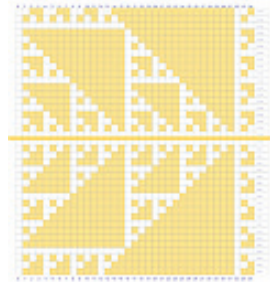


Congruencias en el triángulo de Pascal y el rectángulo de Newton

José R. Galo Sánchez
 Red Educativa Digital Descartes
reddescartes.org
proyectodescartes.org

Resumen: El rectángulo de Newton surge como extensión del actualmente denominado triángulo de Pascal partiendo de la versión escalonada de Stifel. Sin embargo, si se parte del esquema organizativo aportado por Pascal entonces el rectángulo de Newton se obtiene mediante una simple simetría signada. Así pues, basta estudiar las congruencias con cero de los números combinatorios y en su análisis aportamos que éstas se ubican en una sucesión de triángulos básicos que se distribuyen de manera periódica. En base a esa periodicidad se incluye un criterio que permite determinar directamente la congruencia de un número combinatorio.

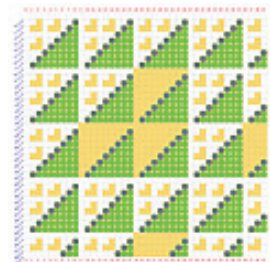
Palabras clave: Rectángulo de Newton, triángulo de Pascal, congruencias numéricas.



Congruences in Pascal's triangle and Newton's rectangle

Abstract: Newton's rectangle emerges as an extension of the currently called Pascal's triangle starting from the stepped version of Stifel. However, if one starts from the organizational scheme provided by Pascal, then Newton's rectangle is obtained by means of a simple signed symmetry. Thus, it is enough to study the congruences with zero of the combinatorial numbers and in its analysis we add on that these are located in a succession of basic triangles that are distributed periodically. Based on this periodicity, a criterion is included that allows determining directly the congruence of a combinatorial number.

Keywords: Newton's rectangle, Pascal's triangle, numerical congruences.



INTRODUCCIÓN

Newton en el bienio 1665-1666 estuvo recluso con motivo de la gran peste de Londres y, durante ese tiempo, formó sus ideas sobre el universo y puso los fundamentos de lo que sería un cambio en el curso de la ciencia (Maor 2006). Este autor detalla que, en esa época, también procedió a la extensión del triángulo aritmético —actualmente denominado como triángulo de Pascal— a un rectángulo con igual lógica aritmética constructiva y con él abordó la expansión de la potencia de un binomio a potencias de exponente entero y racional. Newton realizó dicha extensión apoyándose en la versión escalonada del triángulo que aportó Stifel (1544), si bien podemos construirlo de igual manera utilizando la versión de Yang Hui (Weisstein, 2003) que se corresponde con la presentación como triángulo isósceles, la habitual hoy en día, y en este caso la extensión de Newton adopta la forma de un paralelogramo. Pascal escribe en 1654 su libro “*Traité du triangle arithmétique*” (Pascal, 1665) y en él incluye una organización diferente de este triángulo, lo presenta como un triángulo rectángulo, y élla es la que consideramos en este artículo como la más adecuada.

Inicialmente, abordamos la construcción del paralelogramo de Newton o, en particular el rectángulo, y se pone de manifiesto la dificultad que entraña su cálculo y su escritura cuando el número de columnas y/o filas a considerar es relativamente elevado. La representación se simplifica un poco y se logra gran belleza geométrica si se colorean todos los números que son congruentes entre sí, pues se obtienen curiosos y bonitos patrones geométricos de aspecto fractal. En este documento se incluyen referencias a recursos interactivos desarrollados por el autor que permiten reproducir todo lo indicado y/o consultar muestrarios de dichos patrones.

Posteriormente se muestra cómo, considerando la versión aportada por Pascal de su triángulo, el rectángulo de Newton se obtiene mediante una simple simetría signada (las columnas impares cambian de signo y las pares lo mantienen) y en la representación de las congruencias con cero se tiene una simetría geométrica. Así pues, es suficiente considerar únicamente el triángulo de Pascal tanto para abordar el desarrollo de la potencia de un binomio en el caso de números enteros positivos y también negativos, como en el estudio de las congruencias con cero.

Finalmente se aborda el análisis de las congruencias con cero módulo un número primo de los números combinatorios (y por simetría de los coeficientes binomiales) realizándose interpretaciones geométricas de conocidos resultados algebraicos e incluyendo dos resultados propios: uno relativo a la periodicidad de dichas congruencias y otro que permite determinar directamente si un número es o no congruente con cero.

EL PARALELOGRAMO DE NEWTON

El “triángulo de Pascal” (ver figura 1) es ampliamente conocido por entidad propia, por las curiosas propiedades que acontecen en él (Pascal, 1665) y suele aprenderse ligado a lo que usualmente se enseña con el nombre de “binomio de Newton”, es decir, la potencia de un binomio cuyo exponente es un número natural. Pero quien enunció o al menos divulgó este desarrollo particular, relacionándolo con ese triángulo, fue Pascal y de ahí

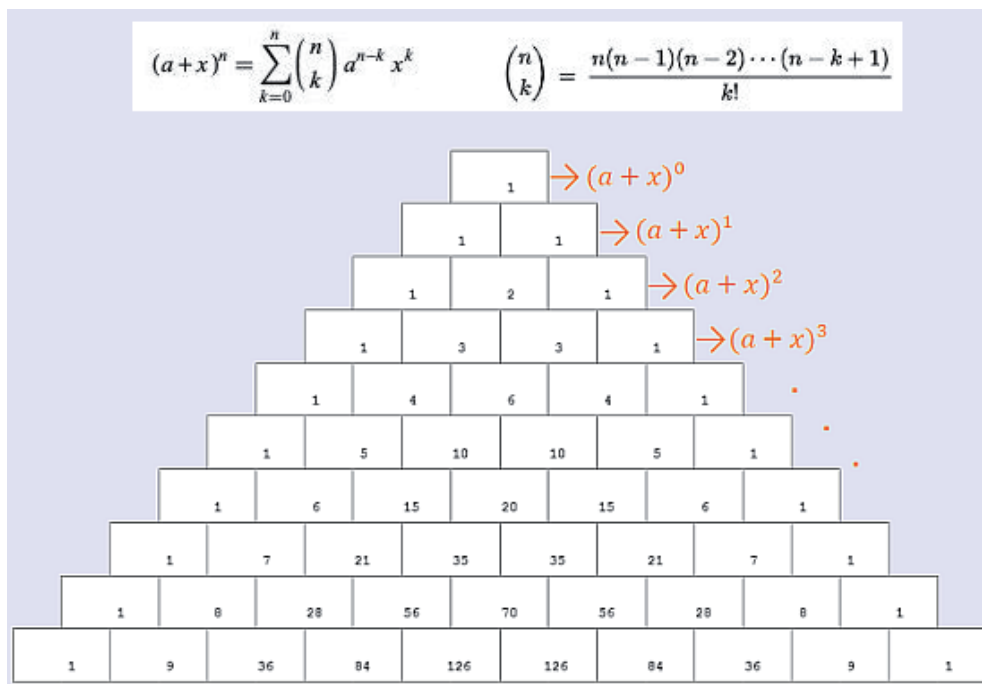


Figura 1. Triángulo de Pascal representado como un triángulo isósceles y relación con los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio de exponente natural.

que se denomine a dicho triángulo con su nombre. No obstante, el “triángulo de Pascal” ya era conocido según O’Connor y Robertson (1999 y 2003), siglos antes, por el matemático persa Al-Karaji (953-1029) y el chino Yang Hui (1238-1298). Y según Maor (1994) la aportación concreta de Newton en el contexto del desarrollo binomial se sitúa en el caso del desarrollo con exponentes racionales y con exponentes enteros y únicamente llegó a conjeturarla sin llegar a abordar o al menos divulgar su demostración. Actualmente este resultado es un caso particular del denominado “Teorema binomial” (Weisstein, 2020).

