



IKASTORRATZA, e-Revista de Didáctica, es una revista en formato digital que publica artículos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje, a través de Internet y bajo la licencia Creative Commons.

IKASTORRATZA, e-Revista de Didáctica, es una publicación seriada, gratuita y libre de ser impresa que cada seis meses divulga artículos científicos, propuestas didácticas y artículos de opinión sobre cuestiones relativas al mundo de la didáctica.

IKASTORRATZA, e-Revista de Didáctica, asume como objetivo principal la difusión del conocimiento pedagógico y de metodologías didácticas que favorezca la expansión de prácticas de educativas efectivas.

IKASTORRATZA, e-Revista de Didáctica, es una revista bilingüe, abierta a propuestas de autores y autoras que deseen publicar trabajos inéditos tanto en euskara como en castellano.

IKASTORRATZA. Didaktikarako e-aldizkaria

IKASTORRATZA. e-journal on Didactics

IKASTORRATZA. e-Revista de Didáctica

ISSN: 1988-5911 (Online) Journal homepage: <http://www.ehu.es/ikastorratza/>

Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones

Pablo Agustín Sabatinelli
pablos@fceia.unr.edu.ar

Viviana Carolina Llanos
vcllanos@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero
rotero@exa.unicen.edu.ar

To cite this article:

Sabatinelli, P. A., Llanos, V.C. & Otero, M.R. (2021). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones. Un caso de estudio en Madrid. *IKASTORRATZA. e-Revista de Didáctica*, 26, 21-51. DOI: 10.37261/26_alea/2

To link to this article:

https://doi.org/10.37261/26_alea/2

Published online: 31 March 2021

Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones

Linear Algebra and Analytic Geometry in Engineering Education: Research Reports

Pablo Agustín Sabatinelli¹, Viviana Carolina Llanos² y María Rita Otero³

¹FCEIA, Universidad Nacional de Rosario.

pablos@fceia.unr.edu.ar

² NIECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

²CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

vcllanos@exa.unicen.edu.ar

³ NIECYT, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

³CONICET, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo se analizan 168 investigaciones sobre Álgebra Lineal (AL) y Geometría Analítica (GA) en la universidad, con el objetivo de conocer si éstas abordan el fenómeno de la escisión entre estos conocimientos e indagar acerca de los principales tópicos que orientan la investigación sobre estos temas. Se realiza un análisis utilizando técnicas cualitativas obteniendo una categorización de manera inductiva. Los resultados permiten concluir que la escisión entre AL y GA que opera en los programas de estudio, no es abordada por los investigadores. La mayoría se enfocan en describir y analizar las dificultades de los estudiantes frente a estos conocimientos, y entre las propuestas para enseñar se destaca la incorporación de software. Solo una minoría consideran desde un punto de vista epistemológico, las bondades de una enseñanza híbrida entre AL y GA.

Abstract

In this paper, 168 researches on Linear Algebra (LA) and Analytic Geometry (AG) at the university are analyzed, with the objective of knowing if these researches deal with the phenomenon of the split between this knowledge and to investigate about the main topics that guide the research on these subjects. An analysis is made using qualitative techniques obtaining a categorization in an inductive way. The results allow us to conclude that the split between LA and AG that operates in the study programs is not addressed by the researchers. Most focus on describing and analyzing students' difficulties with this knowledge, and among the proposals for teaching, the incorporation of software stands out. Only a minority consider, from an epistemological point of view, the benefits of a hybrid teaching between LA and AG.

Palabras clave: Enseñanza de la Matemática; Álgebra Lineal; Geometría Analítica; Universidad; Formación de ingenieros.

Key words: Mathematics Teaching; Linear Algebra; Analytic Geometry; Universities; Engineering Education.

1. Introducción

Según un relevamiento de 476 planes de estudio de 47 universidades de Argentina, en el período comprendido entre 1882 y 2020, podemos confirmar que en la formación básica de las carreras de Ingeniería se propone estudiar “Álgebra y Geometría Analítica”. En el ciclo básico de las carreras universitarias de ingeniería la organización del estudio de los saberes matemáticos implicados se divide en dos partes: en el primer cuatrimestre se estudia Geometría Analítica (GA) desde un punto de vista vectorial (vectores, rectas en el plano, plano, rectas en el espacio, cónicas y superficies) y en el segundo, Álgebra Lineal (AL) (matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales, transformaciones lineales y diagonalización).

Con el objeto de establecer la generalidad de este fenómeno, realizamos una revisión de 147 programas que incluyen conocimientos de AL y GA para la formación de ingenieros en la universidad. Este estudio inicial confirma que en Argentina el ciclo básico de las carreras de ingeniería es común, y el estudio de estos conocimientos se realiza de manera similar en todas las unidades académicas, pudiendo identificar algunas diferencias: en algunos casos, se propone una unidad introductoria de lógica y teoría de conjuntos; y en otros, se incluyen los primeros elementos de trigonometría plana (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), 2018). También identificamos transformaciones más generales como la desaparición en los programas actuales de las llamadas “curvas clásicas” (lemniscata, cisoide, espirales, etc.) y la reducción del estudio de sistemas de coordenadas a las cartesianas y polares. Se observa que el enfoque funcional fue dejado de lado en favor del enfoque vectorial, posiblemente porque éste último permite una mayor generalización y es fácilmente vinculable con los espacios vectoriales. Los espacios vectoriales se incorporan a los programas a partir de la década de 1960. Esto se explica por el hecho de que mientras los trabajos del matemático alemán Hermann Grassmann (1809-1877), uno de los fundadores del AL fueron publicados hacia 1850, la primera definición formal de espacio lineal, propuesta por el matemático Hermann Weyl (1885-1955) no fue dada sino hasta 1920. Desde el siglo XX, hubo una búsqueda de una teoría axiomática que reuniera los conceptos de AL, haciendo de ésta ya no un estudio de ecuaciones, sino un estudio de estructuras (Aydin, 2017). En virtud del carácter unificador y generalizador de los espacios vectoriales, el AL está presente en las más diversas áreas

de la matemática. En consecuencia, autores como Dorier (2000, 2016), Bianchini, de Lima y Gomes (2019); Chen, Gao, y Yang (2016), García-Hurtado, García-Pupo y Poveda-Chaves (2019), Domínguez-García, García-Planas y Taberna (2016), y el grupo LACSG (Carlson, Johnson, Lay y Porter, 1993) consideran necesario conocer los principales conceptos de AL para poder utilizar matemática.

Un primer análisis de los planes de estudio permitiría confirmar que en general se incorpora el estudio del AL a posteriori del estudio de la GA, desde un punto de vista vectorial. Esta decisión conduce al problema didáctico de la desarticulación entre el AL y la GA. En el ámbito institucional la materia es percibida por los estudiantes y por los docentes como dos partes bien separadas temporal y epistemológicamente hablando: GA primero y AL después. La actividad matemática de los docentes y los estudiantes parece obedecer a esta lógica de escisión. Esta separación no existe en el saber sabio (Chevallard, 1985), ni obedece a razones de naturaleza histórico-epistemológica como argumentamos a continuación.

La GA surge en el siglo XVII a partir de los trabajos de René Descartes (1596-1650) como una metodología unificadora de técnicas geométricas, a través de la utilización del álgebra renacentista para abordar problemas de índole geométrica (Crippa, 2017). Así, la identificación de ecuaciones con curvas va mucho más allá de un cambio de registro o forma de representar un ente matemático: la GA habilita la posibilidad de resolver problemas de origen geométrico a través de técnicas algebraicas, y problemas algebraicos realizando un tratamiento geométrico. A medida que el álgebra vectorial gana terreno en el estudio de la geometría analítica, principalmente por la economía de escritura y síntesis de ideas, la vinculación de la geometría con los problemas lineales se estrecha. Todo estudio de lugares geométricos, expresables como combinación lineal de vectores, se puede ver de dos formas diferentes pero complementarias: por un lado el estudio de lugares geométricos (geometría), y por otro el estudio de los subespacios generados por esas combinaciones lineales (AL). La GA con un enfoque vectorial, se incorpora gradualmente a los programas de las Facultades de Ingeniería de Argentina a partir de 1960. De este modo resulta que muchos elementos de GA son posibles de ser estudiados y generalizados a través del AL.

