

## **Análisis comparativo de la autenticidad de tareas matemáticas en libros de texto de bachillerato mexicanos y cubanos: el caso del Teorema de Pitágoras**

Luis José Cruz Ramírez

*lcr810719@gmail.com*

Paul Teutli Etcheverry

*etcheverrypaul81@gmail.com*

José Antonio Juárez López

*jajul@fcfm.buap.mx*

*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas,  
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla,  
Puebla, México*

**Resumen:** *Mediante un análisis cualitativo-descriptivo de tres libros de texto mexicanos, así como del libro de texto cubano utilizado en el primer año de bachillerato, se llevó a cabo un análisis comparativo de la autenticidad de cinco tareas matemáticas que se contextualizan en presumibles situaciones reales al utilizar el Teorema de Pitágoras. Tres contextualizaciones de los libros mexicanos y dos de los libros cubanos. La comparación se realizó teniendo en cuenta la cantidad de contextualizaciones del tema indicado en cada libro y la importancia que se le da a las mismas. El análisis de la autenticidad se sustentó en los primeros cuatro aspectos de la Teoría propuesta por Torulf Palm.*

**Palabras clave:** *Autenticidad, libros de texto, Teorema de Pitágoras.*

## **Comparative analysis of authenticity of mathematical tasks in Mexican and Cuban high school textbooks: the case of the Pythagorean Theorem**

**Abstract:** *Throuhg a qualitative-descriptive análisis of three Mexican textbooks, as well as the Cuban textbokk used in the first year of high school, a comparative análisis of the*

*authenticity of five mathematical tasks that are contextualized in presumably real situations at use the Pythagorean Theorem. Three contexts of the Mexican books and two of the Cuban books. The comparison was made taking into account the number of contexts of the topic indicated in each book and the importance given to them. The analysis of authenticity was based on the first four aspects of the theory proposed by Torulf Palm.*

**Keywords:** *Authenticity, textbooks, Pythagorean Theorem.*

## INTRODUCCIÓN

Uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente, en cualquier nivel educativo, es el libro de texto. Hoy por hoy, resulta incuestionable su poderosa influencia en el trabajo de aula, tanto para los profesores como para los alumnos, constituyéndose en bastantes ocasiones, como el referente exclusivo del saber científico.

El libro de texto no es significativo sólo por el conocimiento de la materia que aporta, sino también por las estrategias que facilitan la planificación y desarrollo de la enseñanza al profesor. En este sentido, Boostrom (2001) confirmó esta idea afirmando que “el papel principal de un libro de texto no es presentar información, pero sí apoyar la instrucción. El libro de texto adquiere el propósito de crear condiciones de aprendizaje” (p. 242).

El análisis del libro de texto es un recurso primordial para la investigación educativa en la medida en que otorga perspectivas institucionalizadas del conocimiento, que a menudo suelen ser distantes de los estudiantes (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015; Chulián, Durán y Azcárate, 2019).

Comparar textos escolares entre dos o más países para identificar diferencias y similitudes entre ellos puede proveer de información valiosa. Existe evidencia de estudios comparativos entre países de diferentes partes del mundo. Por ejemplo, Vula, Kastrati y Podvorica (2016), compararon libros de texto de Kosovo y Albania.

Por otra parte, Kh-Elazzabi y Kaçar (2018) realizaron un análisis comparativo en libros de Libia y Turquía acerca de problemas de razón y proporción. Mediante el análisis de contenido abordaron el estudio a través de tres dimensiones: las características contextuales, características matemáticas, así como los requerimientos del desempeño.

Alacaci, Bulut y Erbaş (2012) realizaron un estudio en el que compararon libros de Turquía, Singapur y Estados Unidos. Para llevar a cabo su análisis, estos autores se basaron en algunas características del diseño de libros de texto, tales como el diseño visual, la densidad del texto, la organización interna, los pesos de las líneas curriculares, los tópicos cubiertos, así como la presentación de los contenidos.

Hong y Choi (2018), por su parte, hicieron un estudio comparativo sobre la función lineal en libros coreanos y estadounidenses. Para ello, elaboraron un marco de análisis de dos dimensiones, vertical y horizontal (implica el número de lecciones que abordan la función lineal, la secuencia de los temas por cada lección y los problemas incluidos en la misma). Dicho marco incluyó cuatro niveles de demanda cognitiva: la memorización, los procedimientos sin conexiones y el hacer matemáticas.

Por otro lado, Fan y Zhu (2007), analizaron libros de texto de China, Singapur y Estados Unidos. En su estudio, realizaron la comparación sobre cómo se representan los

procedimientos para la resolución de problemas. Dicho análisis se llevó a cabo mediante dos estratos: estrategias generales y estrategias específicas.

En todas estas investigaciones el enfoque estuvo centrado en un tema matemático específico.