Newton abordó la extensión del triángulo de Pascal efectuando un cálculo hacia atrás, de manera que se mantuviera la misma propiedad recursiva que acontece en éste y que consiste en que un elemento de una fila es el resultado de la suma de dos de la fila anterior, propiedad que puede expresarse usando los números combinatorios, con los que se identifican todos y cada uno de los números del triángulo de Pascal, como:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Con esta extensión recursiva en sentido inverso, Newton construye nuevas filas, cada una de las cuales ahora tienen infinitos números y cuya escritura conduce a la forma de

un “paralelogramo” (ver fig. 2), si se parte de la representación reflejada en la figura 1 o puede mostrarse, en particular, como un rectángulo (ver fig. 3).

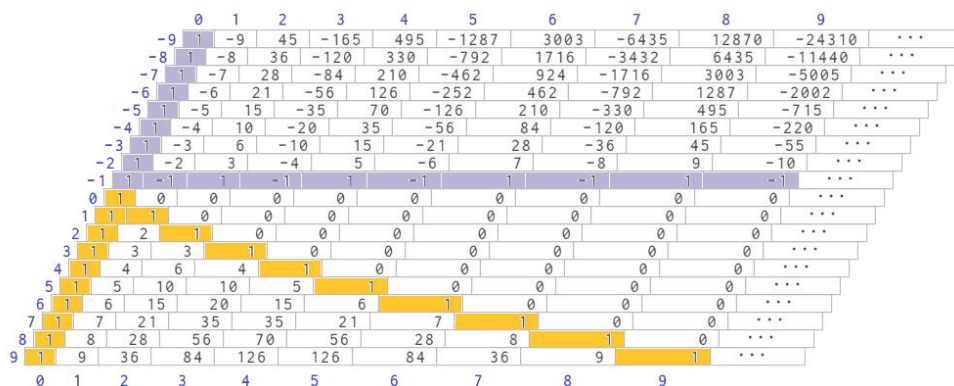


Figura 2. Construcción del paralelogramo de Newton completando el triángulo de Pascal.

A su vez, Newton observa y hace corresponder los números ubicados en cada fila con los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio cuyo exponente ya no sólo sería un número natural, sino que en general puede ser un número entero. Y, consecuentemente, a todos los números del paralelogramo de Newton los denominaremos coeficientes binomiales (pierde sentido asociarlo con el número de combinaciones). El desarrollo del binomio conduce a un número finito de sumandos cuando el exponente es natural e infinitos (una serie) cuando es un entero negativo¹, según se refleja en la fig. 3.

La representación de dicho paralelogramo o rectángulo numérico entraña algunas dificultades si se desea reflejar un número relativamente elevado de filas y columnas del mismo (ver fig. 4), problema que puede salvarse parcialmente utilizando herramientas informáticas como el recurso “Extensión del triángulo de Pascal: El paralelogramo de Newton” (Galo, 2020a).

¹ En los recursos interactivos de RED Descartes (2020): “Ejercicios de desarrollo algebraico usando el «Binomio de Newton»” y “Ejercicios del «binomio de Newton» con exponente entero”, pueden practicarse estos desarrollos.

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ejerciciosBinomio/index.html

https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ejerciciosBinomioExponenteEntero/index.html

$$(a+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} a^{-n-k} x^k \quad |x| < a$$

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!}$$

$$= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	...

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Figura 3. Potencia de un binomio con exponente natural y exponente entero. Números combinatorios, coeficientes binomiales y relación entre ellos.

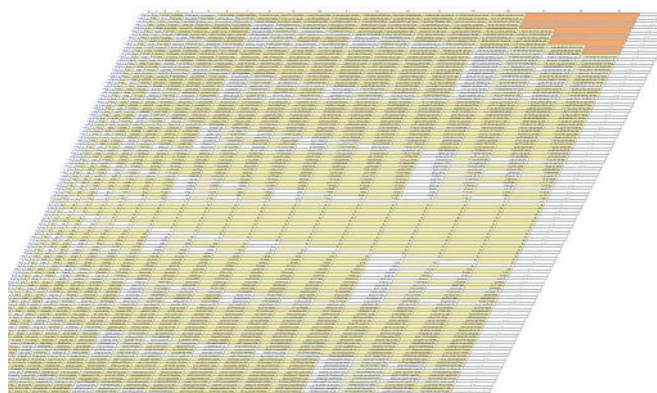


Figura 4. Representación de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton.

Pero incluso con esta ayuda no es algo simple, pues el espacio que necesita ocupar la escritura de cada coeficiente binomial crece rápidamente al ser mayor el número de cifras que lo constituyen. Y, también, el tiempo de cálculo necesario para ubicar, desplazar y representar en la tabla dichos coeficientes y para poder escalarla para verla localmente o de la manera más global posible. En el recurso enlazado, adicionalmente, el cálculo de los coeficientes conduce a números enteros que superan el número designado como MAX_SAFE_INTEGER y que en javascript es $2^{53}-1$ (algo superior a 9 mil billones) y por lo tanto ya ese número no es exacto; así pues, en esos casos no se refleja el coeficiente y se colorea la casilla donde iría ubicada con un fondo rojizo (observar la esquina superior derecha en la imagen de la fig. 4).

En dicha imagen y recurso asociado se pueden visualizar, mediante colores, pautas geométricas de cómo se distribuyen los coeficientes cuando se plantean congruencias numéricas respecto a un divisor y resto seleccionado. No obstante, estas distribuciones pueden observarse mejor si no se muestran los valores de los coeficientes y ello es lo que se observa en la fig. 5 obtenida mediante la miscelánea interactiva: “Congruencias en el paralelogramo de Newton” (Galo, 2020b).

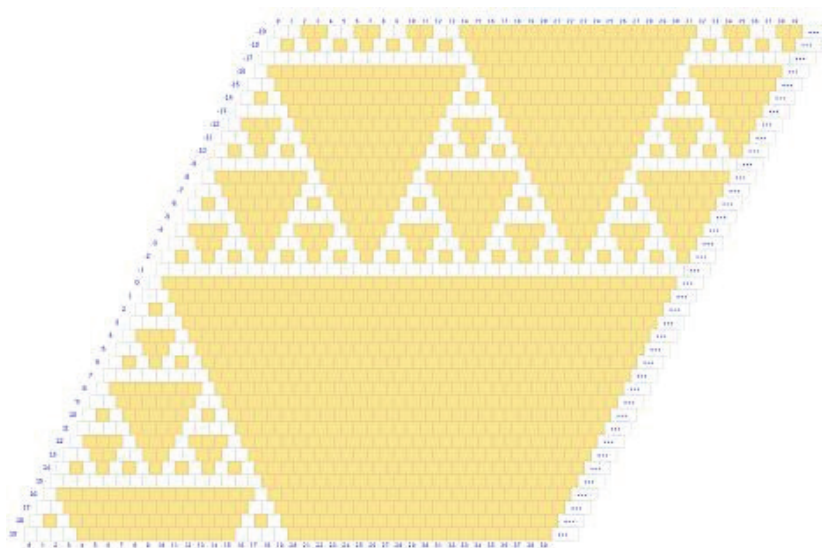


Figura 5. Congruencias con cero módulo dos de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton

CONGRUENCIAS EN EL PARALELOGRAMO DE NEWTON

La primera representación gráfica de las congruencias citadas, en este caso restringida al triángulo de Pascal, puede situarse en un brevísimo artículo de Kung (1976). Su gráfica se muestra en la imagen de la figura 6 y en la figura 7 tenemos la misma gráfica, pero

utilizando un código de color que logra una mejor visualización y transmisión de lo representado. En ambas se refleja la paridad o congruencia con cero módulo 2 y, a la vez, por complementariedad la congruencia con uno módulo 2 (números pares representados con ‘+’ o en color naranja, e impares con ‘*’ o en blanco).

Extendiendo esas gráficas a congruencias con otro módulo y resto se obtienen atractivas figuras que invitan al estudio y análisis de su regularidad.

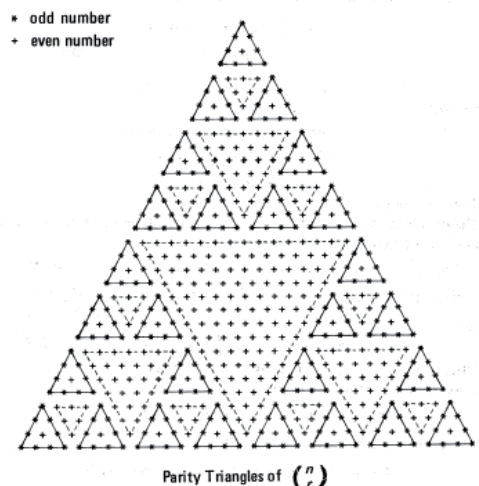


Figura 6. Triángulos de paridad en el triángulo de Pascal (código alfanumérico).

