convencional) respecto a la primera influye fuertemente en las resoluciones de los estudiantes;
- presentan tareas que habiliten la pluralidad de respuestas diferentes y correctas, y que el docente incentive el trabajo con las mismas;
- propongan diversos contextos, en caso contrario es posible que el estudiante asocie características del contexto particular, reconociéndolas de forma inadecuada como características del conocimiento.
- trabajen diversos contraejemplos, dado que uno no es suficiente para que el estudiante logre franquear errores (Bertè, 2000). La autora manifiesta que un contraejemplo proporcionado por el docente no convence al estudiante y asegura que la proporcionalidad tiene más sentido cuando se compara con la no proporcionalidad.

Cabe mencionar, tal como afirma Socas (1997), que la información acerca del error le ofrece al profesor estrategias de remediación que “van dirigidas a superar un obstáculo, a dar sentido a los objetos matemáticos o a crear una actitud racional hacia las matemáticas” (p. 151). Dichas estrategias implementadas favorecen la construcción del conocimiento nuevo por parte de los estudiantes.

Finalmente, se destaca que el análisis de errores evidencia una rica información con respecto al estado del nuevo conocimiento, admitiendo que resulta un hacer necesario para repensar y potenciar los procesos de enseñanza y de aprendizaje. De este modo, se deja de condenar o penalizar el error del estudiante para aceptar que los errores contribuyen a la formación matemática de los estudiantes, como afirma Socas (1997) un error puede ser el detonante para lograr un buen aprendizaje.

REFERENCIAS

Bertè, A. (2000). *Matemática dinámica.* Buenos Aires: AZ.

Bressan, A. (2001). *Documento: La evaluación en matemática. Enfoques actuales.* Rio Negro: Ministerio de Educación y cultura. Consejo Provincial de Educación Rio Negro.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de situaciones didácticas.* Buenos Aires: El Zorzal.

Burgos, M y Godino, J.D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *BOLEMA, 33 (62)*, 1-21.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 30(1),* 129-142.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2002) Proporcionalidad. En J.D. Godino (dir.) *Didáctica de las matemáticas para maestros,* 271-286. GAMI: Granada.

Mántica, A. M. (2006). Analizando errores geométricos. En A. M. Mántica, L. Nitti y S. Scaglia (comp.) *La Matemática. Aportes para su enseñanza.* 89-98. UNL: Santa Fe.

Micelli, M. (2010). *Las figuras de análisis en geometría. Su utilización en el aula de matemática.* Tesis de Maestría no publicada, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada – IPN. México.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110560/nap-para-septimo-ano

Moriena, S. y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15(001), 5-19.

Obando, G., Vasco, C.E. y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *RELIME, 17 (1)*, 59-81.

Rico, L. (1998). Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.) *Educación Matemática.* 69-108. Una empresa docente: Bogotá.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. *En la Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Cuadernos de Formación del Profesorado.* 125-154. HORSORI: Barcelona.