Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2020, nº 104, 75-81**

Una analogía entre la Estadística y la Física: la media aritmética y un sistema de palanca

Mauricio Fuentes A.
Universidad de Chile

Resumen: *Mediante una analogía con un sistema físico de palanca simple, se entrega una mirada a la media aritmética como el punto de equilibrio o centro de masa, ilustrando su sensibilidad a valores extremos y el cálculo de la media aritmética ponderada.*
Palabras clave: *Media aritmética, Media ponderada, Punto de equilibrio, Centro de masa.*

An Analogy between Statistics and Physics: the Arithmetic Mean and a Lever System

Abstract: *By means of an analogy with a simple lever physical system, a look at the arithmetic mean as the point of equilibrium or center of mass is given, illustrating its sensitivity to extreme values and the calculation of the weighted arithmetic mean.*
Keywords: *Arithmetic mean, Weighted mean, Point of equilibrium, Center of mass.*

INTRODUCCIÓN

Se dice comúnmente que la media aritmética es el punto de equilibrio o centro de masa de una distribución de datos, pero esta interpretación no siempre es completamente clara. Tomando como base algunas ideas y explicaciones didácticas de otros autores (Devore, 2016; Sarkar & Rashid, 2016), se muestra una analogía entre la media aritmética y la física de los cuerpos en reposo, ilustrando su sensibilidad a valores extremos desde una mirada de un sistema físico como la palanca. También se usa el concepto de centro de masa para explicar el cálculo de la media aritmética ponderada.

La palanca y el punto de equilibrio

De la Física, recordemos uno de los más importantes y antiguos postulados sobre los cuerpos en reposo: la relación de la palanca descrita por Arquímedes en su tratado *Sobre el equilibrio de las figuras planas* del siglo III a.C. (Dijksterhuis, 1987; Fernández Aguilar, 2012; Vittorio, 2016). En la Figura 1 se muestra un sistema básico de palanca constituido por una barra (sin masa) de longitud $L = L_1 + L_2$, en cuyos extremos actúan las fuerzas F_1 y F_2 ($F_1 > F_2$), y un fulcro ubicado en un punto de la barra tal que ésta se mantiene en equilibrio (posición horizontal). La relación de equilibrio de este sistema es

$$F_1 L_1 = F_2 L_2 \tag{1}$$

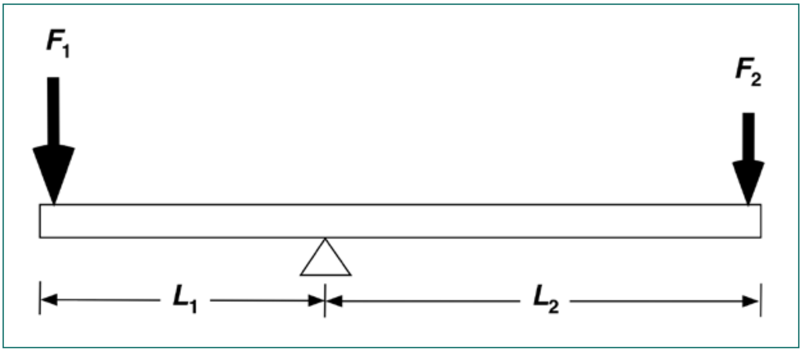

Figura 1: Sistema de palanca simple.

La ecuación (1) en Física también se conoce como la *segunda condición de equilibrio*, que se cumple cuando la suma de los momentos (o torques) de las fuerzas que actúan sobre la barra es cero (Sears & Zemansky, 1958; Young & Freedman, 2016). De acuerdo a esta relación y lo observado en la Figura 1, el punto de equilibrio (fulcro) se ubica hacia el lado de la mayor fuerza (F_1), con lo cual $L_1 < L_2$.

Haciendo la analogía con la Estadística, supongamos un caso muy simple donde tenemos dos datos: 2 y 5. Para visualizar estos dos datos, imaginemos que la barra (sin masa) está representada por la recta numérica, y sobre ésta se colocan dos masas, de 1 kg cada una, en las posiciones $x = 2$ y $x = 5$. La media aritmética $\overline{x} = 3{,}5$ está ubicada en el punto medio entre ambos números y, por lo tanto, es bastante sencillo ver que en ese punto se equilibra el sistema de masas y barra. Podemos representar las masas mediante puntos sobre la recta numérica y la posición de la media mediante un "fulcro", como en la Figura 2.

