

## La «justicia» en el reparto: las misivas matemáticas mantenidas entre Fermat y Pascal

Julio Camacho-Cañamón  
Carmen León-Mantero  
Universidad de Córdoba

**Resumen:** *La probabilidad puede llegar a ser un concepto complejo de introducir dado su carácter abstracto. Fueron las preguntas que se hacían los jugadores de azar en el siglo XVII las que motivaron el estudio de la probabilidad que conocemos en la actualidad. En este trabajo se presenta una idea de aula en la que se emplea una metodología activa de Aprendizaje Basado en Juegos caracterizada por su estilo manipulativo, significativo y constructivista que, enfocado desde un punto de vista solidario, puede llegar a ser muy enriquecedor para los alumnos de educación secundaria, así como eficaz para la comprensión de los conceptos relacionados con la probabilidad.*

**Palabras clave:** *Probabilidad, Azar, Fermat, Pascal, Aprendizaje Basado en Juegos.*

## “Justice” in the distribution: the correspondence between Fermat and Pascal

**Abstract:** *Probability can become a complex concept to introduce given its abstract character. It was the questions asked by gamblers in the seventeenth century that motivated the study of probability as we know it today. In this Classroom Idea an active methodology of Game-Based Learning will be used since it is characterized by its manipulative, significant and constructivist style that, focused from a solidary point of view, can become very enriching for the secondary education students, as well as effective for the comprehension of the concepts related to probability.*

**Keywords:** *Probability, Chance, Fermat, Pascal, Game-Based Learning.*

## INTRODUCCIÓN

El nacimiento de la teoría de la probabilidad tuvo una relación muy estrecha con el estudio de los problemas surgidos a partir de los juegos de azar. De hecho, el primer libro de texto del que se tiene conocimiento y en el que se habla sobre cálculo de probabilidades es el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de los juegos de azar) de Cardano. Podemos afirmar, entonces, que la probabilidad, tal y como la conocemos hoy en día, nació de la curiosidad matemática que suscitó entre los jugadores el arte de ganar o aumentar sus posibilidades de éxito en los juegos de azar. No es una creencia poco fundamentada la que afirma que jugando se aprende (Charlier, Ott, Remmele, y Whitton, 2012; Guillén, 2015; Hogle, 1996), y por ello, son de utilidad e interés el diseño de tareas estructuradas en torno a la metodología del Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ). Por otro lado, son muchos los autores que reconocen los beneficios de usar la Historia de las matemáticas como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas tanto para los profesores como para los alumnos (Fauvel y van Maanen, 2000; Gómez Alfonso, 2018; Jankvist, 2009; Pamos Vargas y Maz-Machado, 2014).

Por todo lo anterior, este trabajo presenta una idea de aula destinada a alumnos de enseñanza secundaria en la que se trabajarán conceptos relacionados con la probabilidad mediante una metodología basada en el Aprendizaje Basado en Juegos (ABJ), a través de uno de los problemas históricos cuya resolución constituyó la base del desarrollo de esta rama de las Matemáticas.

Esta tarea ha sido diseñada atendiendo a los contenidos y estándares de aprendizaje del bloque de Estadística y Probabilidad establecidos para la asignatura de Matemáticas de 3.º de ESO, tanto para la opción Matemáticas orientadas a enseñanzas académicas como aplicadas (Tabla 1).

Tabla 1. Contenido y estándar de aprendizaje («Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato», 2015, p. 394).

Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos	4.4 Toma la decisión correcta teniendo en cuenta las probabilidades de las distintas opciones en situaciones de incertidumbre.
--	--

A pesar de que esta tarea puede tener buena acogida desde 3.º de ESO a 1.º de Bachillerato, tal y como está planteada, se ajusta mejor a los contenidos de 3.º de ESO dado su carácter introductorio de la probabilidad.

