

## Un modelo de la evolución en el tiempo de las proporciones del rostro humano

María Jiménez<sup>1</sup>  
Víctor M. Jiménez  
Diego Canales

*Colegio Internacional de Sevilla San Francisco de Paula*

**Resumen:** *Se ha estudiado la evolución con la edad de las proporciones del rostro humano, encontrándose una evolución lineal hasta los 18 años, momento en que se alcanza el valor de la proporción áurea, que luego se mantiene constante en el tiempo. El modelo propuesto es el de una función definida a trozos, con una primera parte lineal y una segunda constante. El modelo ha sido contrastado y verificado por hasta tres conjuntos de datos adicionales.*

**Palabras clave:** *proporción áurea, modelo, análisis de datos*

## A model on the evolution with time of the proportions of the human face

**Abstract:** *The evolution with the age of the proportions of the human face has been studied, finding a linear evolution up to the age of 18, at which point the value of the golden ratio is reached, which then remains constant over time. The proposed model is a function defined in pieces, with a first linear part and a second one constant. The model has been verified using three additional data sets.*

**Keywords:** *golden ratio, model, data analysis.*

---

1. mariquillajp2001@gmail.com

## INTRODUCCIÓN

La proporción áurea, el número de oro o divino, es un número irracional, que se conoce desde la antigüedad y se representa por la letra griega  $\varphi$ , en honor del escultor Fidias (500 a.C - 432 d.C), quien diseñó el Partenón, en el que existen abundantes ejemplos de dicha proporción (López, 2017). La proporción áurea se define como:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398874989\dots$$

Este número se puede obtener de múltiples formas, pero para el propósito de este trabajo, interesa conocer su definición geométrica: sea un segmento dividido en dos partes  $a$  y  $b$ , tal que  $a$  es el más largo, entonces si la ratio  $a:b$  es igual a la ratio de la longitud total del segmento  $a+b$  al  $a$ , dicha ratio es la proporción áurea  $\varphi$ .

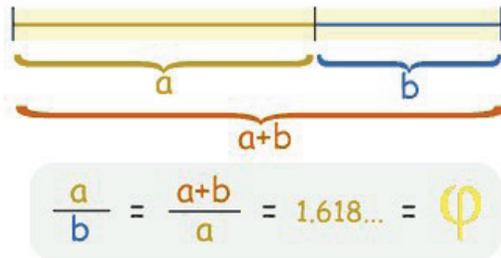


Figura 1. Segmento Áureo (López, 2017)

$$\varphi = a / b = (a + b) / a$$

Esta proporción se encuentra en la naturaleza, y en multitud de objetos hechos por el hombre y, desde la antigüedad, ha estado asociada a la belleza, pese a ser éste un concepto relativo. Ejemplos de la proporción áurea en la naturaleza son el patrón de los flósculos de los pétalos del girasol, el patrón de crecimiento de la concha de un caracol, la forma de algunas galaxias y muchas proporciones del cuerpo humano (Jaff Company, 2019). Y en el arte encontramos la proporción áurea en la Gioconda o el hombre de Vitruvio, de Leonardo da Vinci, la catedral de Notre Damme, Las Meninas de Velázquez, o el Partenón del mencionado Fidias, por ejemplo. Es digno de mención el caso de Dalí, quien en su etapa artística atómica, antes de abordar la obra definitiva, hace una serie de esbozos y de cálculos matemáticos donde aplica el número  $\varphi$  y la serie de Fibonacci para que su obra sea más simétrica y armoniosa a la vista del ser humano. La figura 2 es uno de estos mencionados esbozos.