Aunque diversos educadores matemáticos destacan la importancia de los estudios comparativos de libros escolares, estos análisis no son comunes entre países de América Latina. Al respecto, Mosquera (2018) señala que:

Los pocos estudios comparativos de los que se tiene referencia consideran uno o varios libros de algún país iberoamericano con otros de algún país de Europa o de Estados Unidos, por ejemplo: Ponte y Marques (2007) compararon textos escolares de Brasil, España, Estados Unidos y Portugal; Pino y Blanco (2008) estudiaron libros de España y Chile; Castañeda, Rosas y Molina (2010) compararon textos de España, Francia, Inglaterra y México; Picado y Rico (2011) compararon textos de Cuba, Filipina y Puerto Rico; Marmolejo (2014) comparó textos de Colombia y España; y Derouet et al. (2015) compararon libros de texto de Chile, Francia e Italia. (pág. 96)

En su estudio, Mosquera (2018) comparó la manera en que se presentan los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas en libros de matemáticas oficiales de Ecuador y Venezuela, para alumnos de 13 a 14 años. Según los resultados presentados, los libros estudiados difieren en el punto de partida para la enseñanza, el número de tareas propuestas y los contextos de las mismas. Sin embargo, aunque en dicho estudio se plantea el análisis del contexto, solo se realiza una clasificación general de situaciones comerciales y problemas de edades, sin detallar la autenticidad de las tareas.

Por otra parte, Chulián, Durán y Azcárate, (2019) presentaron una herramienta que permite efectuar un análisis de contenido de libros de texto para la Educación Secundaria. Centrándose en el tema de resolución de ecuaciones de primer grado, propusieron cuatro sesiones en las que, se expone el planteamiento de cuestiones en relación al álgebra y al papel de los libros de texto en el salón de clase. Luego se desarrolló un sistema de categorías propio que permitiera estudiar el contenido de estos libros de texto, y finalmente, se analizaron los resultados para el estudio de ecuaciones de primer grado en diferentes libros de texto.

El objetivo del presente estudio fue comparar la autenticidad de los problemas matemáticos verbales de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto de bachillerato tanto de México como de Cuba. Específicamente se pretendió:

- Identificar la forma de contextualizar los problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto mexicanos y cubanos.
- Analizar la autenticidad de los problemas seleccionados de los textos de ambos países.

## CONTEXTUALIZACIÓN

Resulta factible pensar que los seres humanos puedan aprender matemáticas a partir de los fenómenos que están presentes en sus contextos (Castro y Villarraga, 2001). Al final de la escuela primaria, los estudiantes parecen haber adquirido un conjunto de

herramientas mediante las cuales, la resolución de problemas se reduce a la selección y ejecución de operaciones aritméticas sin una consideración seria de la realidad del contexto del problema. En un experimento, Selter (2009) analizó el desempeño de los estudiantes, sus procesos mentales, creencias y actitudes, y encontró que se debe fomentar:

- El uso de problemas reales y menos situaciones ficticias.
- El uso de diversos estilos de enseñanza para activar la reflexión.
- Nuevas normas sociales y socio-matemáticas.

En el contexto del análisis a priori de un problema geométrico para la gestión de la instrucción, Herbst (2012) define la tarea como unidades de significado determinadas en la observación del trabajo matemático que se realiza en el aula, constituyendo un contexto práctico en el que los alumnos razonen sobre las herramientas matemáticas asociadas a un problema. Para este autor, la tarea planteada debe encaminarse a que los estudiantes trabajen generando conocimiento.

Queda claro que, lo anteriormente planteado, se logra con una adecuada cultura de la contextualización. En los últimos años, se ha incrementado la cantidad de estudios teóricos y experimentales en los que se consideran diferentes maneras de diseñar los problemas apoyados en los contextos reales y se analiza cómo estos, promueven el auténtico aprendizaje matemático de los estudiantes (Kaiser, Blomhoej y Sriraman, 2006; Kaiser y Schwarz, 2010).

## LA AUTENTICIDAD EN LAS TAREAS MATEMÁTICAS

El hecho de traer la realidad a los libros de texto de tal manera que simulen, lo más fielmente posible, una situación del contexto que los alumnos podrían hallar fuera de la escuela, permite prepararlos para afrontar dichos problemas en su entorno (Depaepa, De Corte y Verschaffel, 2010). En este tenor, proponemos la siguiente interrogante: ¿cuándo un problema matemático verbal simula una situación auténtica?

En este trabajo se entenderá como problemas que simulan situaciones auténticas a aquellos con

... descripciones textuales de situaciones que se asumen comprensibles para el lector [estudiante], con lo cual las preguntas matemáticas pueden ser contextualizadas y proveen, en forma conveniente, una posible conexión entre la abstracción de las matemáticas puras y sus aplicaciones a fenómenos del mundo real (Verschaffel, Greer, y De Corte, 2000, pág. IX).

Es de vital importancia recalcar que muchos de los problemas verbales matemáticos que aparecen en los libros de texto no cumplen con la finalidad de simular situaciones de la vida real, sino que están “disfrazados” con una situación artificial. Por lo tanto, el alumno difícilmente percibirá los conocimientos matemáticos aprendidos en la escuela como útiles para aplicarlos en situaciones reales; además, no se sentirá atraído o motivado. Ante esta problemática, la solución que proponen muchos investigadores es identificar en los libros de texto aquellos problemas de matemáticas que no tienen en cuenta la realidad que rodea al alumno y reescribirlos de forma que sean más auténticos. No

obstante, dicha labor ha resultado para nada trivial ni inmediata (Medina, 2018; Cerecedo, 2019; Torres, 2019).

Es un hecho que las tareas que proponen los libros de texto son muy utilizadas por los maestros para que los alumnos “desarrollen” sus habilidades matemáticas. La investigación ha realizado fuertes críticas basadas en experiencias empíricas sobre qué impactos tiene la falta de autenticidad de las tareas propuestas por libros de texto (Palm, 2006).