2. La transposición didáctica y la relatividad Institucional del saber

La Teoría de la Transposición Didáctica (TTD) de Yves Chevallard (1985, 2007) establece que no hay una “*referencia privilegiada*” con relación al saber. El didacta toma distancia respecto del *saber sabio* y lo transforma, lo adapta; y por lo tanto el saber escolar no es una copia del *saber sabio*, sino que es la adaptación necesaria de éste. El fenómeno de la transposición pone de manifiesto otro, denominado *relatividad institucional simultánea de lo matemático y de lo didáctico*, asumiendo la existencia de una transposición institucional (Donvito y Otero, 2019; Otero, et al., 2013). Así ocurre en la universidad por ejemplo, donde el modelo epistemológico es el de la escisión de los conocimientos matemáticos de AL y GA, sin considerar los problemas vinculados a la pérdida de sentido que dicha separación produce, y a la utilidad de estos conocimientos en la formación de los ingenieros. Como señalan Gascón y Bosch (2007) la limitación más fuerte ocurre cuando el proceso de transposición no es capaz de mantener o recrear una posible “*razón de ser*” de los conocimientos, que en este caso, la universidad se propone transmitir.

La TTD señala también que el *saber sabio* antes de ser enseñado en una institución debe pasar por la *noósfera* como una de las instancias de la transposición. La *noósfera* es el lugar desde donde se piensa el funcionamiento didáctico, donde se vincula a la institución productora del saber con la de enseñanza (Chevallard, 1985, 2007). Entre las producciones de la *noósfera*, se destacan los diseños curriculares, los planes de estudio de las carreras, los programas de las asignaturas, los libros de texto, materiales didácticos, las investigaciones científicas desarrolladas en el seno de una comunidad, entre otras. Todas estas producciones inciden en las transformaciones y hasta en la naturaleza del saber que es impartido en el aula (Chevallard, 2007).

De esta consideración, surge la necesidad de analizar los resultados obtenidos por la comunidad de investigadores en el seno de la universidad. ¿Cuáles son los principales problemas y tópicos que orientan la investigación acerca del AL y la GA? ¿Confirman las investigaciones en el campo de la Educación Matemática una escisión entre los conocimientos de AL y GA en la universidad?

3. Metodología

La investigación es de corte cualitativo e interpretativo. Se seleccionan mediante muestreo intencional 168 investigaciones entre publicaciones en revistas científicas, tesis de maestría y doctorado, y actas de congresos. Se consultaron diferentes bases de datos de revistas científicas y publicaciones electrónicas como Academic Search Premier, Directory of Open Access Journals, Education Full Text, Education Index Restrosp, Engineering Village, Fuente Académica, Humanities & Social Sciences Index Restrosp, Humanities Full Text, JSTOR Art & Sciences I, II y III, MathSciNet, SciELO - Scientific Electronic Library Online, ScienceDirect, Scopus, SpringerLink, Wiley Online Library, entre otros; lo que permite abarcar una diversidad de fuentes y resultados.

Para organizar la información obtenida, inicialmente se numeraron todos los trabajos desde T1 a T168, y de cada uno se identificaron: autores, título de la publicación, tipo de publicación (artículo, acta de congreso, tesis), y se confeccionó una tabla, como la que sigue.

Tabla 1. Registro de investigaciones consideradas para el análisis.

Número de Trabajo	Autores	Título	Año de publicación	Tipo de Publicación	Resumen
T1					
...					
T168					

Las investigaciones se analizaron utilizando técnicas de análisis y meta análisis (Sanchez-Meca, 2010). Se realiza una categorización inductiva, es decir, que las meta categorías, categorías y subcategorías de análisis se construyen y surgen de la descripción de los propios trabajos que conforman la muestra, y son analizados según las características que nos interesa describir, relativas a la enseñanza del AL y su vinculación o no con la GA. La categorización propuesta es disjunta; es decir que cada uno de los textos se ubica solo en una de las categorías definidas en función del objetivo principal que la investigación desarrolla. La tabla que se encuentra en el anexo reúne a todos los textos categorizados según la descripción que se propone a continuación.

4. Descripción de las categorías de análisis

La categorización inductiva entre las 168 investigaciones originó tres metacategorías: (A) Génesis del conocimiento, (B) Errores y obstáculos en la enseñanza y aprendizaje, (C) Recursos y experiencias superadoras. En función de éstas, se generaron inductivamente las categorías y subcategorías de análisis, que se sintetizan en la Tabla 2. De aquí en adelante entenderemos por enfoque híbrido al estudio conjunto del AL y la GA.

Tabla 2. Metacategorías, categorías y subcategorías de análisis.

A - GÉNESIS DEL CONOCIMIENTO	A.1- REPORTES HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS		
	A.2- REPORTES DIDÁCTICOS		
	A.2.1- Perspectiva híbrida	A.2.2- Perspectiva matricial	
B – ERRORES Y OBSTÁCULOS	B.1- CONCEPTUALIZACIÓN		
	B.2- IMPLEMENTACIONES		
	B.2.1- Enfoque geométrico	B.2.2- Enfoque algebraico	B.2.3- Enfoque híbrido
C – RECURSOS Y EXPERIENCIAS DE AULA	C.1- RESEÑAS BIBLIOGRÁFICAS		
	C.2- PROPUESTAS Y EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA		
	C.2.1- Enseñanza híbrida	C.2.2- Enseñanza de AL en sí misma	
	C.3- USO DE SOFTWARE		
	C.3.1- Instrumento para una enseñanza híbrida	C.3.2- Instrumento de cálculo y visualización	C.3.3- Aplicaciones a otras Ciencias

Se realiza una descripción y se proponen algunos ejemplos de las investigaciones más representativas en cada caso.

4.1. A. Génesis del Conocimiento.

Se identifican 11 investigaciones que analizan el origen y los procesos de formación de conceptos de AL. Dentro de esta categoría se clasifican los que realizan un reporte histórico-epistemológico de dicho conocimiento de los que tienen un fin didáctico.

Reportes histórico-epistemológicos (A1): se identifican aquí dos investigaciones que analizan el devenir histórico del Álgebra en general y del AL en particular. El trabajo T71 sintetiza las fases del desarrollo del Álgebra: 1) geométrica, 2) estática, de resolución de

ecuaciones, 3) dinámica funcional y 4) abstracta; cuyo objeto de estudio son las estructuras; en correspondencia con la descripción dada por Kline (2012). Estas etapas se corresponden con las propuestas de los programas de estudio para Ingeniería en las universidades argentinas. Hacia 1880 el programa de estudios tenía una fuerte carga en la resolución de ecuaciones (no sólo polinómicas, sino también exponenciales y logarítmicas). Paulatinamente esto deja lugar al estudio de las estructuras algebraicas clásicas (grupos, anillos, etc.) hasta finalmente estudiar Espacios Vectoriales.

En T38, se propone que el AL debe ser entendida como el estudio de los espacios vectoriales, destacando el carácter unificador y generalizador que estos tienen. A mediados del siglo XIX, la generalización de problemas geométricos a espacios de dimensión mayor a tres reforzó la cohesión de los problemas lineales, y en definitiva la vinculación entre AL y GA. El modelo de R^n , con la utilización de herramientas y conceptos inherentes a la teoría de determinantes y el uso de vocabulario geométrico y representaciones gráficas, gradualmente constituyó el bagaje teórico para poder hacer frente a cualquier problema de linealidad. Este proceso muestra cómo la idea de espacio vectorial, es en definitiva la síntesis entre la geometría y la teoría de los determinantes. Esta última investigación sintetiza las bases sobre las cuales sería posible pensar en una enseñanza conjunta, híbrida entre AL y GA en los cursos de la universidad.

Reportes didácticos (A2): son nueve las investigaciones que realizan consideraciones didácticas basadas en el devenir histórico o epistemológico del AL. Se distinguen dentro de esta categoría dos enfoques extendidos dentro de la enseñanza del AL a partir de la década de 1990: los trabajos que proponen una *perspectiva híbrida* (A2-1) de los que tienen una *perspectiva matricial* (A2-2). La *perspectiva híbrida* sienta las bases de la enseñanza del AL en estrecha relación con la GA. Sólo se reconocen cinco investigaciones. T11 y T158 son ejemplos de este enfoque y en ambos casos proponen interpretar geoméricamente resultados algebraicos justificando que la geometría provee a dichos conceptos de una base intuitiva y una mayor consistencia. Señalan que los “vectores geométricos” se convirtieron en el prototipo de los espacios vectoriales euclídeos. Sin embargo, sabemos que los espacios vectoriales son axiomáticos por naturaleza. De ahí que los vectores geométricos como prototípicos de los espacios vectoriales constituyen una reducción de la génesis histórica de los espacios vectoriales, atribuible a la matemática moderna. Esta dualidad es muchas veces difícil de entender y

nos interpela constantemente. El uso de terminología geométrica en la teoría de espacios vectoriales sería un indicio, aunque no el único ni el principal, de la relación que de hecho existe entre la GA y el AL.