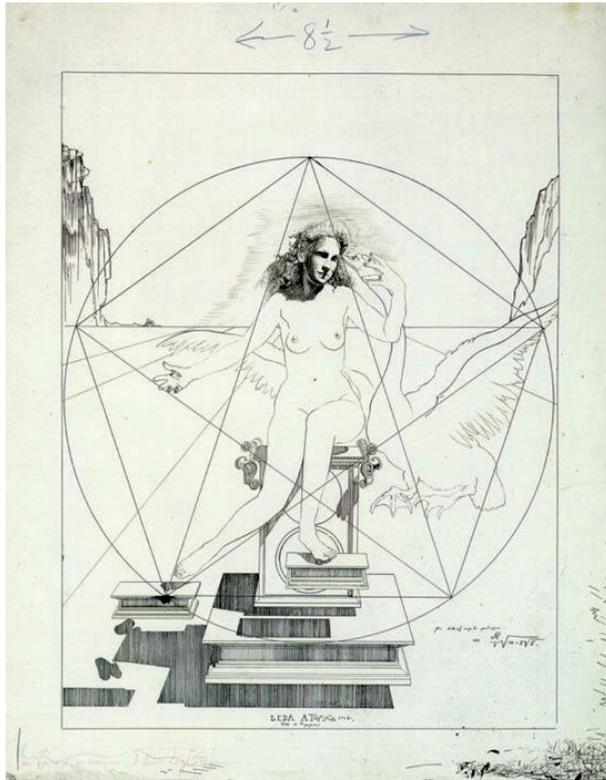


Figura 2. Esbozo Leda Atómica (Dalí, 1947)

Cómo se ha mencionado antes, el número áureo puede encontrarse en el cuerpo humano en multitud de proporciones. Un ejemplo poco conocido es el de la sonrisa, y es que, según estudios odontológicos, nos parecen más atractivas las sonrisas en las que los dientes presentan la proporción áurea (García y otros, 2007).

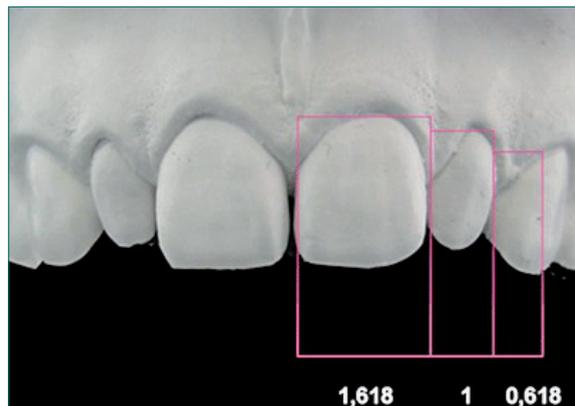


Figura 3. Proporción áurea en la dentadura (García y otros, 2007)

Por el contrario, uno de los más conocidos es la obra de Leonardo Da Vinci llamada El hombre de Vitruvio, en el que la búsqueda de las proporciones perfectas es evidente.

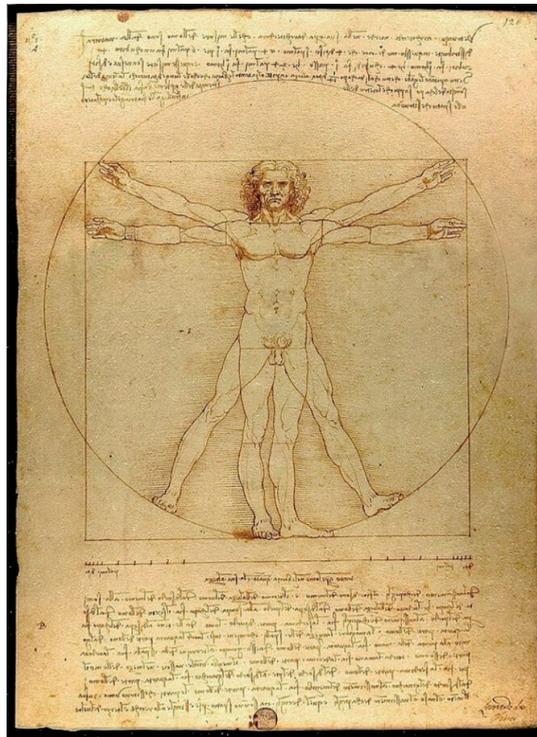


Figura 4. Hombre de Vitruvio (da Vinci, 1490)



Figura 5. Proporciones áureas en la cara (Rodríguez & Valle-Inclán, 2019)

Algunos otros ejemplos de proporciones áureas en el cuerpo humano son la razón de la altura de la persona y la distancia del ombligo a la punta del dedo corazón de la mano; o la razón entre la altura total de la persona y la distancia del ombligo a los pies (Meisner, 2019).

