OTRA DEMOSTRACION DE LA DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ

JAVIER MARTIN LALANDA

En todo espacio euclídeo E, en el que se haya definido una norma (ésto es, $\forall\ x \in E$, norma de $x = \| x \| = +\sqrt{x \cdot x}$, con la notación usual para el producto interno o escalar) se verifica la siguiente desigualdad, conocida con el nombre *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$\forall\ x, y \in E, | \ x \cdot y \ | \leq \| \ x \ \| \cdot \| \ y \ \|$$

Para el modo usual en que se suele demostrar esta desigualdad, se parte de uno de los axiomas asociados a la definición de producto interno, aquel que dice que

el producto interno de todo vector por sí mismo
es siempre un nº real, mayor o igual que cero.

Y en la demostración se efectuará el producto interno de un vector $z = x + \lambda\, y$, combinación lineal de otros dos de E, x e y, a través de un parámetro λ, por sí mismo, desarrollándose, a continuación, dicho producto:

$$(x + \lambda\, y) \cdot (x + \lambda\, y) \geq 0$$

desigualdad que conduce a la obtención de un trinomio de segundo grado en λ, cuyo estudio, tras tener en cuenta el signo de su discriminante asociado y los diversos caracteres de λ, conduce a la desigualdad de Cauchy-Schwarz[1].

1:
a) Usando el discriminante:
Doneddu, A.: *Curso de Matemáticas, vol. 1:* «Algebra y Geometría», 1978, Madrid, p. 164.
Ríos, S.: *Algebra lineal y Geometría vectorial,* 1975, Madrid, págs. 256-257.
b) Usando los axiomas de espacio euclídeo, mediante transformación del producto escalar del que se parte:
Birkhoff & Mac Lane: *Algebra moderna* 1954[1], págs. 198-199.
Dieudonné, J.: *Algebra lineal y geometría elemental,* 1971, Madrid, págs. 95-96.
Barbolla, R.M. *et al.*: *Introducción al Análisis real,* 1981[2], Madrid, pág. 366.

Esta demostración no resulta inmediata, por lo que, con frecuencia suele ser aprendida «de memoria». Por ello, se ha ideado la presente demostración:

Partiendo de los mismos planteamientos de la demostración usual:

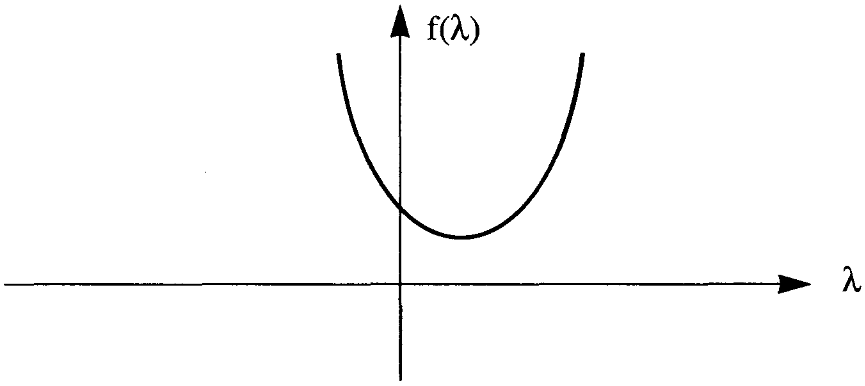
$$\forall\, x, y \in E, \forall\, \lambda \in R, (x + \lambda\, y) \cdot (x + \lambda\, y) \geq 0$$

se tendrá el signo > cuando x e y sean linealmente independientes, pues si ambos fuesen linealmente dependientes, o nulos al mismo tiempo, el vector $x + \lambda$ y podría ser (lo sería en la segunda de las hipótesis indicadas) nulo, con lo que la desigualdad se convertiría en igualdad. También vamos a suponer que y no sea nulo, ya que no se tendría una combinación lineal de vectores, sino un único vector x.

Desarrollando y reordenando los términos:

$$\begin{aligned}(x + \lambda\, y) \cdot (x + \lambda\, y) &= x \cdot x + 2\lambda\, x \cdot y + \lambda^2\, y \cdot y \\ &= \lambda^2 \| y \|^2 + 2\lambda\, x \cdot y + \| x \|^2 \equiv f(\lambda) \geq 0\end{aligned}$$

ya que se trata de un trinomio de segundo grado en λ, cuya gráfica se halla en los cuadrantes 1º y 2º por alcanzar f (λ) valores mayores o iguales que cero:



Calculemos el valor de λ que hace mínima dicha función:

$f'(\lambda) = 2\lambda \| y \|^2 + 2\, x \cdot y$, con lo que, anulando dicha derivada:

$0 = 2\, \lambda_{\mathfrak{M}} \| y \|^2 + 2\, x \cdot y; \quad \lambda_{\mathfrak{M}} = -\dfrac{x \cdot y}{\| y \|^2}$, que corresponde a un mínimo, pues:

$f''(\lambda) = 2 \| y \|^2 > 0$ en virtud del supuesto anterior.

Sustituyendo el valor de $\lambda_{\mathfrak{M}}$ en la función $f(\lambda)$, obtenemos el valor mínimo de la misma:

$$f(\lambda_{\mathfrak{M}}) = \left[\frac{-x \cdot y}{\| y \|^2}\right]^2 \cdot \| y \|^2 + 2\left[-\frac{x \cdot y}{\| y \|^2}\right] x \cdot y + \| x \|^2 = \frac{(x \cdot y)^2}{\| y \|^2} - 2\,\frac{(x \cdot y)^2}{\| y \|^2} +$$

$$+ \| x \|^2 = -\frac{(x \cdot y)^2}{\| y \|^2} + \| x \|^2 = \frac{-(x \cdot y)^2 + \| x \|^2 \cdot \| y \|^2}{\| y \|^2},$$ y como esta

$f(\lambda_{\mathfrak{M}})$, aún siendo el mínimo valor de $f(\lambda)$, ha de mantenerse mayor o igual a cero, y como el denominador es mayor que cero, por ser la norma de un vector que hemos supuesto no nulo, deberá mantenerse el numerador mayor o igual a cero:

$$-(x \cdot y)^2 + \| x \|^2 \cdot \| y \|^2 \geq 0; \; -(x \cdot y)^2 \geq -\| x \|^2 \cdot \| y \|^2;$$

y multiplicando ambos miembros por -1:

$$(x \cdot y)^2 \leq \| x \|^2 \cdot \| y \|^2$$

y extrayendo la raíz cuadrada:

$$| (x \cdot y) | \leq \| x \| \cdot \| y \| \text{, c.q.d.}$$

Esta sencilla demostración permite una conexión entre varias ramas de la matemática, pues a partir del cálculo de un mínimo se ha obtenido una importante propiedad relacionada con los espacios vectoriales. Y se ha llevado a cabo siguiendo un método *didáctico,* como corresponde.

Zamora, enero 1987