Las cuatro investigaciones agrupadas en la *Perspectiva matricial* (A2-2) proponen una orientación hacia el cálculo de matrices y la mecanización de los diferentes algoritmos que conforman el programa clásico de AL para un primer año en la universidad. Seleccionamos a T22 por el reconocimiento al LACSG. Este grupo redactó una serie de recomendaciones para el dictado de un primer curso de AL en la universidad, que fue ampliamente aceptado por la comunidad mundial de investigadores en matemática educativa y que actualmente constituye el fundamento teórico de muchos de los libros de texto recomendados para la enseñanza del AL. Entre las recomendaciones del LACSG, destacamos la propuesta de orientar el primer curso de AL hacia uno con perspectiva matricial, alentar el uso de tecnología y la necesidad de proponer por lo menos un “segundo curso” en teoría de matrices/AL para cualquier currículum en matemática. Los trabajos T30 y T31 también continúan con esta línea y agregan la importancia de diferenciar el auditorio al que se dirigen los profesores cuando enseñan AL. Señalan que bajo el título AL pueden reconocerse diferentes materias pero no difiere el conocimiento matemático implicado para un primer curso; pero sugieren líneas de acción diferenciadas para la enseñanza del AL de los estudiantes de ingeniería, que debería atender a las aplicaciones y contextualizaciones pertinentes, de aquellos cursos destinados a futuros matemáticos o profesores de matemática. En cualquier caso consideran que inicialmente corresponde enseñar primero lo concreto, a partir de ejemplos y casos prácticos, para que en una etapa posterior se puedan desarrollar los conceptos generales. La propuesta se basa en una perspectiva algorítmica y luego se intenta reconciliar el AL con la GA. A diferencia de estas investigaciones, T158 propone que la perspectiva matricial podría ser pertinente para la enseñanza del AL, ya que en muchos casos el enfoque geométrico no es adecuado por la pobre preparación que tienen los estudiantes en geometría.

4.2. B. Errores y obstáculos

Se incluyen aquí 85 investigaciones que registran por una parte obstáculos y dificultades en la enseñanza y aprendizaje del AL y la GA en la universidad, y por otra parte, experiencias de aula que abordan esas dificultades. Las investigaciones se agrupan a partir de dos categorías: *conceptualización e implementaciones*.

En la categoría *Conceptualización* (B1) hay 58 trabajos que señalan dificultades en el estudio de AL. Entre ellas se identifican dificultades relacionadas con la escritura de los símbolos, el formalismo y nivel de abstracción, la cantidad de definiciones que este campo de la matemática tiene en particular y los errores de tipo lógico-deductivo. También se incluyen dificultades en la adquisición de conceptos básicos de AL como base, conjunto generador, espacio generado, independencia lineal y transformación lineal. Por ejemplo en T88, se presenta a un grupo de estudiantes una tabla a dos columnas, donde la primera columna está compuesta por gráficos de vectores sobre un sistema de referencia y la segunda columna consigna los transformados de esos gráficos por cierta transformación. Se les pide a los estudiantes que identifiquen cuáles de las transformaciones son lineales. A partir de entrevistas, los investigadores observan cómo el concepto de transformación lineal se degrada con el tiempo y sólo persiste la idea de transformación. En T132 identifican otras dificultades, cuando quieren argumentar lógicamente y necesitan utilizar un sistema de representación formal. Al respecto, señalan que las dificultades tienen origen en dos modelos: la matemática mostrativa y de comprobación como modelo de la escuela media y la matemática demostrativa requerida en un curso de AL. Que el curso de AL sea uno de los primeros en donde es requerido un nivel de formalismo mayor al que los estudiantes están habituados, es un problema común y también se analiza en T10. En esta última investigación concluyen que la dificultad en la comprensión de los conceptos de independencia lineal o base tendría su origen en la relación de conocimientos formales con conocimientos previos. Como señalamos antes, la formalización es una característica del AL que resulta como la consecuencia de ser ésta un conjunto de ideas unificadoras y generalizadoras que no tienen por finalidad resolver ningún problema concreto.

A la categoría *Implementaciones* (B2) corresponden 27 experiencias de clase que buscan revertir algunas de las dificultades que señalamos en la categoría anterior. Las experiencias fueron agrupadas en tres subcategorías según el enfoque que predomina en

el diseño y experiencia de clase. La subcategoría *Enfoque geométrico* (B2-1) agrupa 10 trabajos, que corresponden a implementaciones que se llevaron a cabo con un enfoque predominantemente geométrico. Por ejemplo en T167, llevan a cabo una investigación que compara tres grupos de estudiantes en el tema independencia lineal, todos con características y condiciones similares: mismo libro de texto, mismas definiciones, teoremas y cálculos aritméticos. Las diferencias entre ellos es que uno tenía clases integradas con representaciones geométricas estáticas, mientras que los otros dos grupos utilizaban módulos con geometría dinámica. Las diferencias entre los que utilizan geometría dinámica, es que sólo uno de los equipos tenía lecciones integradas con módulos online. Los investigadores analizaron las diferencias y observaron que aquellos que estudiaron con geometría dinámica, recuperaron sentido a ideas algebraicas más abstractas a través de la geometría. El grupo que estudió con geometría estática, mostró tendencias a aplicar ideas aritméticas (a través de componentes de vectores) para dar sentido a los temas más abstractos y a los conceptos geométricos. Son numerosas las experiencias que aprovechan recursos de geometría dinámica para abordar dificultades en la adquisición de conceptos de AL.

En la subcategoría *Enfoque algebraico* (B2-2), se agrupan tres investigaciones que realizan implementaciones basadas en un enfoque predominantemente algebraico. Por ejemplo, en T43, se estudia la introducción de una definición formal para la independencia lineal. Los investigadores en el curso explican la idea de conjunto generador de un subespacio vectorial, para después preguntar por la cantidad mínima de vectores que puede contener un tal conjunto. Esto lleva a una definición intuitiva de independencia lineal, que al ser sometida a diferentes situaciones resulta ineficiente. Estas situaciones son las conducentes a definir formalmente la independencia lineal entre vectores y se reconoce la importancia de enseñar AL desde el punto de vista algebraico, con un acercamiento desde el inicio a la formalización de dichos conocimientos, como condición para entender la naturaleza epistemológica de los espacios vectoriales. A pesar de lo fundamental que resulta el formalismo en el AL desde el punto de vista epistemológico, los autores entienden que se puede comenzar con un enfoque intuitivo e ir formalizando hacia el final del curso. Concluyen que el formalismo es unificador y permite un lenguaje único para una multitud de situaciones.

En la subcategoría *Enfoque híbrido* (B2-3), se identifican 14 investigaciones. Todas se caracterizan por una enseñanza que no tiene preponderancia ni geométrica ni algebraica sino que se abordan ambas perspectivas conjuntamente, es decir, los sistemas algebraico y geométrico “conviven” sin tener una especial preponderancia de uno u otro. Por ejemplo, en T106, los investigadores proponen el desarrollo de un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en R^3 y la interpretación de autovalores y autovectores de transformaciones lineales en R^2 y R^3 a partir de un abordaje paralelo de AL y GA, con el fin de encontrar interpretaciones concretas y no desviar la atención a las ideas con la cantidad de cuentas que habitualmente son requeridas en estos temas. Los investigadores destacan el trabajo desarrollado por los estudiantes en la búsqueda de patrones, realizando conjeturas, aunque la demostración de las mismas resultó ser muy difícil en la mayoría de los casos. Los resultados alentadores de la enseñanza híbrida también se destacan en T36, investigación que analiza las respuestas de 45 estudiantes divididos en dos modalidades de trabajo en un primer curso de AL, para estudiar independencia lineal. En este caso uno de los grupos estudió el tema a través de la reducción de matrices, mientras que el otro grupo lo hizo con módulos dinámicos online a partir de representaciones geométricas. Se realizó un estudio comparativo de los resultados alcanzados en cada caso y los investigadores concluyen que una perspectiva geométrica no reemplaza a la aritmética o algebraica sino que las enriquece; y de este modo ayuda a los estudiantes a considerar diversos aspectos representacionales de un mismo concepto.