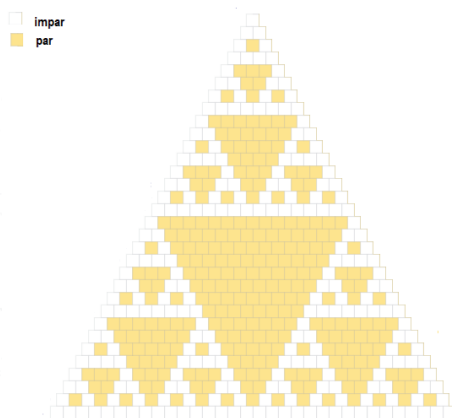


Figura 7. Triángulos de paridad en el triángulo de Pascal (código de color).

En la escena interactiva “Muestrario de congruencias en el paralelogramo de Newton” (Galo, 2020c) se puede observar la representación gráfica correspondiente a las congruencias con cero módulo los números primos hasta el treinta y uno, representando los coeficientes binomiales de índice superior en el rango desde -999 a 999 y de índice inferior de 0 a 999. En la fig. 8 vemos como ejemplo la muestra correspondiente a la congruencia con cero módulo cinco.

Los ejemplos anteriores reflejan bellas pautas geométricas en la que *a priori* se observa un comportamiento fractal. Veremos a continuación que el análisis de los patrones de estas congruencias en el paralelogramo o rectángulo de Newton puede reducirse al análisis de las mismas en el Triángulo de Pascal.

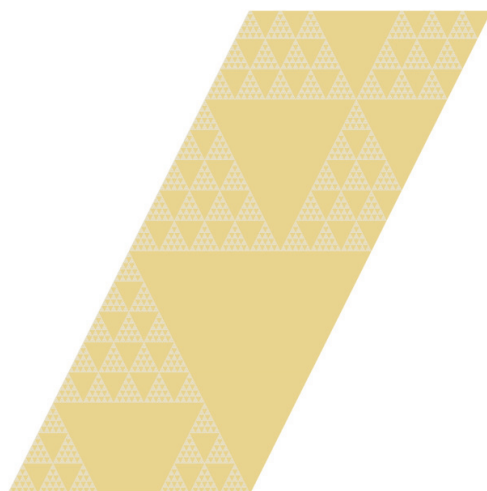


Figura 8. Congruencias con cero módulo cinco de los coeficientes binomiales del paralelogramo de Newton.

EL PARALELOGRAMO DE NEWTON COMO SIMÉTRICO DEL TRIÁNGULO DE PASCAL

Newton, para realizar su extensión del triángulo de Pascal, utilizó la representación escalonada que algo más de cien años antes Michael Stifel había incluido en el reverso de la página 44 de su libro *Arithmetica Integra* (1544) —ver figuras 9 y 10—. La representación que actualmente suele ser utilizada es la de Yang Hui (Weisstein, 2003) organizada como un triángulo isósceles (figura 1). Y Pascal en su libro “*Traité du triangle arithmétique*” (Pascal, 1665), libro escrito en 1654, lo organizó y presentó como un triángulo rectángulo, según se refleja en la figura 11.

Figura 9. Representación escalonada de Stifel.

Figura 10. Newton completa y representa como triángulo que extiende con ceros a un rectángulo.

Figura 11. Representación usada por Pascal del triángulo que lleva su nombre.

Dada la relación existente entre los coeficientes binomiales de índice superior negativo y los números combinatorios (índice superior positivo):

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

podemos observar la correspondencia que hay entre los coeficientes del rectángulo de Newton ubicados en la extensión realizada por él y los situados en la zona de partida de Pascal. En la figura 12.A, seleccionada una columna, salvo un posible cambio de signo, los coeficientes de la extensión de Newton (filas etiquetadas con números negativos) se corresponden con los del triángulo de Pascal, pero con una traslación en la numeración de las filas. Por ejemplo, para la columna 3 los coeficientes de la zona correspondiente a la extensión de Newton son $\{-1, -4, -10, -20, -35, -56, -84, \dots\}$ que se corresponden con las filas numeradas respectivamente como $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, \dots\}$, y los coeficientes en la zona del triángulo de Pascal son $\{1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, \dots\}$ pero trasladadas en este caso tres posiciones, pues aquí sendas filas se corresponden con $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$.

Dada la simetría que acontece en el triángulo de Pascal y la que ocurre en la extensión de Newton (en valor absoluto) también tendremos que los coeficientes de la fila -1 se corresponden, de nuevo en valor absoluto, con los de la diagonal 0 en la zona del triángulo de Pascal, los de la fila -2 con los de la diagonal 1 y, en general, la fila -n con la diagonal n-1. Es lo reflejado en la figura 12.B.

Omitiendo los ceros y trasladando las columnas hacia arriba para ocupar los huecos, obtenemos una tabla simétrica signada (para columnas impares el signo cambia, es negativo, y para las pares se mantiene positivo) que se refleja en la figura 12.C. En esa imagen hemos omitido la numeración de las filas en la parte inferior ya que esos coeficientes ya no se corresponden con los números combinatorios del triángulo de Pascal por filas, sino que esos coeficientes están ordenados según la estructura original adoptada por Pascal. De esta manera, conocidos los coeficientes del triángulo de Pascal tenemos también los correspondientes al rectángulo de Newton y consecuentemente bastaría sólo calcular el primero.

La relación observada en las imágenes de la figura 12 se justifica sin más que detallar la relación existente entre los coeficientes binomiales que ahí están involucrados, y eso es lo que se refleja en la figura 13. En el recuadro izquierdo tenemos los coeficientes del rectángulo de Newton, destacando en color naranja la ampliación de los números combinatorios con índice superior positivo o nulo y con índice inferior de mayor valor que el superior, cuyo valor es cero. En el cuadro intermedio se han omitido esos números nulos y se han compactado las columnas para ocupar los huecos. Y en el marco derecho se han expresado los coeficientes binomiales de índice negativo según su equivalencia con los números combinatorios y ahí puede comprobarse la simetría de los coeficientes que ya hemos indicado.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...	A
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...	
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...	
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...	
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...	
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...	
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...	B
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...	
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...	
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...	
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...	
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...	
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...	
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	...	
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	...	
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	...	
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	...	
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	...	
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	...	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	...	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	...	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	...	C
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	...	
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	...	
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	...	
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	...	
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	...	
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	...	
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	...	
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	...	
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	...	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	...	
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	...	
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...	
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	...	
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	...	
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	...	
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	...	
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	...	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Figura 12. Reposicionamiento del rectángulo de Newton para verificar la simetría (salvo signo) de los valores con el triángulo de Pascal en la representación usada por Pascal.

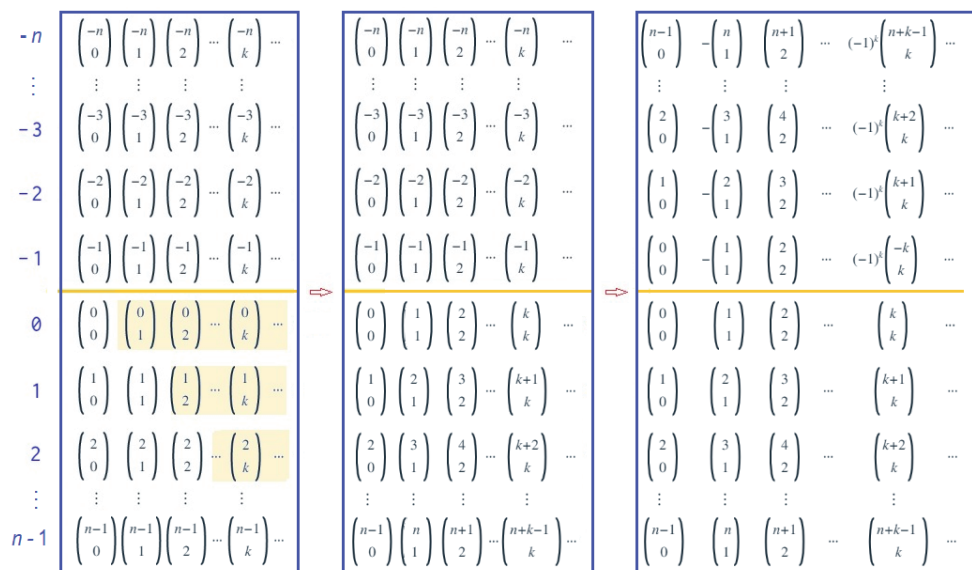


Figura 13. Verificación de la simetría entre el rectángulo de Newton y el triángulo de Pascal en base a la relación entre coeficientes binomiales y números combinatorios.