En este trabajo se utiliza la Teoría de las situaciones auténticas en las tareas escolares, para analizar la autenticidad de las situaciones presumiblemente reales, descritas en los libros de texto de matemáticas de bachillerato. Dicha teoría es de gran utilidad para analizar problemas verbales que tratan situaciones reales, de manera que los estudiantes se familiaricen con matemáticas útiles en situaciones fuera de la escuela y en la práctica de resolución de problemas que requieran circunstancias que se consideraran como situaciones en la vida diaria.

Palm (2006) expresó, que el afán de contextualizar todos los problemas verbales o tareas propuestas en libros de matemáticas, ha generado que muchas de estas “simulaciones de situaciones reales” simplemente sean tareas ordinarias matemáticas, cuyo objetivo es el desarrollo de un algoritmo mecanizado sin sentido; disfrazadas con un contexto figurativo de situaciones fuera del aula, lo cual genera efectos negativos sobre el aprendizaje, actitudes y creencias de los estudiantes

La Teoría de Palm propone ocho aspectos que debe cumplir toda tarea matemática que pretenda tratar la realidad y por lo tanto considerarse auténtica. En esta investigación se utilizarán los primeros cuatro aspectos para el análisis de las tareas seleccionadas (Palm, 2009), esto son:

- a) **Evento.** Referente al evento planteado en la tarea. En una simulación de una situación del mundo real, es un requisito previo que el evento descrito en la tarea de la escuela haya tenido lugar o tenga una oportunidad justa de realizarse.
- b) **Pregunta.** Se refiere a la concordancia entre la tarea asignada en la escuela y en una situación correspondiente fuera de la escuela. La pregunta en la tarea de la escuela, que podría plantearse en el evento del mundo real descrito, es un requisito previo para que exista una situación del mundo real correspondiente.
- c) **Información / datos.** Hace referencia a la información y los datos en la tarea e incluye valores, modelos y condiciones dadas. Se conforma por los siguientes tres sub-aspectos:
  - c1. **Existencia.** Se refiere a la coincidencia existente entre la información disponible en la tarea de la escuela y la información disponible en la situación simulada. Las discrepancias en la información entre la situación de la escuela y la situación simulada a menudo conducen a diferencias entre las actividades matemáticas realizadas en las dos situaciones.
  - c2. **Realismo.** Hace referencia a la información existente. Al simular este aspecto con un razonable grado de fidelidad, números y valores indicados son realistas en el sentido de naturaleza idéntica o muy cerca de los números correspondientes y los valores de la simulación.
  - c3. **Especificidad.** Indica la relación en la especificidad de la información disponible en la situación escolar y la situación simulada. Esta relación es importante para que el alumno pueda resolver la situación dentro y fuera de la

escuela, ya que la falta de especificidad puede producir un contexto ligeramente diferente. La simulación puede ayudar a proporcionar evidencia de situaciones reales en las que las matemáticas de la escuela son útiles.

**d) Presentación.** Se refiere a la manera en que la tarea se transmite o se comunica a los estudiantes. Este aspecto se divide en dos sub-aspectos:

**d1.** Modo. Considera si la tarea se comunica a los estudiantes oralmente o en forma escrita y si la información se presenta en palabras, diagramas o tablas.

**d2.** Uso del Lenguaje. Este aspecto se refiere a la estructura de la oración de terminología y la cantidad de lenguaje utilizado en la presentación de la situación de trabajo. Las tareas escolares requieren diversas capacidades en la interpretación de las tareas extraescolares correspondientes, por lo que es importante que el lenguaje usado en la tarea escolar no sea tan diferente al de la situación de la vida real correspondiente, pues afecta negativamente las posibilidades de los estudiantes para utilizar las mismas matemáticas que se habrían utilizado en la situación simulada.

## SISTEMA EDUCATIVO MEXICANO

De acuerdo con lo que estipula la Secretaría de Educación Pública (SEP)<sup>1</sup>, el sistema educativo mexicano se compone de cinco niveles, siendo los primeros cuatro, parte de la educación obligatoria. El primero de estos, el preescolar, consta de tres grados y se proporciona a niños de 3 a 5 años de edad. El segundo nivel es la primaria que implica seis grados y normalmente se imparte a niños de 6 a 12 años de edad. Continúa la educación secundaria, impartida en tres años a la población estudiantil de 12 a 16 años de edad. El cuarto nivel, el medio superior, se proporciona a estudiantes de 15 a 18 años de edad, es un requisito para ingresar al quinto nivel de estudios, el superior.

Concretamente, el nivel medio superior o Educación Media Superior (EMS) en México, implica diferentes subsistemas agrupados en tres categorías: bachillerato general, bachillerato tecnológico y formación profesional técnica. A lo largo del siglo pasado, este nivel educativo tuvo una escasa cobertura, la cual comenzó a acelerarse hacia finales de la década de los sesenta y, en especial, a inicios de la década de los noventa.

En 2008, se instituyó la Reforma Integral de la Educación Media Superior (RIEMS). La finalidad fue impulsar el desarrollo de la educación por competencias y la vinculación de los más de treinta subsistemas educativos en la EMS, mediante el establecimiento del Marco Curricular Común (MCC) y el Sistema Nacional de Bachillerato (SNB).