4.3. C. Recursos y experiencias de aula

Se identifican 72 investigaciones que analizan propuestas y experiencias de clase, material didáctico -principalmente libros de texto-, y uso de software como recursos para la enseñanza del AL. Esta metacategoría está compuesta por dos categorías: reseñas bibliográficas, y propuestas y experiencias de enseñanza.

Reseñas bibliográficas (C1). Se incluyen aquí siete investigaciones que analizan los libros de texto utilizados para la enseñanza del AL. Todas las investigaciones coinciden en diferenciar los textos respecto del nivel de abstracción, teniendo en cuenta que ésta es una característica distintiva de los espacios vectoriales habida cuenta de que surgen como una

idea unificadora y generalizadora, pero no para resolver problemas concretos. Se selecciona T50, investigación en la que se realiza una revisión crítica de libros de AL para un primer curso universitario. Los textos analizados se diferencian principalmente por el enfoque que proponen. Algunos textos presentan una orientación clásica, que contempla espacios vectoriales, productos internos y transformaciones lineales entre estos espacios. Además del enfoque tradicional, se identifican textos que presentan un enfoque geométrico y otros con un enfoque que sigue las recomendaciones del grupo LACSG, donde solamente dedica algunas secciones a los espacios vectoriales abstractos. Otros libros prácticamente ignoran la presentación axiomática de los espacios vectoriales, relegándola a un ejercicio tomado como representativo. Además de los enfoques, se describen otras diferencias identificadas en el tipo de actividades matemáticas implicadas, sugerencias respecto del uso de la tecnología; y propuestas de aplicaciones en otras disciplinas. Por otro lado, T61 analiza 32 textos de AL y a diferencia del anterior este análisis distingue un enfoque computacional previo al desarrollo de ideas abstractas y una organización en torno a la identificación de diferentes niveles de generalización de las ideas (el grado de generalización en los ejemplos de espacios vectoriales). Respecto del material introductorio, algunos utilizan las analogías, otros abstracciones o isomorfización.

Dentro de esta categoría algunas investigaciones analizan libros de texto utilizando algún marco teórico didáctico o cognitivo específico. Por ejemplo, T143 adopta el referencial teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1999), específicamente el constructo *praxeología* para describir las características de los sistemas de Ecuaciones Lineales en dos libros para enseñar AL. Los autores concluyen que el discurso tecnológico-teórico relativo a los sistemas de ecuaciones lineales, está dirigido al estudio de ciertos conceptos y técnicas para anticiparse a las dificultades que pudiera encontrar un estudiante en un curso de AL. Por otro lado, T156 utiliza la teoría APOE de Ed Dubinsky (1991) para analizar un libro de texto: *Linear Algebra* (Friedberg, Insel y Spence, 2003). Describen si el libro “sigue” un camino cognitivo en el desarrollo de los conceptos valor y vector propio; o en su defecto, otro sugerido para que el lector aprenda tales conceptos. Los investigadores concluyen que no hay una descomposición genética implícita en las actividades presentadas en el texto, ya que los ejemplos y ejercicios no siguen la progresión *Acción-Proceso-Objeto* sugerida por la teoría APOE.

Por otra parte, los investigadores analizan que el libro cambia de una representación algebraica a una geométrica, ignorando que las estructuras mentales referentes a los conceptos valor y vector propio en cada representación son distintas. Es decir, una vez presentados dichos conceptos en un contexto puramente algebraico, el lector podrá fácilmente dar una interpretación geométrica de los mismos.

Propuestas y experiencias de enseñanza (C2). Se identifican 17 investigaciones que desarrollan propuestas didácticas e implementaciones de las mismas para la enseñanza del AL en la universidad. Las investigaciones se agruparon en dos subcategorías según propicien o no el estudio conjunto del AL y GA. Por un lado, las investigaciones que proponen una *enseñanza híbrida (C2-1)* son sólo cinco. Se selecciona como representante a T17 para ejemplificar la importancia de este estudio conjunto de AL y GA. En su investigación desarrollan una propuesta de la interpretación geométrica a la conocida regla de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales normales, incluyendo una demostración del teorema apelando a argumentos geométricos. Al respecto, en dicha investigación confirman que muchos temas de AL son interpretables geoméricamente y que habría que evitar la separación entre dichas disciplinas, pues epistemológicamente esta separación tampoco existe. Otro ejemplo corresponde a las investigaciones T98 y T99 que proponen una secuencia de actividades para abordar los conceptos de dependencia e independencia lineal de funciones y polinomios de grado uno y dos, haciendo uso de representaciones gráficas. El diseño toma como principal fuente la representación geométrica con el objetivo de mejorar y completar el estudio de estos conceptos matemáticos.

Otras 12 investigaciones desarrollan dispositivos didácticos para enseñar AL, sin vincularlos con los conocimientos de GA u otra rama de las matemáticas. Éstas se agrupan en la subcategoría *Enseñanza de AL en sí misma (C2-2)* y son específicas de propuestas relativas a matrices o sistemas de ecuaciones lineales. Se seleccionan los trabajos T128, T129 y T130, cuyas propuestas son relativas a la importancia de demostrar teoremas a partir del análisis de matrices reducidas, que contemplan la resolución matricial de un determinado sistema de ecuaciones. Los trabajos agrupados en esta subcategoría sostienen que el AL no requiere inicialmente una vinculación explícita con contenidos de GA.

La mayoría de las propuestas de enseñanza contemplan la incorporación y *Uso de software* (C3) con diferentes fines, y son 48 en total. La utilización de diferente software es cada vez más habitual en las propuestas de clase, pero no parece haber un criterio normalizado respecto de su utilización. Identificamos aquí tres subcategorías según los fines del mismo: como instrumento conducente a una enseñanza mixta, como instrumento de cálculo y visualización, y para realizar aplicaciones a otras ciencias.

Un conjunto de 12 investigaciones proponen al software como un *instrumento para una enseñanza híbrida* (C3-1). El software se utiliza como un instrumento facilitador, que permite el acceso a una pluralidad de contextos y al estudio conjunto de AL y GA. Por ejemplo, en T37 se vincula AL con GA a través de la utilización de GeoGebra y wxMaxima, por medio del uso de applets para desarrollar el concepto de determinantes de matrices de tamaño dos y tres, resolver sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 , y el software permite interactuar entre los sistemas algebraico y gráfico. En T147 también se utiliza GeoGebra, pero para proveer de interpretación geométrica a autovalores y autovectores, integrando vectores paralelos y transformaciones lineales con autovectores. En ambos casos el software actúa como facilitador, y estaría permitiendo el vínculo entre GA y AL de manera relativamente económica, en términos de recursos.

Por otro lado, el software se propone como *instrumento de cálculo y visualización* (C3-2). Éste permitiría aliviar cálculos tediosos, o conjeturar a partir de varios experimentos numéricos sobre propiedades o teoremas. Se identifican aquí 25 investigaciones con propuestas de actividades clásicas, fuertemente basadas en cálculos. Por ejemplo, en T162 los autores proponen tareas que requieren el uso del software Wolfram Mathematica para resolver prácticas algorítmicas tradicionales en una clase de AL: diagonalización, proyecciones, bases ortonormales, etc. Todas las investigaciones identificadas en esta subcategoría, señalan que la utilización de software fue sumamente positiva y se vio reflejada tanto en la actitud y disposición de los estudiantes hacia la materia, como en el rendimiento académico. A su vez destacan el papel del software como facilitador de cuentas y operaciones que requieren los diferentes algoritmos propios del AL.