Adicionalmente, en esta posición, se observa cómo basta tener el triángulo de Pascal en su posición original para obtener todos los desarrollos binomiales con exponente natural y entero. Las filas son los coeficientes del desarrollo de $(a-x)^n$ y a partir de éste el de $(a+x)^n$ basta obtenerlo como $(a-(-x))^n$, y las diagonales son los coeficientes del desarrollo de $(a+x)^n$ y el de $(a-x)^n$ se obtiene como $(a+(-x))^n$. Ver la figura 14.

Llegados a este punto, identificados el significado y posición de estos coeficientes binomiales, aquellos que no se acostumbren a esta posición pueden hacer un giro de vértice el del ángulo recto en el triángulo anterior y ángulo -45° y ubicarlo en la posición usual actual. En la figura 15 lo tiene reflejado y ya hemos justificado que es autosuficiente, pero no sólo enseñe cuáles son los coeficientes de las potencias de exponente natural ¡hágalo también con los de exponente entero negativo!

Obviamente la presentación y orientación a elegir es a gusto del lector, pero en la posición dada por Pascal acontece el hecho de que si conocemos las congruencias con cero de los coeficientes en el Triángulo de Pascal, entonces por simetría tenemos las correspondientes al rectángulo de Newton, tal y como podemos observarlo en la figura 16 y en la escena interactiva “El rectángulo de Newton como «simétrico» del triángulo de Pascal” (Galo, 2020d). Esa simetría no acontece para congruencias con resto no nulo y módulo superior a dos, dado que en las columnas impares hay un cambio de signo en los valores de los coeficientes, pero en este trabajo nos centraremos en dichas congruencias con cero.

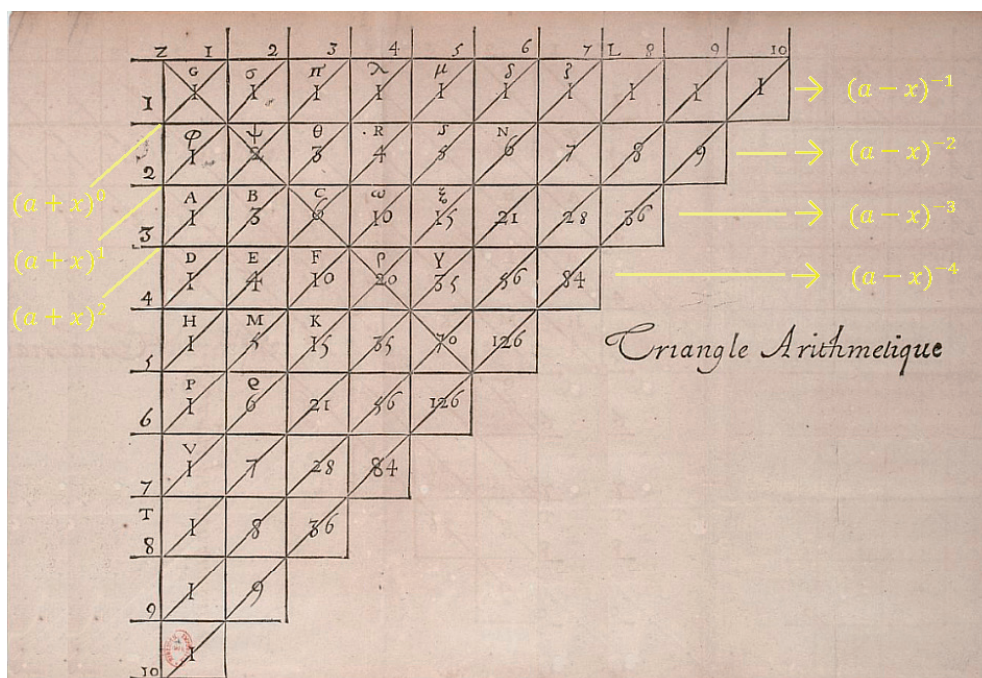


Figura 14. Identificación de los coeficientes binomiales que intervienen en el desarrollo del binomio de Newton con exponente natural y entero en el Triángulo de Pascal.

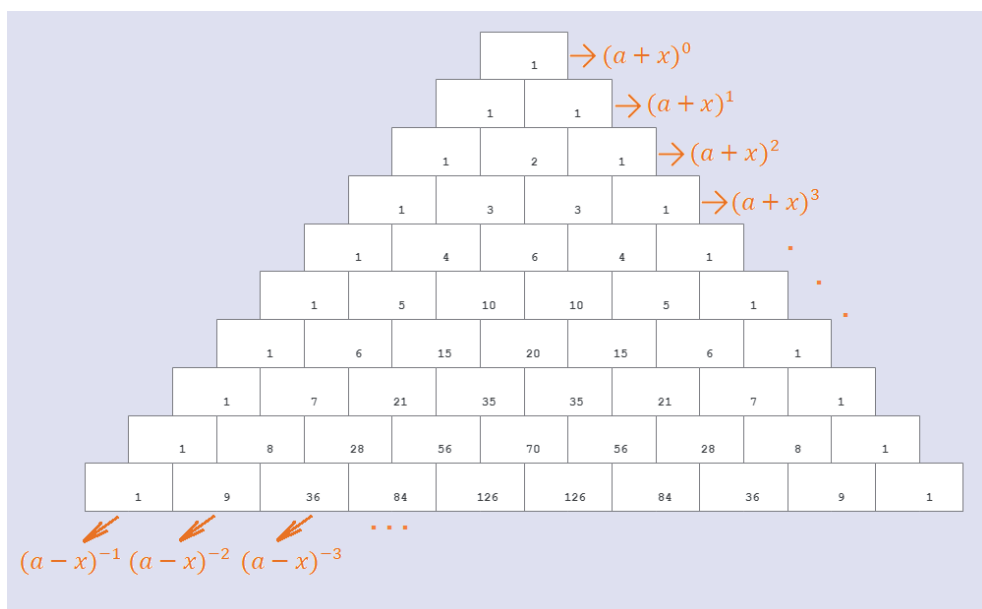


Figura 15. Ubicación de los coeficientes binomiales del desarrollo del binomio de Newton con exponente natural y entero en el Triángulo de Pascal posicionado como un triángulo isósceles.

CONGRUENCIAS EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL, PERIODICIDAD

Reducido el estudio de las congruencias con cero en el rectángulo de Newton a las existentes en el triángulo de Pascal pasamos a considerar sólo éstas. El análisis de cuándo un coeficiente binomial, un número combinatorio, es divisible por un determinado número primo es un problema sobre el que podemos encontrar bastantes resultados con fundamento aritmético y algebraico. Aquí, nos centraremos en aquellos resultados que nos permitan determinar y visualizar gráficamente dichas congruencias, es decir, poder obtener el gráfico de la figura 16 y otros análogos para otros módulos primos sin necesidad de calcular el coeficiente binomial y determinar su congruencia, u obtener ésta mediante una recurrencia.