Si nos centramos en el rostro, que es el objeto de esta investigación, hay muchas posibles proporciones que se pueden considerar. La siguiente imagen muestra varias de las proporciones que se pueden medir en la cara y que dan como resultado la razón áurea. En este trabajo, se ha elegido la A, que estudia la relación entre el largo y el ancho de la cara, que es la más sencilla y reproducible, al implicar distancias más grandes, y por tanto menos sensibles al error (figura 5).

## METODOLOGÍA

Para desarrollar esta investigación, se han elegido tres imágenes diferentes del autor desde los 10 meses a los 17 años, y se ha medido sobre ellas el ancho y el largo del rostro por medio del programa *Golden Ratio* (Welz, 2015), el cual proporciona de forma automática la proporción entre ambas medidas. A continuación, se calcula el promedio y se grafica frente a la edad para visualizar la evolución de la proporción del rostro con el tiempo.

## RESULTADOS

Tabla 1. Ratios determinados por el programa Golden Ratio (Welz, 2015) en tres fotos diferentes de las edades indicadas y promedio calculado

Edad	Ratio Foto 1	Ratio Foto 2	Ratio Foto 3	Promedio
0	1,125	1,178	1,189	1,164
1	1,196	1,198	1,203	1,199
2	1,202	1,208	1,211	1,207
3	1,259	1,261	1,265	1,262
4	1,282	1,281	1,286	1,283
5	1,315	1,318	1,320	1,318
6	1,338	1,344	1,345	1,342
7	1,369	1,373	1,376	1,373
8	1,397	1,401	1,405	1,401
9	1,417	1,420	1,425	1,421
10	1,432	1,435	1,437	1,435
11	1,452	1,454	1,459	1,455
12	1,459	1,469	1,475	1,468
13	1,504	1,506	1,511	1,507
14	1,533	1,536	1,540	1,536
15	1,559	1,566	1,570	1,565
16	1,582	1,586	1,591	1,586
17	1,590	1,591	1,594	1,592