Por último, las 11 investigaciones que se agrupan bajo la subcategoría *aplicaciones a otras ciencias* (C3-3) usan software para problemas de diferentes campos de la ciencia o la ingeniería con auxilio del AL y la GA. Por ejemplo en T144, los investigadores proponen utilizar el conjunto generador y el espacio generado para diseñar un “generador de claves informáticas”. En T152 proponen diseñar un sistema de audio utilizando software pero fundamentalmente a partir de la combinación lineal de columnas de una matriz como forma de resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Otro ejemplo es T8, investigación que propone la creación de un robot para lo que se necesitará conocer antes: transformaciones lineales, representación matricial de movimientos en el espacio, matrices de transformación homogénea, etc. Los trabajos en esta subcategoría resaltan que han podido integrar un gran número de conceptos a los que los estudiantes consideraban “sin aplicación”, lo que justifica el aporte que puede hacer el software en las prácticas para acceder a las aplicaciones de los conocimientos de AL. También se destaca el hecho de que fue posible una interacción fructífera con los estudiantes en un entorno físico y social adecuado para el abordaje de problemas relacionados con su futuro perfil profesional.

5. Discusión

La mayoría de las investigaciones analizadas, se distribuye entre las metacategorías *B- Errores y Obstáculos* y *C- Recursos y Experiencias de Aula*. De la metacategoría B, que agrupa 85 trabajos, destacamos el predominio de las investigaciones que se ocupan de identificar dificultades en el aprendizaje de conceptos de AL y GA, o proponen experiencias de aula tendientes a superar dichos obstáculos. Esto permite interpretar que, la mayoría de los trabajos abordan el problema relativo a la adquisición de conceptos por parte de los estudiantes, y no tanto a la enseñanza, y a otras cuestiones que podrían afectar la conceptualización del AL y la GA, como podría ser el caso de la escisión entre dichos conocimientos.

En segundo lugar, en la metacategoría *C- Recursos y Experiencias de Aula* se incluyen 72 investigaciones que analizan libros de texto, diseños didácticos y en su mayoría, 48 investigaciones, proponen usar software. Algunos, en concordancia con el LACSG lo utilizan de una manera más rutinaria buscando aliviar cálculos que muchas veces son

tediosos o a través de la visualización de ecuaciones, combinaciones lineales, independencia/dependencia lineal, etc. Son 25 las investigaciones que fueron identificadas en la subcategoría C3.2-Instrumento de cálculo y visualización. Es sorprendente que se considere como aporte valioso del software a la simplificación de cálculos y a supuestas bondades relacionadas con la visualización, que solo se aprecia en tres dimensiones, enfatizando aspectos cognitivos más o menos triviales. Otros trabajos buscan utilizar el software como herramienta para hacer conjeturas e investigar propiedades y vinculaciones entre conceptos, y solo 12 de las investigaciones recabadas buscan recuperar la génesis del AL vía nociones de GA por medio del software. Un tercer grupo lo utiliza para enmarcar propuestas que intentan establecer aplicaciones a otras ciencias, postura que tampoco es preponderante pues sólo se identificaron 11 investigaciones, la mayoría de las cuales proponen vinculaciones específicas a la carrera que los estudiantes están cursando en sus respectivas universidades. Finalmente forman parte de esta metacategoría aquellos trabajos que analizan libros de texto y propuestas de enseñanza de las cuales solo cinco proponen una enseñanza híbrida.

Por último, la metacategoría A- *Génesis del conocimiento* agrupa 11 investigaciones que analizan desde un punto de vista epistemológico la génesis de los conocimientos de AL y GA. Sólo cinco de ellas justifican desde un punto de vista epistemológico las bondades de una enseñanza híbrida entre AL y GA en los cursos de la universidad.

En síntesis, los principales tópicos y problemas de las investigaciones son relativos a identificar obstáculos en el aprendizaje y la incorporación de software. Muchos trabajos se enfocan en describir sólo las dificultades de los estudiantes sin preguntarse ¿por qué será que ello ocurre? Vinculado a esto, y como una alternativa a los problemas que se presentan en la enseñanza, aparece la introducción de aplicaciones y software, tales como construir un robot o un videojuego; u otras más convencionales como es el procesamiento digital de imágenes, o reducir la complejidad en los cálculos.

6. Conclusiones

El estudio y análisis de las 168 investigaciones confirma que el fenómeno de la escisión entre AL y GA no es “visto” por la mayor parte de la comunidad de investigadores en Educación Matemática. Sólo 36 investigaciones plantean explícitamente alguna necesidad de recuperar un estudio conjunto del álgebra y la geometría analítica en la universidad. Algunas de ellas justifican dicha relación desde un punto de vista epistemológico, y tratan de dar respuesta a los problemas de aprendizaje de los estudiantes y a las bajas calificaciones que estos obtienen. Otras reducen el problema al uso del software. En nuestro caso, adoptamos el marco teórico de la TAD y en consecuencia abogamos por enfocar la investigación en el análisis didáctico del saber. Queda abierta la necesidad de investigar las razones de la pérdida de sentido del AL y la GA en la universidad, lo que involucraría entre otros, un estudio en profundidad de los programas de la asignatura en cuestión y un análisis de libros de texto de distintos períodos históricos, que estamos realizando en la actualidad.

Referencias

- Aydin, S. (2017). On the history of some Linear Algebra Concepts: From Babylon to Pre-Technology. *The Online Journal of Science and Technology-January*, 7(1).
- Bianchini, B. L., de Lima, G. L. y Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM*, 51(7), 1097-1110. doi: 10.1007/s11858-019-01081-5
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C. y Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46. doi: 10.1080/07468342.1993.11973504
- Chen, H., Gao, S. y Yang, W. (2016). On Linear Algebra for Non Mathematics Majors. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 4(4), 595-601. doi: 10.4236/jamp.2016.44065
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage.
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

- Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, 705-746.
- Consejo Federal de Decanos de Ingeniería. (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de Ingeniería en la República Argentina "Libro rojo de CONFEDI"*. Universidad Fasta Ediciones.
- Crippa, D. (2017). Descartes on the Unification of Arithmetic, Algebra and Geometry Via the Theory of Proportions. *Revista Portuguesa De Filosofia*, 73(3/4), 1239-1258. doi: 10.2307/26291336
- Domínguez-García, S., García-Planas, M. I. y Taberna, J. (2016). Mathematical modelling in engineering: an alternative way to teach Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(7), 1076-1086. doi: 10.1080/0020739X.2016.1153736
- Donvito, A. y Otero, M. R. (2019). Why do adults go to adult secondary school? *IKASTORRATZA. e-Revista de Didáctica*, 23, 81-93. doi: 10.37261/23_alea/3
- Dorier, J. L. (2000). Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire-Perspective théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz* (12).
- Dorier, J. L. (2016). Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra. *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline*.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer. doi: 10.1007/0-306-47203-1_7
- Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (2003). *Linear Algebra*. Pearson New International Edition.
- García-Hurtado, O., García-Pupo, M. M. y Poveda-Chaves, R. (2019). Linear algebra learning focused on plausible reasoning in engineering programs. *Visión electrónica*, 13(2). doi: 10.14483/22484728.15164
- Gascón J. y Bosch, M. (2007). La miseria del “generalismo pedagógico” ante el problema de la Formación del Profesorado. En L. Ruiz Higuera, A. Estepa, F. J. García

(Eds.), *Matemáticas, Escuela y Sociedad. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 201-240). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático. De la antigüedad hasta nuestros días*. Madrid: Alianza Editorial.

Otero, M. R., Fanaro, M., Corica, A., Llanos, V. C., Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el Aula de Matemática*. Tandil: Dunken.

Sánchez-Meca, J. (2010). Cómo realizar una revisión sistemática y un meta-análisis. *Aula abierta*, 38(2), 53-64.

Anexo

Tabla 2. Textos categorizados según la categorización inductiva generada.