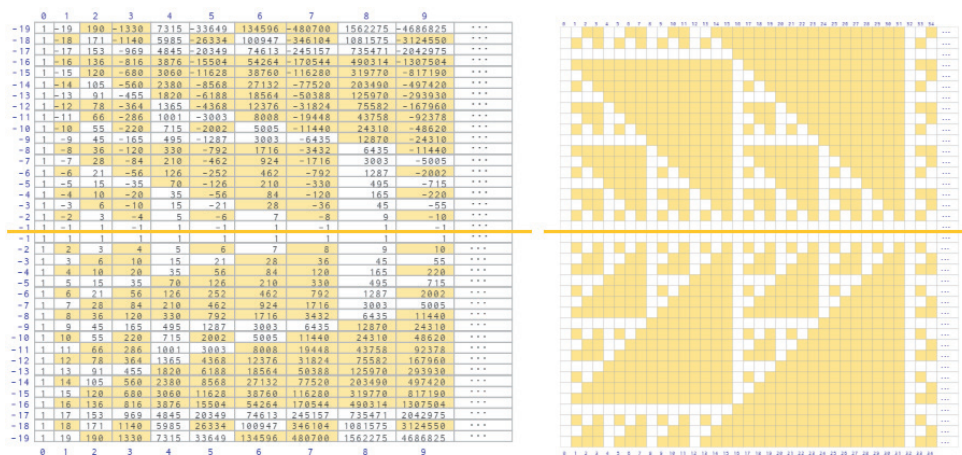


Figura 16. Imagen de las congruencias con cero módulo dos de los coeficientes binomiales en el rectángulo de Newton. Simetría respecto a esas congruencias en el Triángulo de Pascal.

Kung (1976) analiza las congruencias módulo 2 y afirma que para i entero no negativo:

- Si $n = 2^i$ y $1 \leq k \leq n-1$, entonces $\binom{n}{k}$ es par.
- Si $n = 2^i - 1$ y $0 \leq k \leq n$, entonces $\binom{n}{k}$ es impar.

Y ello se observa en las imágenes de las figuras 6 y 7 ya que en ellas cuando $n = 0, 3, 7, 15, 31$, todos los símbolos en esas filas o diagonales, respectivamente, son asteriscos (números impares). Y para $n = 2, 4, 8, 16, 32$, son todos cruces (números pares), salvo el primero y el último.

El artículo de Kung es breve, centrado en congruencias módulo 2, pero marca unas pautas que son extrapolables a la obtención de patrones en las congruencias con cero módulo otros números primos. De hecho, ese resultado es un caso particular de los dos enunciados por Fine (1947), si bien el primero de ellos (según Joris *et al.*, 1985) fue formulado por Ram en 1909:

- La condición necesaria y suficiente para que todos los coeficientes binomiales $\binom{n}{k}$ con $0 < k < n$, sea divisible por un primo p es que n sea una potencia de p .
- La condición necesaria y suficiente para que ningún coeficiente binomial de índice superior n , con $n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \dots + n_m p^m$, siendo $0 \leq n_r < p$ y $n_r > 0$, sea divisible por p es que $n_r = p - 1$ para $r < m$.

Veamos cómo se reflejan estos resultados de una manera gráfica:

- En la imagen de la figura 17 se refleja gráficamente el primer resultado cuando $p = 3$, mostrándose todas las líneas en las que todos los números combinatorios son divisibles por 3, salvo el primero y el último. Esas líneas se corresponden con $\binom{n}{k}$ con $0 < k < n$ y $n = 3^0, 3^1, 3^2, 3^3, \dots$. Gráficamente vienen a ser las “hipotenusas” de los triángulos rectángulos que particionan al triángulo de Pascal y que lo muestran a diferentes escala. Posteriormente utilizaremos esta analogía y terminología coloquial para ubicar y describir otros resultados.
- En la figura 18 se reflejan aquellas líneas en las que ningún número combinatorio es divisible por 3. En la parte superior de esa imagen se reflejan las separaciones entre esas filas (por falta de espacio tipográfico no se refleja el caso 3^0) y a la derecha se muestra la descomposición p -ádica del índice n correspondiente a los números combinatorios de cada una de esas líneas. Por ejemplo, para $53 = 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^3$ y eso nos muestra el camino de “saltos” de amplitud potencias de tres que se han de dar para, partiendo de 0, llegar a 53 (dos de amplitud 3^0 , dos de 3^1 , dos de 3^2 y uno de 3^3). Es decir, logramos mostrar visualmente, geoméricamente, lo que queda escondido en un abstracto resultado algebraico, el cual puede ser chocante a cualquiera que accede a él por primera vez. A la pregunta, típica de nuestro alumnado: ¿a quién se le ocurre que la descomposición p -ádica da respuesta a este problema? le mostramos que el resultado algebraico,

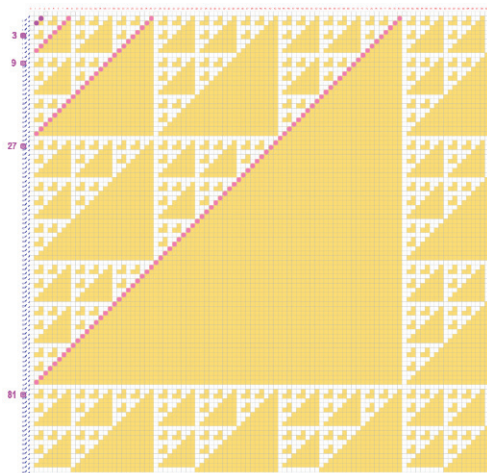
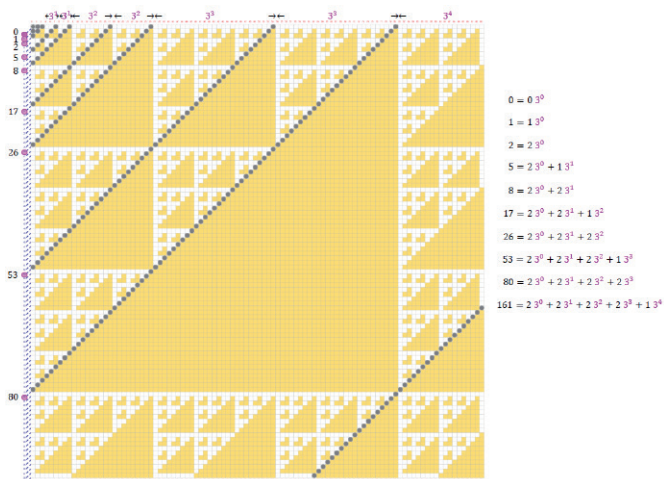


Figura 17. Números combinatorios $\binom{n}{k}$ divisibles por 3 para todo k , $0 < k < n$.

Líneas con todos los números combinatorios divisibles por 3 salvo los extremos.

Figura 18. Números combinatorios $\binom{n}{k}$ no divisibles por 3 para ningún k , $0 \leq k \leq n$.
 Líneas con ningún número divisible por 3.



posiblemente, fue consecuencia de su visualización y la “pureza” matemática procedió a esconderlo.

En las misceláneas interactivas “Congruencias en el «triángulo de Pascal»” (Galo, 2020e) y “Muestrario de congruencias en el «triángulo de Pascal»” (Galo, 2020f) se puede reproducir las situaciones descritas para cualquier primo hasta el 31.

Y justamente, en base a la observación de esos patrones geométricos, podemos visualizar y deducir la propiedad que nos permite detectar todas las hipotenusas de todos los triángulos rectángulos isósceles que muestran esas congruencias. Podemos ver cómo hay triángulos de diferente tamaño, siendo p^a-1 el tamaño de las hipotenusas respectivas, y cada uno de ellos tienen una distribución periódica en horizontal y vertical con un periodo p^a . Por ejemplo, en la figura 19 se reflejan en color naranja los números

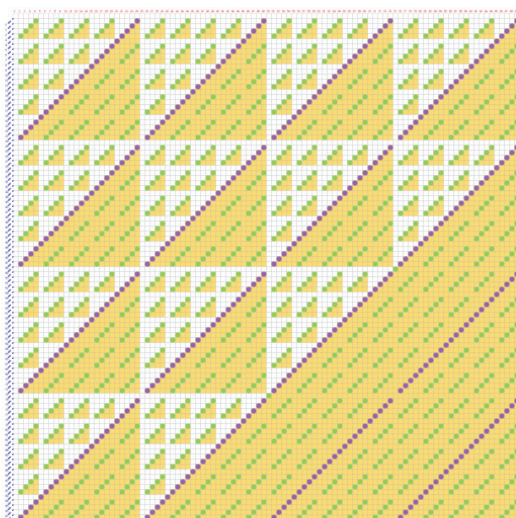


Figura 19. Periodicidad en las hipotenusas de los triángulos congruentes con cero módulo 5.

combinatorios congruentes con cero módulo 5 y se observan tres tipos de triángulos según su tamaño: los de hipotenusa $4 = 5^1 - 1$, los de $24 = 5^2 - 1$ y parcialmente (en la esquina inferior derecha) el de $124 = 5^3 - 1$. La hipotenusa del primero se ha reflejado en color verde y el triángulo se repite periódicamente en horizontal y vertical con un periodo 5, según se ve en dicha imagen. La del segundo está reflejada en color violeta y se repite también periódicamente con periodo 5^2 , y así sería de manera análoga y sucesivamente (fig. 19).