En diciembre de 2012 se propone otra reforma educativa, con el propósito de instituir el Nuevo Modelo Educativo (NME) para la educación obligatoria (SEP, 2017). Presentado en marzo de 2017 el NME establece, de manera específica, que todo egresado de la educación obligatoria debe ser una persona que:

... emplee el pensamiento hipotético, lógico y matemático para formular y resolver problemas cotidianos y complejos; tenga la capacidad de análisis y síntesis; sepa argumentar de manera

---

1 <https://www.mexterior.sep.gob.mx/sisedMEX.html>

crítica, reflexiva, curiosa, creativa y exigente; se informe de los procesos naturales y sociales, de la ciencia y la tecnología, para comprender su entorno; sea competente y responsable en el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación; y tenga la capacidad y el deseo de seguir aprendiendo de forma autónoma o en grupo durante el transcurso de su vida. (pág.46)

## **EL SISTEMA EDUCATIVO CUBANO Y LA ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA<sup>2</sup>**

En la República Socialista de Cuba, el sistema educativo es función del estado, este orienta, impulsa y promueve la educación, así como la cultura y las ciencias en todas sus manifestaciones. Los objetivos y principios fundamentales fueron respaldados por la constitución de la República del 24 de febrero de 1976. Actualmente se lleva a cabo el tercer perfeccionamiento del sistema nacional de educación cubano por la necesidad de actualizar libros, planes, programas y orientaciones metodológicas a partir del propio desarrollo de la ciencia, las exigencias sociales, los cambios operados en la sociedad, la necesidad de poner a la escuela a la altura de estos tiempos.

El sistema de educación cubano se entiende como un conjunto de subsistemas estructurados de manera orgánica distribuido a partir de los siguientes niveles de enseñanza: Círculos Infantiles y Educación Pre-escolar, Primaria, Secundaria básica, Preuniversitaria, Educación Técnica Profesional, Universidad, Educación de adultos y la Educación especial. Tanto la educación primaria como la secundaria son obligatorias.

## **EL SISTEMA EDUCATIVO CUBANO Y SUS PARTICULARIDADES**

De acuerdo con el MINED (Ministerio de Educación), el sistema educativo cubano comienza en los Círculos Infantiles, los cuales reciben a los niños entre el primero y los 5 años de vida. Posteriormente pasan a la Educación Pre-escolar. Una vez en la primaria, se estudia desde primer grado hasta el sexto, y la secundaria básica consta de séptimo a noveno grado. La enseñanza preuniversitaria, también denominada bachillerato, se cursa para obtener carreras profesionales en ciencias o letras y se constituye además en la antesala de la Universidad.

La educación técnica profesional es uno de los siguientes pasos luego de la secundaria básica, la cual prepara a obreros calificados – con nivel medio básico profesional, que equivale a un noveno grado – y a técnicos medios con un nivel medio superior profesional equivalente a duodécimo grado. La última fase dentro del sistema educativo cubano es la Universidad. Al concluirla, los futuros profesionales se incorporan al mercado laboral según las necesidades del país. Las universidades cubanas reciben profesionales cubanos y extranjeros que llegan para perfeccionar sus conocimientos y para obtener títulos de posgrado (EcuRed, 2011).

---

2 Página web CubaTresor

## MÉTODO

La metodología utilizada fue de tipo cualitativa con carácter descriptivo. Al respecto, Hernández, Fernández y Baptista (2010) consideran que: “la investigación cualitativa proporciona profundidad a los datos, dispersión, riqueza interpretativa, contextualización del ambiente o entorno, detalles y experiencias únicas. También aporta un punto de vista “fresco, natural y holístico” de los fenómenos, así como flexibilidad” (p. 17). Por otra parte, al tener en cuenta que no hay manipulación de las variables, podemos decir que el presente es un estudio *ex post facto*.

Debido a que uno de los propósitos de esta investigación fue analizar la contextualización de problemas matemáticos donde se aplica el Teorema de Pitágoras, en la enseñanza media superior, tanto en Cuba como en México, fueron seleccionados aquellos libros que presentan contextos aparentemente auténticos. Asimismo, se realizó una comparación considerando en qué ámbito se sustentan dichas contextualizaciones y si los países en cuestión han adquirido una adecuada cultura de la contextualización. Para la selección y análisis de los problemas contextualizados, presumiblemente auténticos, nos apoyamos en los cuatro primeros aspectos de los ocho que plantea Palm (2009) en su teoría local de las tareas con situaciones auténticas.

## ANÁLISIS DE LAS TAREAS MATEMÁTICAS SELECCIONADAS

Se realizó una revisión de diversos libros de los tres grados de bachillerato en México, seleccionando algunos de los cuales, están acorde con el trabajo por competencias que establece el MCC de la RIEMS. De igual manera, se revisaron los tres libros que se utilizan en Cuba desde hace décadas. Como resultado de dicha revisión, se seleccionaron tres tareas que simulan una situación de la vida real de los libros de textos mexicanos, y dos de los libros de textos cubanos. Se efectuó tal selección, debido a la cantidad de libros de texto de Matemáticas existentes en México, no así en Cuba, donde cada nivel o grado utiliza un mismo libro de texto y un cuaderno de ejercicios.