A. GÉNESIS DEL CONOCIMIENTO (11 TRABAJOS)				
A.1- REPORTE HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS (2 TRABAJOS)				
T71	Katz, V. J., y Barton, B.	2007	Artículo	Stages in the History of Algebra with implications for teaching.
T38	Dorier, J.-L.	1995	Artículo	A general outline of the genesis of vector space theory.
A.2- REPORTE DIDÁCTICOS (9 TRABAJOS)				
<i>A.2.1- PERSPECTIVA HÍBRIDA (5 TRABAJOS)</i>				
T39	Dorier, J.-L.	2000	Artículo	Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire-Perspective théorique sur leurs interactions.
T11	Ba, C., y Dorier, J.-L.	2010	Acta Congreso	The teaching of vectors in Mathematics and Physics in France during the 20th Century.
T53	Gueudet-Chartier, G.	2004	Artículo	Should we teach Linear Algebra through Geometry?
T54	Chartier, G.	2006	Artículo	Using Geometry to teach and learn Linear Algebra.
T3	Andreoli, D. I.	2009	Tesis de Maestría	Análisis de los obstáculos en la construcción del concepto de dependencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad
<i>A.2.2- PERSPECTIVA MATRICIAL (4 TRABAJOS)</i>				
T22	Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., y Porter, A. D.	1993	Artículo	The Linear Algebra curriculum study group recommendations for the first course in Linear Algebra.
T30	Day, J., y Kalman, D.	1999	Artículo	Teaching Linear Algebra: What are the questions?
T31	Day, J., y Kalman, D.	2001	Artículo	Teaching Linear Algebra: Issues and resources.
T158	Dorier, J. L.	2016	Artículo	Duality between formalism and meaning in the learning of linear algebra
B. ERRORES Y OBSTÁCULOS (85 TRABAJOS)				
B.1- CONCEPTUALIZACIÓN (58 TRABAJOS)				
T88	Molina Zavaleta, J. G., y Oktaç, A.	2007	Artículo	Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico.
T18	Britton, S., y Henderson, J.	2009	Artículo	Linear Algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties.
T134	Uzuriaga López, V. L., y Arias Mendoza, J. J.	2006	Artículo	Una mirada al Álgebra Lineal.

T132	Uzuriaga López, V. L., Arias Mendoza, J. J., y Manco Silva, B. G.	2010	Artículo	Diagnóstico y análisis de algunas causas que dificultan el aprendizaje del Álgebra Lineal en estudiantes de Ingeniería.
T62	Harel, G.	1998	Artículo	Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa).
T29	Da Silva, A. M., y Lins, R.	2002	Acta Congreso	An analysis of the production of meaning for the notion of basis in Linear Algebra.
T32	DeVries, D., y Arnon, I.	2004	Acta Congreso	Solution. What does it mean? helping Linear Algebra students develop the concept while improving research tools.
T59	Hannah, J.	2009	Acta Congreso	The language of Linear Algebra.
T79	Kú, D., Trigueros, M., y Oktaç, A.	2008	Artículo	Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE.
T21	Carlson, D.	1993	Artículo	Teaching Linear Algebra: Must the fog always roll in?
T46	Dubinsky, E.	1997	Capítulo de libro	Some thoughts on a first course in Linear Algebra at the college level.
T15	Bogomolny, M.	2006	Tesis de Doctorado	The role of example-generation tasks in students' understanding of Linear Algebra
T16	Bogomolny, M.	2007	Artículo	Fundamental vector spaces: what can be learned from nonexamples.
T85	Maracci, M.	2005	Acta Congreso	On some difficulties in vector space theory.
T40	Dorier, J.-L.	1998	Artículo	The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces.
T41	Dorier, J.-L.	1995	Artículo	Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in Mathematics.
T49	Fischer, A.	2005	Artículo	Mental models of the concept of vector space.
T84	Malek, A., y Movshovitz-Hadar, N.	2011	Artículo	The effect of using transparent pseudo-proofs in Linear Algebra.
T86	Martínez, I. Z., Almazán, J. F., Lentini, M. L., Lentini, M. C., y Crespo, S. H.	2013	Acta Congreso	Estudio y análisis de dificultades detectadas en el tema "ecuaciones con parámetros – sistemas de ecuaciones lineales con parámetros".
T48	Elena, C. R., y Herrera, C. G.	2007	Artículo	El desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de primer año de Ingeniería.
T97	Oktaç, A., y Trigueros, M.	2010	Artículo	¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal?

T105	Parraguez González, M., y Oktaç, A.	2010	Artículo	Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory.
T103	Parraguez González, M.	2009	Tesis de Doctorado	Evolución cognitiva del concepto espacio vectorial
T110	Roa-Fuentes, S., y Oktaç, A.	2010	Artículo	Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal.
T116	Soylu, Y., y Isik, A.	2008	Artículo	Teaching Linear Algebra: Conceptual and Procedural Learning in linear transformation.
T119	Stewart, S., y Thomas, M. O. J.	2007	Acta Congreso	Embodied, symbolic and formal aspects of basic Linear Algebra concepts.
T120		2007	Artículo	Embodied, symbolic and formal thinking in Linear Algebra.
T121		2010	Capítulo de libro	Thinking about the teaching of Linear Algebra.
T117	Stewart, S.	2008	Tesis de Doctorado	Understanding Linear Algebra concepts through the embodied, symbolic and formal worlds of mathematical thinking
T122	Stewart, S., y Thomas, M. O. J.	2009	Artículo	A framework for mathematical thinking: the case of Linear Algebra.
T123		2010	Artículo	Student learning of basis, span and linear independence in Linear Algebra.
T126	Thomas, S.	2011	Tesis de Doctorado	An activity theory analysis of Linear Algebra teaching within University Mathematics
T81	Lapp, D. A., Nyman, M. A., y Berry, J. S.	2010	Artículo	Student connections of Linear Algebra concepts: An analysis of concept maps.
T10	Aydın, S.	2009	Artículo	The factors effecting teaching Linear Algebra.
T111	Rodríguez Jara, M., y Parraguez González, M.	2013	Acta Congreso	Una descomposición genética teórica para el concepto espacio vectorial R2.
T112	Rodríguez Jara, M., y Parraguez González, M.	2013	Acta Congreso	Un reporte de la investigación: construcción cognitiva de los conceptos espacio vectorial R2 y R3 desde la teoría APOE.
T4	Andreoli, D. I.	2003	Artículo	Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad (Segunda fase).
T20	Caamaño Espinoza, C., y Aravena Díaz, M.	2004	Acta Congreso	Un aporte de la Geometría para mejorar la calidad de los aprendizajes de Álgebra Lineal en Ingeniería.
T136	Wang, H., y Posey, L.	2011	Artículo	An inquiry-based Linear Algebra class.
T51	González, M., Hernández, A.	2007	Artículo	El constructivismo en la evaluación de los aprendizajes del Álgebra Lineal.

T52	I, y Hernández, A. I.	2007	Artículo	Desempeño de alumnos y docentes de matemática desde el constructivismo. Caso Álgebra Lineal. Facultad de Ingeniería. LUZ.
T60	Hannah, J., Stewart, S., y Thomas, M.	2011	Acta Congreso	Teaching Linear Algebra: one lecturer's engagement with students.
T149	Çelik, D.	2015	Artículo	Investigating Students' Modes of Thinking in Linear Algebra: The Case of Linear Independence
T151	Stewart, S.	2018	Artículo	Moving Between the Embodied, Symbolic and Formal Worlds of Mathematical Thinking with Specific Linear Algebra Tasks
T160	Donevska- Todorova, A.	2016	Artículo	Procedural and Conceptual Understanding in Undergraduate Linear Algebra
T161	Haider, M.; Bouhjar, K.; Findley, K.; Quea, R.; Keegan, B.; Andrews- Larson, C.	2016	Acta Congreso	Using Student Reasoning to Inform Assessment Development in Linear Algebra
T146	Roa-Fuentes, S.; Parraguez, M.	2017	Artículo	Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario
T42	Dorier, J.-L.	2002	Acta Congreso	Teaching Linear Algebra at University.
T124	Stewart, S., y Thomas, M. O. J.	2003	Artículo	Difficulties in the acquisition of Linear Algebra concepts.
T55	Gueudet- Chartier, G.	2002	Acta Congreso	Using "geometrical intuition" to learn Linear Algebra.
T56	Gueudet- Chartier, G.	2002	Acta Congreso	Geometrical and figural models in Linear Algebra.
T113	Rosso, A. E., y Barros, J. C.	2003	Acta Congreso	Entramado de lenguajes en Álgebra Lineal.
T138	Wawro, M., Sweeney, G. F., y Rabin, J. M.	2011	Artículo	Subspace in Linear Algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition.
T137	Wawro, M.	2009	Acta Congreso	Task design: Towards promoting a geometric conceptualization of linear transformation and change of basis.
T63	Harel, G.	1997	Artículo	The Linear Algebra curriculum study group recommendations: Moving beyond concept definition.
T157	Campos Cid, S.	2017	Tesis de Maestría	Desde el conjunto solución de los sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 y 3×2 hasta algunos conceptos básicos del Álgebra Lineal