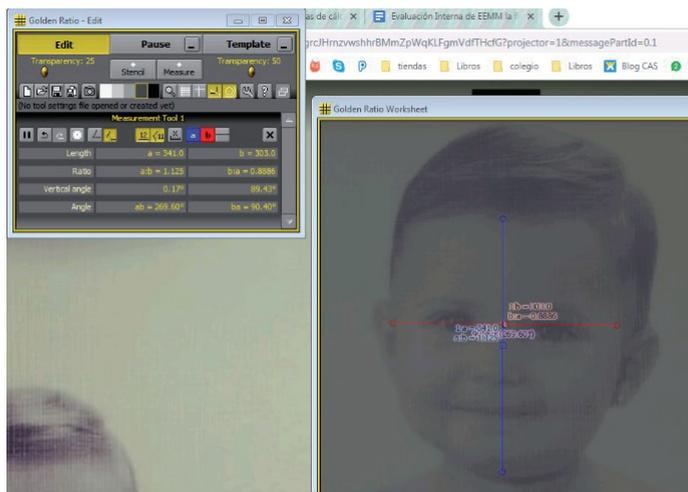


Figura 6. Midiendo la proporción áurea con Golden Ratio

### Evolución de la proporción del rostro con la edad

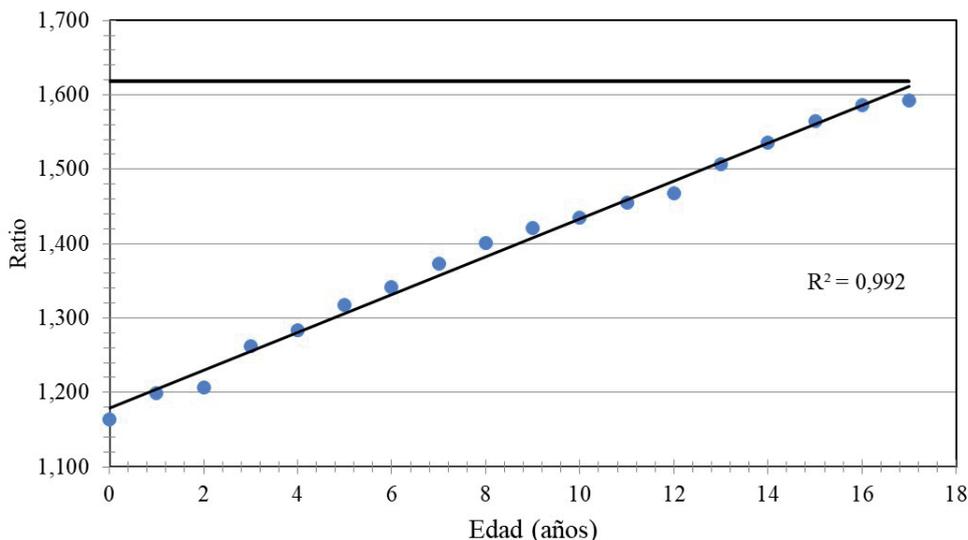


Gráfico 1. Evolución de la proporción del rostro con la edad

El gráfico 1 muestra la evolución con la edad de la proporción antes definida. Se ha incluido también el valor de la proporción áurea (línea negra). Los datos obtenidos se ajustan bien a un modelo lineal con los siguientes parámetros:

$$\text{proporción} = 0,025 \cdot \text{edad} + 1,183$$

El coeficiente de correlación de Pearson calculado para este ajuste lineal es de  $r=0,996$

Para comprobar el modelo obtenido, se han tomado otras tres fotos diferentes, no incluidas en el conjunto analizado y se han analizado con la misma metodología para comparar el valor obtenido con la predicción del modelo:

Tabla 2. Comparación entre el ratio medido por el programa y el previsto por el modelo

Edad	Ratio medido por el programa	Ratio calculado por el modelo	Porcentaje de error
5	1,317	1,308	0,7%
10	1,422	1,433	0,8%
15	1,577	1,558	1,2%

Una segunda verificación a la que ha sido sometido el modelo es su aplicabilidad a otras personas. Para ello, se han tomado fotografías de una segunda persona y se han sometido al mismo proceso:

Tabla 3. Ratios medidos por el programa, calculados por el modelo y porcentaje de error en función de la edad para una segunda persona

Edad	Ratio medido por el programa	Ratio calculado por el modelo	Porcentaje de error
0	1,173	1,183	0,9%
2	1,203	1,233	2,5%
3	1,259	1,258	0,1%
4	1,294	1,283	0,9%
5	1,308	1,308	0%
6	1,354	1,333	1,6%
7	1,373	1,358	1,1%
8	1,413	1,383	2,2%
10	1,445	1,433	0,8%
12	1,460	1,483	1,6%
14	1,526	1,533	0,5%
16	1,591	1,583	0,5%
17	1,595	1,608	0,8%

Por último, se ha repetido el proceso, pero usando ahora imágenes de un personaje famoso, mundialmente conocido y tenido por hermoso. Para ello se ha elegido a Audrey Hepburn, ya que es posible encontrar imágenes suyas desde su infancia hasta su fallecimiento (“Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!”, 2019). La siguiente tabla recoge las medidas realizadas, la predicción del modelo y el porcentaje de error:

Tabla 4. Ratios medidos por el programa, calculados por el modelo y porcentaje de error en función de la edad para el rostro de Audrey Hepburn