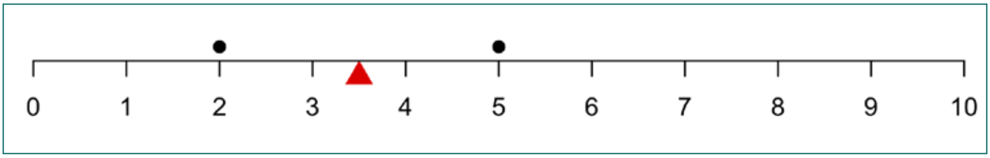

Figura 2: Dos puntos (masas) y un fulcro en el punto de equilibrio ($\bar{x}$ = 3,5).

En nuestro sistema de la Figura 2, donde $F_1 = F_2 = 1$ kg, $L_1 = \bar{x} - 2$ y $L_2 = 5 - \bar{x}$, la posición de $\bar{x}$ debe ser tal que (1) queda como

$$1 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) \quad (2)$$

Resolviendo obtenemos $\bar{x}$ = 3,5.

Si agregamos una tercera masa de 1 kg en la posición $x = 2$, como en la Figura 3, la ecuación de equilibrio sería

$$2 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) \quad (3)$$

Despejando obtenemos $\bar{x}$ = 3, un punto ubicado más a la izquierda que el anterior, para poder mantener en equilibrio el sistema, ahora más pesado justamente en el lado izquierdo.

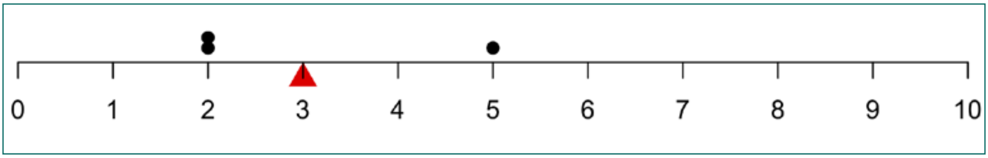

Figura 3: Sistema de la Figura 2 con una tercera masa en la posición x = 2.

Si colocáramos una cuarta masa en la posición $x = 7$ (ver Figura 4), y aplicando el principio de equilibrio y las distancias de las masas a la posición de la media, tenemos

$$2 \times (\bar{x} - 2) = 1 \times (5 - \bar{x}) + 1 \times (7 - \bar{x}) \quad (4)$$

Despejando obtenemos $\bar{x}$ = 4. La media se desplazó ahora hacia la derecha, para equilibrar el sistema que cargamos hacia ese lado al colocar la cuarta masa en la posición $x = 7$.

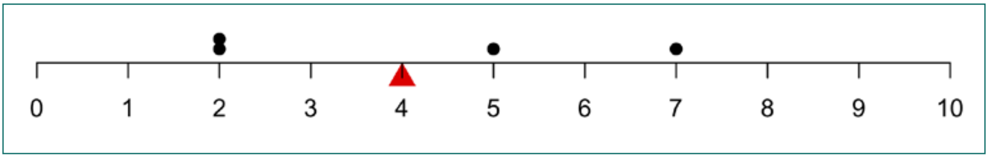

Figura 4. Sistema de la Figura 3 con una cuarta masa en la posición $x = 7$.

Finalmente, con esta analogía es posible comprender mejor que la media es sensible a valores extremos. Supongamos que ahora a nuestro sistema agregamos una masa ubicada lejos de las demás, por ejemplo en la posición $x = 34$. Naturalmente, como se observa en la Figura 5, el fulcro debe moverse hacia la derecha para compensar el desequilibrio introducido por esta nueva masa y mantener el sistema en posición horizontal. Aquí podemos usar también la relación de equilibrio

$$2 \times (\bar{x} - 2) + 1 \times (\bar{x} - 5) + 1 \times (\bar{x} - 7) = 1 \times (34 - \bar{x}) \tag{5}$$

Nuevamente, despejando obtenemos la media $\bar{x} = 10$.