T163	Beltrán Meneu, M. J.; Murillo Arcila, M.; Jordá Mora, E.	2017	Artículo	A teaching proposal for the study of eigenvectors and eigenvalues
T164	Oktaç, A.	2018	Capítulo de libro	Conceptions About System of Linear Equations and Solution

B.2- IMPLEMENTACIONES (27 TRABAJOS)

B.2.1- ENFOQUE GEOMÉTRICO (10 TRABAJOS)

T76	Konyalioglu, A., Isik, A., Kaplan, A., Hızarcı, S., y Durkaya, M.	2011	Artículo	Visualization approach in teaching process of Linear Algebra.
T77	Konyalioglu, A., Isik, A., y Konyalioglu, S.	2008	Artículo	Effectiveness of visualization approach on student's conceptual learning.
T78	Konyalioglu, S., Konyalioglu, A., Ipek, A., y Isik, A.	2005	Artículo	The role of visualization approach on student's conceptual learning.
T75	Konyalioglu, A. C., y Ipek, A. S.	2003	Artículo	On the teaching Linear Algebra at the University level: The role of visualization in the teaching vector spaces.
T106	Pecuch-Herrero, M.	2000	Artículo	Strategies and computer projects for teaching Linear Algebra.
T47	Dundar, S., Gokkurt, B., y Soylu, Y.	2012	Artículo	The efficiency of visualization through Geometry at Mathematics Education: A theoretical framework.
T57	Gueudet-Chartier, G.	2003	Acta Congreso	Geometric thinking in a n-space.
T115	Souto-Rubio, B.	2012	Acta Congreso	Visualizing mathematics at University? Examples from theory and practice of a Linear Algebra course.
T167	Dogan, H.	2018	Capítulo de libro	Mental Schemes of: Linear Algebra Visual Constructs
T168	Turgut, M.	2018	Capítulo de libro	How Does a Dynamic Geometry System Mediate Students' Reasoning on 3D Linear Transformations?

B.2.2- ENFOQUE ALGEBRAICO (3 TRABAJOS)

T2	Alves Días, M., y Artigue, M.	1995	Acta Congreso	Articulation problems between different systems of symbolic representations in Linear Algebra.
T43	Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., y Rogalski, M.	1999	Acta Congreso	Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University.

T105	Parraguez González, M.	2010	Artículo	Los modos de pensar el Álgebra Lineal y ejemplos ad hoc en problemas específicos de su enseñanza y aprendizaje.
<i>B.2.3- ENFOQUE HÍBRIDO (14 TRABAJOS)</i>				
T26	Cerutti, R. A., y Andreoli, D. I.	2002	Artículo	Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad (primera fase).
T36	Dogan-Dunlap, H.	2010	Artículo	Linear Algebra students' modes of reasoning: Geometric representations.
T64	Harel, G.	1989	Artículo	Applying the principle of multiple embodiments in teaching Linear Algebra: Aspects of familiarity and mode of representation.
T139	Wu, H.	2004	Artículo	Computer aided teaching in Linear Algebra.
T5	Andreoli, D. I.	2005	Artículo	Construcción de los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en alumnos de primer año de la Universidad (Tercera fase).
T89	Montero Morales, J. A., Escudero, N., Pajares, F. J., Garcia, O., y Moran, J. A.	2004	Acta Congreso	Implantación de una metodología constructivista en la docencia del Álgebra en la Ingeniería.
T90	Montero Morales, J. A., Martínez Marroquín, E., Moran Moreno, J. A., Alías Pujol, F., y Rodríguez Oliver, J.	2002	Acta Congreso	ALGTEC: Un complemento a la enseñanza del álgebra Lineal en carreras de Ingeniería de Telecomunicaciones.
T28	Costa, V. A., Scarabino, A., Idiart, M. I., y Knoblauch, M.	2010	Artículo	Enseñanza del Álgebra Lineal para alumnos de Ingeniería aeronáutica: experiencia motivadora.
T23	Carranza, M. R., Andino, G., Miró Erdmann, S., y Baracco, M. N.	2009	Acta Congreso	Una propuesta de enseñanza-aprendizaje integradora de Álgebra Lineal en el marco de formación de competencias.
T127	Trigueros, M., y Possani, E.	2013	Artículo	Using an economics model for teaching Linear Algebra.

T131	Uicab, R., y Oktaç, A.	2006	Artículo	Transformaciones lineales en un ambiente de Geometría Dinámica.
T65	Harel, G.	1999	Artículo	Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of Geometry and Linear Algebra.
T153	Oropeza Legorreta, C.; Sánchez Guerra, J. I.	2015	Artículo	Estudio que promueve la articulación de argumentos analíticos y geométricos en combinación lineal de matrices
T159	Gatica, M. A.; Lusente, M. F.; Cocilova, A. I.; Cornejo Endara, R. A.	2018	Artículo	Una propuesta para construir geoméricamente el concepto de base en el plano

C. RECURSOS Y EXPERIENCIAS DE AULA (72 trabajos)

C.1- RESEÑAS BIBLIOGRÁFICAS (7 trabajos)

T80	Kuzmanovich, J.	1993	Artículo	Review of the book linear algebra through geometry, by Thomas Banchoff.
T50	Folland, G. B., y Stuart, J. L.	2005	Artículo	Review of the books Linear Algebra, by John B. Fraleigh and Raymond A. Beauregard; Linear Algebra and its Applications, by David Lay; Linear Algebra: A Geometric Approach, by Theodore Shifrin and Malcolm R. Adams; Introduction to Linear Algebra by Gilbert Strang.
T61	Harel, G.	1987	Artículo	Variations in Linear Algebra content presentations.
T83	Madrid de la Vega, H., García Calvillo, I. D., y Cribeiro Díaz, J.	2011	Artículo	Elaboración de libros que vinculan investigación y enseñanza de Álgebra Lineal y optimización, en aplicaciones contemporáneas.
T143	Pozas, D., Alves Dias, M.	2018	Artículo	Los implícitos en el discurso tecnológico-teórico en dos libros de Álgebra Lineal
T156	Campos, V. F.	2017	Tesis de Maestría	Los conceptos de valor propio y vector propio en un texto de Álgebra Lineal: una mirada desde la teoría APOE
T165	Cook, J. P.; Zazkis, D.; Estrup, A.	2018	Capítulo de libro	Rationale for Matrix Multiplication in Linear Algebra Textbooks

C.2- PROPUESTAS Y EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA (17 trabajos)

C.2.1- ENSEÑANZA HIBRIDA (5 TRABAJOS)

T17	Bressan, J. C., y Ferrazzi de Bressan, A. E	2008	Artículo	Interpretación geométrica de la regla de Cramer.
T141	Yixun, S.	2009	Artículo	Applications of a particular linear transformation: teaching Analytic Geometry and Linear Algebra.

T99	Oropeza Legorreta, C., y Lezama Andalón, J.	2007	Artículo	Dependencia e independencia lineal: una propuesta de actividades para el aula.
T98	Oropeza Legorreta, C.	2007	Artículo	La visualización como estrategia de estudio en el concepto de dependencia lineal e independencia lineal.
T87	Miranda Montoya, E.	2004	Acta Congreso	Generación de modelos de enseñanza-aprendizaje en el Álgebra Lineal primera fase: Transformaciones lineales.