De los libros mexicanos revisados, se seleccionaron tres de la editorial Book Mart: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2018, Escuelas Preparatorias Oficiales del Estado de México (EPOEM) Bachillerato tecnológico (BT); Trigonometría 1ª Edición 2017 (EPOEM) y Pensamiento Matemático II: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2019 de Bachilleratos Generales Oficiales (BGO).

## ANÁLISIS DE LAS TAREAS SELECCIONADAS EN LIBROS MEXICANOS

### a) Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2018 (EPOEM) Bachillerato tecnológico

*Juan tiene una escalera de 6.5 metros de alto y quiere subir a la ventana del segundo piso de su casa que se encuentra a 6 metros de altura. ¿A qué distancia de la pared va a quedar la base de la escalera?*

**Evento.** Es una situación que en condiciones normales podría ocurrir fuera de la escuela, enfrentándose tanto alumnos, padres o algún familiar cercano, pues la mayoría de ellos han experimentado el evento descrito, ya sea involucrados directamente o como simples espectadores. Por lo tanto, el evento tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. No obstante, es poco probable que se utilice el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación presentada (Figura 1).

**Pregunta.** En la pregunta que presenta el problema, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían. En este tipo de situaciones es más preocupante saber si con tal escalera es suficiente para llegar a la altura de la ventana.

**Información y datos.** Con respecto a la existencia, hay una discrepancia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Al analizar la situación con base en la figura mostrada, podemos constatar que no se tiene claridad sobre qué va a realizar en

realidad la persona, si desea entrar por la ventana o simplemente abrirla, en el primer caso necesitaría estar a la altura indicada, pero en el segundo caso no.

**Presentación.** La tarea se da a conocer de forma escrita, además se proporciona una imagen de la situación. Al examinar la imagen se puede observar que, al parecer, la ventana está ubicada a una altura mayor que la proporcionada, ya que no aparece ninguna ventana. por lo tanto, el estudiante podría concluir que la altura de la escalera no es suficiente para llegar hasta la ventana.

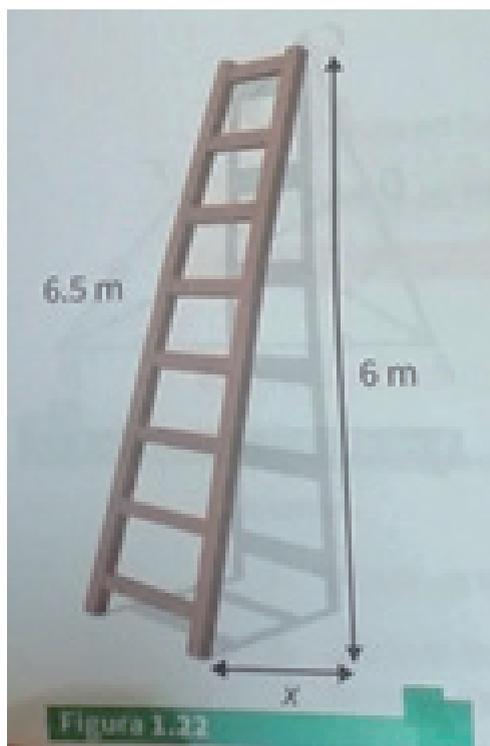


Figura 1. Ilustración para el problema de la escalera.

## b) Trigonometría 1ª Edición 2017 (EPOEM)

*Un electricista coloca su escalera para reparar un foco ubicado a 7m de altura, ¿de qué tamaño es su escalera si la recarga a 3m de distancia?*

**Evento.** Es una situación que en condiciones normales puede llegar a ocurrir fuera de la escuela. No todos los alumnos podrían enfrentarla, pero sí pudieran estar involucrados o ser espectadores. Por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que, al colocar la escalera, la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular su tamaño.

**Pregunta.** Consideramos que la pregunta presentada no es algo que se cuestione en la vida real, pues es poco probable que alguien, en este caso específico, quiera saber el tamaño de la escalera. En este tipo de situaciones es más importante saber si con la altura de la escalera es suficiente para llegar al foco y tener la comodidad necesaria para manipularlo.

**Información y datos.** Con respecto a la existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Tomando en cuenta la representación gráfica proporcionada, podemos verificar que no hay claridad sobre la altura a la que sería colocada la escalera, lo cual depende de la estatura del electricista. Además de considerar que, al manipular el foco, el electricista no estaría obligado a colocar la escalera hasta la altura del mismo.

Otro aspecto por considerar es que, en muchos casos, las escaleras de los electricistas son plegables, lo cual indica que, al tratar de alcanzar el foco, la persona solo desplegaría dicha escalera hasta la altura necesaria para realizar la manipulación.

**Presentación.** La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, además de proporcionar una imagen en la cual se puede observar que, al parecer, el electricista debe utilizar hasta el último peldaño.



Figura 2. Ilustración para el problema del electricista.