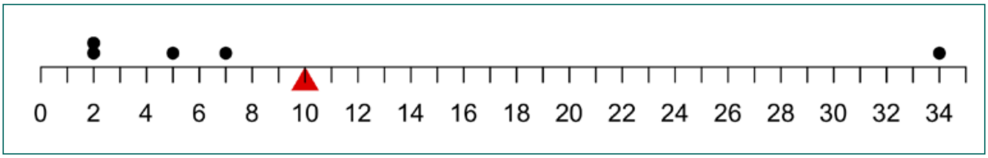

Figura 5. Sistema de la Figura 4 con una quinta masa en la posición $x = 34$.

Centro de masa y media ponderada

Es posible tomar cualquier subconjunto de datos (o masas) y utilizar su media (o centro de masa) para calcular la media total. Por ejemplo, en la Figura 4 las masas ubicadas en $x = 5$ y $x = 7$ tienen su punto de equilibrio en la posición $x = 6$. Entonces, reubicando dichas masas en $x = 6$, como se muestra en la Figura 6, podemos usar esa media en combinación con los otros dos datos para calcular la media total. Nótese que las dos masas ubicadas originalmente en $x = 5$ y $x = 7$ ahora están en $x = 6$, lo que equivale a ponderar con una “doble masa” el valor 6 al momento de calcular la media total.

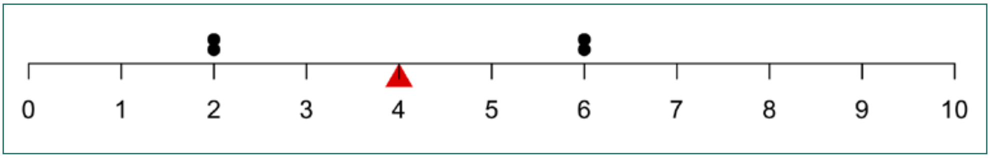

Figura 6: Sistema de la Figura 4 con las masas en $x = 5$ y $x = 7$ reubicados en la posición de su media.

Pensemos ahora en un conjunto algo más grande, agregando unos cuantos datos más a la Figura 6 y obteniendo el de la Figura 7[1]. Podríamos aplicar la ecuación (1) para calcular el punto de equilibrio, pero claramente sería más tedioso que en los casos anteriores. Lo importante es que ya sabemos que la media está ubicada en el centro de masa del sistema, permitiendo que éste se mantenga en equilibrio.

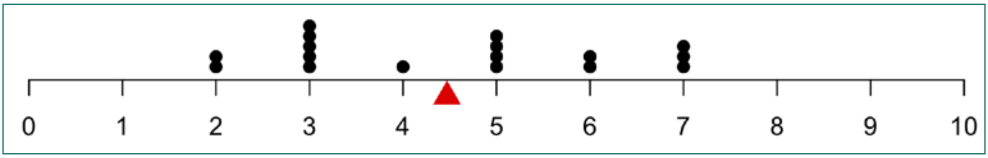

Figura 7: Sistema con más masas, o un conjunto de datos más grande.

Podemos recurrir entonces al mencionado concepto físico de centro de masa, cuya ubicación en la recta de nuestro ejemplo está dada por (Young & Freedman, 2016).

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (6)$$

Si consideramos todas las masas como masas unitarias, es decir, de 1 kg ($m_i = 1$ para todo i), $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ ..., $x_{16} = 7$, $x_{17} = 7$, y reemplazamos en (6), obtendremos que

$$x_{cm} = \frac{1\times 2 + 1\times 2 + 1\times 3 + \cdots + 1\times 7 + 1\times 7}{1+1+1+\cdots+1+1} = \frac{76}{17} = 4{,}47 = \bar{x} \qquad (7)$$

Sin embargo, esta forma también resulta tediosa y no nos entrega nada nuevo respecto a lo ya discutido sobre la interpretación física de la media. Resulta más interesante considerar que ahora tenemos masas distintas en cada posición, cada una dada por la

1. Este gráfico es conocido en Estadística como ***dot plot***, y cuando tiene esta forma es equivalente a un histograma.

suma de las masas unitarias en cada columna de la Figura 7. Podríamos incluso graficar en cada posición masas con pesos equivalentes, como se muestra en la Figura 8.