C.2.2- ENSEÑANZA DE AL EN SÍ MISMA (12 TRABAJOS)

T82	London, R. R., y Rogosinski, H. P.	1990	Artículo	Decomposition theory in the teaching of elementary Linear Algebra.
T70	Idris, I.M.	2012	Artículo	Toward a right way to teach Linear Algebra.
T68	Huang, X.	2006	Artículo	Using formative assessment to improve teaching and learning in Linear Algebra.
T128	Uhlig, F.	2003	Artículo	A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching Linear Algebra.
T129		2003	Artículo	Author's response to the comments on 'The role of proof in . . . Teaching . . . elementary Linear Algebra', by Frank Uhlig
T130	Uhlig, F.	2002	Artículo	The role of proof in comprehending and teaching elementary Linear Algebra.
T44	Dorier, J.-L., Robert, A., y Rogalski, M.	2002	Artículo	Some comments on "The role of proof in comprehending and teaching elementary Linear Algebra" by F. Uhlig.
T19	Burn, R. P.	2002	Artículo	Some comments on the 'Role of proof in comprehending and teaching elementary Linear Algebra' by F. Uhlig.
T150	Trigueros, M.	2018	Artículo	Learning Linear Algebra using models and conceptual activities
T154	Mendoza Sandoval, E.	2015	Tesis de Maestría	Construcción de la Matriz de Cambio de Base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE
T155	Trigueros, M.; Bianchini L., B.	2016	Artículo	Learning Linear Transformations using models
T166	Plaxco, D.; Zandieh, M.; Wawro, M.	2018	Capítulo de libro	Stretch Directions and Stretch Factors: A Sequence Intended to Support Guided Reinvention of Eigenvector and Eigenvalue

C.3- USO DE SOFTWARE (48 TRABAJOS)

C.3.1- INSTRUMENTO PARA UNA ENSEÑANZA HÍBRIDA (12 TRABAJOS)

T37	Donevska-Todorova, A.	2011	Acta Congreso	Developing concepts in Linear Algebra and Analytic Geometry by the integration of DGS and CAS.
T34	Dogan-Dunlap, H.	2004	Artículo	Computers and Linear Algebra.
T35	Dogan-Dunlap, H.	2004	Artículo	Visual instruction of abstract concepts in mathematics courses for non-major students.
T7	Aranda, C., y Callejo, M. L.	2010	Artículo	Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos.

T6	Andreoli, D. I., Beltrametti, M. C., y Rodríguez Verardini, C. J.	2009	Artículo	Construir un puente al Álgebra Lineal en el entorno Cabri.
T74	Klasa, J.	2010	Artículo	A few pedagogical designs in Linear Algebra with Cabri and Maple.
T66	Havelková, V.	2013	Artículo	GeoGebra in teaching Linear Algebra.
T96	Nyman, M. A., Lapp, D. A., St. John, D., y Berry, J. S.	2010	Artículo	Those do what? Connecting eigenvectors and eigenvalues to the rest of Linear Algebra: Using visual enhancements to help students connect eigenvectors to the rest of Linear Algebra.
T125	Thomas, M. O. J., y Holton, D.	2003	Acta Congreso	Technology as a tool for teaching undergraduate mathematics.
T45	Dreyfus, T., Hillel, J., y Sierpiska, A.	1999	Acta Congreso	Cabri based Linear Algebra: transformations.
T145	Sotorriva Neckel, F. A.	2019	Artículo	Geometria analítica e álgebra linear: Geometria analítica e álgebra linear: a utilização do GeoGebra como ferramenta de ensino
T147	Caglayan, G.	2015	Artículo	Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Mathmajors’ linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment

C.3.2- INSTRUMENTO DE CÁLCULO Y VISUALIZACIÓN (25 TRABAJOS)

T33	Dikovic, L.	2007	Artículo	Interactive learning and teaching of Linear Algebra by web technologies: Some examples.
T107	Perez Del Pino, S., y Tarifa Lozano, L.	2012	Artículo	La didáctica del Álgebra Lineal y su diseño: una visión con el uso de la tecnología.
T135	Volodko, I., y Koliskina, V.	2008	Acta Congreso	Teaching Linear Algebra, Analytic Geometry and basic Vector Calculus with Mathematica at Riga Technical University.
T93	Nishizawa, H., Yamada, Y., y Yoshioka, T.	2009	Acta Congreso	The effectiveness of ICT-assisted approach in learning Linear Algebra.
T95	Noriega Treviño, M. E., y Rosillo Martínez, L.	2008	Acta Congreso	Uso de Mathcad como herramienta de apoyo docente en la enseñanza del Álgebra Lineal.
T108	Quesada, A. R.	1999	Acta Congreso	On changing the focus of a Linear Algebra course with a TI-92.
T91	Morales Peral, L., y Díaz Gómez, J. L.	2008	Acta Congreso	Solución de problemas de Álgebra Lineal mediante el uso de Excel.

T109	Rasúa López, M.	2003	Artículo	Microsoft Excel en la solución de problemas de Álgebra Lineal.
T24	Castro Chadid, I.	2001	Artículo	Aplicaciones al Álgebra Lineal utilizando Derive™.
T25	Castro Chadid, I.	2001	Artículo	Programación avanzada con Derive®. Aplicaciones al Álgebra Lineal.
T13	Berry, J. S., Lapp, D. A., y Nyman, M. A.	2008	Artículo	Using technology to facilitate reasoning: Lifting the fog from Linear Algebra.
T140	Yildiz Ulus, A.	2013	Artículo	Teaching the “diagonalization concept” in Linear Algebra with technology: A case study at galatasaray university.
T73	Klapsinou, A., y Gray, E.	1999	Acta Congreso	The intricate balance between abstract and concrete in Linear Algebra.
T133	Uzuriaga López, V. L., Martínez A., A., y Arias Mendoza, J. J.	2008	Artículo	Algunos medios que contribuyen a mejorar el aprendizaje del Álgebra Lineal.
T67	Hazzan, O., y Zazkis, R.	2003	Artículo	Mimicry of proofs with computers: The case of Linear Algebra.
T12	Bautista, M. P.	1993	Artículo	Using computer algebra systems to teach Linear Algebra.
T102	Ortíz, J., Rico, L., y Castro, E.	2008	Artículo	La enseñanza del Álgebra Lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación (using modelling and graphic calculators in the teaching of Linear Algebra: A study in a teacher training program).
T14	Betancourt Gonzalez, Y.	2009	Tesis de Maestría	Ambiente computacional para apoyar la enseñanza de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en la Educación Superior.
T118	Stewart, S., y Thomas, M. O. J.	2004	Acta Congreso	The learning of Linear Algebra concepts: Instrumentation of CAS calculators.
T9	Aydın, S.	2009	Artículo	The role of the computer in the teaching and learning Linear Algebra.
T100	Ortega Pulido, P.	2002	Artículo	Una estrategia didáctica para la enseñanza del Álgebra Lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico Derive.
T101	Ortega Pulido, P.	2004	Tesis de Doctorado	La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico.
T114	Soto, J. C., Bayo, I., y Badiola, F.	2004	Acta Congreso	Diseño de una página web para el aprendizaje “just-in-time” del Álgebra Lineal en un entorno no-presencial.
T142	Zhang, Q.	2004	Acta Congreso	How to teach Linear Algebra effectively.
T162	Vílchez Q., E.	2015	Artículo	Paquete VilGebra: recurso didáctico a través del uso del software Mathematica en el campo del álgebra lineal

C.3.3- APLICACIONES A OTRAS CIENCIAS (11 TRABAJOS)

T27	Chang, J.-M.	2011	Artículo	A practical approach to inquiry-based learning in Linear Algebra.
T58	Habecker, B., y Crannell, A.	2004	Artículo	Using fractals to motivate Linear Algebra.
T72	Kedzierawski, A., y Nicodemi, O.	2001	Artículo	Image reconstruction in Linear Algebra.
T1	Allali, M.	2010	Artículo	Linear Algebra and image processing.
T92	Nishizawa, H., y Yoshioka, T.	2008	Acta Congreso	A proposal to teach 3D vector operations in a roleplaying game.
T94	Nishizawa, H., Zraggen, B., y Yoshioka, T.	2009	Artículo	A system for helping concept-building of 3D Linear Algebra by connecting graphic, symbolic, and verbal representations.
T69	Hurman, A. L.	2007	Artículo	El papel de las aplicaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje del Álgebra Lineal.
T8	Archila Diaz, J. F., Bautista Rojas, L. E., y Villamizar Morales, J.	2011	Artículo	Transformaciones lineales de dimensión finita, aplicadas al desarrollo del modelo cinemático directo para el robot KUKA KR 60 JET R en cursos de Álgebra Lineal y dibujo de máquinas.
T144	Cárcamo Bahamonde, A. D.; Fortuny Aymemí, J. M.; Gómez i Urgellés, J. V.	2016	Artículo	Mathematical modelling and the learning trajectory: tools to support the teaching of linear algebra
T148	Caridade, C. M. R.; Encinas, A. H.; Martín-Vaquero, J.; Queiruga-Dios, A.	2015	Artículo	CAS and Real Life Problems to Learn Basic Concepts in Linear Algebra Course
T152	Oropeza Legorreta, C.; Lezama Andalón, J.	2016	Artículo	Un sistema de audio asociado al concepto de combinación lineal