### c) Pensamiento Matemático II: Geometría y Trigonometría 1ª Edición 2019 (BGO)

*Eduardo viaja en auto 8 km al norte, luego gira al oeste 3 km, posteriormente avanza a 7 km otra vez al norte para finalizar con 11 km al este. ¿A qué distancia de su punto de partida está ahora?*

*Un esquema del trayecto nos ayudará a vislumbrar el triángulo rectángulo propuesto en la situación anterior:*

*En esta representación [figura 3] observamos el triángulo rectángulo formado y representamos a los catetos e hipotenusa. Claramente se nos pide hallar el valor de la hipotenusa en este triángulo. Los valores que se obtienen son  $a = 15$ ,  $b = 8$ , así que al sustituirlos en la expresión del Teorema de Pitágoras tendremos:  $c^2 = (15)^2 + (8)^2 = 289$ , por lo que  $c = 17$ . Por lo tanto, Eduardo está a 17 km de su punto de origen después de su viaje. [descripción que forma parte del problema]*

**Evento.** Observando que el recorrido se realiza en un auto, podría ser una situación que en condiciones normales podría ocurrir fuera de la escuela, y en la cual los alumnos podrían estar involucrados, pues es probable que algunos de ellos sean llevados a la escuela en auto, o bien pueden salir de paseo en uno. Considerando lo anterior, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la persona pretenda conocer la distancia que lo separa de su punto de partida, aplicando el Teorema de Pitágoras.

**Pregunta.** En la pregunta presentada, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían. En este tipo de circunstancias es

más significativo saber si con la gasolina que contiene el auto es suficiente para hacer el mismo recorrido, o si existe otra carretera que puedan utilizar para el regreso. Por otra parte, es poco común que una persona realice un recorrido de tal manera, siempre girando en intersecciones perpendiculares y no curvas.

**Información y datos.** En referencia a la existencia, hay una divergencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y en la vida real. De acuerdo con la figura presentada, podemos constatar que no siempre el auto debe girar en intersecciones de carreteras de forma perpendicular, si gira en una curva ya no siempre se formaría un triángulo rectángulo, y en ese caso deja de tener sentido la tarea.

**Presentación.** La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, acompañada de una figura, en esta se observa un esquema donde no aparecen carreteras y mucho menos un auto, es decir, se realizó un esbozo de un dibujo de manera que respondiera a la construcción de un triángulo rectángulo forzado, para aplicar el Teorema de Pitágoras.

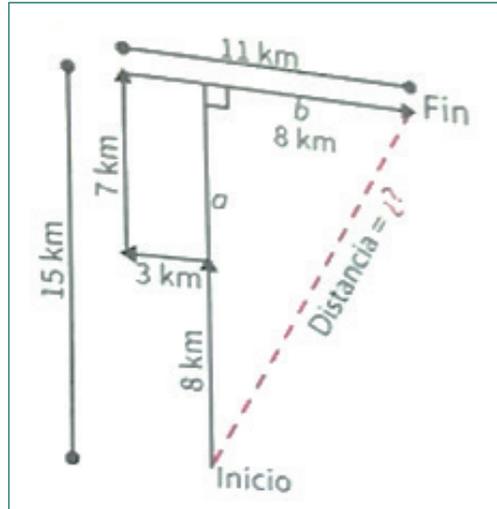


Figura 3. Ilustración para el problema de Eduardo.

## ANÁLISIS DE LAS TAREAS SELECCIONADAS EN LIBROS CUBANOS

### a) Libro de Matemática 10o grado. Editorial: Pueblo y Educación.

*Un muchacho empinando un papalote ha soltado 135 metros de hilo. El papalote se halla situado verticalmente sobre un punto que está a 75 metros de distancia del muchacho. Admitiendo que el hilo no forma onda y sin tener en cuenta la altura del muchacho. ¿A qué altura se encuentra el papalote y cuál es el ángulo de elevación?*

**Evento.** Es una situación que en condiciones normales puede ocurrir fuera de la escuela y podrían enfrentar los alumnos, pues la mayoría de ellos, debido a sus edades, ha experimentado el evento descrito. Al igual que algunos familiares cercanos o amigos, también

pudieran estar involucrados o ser espectadores. Por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, lo que no es posible que suceda es que la persona mida exactamente la cantidad de hilo que ha soltado y mucho menos que el hilo, por su peso y el viento, no forme ondas.

**Pregunta.** En la pregunta presentada, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían, pues es poco probable que se pregunten, a qué altura se encuentra el papalote, o si utilizarían el Teorema de Pitágoras para dar solución al problema presentado. En este tipo de situaciones es más recurrente saber la cantidad de hilo que se necesita para que el papalote pueda alcanzar una altura determinada.

**Información y datos.** La información y los datos proporcionados no se podrían obtener con facilidad en la vida real.

**Existencia.** En este sub-aspecto la información no se podría obtener con facilidad, por lo que se complicaría realizar las mediciones que el problema contiene. Existe una diferencia entre la información proporcionada y lo que podría suceder en un evento fuera de la escuela.

**Realismo.** Este sub-aspecto se refiere a lo que en verdad se podría tener en la vida real en cuanto a la información proporcionada. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, sería muy difícil que, al presentarse la situación, se obtengan las medidas tanto de distancia entre el muchacho y el punto mencionado en la tarea, como la medida del ángulo que se forma. Por otra parte, consideramos que la longitud del hilo proporcionada, no es muy adecuada.

**Presentación.** La tarea se da a conocer a los alumnos de forma escrita, por lo que el estudiante tendrá que modelar la situación con un dibujo, donde podría presentar dificultades al realizar el análisis, considerando que debe despreciar la altura del muchacho e identificar que se forma un triángulo rectángulo.