Los objetivos de esta tarea son: trabajar la introducción de los conceptos básicos de probabilidad; dar a conocer los orígenes históricos de la probabilidad; aplicarlos a la resolución de problemas reales, concienciar sobre la justicia matemática en problemas de reparto, e introducir los aportes que dos grandes matemáticos del siglo XVIII realizaron en esta rama de las Matemáticas, como son Pierre de Fermat y Blaise Pascal.

Entre las directrices establecidas en la «Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la

diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado» (2016), se recomienda trabajar la resolución de problemas de forma transversal en todos los bloques de contenidos y siendo un eje fundamental de la asignatura.

Por otro lado, la presente tarea ha sido contextualizada dentro de un programa de solidaridad basado en campañas de recogida de alimentos para distintas ONG y comedores sociales propios de la ciudad. De esa forma, además de la Competencia Matemática y competencias básicas en Ciencia y Tecnología, se atiende a la Competencia Social y Cívica, todas ellas claves, con base en la «Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa» (2013) y en la «Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente» (2006).

## DISEÑO DE LA TAREA

Gerolamo Cardano (1501-1576), matemático, filósofo, médico y astrólogo escribió en 1564 el *Liber de Ludo Aleae* (Libro de los juegos de azar) en el que se aborda el estudio de las posibilidades del lanzamiento de varios dados y el llamado «problema de la división». Pero este estudio no fue publicado hasta 1663 (Fernández, 2007). Su obra no tuvo especial relevancia puesto que se dio a conocer al tiempo que las cartas que se intercambiaron Fermat y Pascal en 1654 (recogidas y explicadas por Devlin (2010)) donde exponían y resolvían diversos problemas relacionados con los juegos de azar.

Estos problemas fueron propuestos a Blaise Pascal (1623-1662) por Antoine de Gombaud (1607-1684) a mediados del siglo XVIII. Este caballero de Méré se había convertido en una personalidad importante en la corte francesa de Luis XIV. Fue filósofo y escritor, pero sobre todo su trabajo consistía en sociabilizar. El entretenimiento de moda de la época era, sin duda, el juego de azar y, seguro, que ambos amigos pasaron buenos momentos jugando (Ore, 1960). Según Coumet (1970), el propio de Méré ya había tratado de resolver infructuosamente estos problemas populares, que habían sido estudiados por Luca Pacioli (1447-1517), Niccolò Fontana (1499-1557), más conocido por su apodo, Tartaglia, y hasta el célebre Galileo Galilei (1564-1642).

Pascal, en busca del contraste de soluciones, acudió a Pierre de Fermat (1607-1665) y le planteó un caso particular del famoso problema de la división, que traducido al español y simplificado podría quedar como sigue: si un jugador logra obtener un seis en ocho lanzamientos de un dado, se lleva el total de la apuesta contra la banca, en caso contrario pierde todo; supongamos que habiendo lanzado ya tres veces el dado sin éxito de obtener el seis, el juego se ve interrumpido por un motivo desconocido, ¿cuál sería el reparto más justo de la apuesta entre el jugador y la banca? (de Mora Charles, 1989).

## Actividades

Como comentábamos anteriormente, en primer lugar, para enmarcar la actividad en un escenario solidario y social, propondremos a los alumnos realizar una recogida de alimentos para diferentes ONG y para los comedores sociales de la ciudad, de tal manera

que *a posteriori* podamos plantearles que resuelvan matemáticamente el problema del reparto de los alimentos que han conseguido recaudar entre todas las clases y destinarlos a los diferentes organismos.

En concreto, el problema que se les plantea consiste en:

*Suponiendo que se cuenta con dos entidades a las que donar los alimentos, a saber, Aldeas Infantiles e Ingenieros sin fronteras, ¿cómo debería ser el reparto entre ellas?*

Para ello, en primer lugar, se dividirá a la clase en dos grupos iguales, el primer grupo simulará ser el grupo representante de Aldeas Infantiles (A) y el segundo grupo de Ingenieros Sin Fronteras (B).