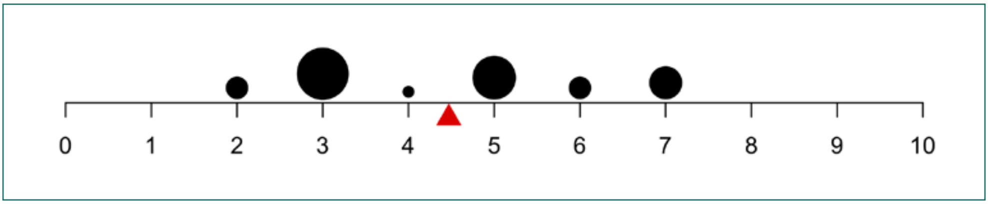

Figura 8: Sistema de la Figura 7 donde las masas tienen pesos equivalentes.

En este nuevo sistema, equivalente al anterior, tenemos 6 masas distintas (m_1 = 2 kg, m_2 = 5 kg, m_3 = 1 kg, m_4 = 4 kg, m_5 = 2 kg, m_6 = 3 kg). Entonces, aplicando la ecuación (6) tenemos que el centro de masa es

$$x_{cm} \quad \frac{2\times2 + 5\times3 + 1\times4 + 4\times5 + 2\times6 + 3\times7}{2 + 5 + 1 + 4 + 2 + 3} = \frac{76}{17} = 4{,}47$$

El centro de masa, considerado también como la *posición promedio de la masa del sistema* o la *posición promedio ponderada por la masa* (Serway & Jewett, 2008; Young & Freedman, 2016), nos entrega como resultado la conocida media aritmética ponderada, donde cada valor se pondera por su frecuencia de ocurrencia, equivalente a la suma de las masas unitarias en el sistema físico. Esto quiere decir que cuando calculamos la media ponderada le estamos adjudicando a cada valor medido de la variable una importancia o "peso" según su presencia relativa en el conjunto de datos, tal como en el sistema físico cada partícula contribuye según su masa relativa a la masa total del sistema.

CONCLUSIÓN

Un conjunto de datos puede ser pensado y representado como un sistema físico, donde la media aritmética equivale al punto de equilibrio o centro de masa. Usando una analogía con un sistema de palanca y con una pequeña cantidad de datos, se espera haber ilustrado la sensibilidad de la media aritmética a los datos extremos, así como haber explicado el cálculo de la media ponderada, donde el peso dado a cada valor es la frecuencia de ocurrencia. Aunque no fue mostrado aquí, la extensión a datos de dos o tres variables es directa con sistemas físicos de dos o tres dimensiones, respectivamente.

REFERENCIAS

Devore, J. (2016). *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences* (9th ed.). Boston: CENGAGE Learning.

Dijksterhuis, E. J. (1987). *Archimedes*. New Jersey: Princeton University Press.

Fernández Aguilar, E. M. (2012). *ARQUÍMEDES, El principio de Arquímides: ¡Eureka! El placer de la invención*. Barcelona: RBA Coleccionables, S.A.

Sarkar, J., & Rashid, M. (2016). A geometric view of the mean of a set of numbers. *Teaching Statistics*, *38*(3), 77–82. https://doi.org/10.1111/test.12101

Sears, F. W., & Zemansky, M. W. (1958). *Física General* (4th ed.). Madrid: Aguilar, S.A.

Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (7th ed.). Belmont: Thomson Learning, Inc.

Vittorio, A. (2016). *ARCHIMEDE SIRACUSANO: Invenzioni e contributi tecnologici* (2nd ed.). Siracusa: Associazione Culturale Arenario.

Young, H. D., & Freedman, R. A. (2016). *Sears and Zemansky's University Physics with Modern Physics*. *University Physics with Modern Physics* (14th ed.). Pearson Education, Inc.