## b) Libro de Matemática 10º grado. Editorial: Pueblo y Educación

*Una escalera de 6,5 metros de largo está recostada a una pared. Si el pie de la escalera está separado 1,9 metros de la pared. Halla la altura a la que está recostada la escalera y el ángulo que forma con la pared.*

**Evento.** Es una situación que en condiciones normales puede llegar a ocurrir fuera de la escuela, en la cual los alumnos, pudieran estar involucrados o ser espectadores, por lo tanto, el evento descrito tiene una alta probabilidad de presentarse en la vida real. Sin embargo, no es posible que, al colocar la escalera, la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular la altura a la que está reclinada ésta en la pared, como tampoco encontraría la utilidad de calcular el ángulo formado por la escalera y la pared.

**Pregunta.** La pregunta presentada no es algo que una persona cuestione en la vida real. Es por ello que no se considera como un tema discutible. En este tipo de situaciones es más relevante saber si con la altura de la escalera es suficiente para realizar el trabajo que se quiere hacer, lo cual no se menciona en el problema. No se sabe la razón por la cual se colocó la escalera en el lugar indicado.

**Información y datos.** Es importante destacar, que no se da ningún tipo de gráfico o figura de análisis, por lo que el alumno tendrá que hacer ese trabajo. Con respecto a la

existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y los datos en la vida real. Al analizar la situación, no se tiene claridad sobre cuál es su objetivo de colocar la escalera.

**Presentación.** La tarea se da a conocer a los alumnos solo de manera escrita, por lo que el estudiante debe identificar que se forma un triángulo rectángulo. En otro sentido el alumno nunca sabrá la utilidad que se le dará a la escalera, de esta manera los estudiantes no podrán ver la utilidad de lo que se les pide, prácticamente utilizarán el Teorema de Pitágoras de manera mecánica.

Finalmente, la Tabla 1, muestra el comparativo de los libros de texto mexicanos y los libros de texto cubanos, considerando la contextualización y el análisis de la autenticidad de los problemas presentados.

Tabla 1. Comparativo de los textos mexicanos y cubanos.

Libros de texto	Forma de contextualizar	Análisis de la autenticidad
Problemas de textos mexicanos	En los textos mexicanos se contextualizan los problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras mediante situaciones prácticas del ámbito económico y social. Se evidencia el esfuerzo realizado para que los alumnos tengan acceso a problemas que presenten situaciones menos alejadas a sus experiencias y contextos, pero todavía dista mucho de lo que en realidad demanda una tarea auténtica.	<p><b>Evento:</b> Son situaciones que podrían enfrentar los alumnos, pero no es muy probable que la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación.</p> <p><b>Pregunta.</b> En las preguntas presentadas, no se considera que sean cuestionamientos que los involucrados en esta situación se harían.</p> <p><b>Información y datos.</b> En referencia a la existencia, hay una divergencia entre los datos proporcionados en el evento descrito y en la vida real.</p> <p><b>Presentación.</b> Las tareas se dan a conocer a los alumnos de forma escrita, acompañada de una figura, en la que solo se resalta prácticamente la indicación de utilizar el Teorema de Pitágoras.</p>
Problemas de textos cubanos	En los textos cubanos nos percatamos, que existe un insuficiente número de contextualizaciones referentes a la aplicación del Teorema de Pitágoras, no presentan imágenes o figuras de la situación descrita, y estas están basadas en simulaciones de la vida práctica de los estudiantes.	<p><b>Evento:</b> Son situaciones que en condiciones normales podrían enfrentar los alumnos, pero es poco probable que la persona se proponga aplicar el Teorema de Pitágoras para dar solución a la situación.</p> <p><b>Pregunta.</b> Consideramos que las preguntas presentadas no son algo que se cuestione en la vida real.</p> <p><b>Información y datos.</b> Con respecto a la existencia, hay una diferencia entre los datos proporcionados en los eventos descritos y los datos en la vida real.</p> <p><b>Presentación.</b> Las tareas se dan a conocer a los alumnos solo de manera escrita, por lo que el estudiante debe identificar que se forma un triángulo rectángulo.</p>

## CONCLUSIONES Y SUGERENCIAS

Considerando que la finalidad del estudio fue comparar problemas matemáticos verbales de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto de bachillerato de México y Cuba, teniendo en cuenta su autenticidad. Se logró comparar y analizar críticamente la forma de contextualizar dichos problemas. En el análisis realizado con los libros de texto seleccionados, pudimos verificar que existe similitud en lo que respecta a las contextualizaciones. En ambos países se hace un esfuerzo por que los alumnos tengan acceso a problemas que presenten situaciones más cercanas a sus experiencias y contextos, pero todavía dista mucho de lo que en realidad demanda una tarea auténtica.

Por otra parte, detectamos diferencias en la manera de contextualizar problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras en libros de texto mexicanos y cubanos. Cabe destacar que en los libros de matemáticas cubanos no existe la cantidad suficiente de contextualizaciones. Pudimos percatarnos que el Teorema de Pitágoras en los libros cubanos se trabaja inicialmente como grupo de Teoremas de Pitágoras (Teorema de los Catetos, Teorema de la Altura, y el propio Teorema de Pitágoras), y se aplica en su totalidad como herramienta para el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Asimismo, observamos que existen más contextualizaciones sobre resolución de triángulos rectángulos, aplicando razones trigonométricas, pero en este trabajo solo nos centramos en el Teorema de Pitágoras. En contraste, no sucedió así en los libros de texto mexicanos seleccionados, en los cuales se presenta una gama de contextualizaciones más amplia.