Lo anterior, ahora le invito a que mire con ojos algebraicos, queda englobado en el resultado que enuncio a continuación:

Proposición 1

p es divisor de todos los números combinatorios $\binom{mp^a}{k}$ con $m, a, k \in \mathbb{N}$,
 $0 < k < mp^a$ y k no divisible por p^a .

La demostración es obvia sin más que aplicar la definición de número combinatorio y observar que bajo las condiciones indicadas p es un factor de ese número.

Este resultado personal, puede relacionarse o considerarse como una reinterpretación —que se centra, enfoca y destaca el aspecto de periodicidad— del demostrado por Al-bree (1972) y que afirma:

Proposición 2

Para cualquier entero positivo n , $p^r = \text{mcd} \left\{ \binom{n}{k} \text{ con } 0 < k < n, \text{ y } \text{mcd}(k, p) = 1 \right\}$
donde p es primo, r es un entero positivo y p^r divide a n .

Y ¿por qué les remarco que es de gran interés determinar esas hipotenusas? La respuesta también puede visualizarse en la imagen de la figura 19 y lo detallamos a continuación ya que conocida una hipotenusa de números congruentes con 0 módulo p , digamos $\binom{n}{k}$ con $r < k < s$, por la propiedad de los números combinatorios que relaciona los de índice superior $n+1$ con los de índice n ,

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

se deduce que:

Proposición 3

Si los números combinatorios $\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \dots, \binom{n}{s}$ $r < s$, son congruentes con cero módulo p , entonces los números combinatorios que componen el triángulo rectángulo $T(n; r, s)$, donde:

$$T(n; r, s) = \left\{ \binom{n+q}{r+v}, 0 \leq q \leq s-r, q \leq v \leq s-r \right\}$$

son también congruentes con 0 módulo p .

La justificación (ver la figura 20) es simple, pues partimos de que se verifica la congruencia en todos los elementos que componen la hipotenusa de ese triángulo (en color magenta en la figura 20) y cada elemento de ese triángulo (en color naranja) se obtiene como suma del elemento que está a su izquierda y del que está encima, luego aplicando que la suma de dos números divisibles por p es un número divisible por p queda demostrado.

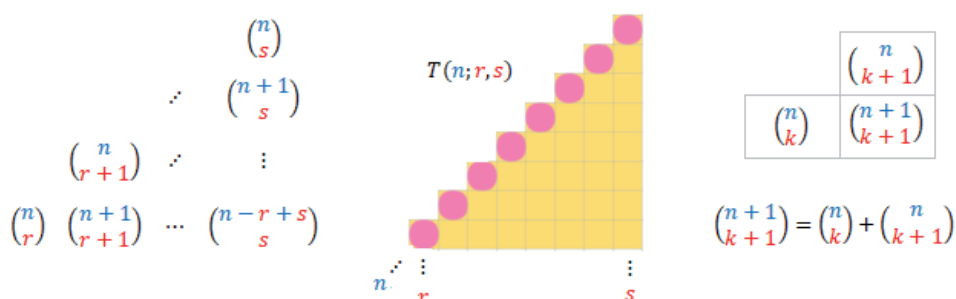


Figura 20. Transmisión de la congruencia en las hipotenusas a los triángulos rectángulo.

Joris *et al.* (1985) abordan un estudio más profundo al que necesitamos aquí de las propiedades de estos triángulos y a él dirigimos a quienes estén interesados en incrementar su conocimiento en este tema.

Combinando la proposición 1 y 3, concluyo que:

Proposición 4

Todos los números combinatorios congruentes con 0 módulo p siguen el patrón de los triángulos rectángulos

$$T(p^a; 1, p^a - 1)$$

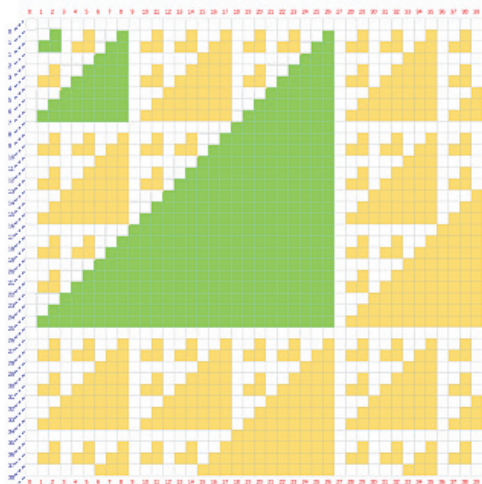


Figura 21. Patrón de triángulos $T(p^a; 1, p^a - 1)$ con $p = 3$ y $a = 1, 2$ y 3 .

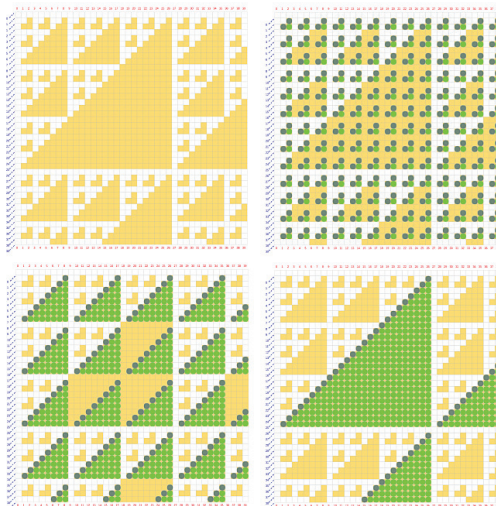


Fig. 22. Esquema de periodicidad de los triángulos $T(p^a; 1, p^a - 1)$ con $p = 3$ y $a = 1, 2$ y 3 .

gulos básicos citados (fig. 22).

cuyas hipotenusas están constituidas por números combinatorios que son congruentes con $\binom{p^a}{k}$ donde $a, k \in \mathbb{N}$, $0 < k < p^a$ (ver figura 21), distribuyéndose de forma periódica según el esquema:

$$T(mp^a; 1 + kp^a, (1 + k)p^a - 1)$$

con $0 \leq k < m$ y $a, m \in \mathbb{N}$.

Eso es lo que se observa en mosaico de imágenes de la figura 22, donde se refleja:

- imagen superior izquierda: números combinatorios congruente con 0 módulo 3 en color naranja.
- imagen superior derecha: triángulos congruentes con $T(3^1; 1, 3^1-1)$ en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3.
- imagen inferior izquierda: triángulos congruentes con $T(3^2; 1, 3^2-1)$ en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3^2 .
- imagen inferior derecha: triángulos congruentes con $T(3^3; 1, 3^3-1)$ en color verde claro y las hipotenusas en verde oscuro, y desplazamiento periódico en horizontal y vertical con periodo 3^3 .

Así pues la reproducción de todas las congruencias con 0 es una mera reiteración gráfica, periodicidad, de esos triángulos

DETERMINACIÓN DIRECTA DE CONGRUENCIAS EN EL TRIÁNGULO DE PASCAL

Dado un número combinatorio $\binom{n}{k}$ nos preguntamos si podemos determinar si es o no congruente con 0 módulo p sin necesidad de calcularlo, de una manera directa, sencilla, rápida y sin aplicar recursividad, o lo que es equivalente, sin basarse en números combinatorios con índice superior menor que n . La respuesta es afirmativa y para ello nos vamos a basar en la posición relativa (fila y columna) que ocupa cada número combinatorio en el triángulo de Pascal en la posición original con la que aquí estamos trabajando. Observemos que el número $\binom{n}{k}$ ocupa la fila $n-k$ y la columna k , que todos los números combinatorios de índice n cumplen que la suma de la fila y la columna que ocupan es n , y que los números combinatorios del triángulo rectángulo $T(n; r, s)$ cumplen que la suma de la fila y la columna de todos ellos es mayor o igual que n . Con este dato y en base a la periodicidad podemos afirmar lo siguiente:

Proposición 5

Dado el número combinatorio $\binom{n}{k}$, consideremos la descomposición p -ádica de los números $n-k$ y de k :

$$n-k = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m$$

$$n = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m$$

con $m = \max(\text{ent}(\log_p(n-k)), \text{ent}(\log_p(k)))$, $0 \leq a_j, b_j < p$, se verifica que:

$\binom{n}{k}$ es divisible por p si y solo si $a_v + b_v \geq p$ al menos para algún v , $0 \leq v \leq m$.