<b>Edad</b>	<b>Ratio medido por el programa</b>	<b>Ratio calculado por el modelo</b>	<b>Porcentaje de error</b>
1	1,220	1,208	1,00%
9	1,409	1,408	0,01%
12	1,461	1,483	1,50%
16	1,594	1,583	0,70%
19	1,610	1,658	3,00%
22	1,616	1,733	7,20%
24	1,615	1,783	10,40%
27	1,618	1,858	14,80%
30	1,619	1,933	19,40%
36	1,620	2,083	28,60%
39	1,624	2,158	32,90%
40	1,626	2,183	34,30%
49	1,624	2,408	48,30%
53	1,633	2,508	53,60%
57	1,630	2,608	60,00%
59	1,634	2,658	62,70%
63	1,629	2,758	69,30%

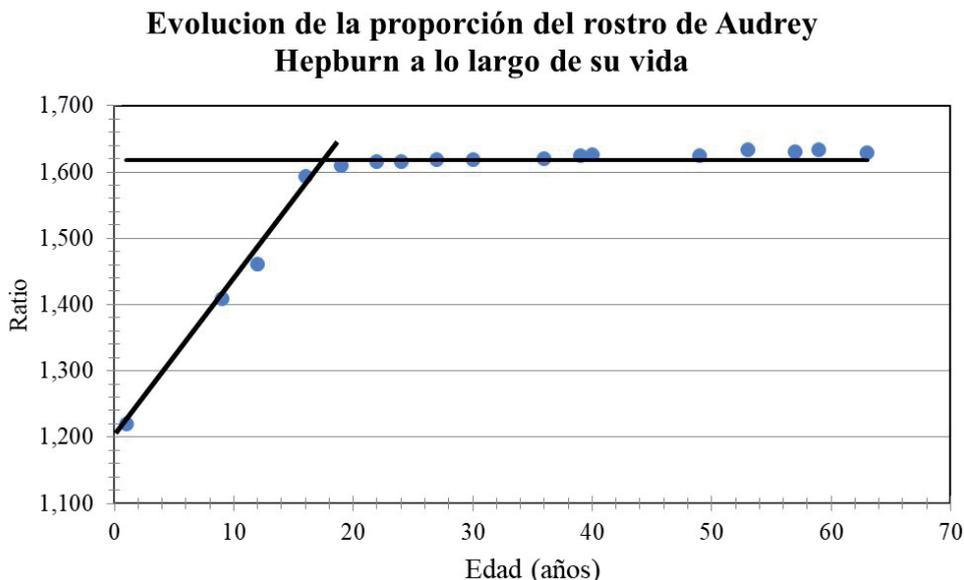


Gráfico 2. Evolución de la proporción del rostro de Audrey Hepburn con la edad

## DISCUSIÓN

El coeficiente de correlación de Pearson arroja un valor de 0,996, lo que nos indica que hay una correlación muy fuerte entre la proporción elegida del rostro y la edad en el rango de edad considerado. Tanto en la tabla 1 como en la gráfica 1, vemos la evolución gradual de los datos y el acercamiento al final al número áureo.

La gráfica es lineal, hasta la edad que hemos podido analizar (17 años), momento en que el valor de  $\phi$  casi se ha alcanzado. Probablemente en uno o dos años, observaríamos constancia en el valor, que se mantendría así hasta la vejez en que podría volver a desviarse aunque no sabemos en qué sentido.

Aprovechando los datos y la buena correlación lineal que estos presentan entre las edades estudiadas, se han calculado los parámetros de la recta de regresión de los datos, con lo que se ha creado un modelo de la variación de la proporción del rostro con la edad, cuya validez ha sido luego evaluada de tres formas distintas:

- En primer lugar, se ha usado para predecir la proporción en fotos no incluidas en el modelo inicial, obteniendo desviaciones bastante pequeñas, inferiores al 1,5%, lo que demuestra la validez para el primer sujeto.
- En segundo lugar, el modelo se ha aplicado al rostro de otra persona, además, de distinto sexo. De nuevo las desviaciones son pequeñas, inferiores al 1,5% salvo en un caso, por lo que el modelo es válido y generalizable a otras personas.
- Por último, se ha repetido este análisis con una colección de imágenes de Audrey Hepburn (“Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!”, 2019), y

los resultados son muy interesantes. Las desviaciones son similares a las anteriores (1,5%) mientras la edad es inferior a 18 años, y a partir de ahí, las desviaciones crecen sin parar. Esto no es sorprendente pues se está extrapolando el modelo a un rango de edades que no se usó para definirlo. Por consiguiente, teniendo en cuenta la magnitud de las desviaciones y las observaciones realizadas se puede concluir que el modelo es válido hasta los 17-18 años, momento en que se alcanza el valor de la proporción áurea, pero no más allá, pues sigue prediciendo un comportamiento lineal, cuando lo que se observa es que la proporción se mantiene constante. En el caso de Audrey Hepburn, además, no cambia hasta el momento de su fallecimiento, lo que parece indicar que la vejez no afecta significativamente a esta proporción, aunque ello habría que confirmarlo ampliando el estudio a edades superiores y más personas, para mejorar el modelo e incorporar un rango más amplio de edades. De todas formas, para el caso de Audrey Hepburn, se puede modificar fácilmente el modelo, definiéndolo por trozos, con la función obtenida hasta los 18 años, y con el valor constante de  $\phi$  a partir de ahí.

## CONCLUSIONES

Se ha comprobado que la proporción del rostro cambia desde el nacimiento, tendiendo a alcanzar el valor de la proporción áurea a los 17-18 años, a partir de la cual, se mantendría constante. El análisis de los datos ha permitido establecer un modelo de crecimiento lineal que permite definir una función definida por partes que se expresaría del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} y = 1,183 + 0,025x & x < 18 \\ y = 1,618 & x \geq 18 \end{array}$$

donde  $x$  es la proporción  $e$  y la edad en años.

Dado que los datos empleados abarcan mediciones desde el nacimiento hasta los 63 años, sería deseable ampliar el conjunto con edades superiores, lo que permitiría comprobar si la evolución de la ratio se mantiene constante una vez alcanzado el valor de la proporción áurea o si al final de la vida, cambia y en ese caso en qué sentido.

## REFERENCIAS

- Audrey Hepburn - 1 to 63 Years Old - Through The Years!. (2017). [Video]. Retrieved from <https://www.youtube.com/watch?v=PHPRmdt5ngo>
- García, E., Momose de Andrade, T., Mongruel Gomes, O., & Gomes, J. (2007). *Aplicación clínica de los parámetros estéticos en odontología restauradora*. Retrieved from <https://www.actaodontologica.com/ediciones/2009/1/art-4/>
- Jaff Company. (2019). *La sección áurea en la naturaleza*. Retrieved from <https://jaffcompany.wordpress.com/2017/04/24/la-seccion-aurea-en-la-naturaleza/>

- López, A. (2017). *El número de oro: qué es, dónde está, y para qué sirve*. Retrieved from <https://www.eldefinido.cl/actualidad/plazapublica/7723/El-numero-de-oro-Que-es-donde-esta-y-para-que-sirve/>
- Meisner, G. (2019). The Human Body and the Golden Ratio - The Golden Ratio: Phi, 1.618. Retrieved 16 December 2019, from <https://www.goldennumber.net/human-body/>
- Pérez Porto, J., & Gardey, A. (2013). Definición de proporción áurea — Definicion.de. Retrieved from <https://definicion.de/proporcion-aurea/>
- Rodríguez, M., & Valle-Inclán, L. (2019). Retrieved from [https://sgapeio.es/descargas/trabajos/trabajosIV/3\\_4\\_ESO/codigo\\_30.pdf](https://sgapeio.es/descargas/trabajos/trabajosIV/3_4_ESO/codigo_30.pdf)
- Vidal, C. (2019). *La sucesión de Fibonacci y el número áureo*. Retrieved from <https://www.hijos-del-atomo.com/miscelanea/la-sucesion-de-fibonacci-y-el-numero-aureo/>
- Welz, M. (2015). *Golden Ratio* [Windows 10]. Germany.