Finalmente, podemos afirmar que ninguno de los problemas seleccionados logró cumplir con los cuatro primeros aspectos de la Teoría de Palm. En el aspecto del evento descrito en las tareas de ambos países, se dan situaciones que en condiciones normales podrían ocurrir fuera de la escuela, pero en ninguno de los casos las personas involucradas utilizarían el Teorema de Pitágoras para dar solución a la problemática. En lo referente al segundo aspecto, detectamos que las preguntas presentadas no son cuestionamientos que los involucrados en estas situaciones se harían. En relación con el tercer aspecto, identificamos discrepancia entre los datos proporcionados en las situaciones descritas y los datos en la vida real. Por último, respecto de la presentación de las tareas, en los libros de texto de ambos países, las tareas seleccionadas se dan a conocer de manera escrita; sin embargo, en los textos mexicanos se presentan figuras o imágenes para el análisis, pero no así en los textos cubanos.

Algunas recomendaciones que se deprenen de este estudio son las siguientes:

- Los resultados del análisis de los problemas seleccionados podrían ser de utilidad para los docentes de matemáticas que pretendan diseñar y plantear a sus estudiantes nuevas tareas en las que la autenticidad sea parte fundamental de las mismas.
- El marco teórico utilizado para esta investigación, así como nuestros hallazgos, podrían servir también para los investigadores en Educación Matemática que estén interesados en la búsqueda e identificación de problemas, tareas o situaciones matemáticas que se presenten como auténticas en los libros de texto.
- Finalmente, creemos que el modo en el que se han analizado los problemas expuestos en este estudio, así como los resultados derivados del análisis, podrían ser de mucha ayuda para los diseñadores de libros de texto de matemáticas en cualquier nivel educativo.

## REFERENCIAS

- Boostrom, R. (2001). Whither textbooks? *Journal of Curriculum Studies*, 33(2), 229-245.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 9-28.
- Castro, E., y Villarraga, M. (2001). Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardeñoso, A. Moreno, J. Navas y F. Ruiz (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad* (pp. 125-128). Granada: Universidad de Granada SAEM THALES.
- Cerecedo, A. L. (2019). *Diseño de tareas matemáticas auténticas: El porcentaje en contextos financieros*. Tesis de Maestría no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
- Chulián, S., Durán, M. R. y Azcárate, P. (2019). Herramienta de análisis de contenido en libros de texto: ecuaciones de primer grado. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 103, 25-33.
- Depaeppe, F., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*. 26(2), 152-160.
- EcuRed (2011). Extraído de:  
[http://www.ecured.cu/index.php/Educaci%C3%B3n\\_Especial\\_en](http://www.ecured.cu/index.php/Educaci%C3%B3n_Especial_en)
- Erbaş, A. K., Alacaci, C. y Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 12(3), 2324-2329.
- Fan, L., y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks, *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 61-75.
- Herbst, P. (2012). Las tareas matemáticas como instrumentos en la investigación de los fenómenos de gestión de la instrucción: un ejemplo en geometría. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 5-22.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la Investigación*. México, D. F.: Mac Graw Hill.
- Hong, D. S., y Choi, K. M. (2018). A comparative analysis of linear functions in Korean and American standards-based secondary textbooks, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(7), 1025-1051.
- Kaiser, G., Blomhoej, M. y Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modeling. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*. 38 (2), 82-85.
- Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education - Examples and Experiences, *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51 - 76.
- Kh-Elazzabi, A. A. y Kaçar, A. (2018). A Comparative Analysis of Ratio and Proportion Problems in Libyan and Turkish Mathematics Textbooks, *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, 5(4), 132-139.
- Medina, I. (2011). *Diseño de tareas matemáticas auténticas en secundaria a partir de la teoría de Palm y la investigación documental y de campo*. Tesis de maestría. México: BUAP.

- Mosquera, J. (2018). Estudio comparativo de textos escolares oficiales de matemáticas de Ecuador y Venezuela: los sistemas de ecuaciones lineales. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, 91–117.
- Palm, T. (2006). Word problems simulations of real-world situations: A proposed framework. *For the Learning of Mathematics*, 26(1), 42-47.
- Palm, T. (2009). Theory of Authentic Task Situations. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*, 3-19 Rotterdam: Sense Publishers.
- Selter, C. (2009). Stimulating reflection on word problems by means of students' own productions. En L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations*, 315-333. Rotterdam: Sense Publishers.
- SEP (2017). Plan de estudios 2017. Educación obligatoria. México: Secretaría de Educación Pública. Recuperado de:  
[https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo\\_Educativo\\_OK.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/207252/Modelo_Educativo_OK.pdf)
- Torres, E. Z. (2019). *Diseño de tareas matemáticas para secundaria bajo la Teoría de las Situaciones con Tareas Auténticas*. Tesis de Licenciatura no publicada. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.
- Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems: Context of Learning*. The Netherlands: Lisse.
- Vula, E., Kingji-Kastrati, J. y Podvorica, F. (2016). A comparative analysis of mathematics textbooks from Kosovo and Albania based on the topic of fractions. En *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Prague. Czech Republic.