Además, para los valores de v en los que $a_v + b_v \geq p$, entonces $\binom{n}{k}$ está en un triángulo de números congruentes con 0 módulo p del tipo $T(p^{v+1}; 1, p^{v+1} - 1)$.

Por la periodicidad reseñada en la proposición 4 (figuras 21 y 22), si hallamos la congruencia de $n-k$ y k con las diferentes potencias de p^v , lo que hallamos es la fila y columna que ocupa el número combinatorio de igual congruencia en relación al cuadrado o matriz $C_v = (c_{i,j})$ con $0 \leq i, j \leq p^{v+1} - 1$ y $0 \leq v \leq m$ (ver figura 23). Por ejemplo, si consideramos $p = 3$ y el número combinatorio $\binom{34}{20}$, éste ocupa la posición correspondiente a la fila 14, resultado de $34-20$, y la columna 20 (ver en la figura 24 el punto verde claro). Las congruencias respectivas con 3^v , $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ son:

$\binom{34}{20}$	mod 3^1	mod 3^2	mod 3^3
fila 34-20 = 14	2	5	14
columna 20	2	2	20
fila + columna	$2+2 = 4 \geq 3^1$	$5+2 = 7 < 3^2$	$14+20 = 34 \geq 3^3$

Por tanto $\binom{34}{20}$ tiene la misma congruencia que $\binom{2}{2}$, y puesto que en este caso fila+columna mod 3^1 es mayor o igual que 3^1 , entonces $\binom{34}{20}$ está respectivamente en un triángulo congruente con $T(3^1; 1, 3^1-1)$ (color verde oscuro en la figura 24). Similarmente no lo está en ninguno congruente con $T(3^2; 1, 3^2-1)$ (azul claro en dicha figura 24) y sí lo está también en uno congruente con $T(3^3; 1, 3^3-1)$ (color magenta en la misma figura). De esta forma se detectan todos los triángulos básicos en los que estaría ese número combinatorio.

Pero si lo único que se desea saber es si es o no congruente es suficiente hallar, como se indica en el enunciado de la proposición 5, la descomposición p -ádica, ya que si los coeficientes respectivos de esas descomposiciones para alguna de las potencias, por ejemplo para v , verifican que $a_v + b_v \geq p$, entonces:

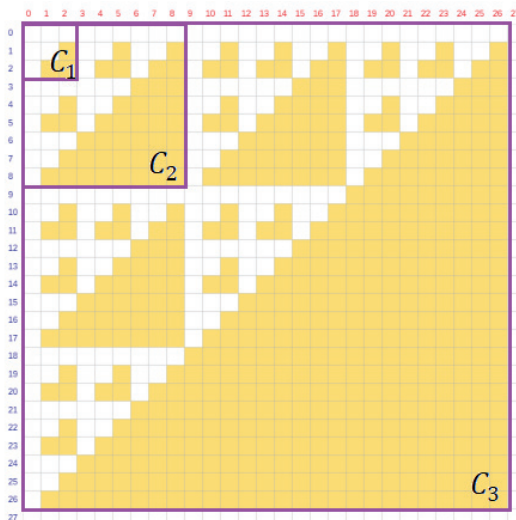
$$\text{fila} + \text{columna} \geq (a_v + b_v) p^v \geq p \cdot p^v = p^{v+1},$$

es decir, está en un triángulo congruente con el triángulo básico $T(p^{v+1}; 1, p^{v+1}-1)$ y, por tanto, es un número combinatorio congruente con 0 módulo p . En este caso dado que es una cota inferior para fila+columna, lo que tenemos es una condición suficiente pero no necesaria, pudiéndose darse casos en los que aunque sea $a_v + b_v < p$ ese número combinatorio pudiera pertenecer a un triángulo congruente con el triángulo básico $T(p^{v+1}; 1, p^{v+1}-1)$. En el ejemplo antes considerado del número combinatorio $\binom{34}{20}$ si realizamos la descomposición 3-ádica:

fila 34-20 = 14	$2 \cdot 3^0$	+	$1 \cdot 3^1$	+	$1 \cdot 3^2$
columna 20	$2 \cdot 3^0$	+	$0 \cdot 3^1$	+	$2 \cdot 3^2$
$a_v + b_v$	$2+2 = 4 \geq 3$		$1+0 = 1 < 3$		$1+2 = 3 \geq 3$

La condición suficiente detecta que $a_0 + b_0 \geq 3$, luego está en un triángulo congruente al $T(3^1; 1, 3^1-1)$; también $a_2 + b_2 \geq 3$, luego está en un triángulo congruente al $T(3^3; 1, 3^3-1)$; y dado que $a_1 + b_1 < 3$ no podemos afirmar nada acerca de pertenencia a un triángulo $T(3^2; 1, 3^2-1)$. En este caso se da la situación de que no pertenece a ese tipo, pero en otros casos sí podría serlo, veámoslo en otro ejemplo.

Figura 23. Cuadrados básicos C_v de referencia asociados a los triángulos congruentes básicos $T(p^v; 1, p^v-1)$ con $p = 3$ y $v = 1, 2$ y 3 .

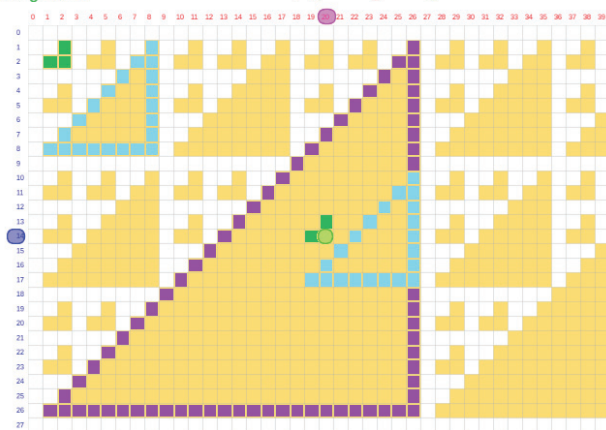


n	▲	34
	▼	
k	▲	20
	▼	

$$\binom{n}{k} = \binom{34}{20} \rightarrow \begin{cases} \text{fila} = 34 - 20 = 14 & = 2 \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2 \\ \text{columna} = 20 & = 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 \end{cases}$$

Congruente \rightarrow 4 1 3

Figura 24.
 Ubicación
 del número
 combinatorio $\binom{34}{20}$
 en triángulos
 congruentes con los
 básicos $T(p^v; 1, p^v-1)$
 con $p = 3$ y $v = 1,$
 2 y 3



Consideramos ahora el número combinatorio $\binom{36}{20}$. Vemos que la descomposición 3-ádica:

$$36-20 = 16 = 1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^2$$

$$20 = 2 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2$$

permite detectar que $\binom{36}{20}$ es congruente con 0 módulo 3, pues existe al menos una suma $a_v + b_v \geq 3$ (condición necesaria y suficiente). Y dado que para $v = 1$, $a_1 + b_1 \geq 3$ la

condición suficiente detecta que ese número está incluido en un triángulo congruente con el triángulo $T(3^1; 1, 3^1 - 1)$ y puesto que para $v = 3$, $a_3 + b_3 \geq 3$ lo está también en un triángulo congruente con $T(3^3; 1, 3^3 - 1)$, pero como para $v = 2$, $a_2 + b_2 < 3$, no detecta que en este caso también lo está en el triángulo $T(3^2; 1, 3^2 - 1)$. Ver en la figura 25 el punto verde claro que está en un triángulo verde oscuro, en uno azul y en uno magenta.

En el recurso interactivo “Congruencias en el triángulo de Pascal” (Galo, 2020e) puede experimentarse con la detección directa de la congruencia.