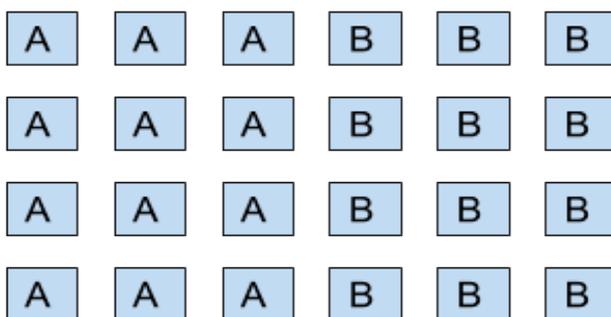


Figura 1. División de la clase en dos grupos iguales.

A continuación, se pedirá al alumnado que formen parejas de forma tal que en cada pareja haya un representante del grupo A y otro del B. Se repartirá de forma equitativa toda la comida recolectada entre las parejas formadas.

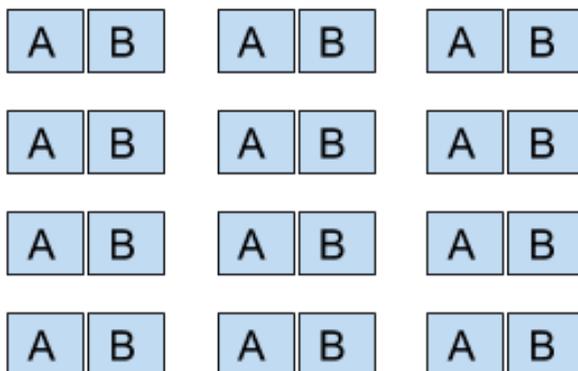


Figura 2. Agrupación por organizaciones.

A cada pareja se le entregará una ficha plana y redonda con una cara blanca y otra negra. Se indicará a los alumnos que la comida asignada a cada pareja será destinada a la asociación que represente la persona que gane al siguiente juego:

*Lanza la ficha al aire dejando que caiga sobre la mesa por una de sus caras hasta que alguno de los dos jugadores gane. Se considera ganador al jugador del equipo A si se obtienen 4 caras blancas, ganará el jugador del equipo B si se obtienen 4 caras negras.*

Tras cada tirada de la ficha, los jugadores deben apuntar qué resultado ha salido y para qué equipo correspondería ese «punto».

El docente interrumpirá el juego premeditadamente cuando los alumnos hayan realizado 3 lanzamientos y recogerá todas las fichas, sin permitir que ninguna pareja haya obtenido aún su ganador. Para conseguirlo el docente podría dirigir de manera simultánea cada una de las tiradas y detener el juego aludiendo, por ejemplo, al hecho de que había demasiado ruido en la clase, una situación que podría darse previsiblemente. En el siguiente paso de la tarea, el docente preguntará a los alumnos si alguna pareja ha conseguido los 4 puntos necesarios para llevarse toda la comida para la organización que representa. Como es de esperar, ningún miembro de ninguna pareja ha obtenido los cuatro puntos que necesita para ganar. A continuación, se pedirá a los alumnos que se reorganicen en función de los puntos que llevan frente a su rival, es decir, que se organicen en cuatro grupos según hayan obtenido las puntuaciones: 0-3, 1-2, 2-1 o 3-0, en el equipo A y B, respectivamente.

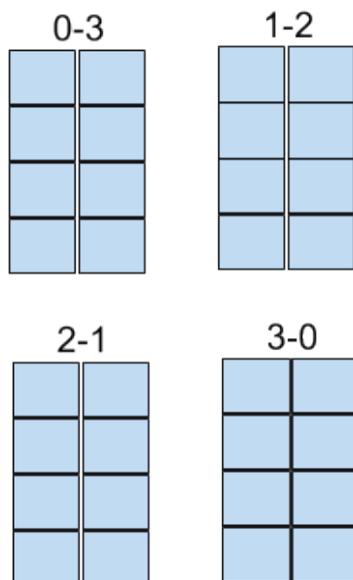


Figura 3. Distribución según puntuaciones.