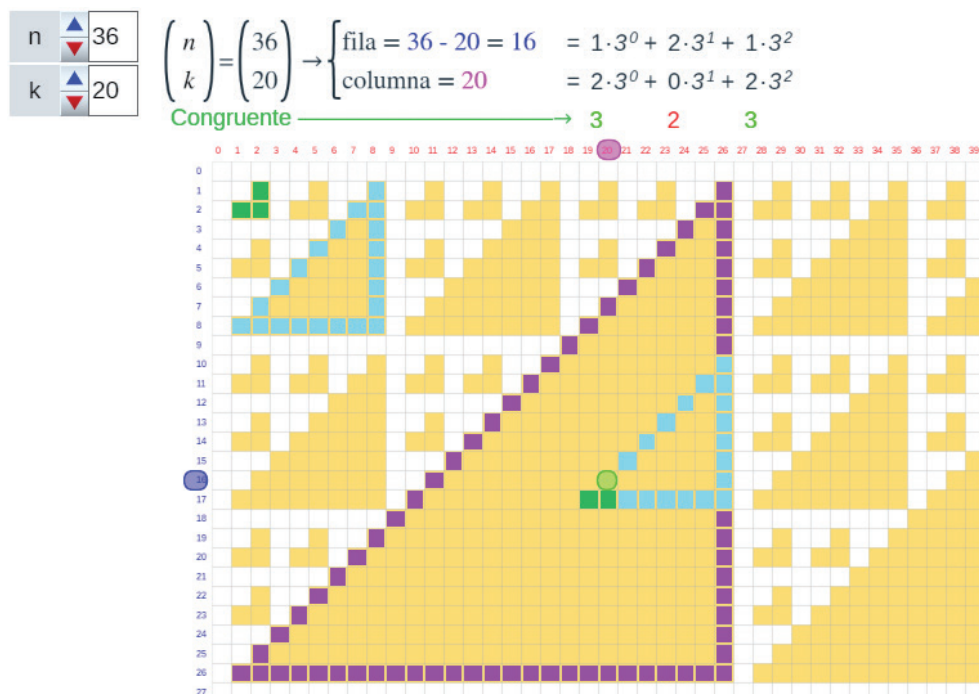


Figura 25. Ubicación del número combinatorio $\binom{36}{20}$ en triángulos congruentes con los básicos $T(p^v; 1, p^v - 1)$ con $p = 3$. La condición suficiente detecta para $v = 1$ y 3, pero no para $v = 2$.

CONCLUSIONES

Al trabajar con la versión que propone Pascal para el triángulo que lleva su nombre, como un triángulo rectángulo, se comprueba que ésta es suficiente para abordar el desarrollo de la potencia de un binomio con exponente entero, tanto positivo como negativo, sin necesidad de construir el rectángulo de Newton. También las congruencias con cero de los coeficientes binomiales se reducen al estudio de las congruencias con cero de los números combinatorios. Y en este caso el análisis algebraico clásico de éstas, que cotidianamente queda crudamente opacado por las dificultades implícitas de esta herramienta, queda representado geoméricamente de una manera visual sencilla, clara y casi

autoexplicativa. Aquí, en particular, nos ha permitido mostrar la periodicidad de dichas congruencias y hallar un criterio directo para determinarlas aplicando el paso inverso, es decir, pasando de la visión geométrica a la algebraica.

Con los recursos interactivos enlazados en este artículo, así como en Galo *et al.* (2016) y Galo (2018 y 2019), se pone de manifiesto la ayuda esencial que las herramientas interactivas como “Descartes” (RED Descartes, 1998) aportan a la mejora de la enseñanza y a la investigación de las Matemáticas.

BIBLIOGRAFÍA

- Albree, J. (1972). The gcd of Certain Binomial Coefficients. *Mathematics Magazine*, 45:5, 259-261. Recuperado el 05/07/2020, de <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/025570X.1972.11976253>.
- Fine, N.J. (1947). Binomial coefficients modulo a prime. *Amer. Math. Monthly* 54, 589-592. MR 9, 331. Recuperado el 05/07/2020, <https://www.jstor.org/stable/2304500>.
- Galo Sánchez, J., Cabezudo Bueno, A y Fernández Trujillo, I. (2016). Sobre la forma y el crecimiento cordobés del *Nautilus pompilius*. *Epsilon*, 33(3), n° 94, 81-110. Recuperado el 05/05/2020, https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon94_7_0.pdf
- Galo Sánchez, J. R. (2018). Partición prismática de un cubo en seis pirámides triangulares equivalentes. *Matemáticas, educación y Sociedad*, 1(2), 1-20. Recuperado el 05/05/2020, <http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12832>
- Galo Sánchez, J. (2019). Partición prismática de paralelepípedos en seis pirámides triangulares equivalentes. *Epsilon*, 33(3), n° 102, 61-88. Recuperado el 05/05/2020, https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es/epsilon/files/epsilon102_5.pdf
- Galo Sánchez, J. (2020a). Extensión del triángulo de Pascal: El paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la “Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewton/index.html
- Galo Sánchez, J. (2020b). Congruencias en el paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la “Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewton-Color/index.html
- Galo Sánchez, J. (2020c). Muestrario de congruencias en el paralelogramo de Newton. *Recursos Educativos interactivos de la “Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/ParalelogramoNewtonMuestrario/index.html
- Galo Sánchez, J. (2020d). El rectángulo de Newton como «simétrico» del triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la “Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/PascalversusNewton/index.html
- Galo Sánchez, J. (2020e). Congruencias en el triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la “Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, de https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CongruenciasPascal/index.html

- Galo Sánchez, J. (2020f). Muestrario de congruencias en el triángulo de Pascal. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes*. Recuperado el 05/05/2020, https://proyectodescartes.org/miscelanea/materiales_didacticos/CongruenciasPascal-Muestrario/index.html
- Joris, H., Oestreicher, C. & Steinig, J. (1985). The greatest common divisor of certain sets of binomial coefficients. *Journal of Number Theory*. Volume 21, Issue 1, pp. 101-119. Recuperado el 05/05/2020, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022314X85900137>
- Kung, S.H.L. (1976). Parity triangles of Pascal's triangle. *Fibonacci Quart.* 14: 54. Recuperado el 05/05/2020, <https://www.fq.math.ca/Scanned/14-1/kung.pdf>
- Maor, E. (2006). 8. El nacimiento de una nueva ciencia. e: Historia de un número. *México: Consejo Nacional para la cultura y las artes*, p. 78. https://books.google.es/books/about/e_historia_de_un_n%C3%BAmero.html?id=dSfaaVccJ_UC
- O'Connor, J.J. y Robertson, E.J. (1999). *Al-Karaji* [página web]. Mac Tutor History of Mathematics archive. Scotland: School of Mathematics and Statics. University of St Andrews. Recuperado el 05/05/2020, <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Karaji.html>
- O'Connor, J.J. y Robertson, E.J. (2003). *Yang Hui* [página web]. Mac Tutor History of Mathematics archive. Scotland: School of Mathematics and Statics. University of St Andrews. Recuperado el 05/05/2020, http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui.html
- Pascal (1665). *Traité du triangle arithmétique*. Paris: Chez Guillaume Desprez. Recuperado el 05/05/2020, de <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86262012/>
- Ram, B. (1909). Common factors of $n!/m!(n-m)!$, ($m=1, 2, \dots, n-1$). *Recursos J. Indian Marh. Club (Madras) 1*, pp 39-43.
- RED Decartes (1998). Descartes y DescartesJS, Matemáticas interactivas. Web de la "Red Educativa Digital Descartes" (RED Descartes). Recuperado el 05/05/2020, <https://proyectodescartes.org/descartescms/descartesjs>
- RED Descartes (2020). Recursos interactivos. *Recursos Educativos interactivos de la "Red Educativa Digital Descartes"*, Vol. V, Núm. 1. Recuperado el 05/05/2020, de <http://proyectodescartes.org/descartescms/descargas>.
- Stifel, M. (1544). *Arithmetica integra*. *Petreiis*, p. 44 reverso. Recuperado el 05/05/2020, de https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n6/mode/2up.
- Weisstein, Eric. W. (2003). CRC concise encyclopedia of mathematics. *CRC Pres* p.2169.
- Weisstein, Eric W. (2020). "Binomial Theorem." From *MathWorld--A Wolfram Web Resource*. Recuperado el 05/05/2020, de <https://mathworld.wolfram.com/BinomialTheorem.html>