Por último, en estos nuevos grupos, los alumnos deberán debatir cuáles deberían ser las directrices para decidir cómo debe ser el reparto de los alimentos en cada pareja, aprovechando que el juego no puede continuar.

Entre los casos que podemos encontrar, tenemos:

- Los alumnos que no hayan obtenido ningún punto y cuyo rival haya obtenido tres puntos, podrían argumentar que su rival no tiene por qué llevarse toda la comida ya que no ha obtenido los cuatro puntos mínimos de las reglas del juego. El hecho de que vaya ganando no significa que haya ganado.
- Los alumnos que se encuentren en desventaja con un punto, o bien, en ventaja con dos puntos, podrían decir que la comida se reparte de forma proporcional a las victorias que han obtenido, es decir  $1/3$  o  $2/3$  de la comida respectivamente.
- Los alumnos que hayan obtenido los tres puntos y su contrincante ningún punto podrían argumentar que ellos «van ganando» y que tienen derecho a llevarse toda la comida para su organización.

Es en este momento en el que el docente puede comentar a los alumnos que proponen el reparto proporcional que su solución es la misma que la que planteó Pacioli, y en la que, de forma incorrecta, solamente tenía en cuenta los hechos conocidos hasta ese momento. Para los alumnos, conocer las dificultades que surgieron en el pasado cuando se resolvían problemas matemáticos, relativiza los errores cometidos por ellos, puede motivarles a superar sus propias dificultades de aprendizaje y mejorar su actitud hacia la materia.

Para aclarar a los alumnos la respuesta correcta, introduciremos las misivas mantenidas entre Pascal y Fermat. Para ello, se razonará sobre la base de lo ocurrido si el juego hubiese continuado, se introducirá el concepto de incertidumbre, que les haga ver que los alumnos que no han obtenido ningún punto o van en desventaja, tendrían aún probabilidades de ganar y se plasmará mediante un diagrama de árbol la situación en la que cada alumno se encuentra y las diversas situaciones a las que podrían llegar para demostrar, como hizo Fermat, que se puede hacer un reparto más justo en función de las probabilidades que tiene cada alumno de ganar.

## CONCLUSIONES

Gracias a este trabajo podemos introducir en el aula el concepto de probabilidad, la utilidad de los diagramas de árbol y la justicia en el reparto, a través de la metodología del ABJ, la resolución de problemas y mediante el uso de la Historia de las Matemáticas como recurso.

Como limitación, que merecería la pena mejorar, podríamos señalar la competitividad que se genera entre los alumnos con este tipo de juegos. Sería este un buen momento para tratar con el alumnado las cuestiones de la ludopatía y la adicción a juegos de azar y apuestas, hablándoles de otros tipos de juegos sociales. No obstante, se ha intentado suavizar introduciendo la recompensa social que implica ganar el juego. Al no ser un beneficio propio para el alumno, sino un beneficio destinado a una organización que realiza una importante labor social, se minimizará la tendencia competitiva y se trabajará el trasfondo solidario en el que está inmerso el problema.

## REFERENCIAS

- Charlier, N., Ott, M., Remmele, B. y Whitton, N. (2012). Not just for children: game-based learning for older adults. En P. Felicia (Ed.), *6th European Conference on Games Based Learning* (pp. 102–108). Cork: Irlanda.
- Coumet, E. (1970). La théorie du hasard est-elle née par hasard ? *Annales*, 25(3), 574-598. doi: 10.3406/ahess.1970.422242
- de Mora Charles, M. (1989). *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII*. País Vasco: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.
- Devlin, K. (2010). *The unfinished game: Pascal, Fermat, and the seventeenth-century letter that made the world modern*. Nueva York: Basic Books.
- Fauvel, J. y van Maanen, J. A. (2000). *History in mathematics education: The ICMI study*. Dordrecht: Kluwer.
- Fernández, S. (2007). Los inicios de la teoría de la probabilidad. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 55, 7-20.
- Gómez Alfonso, B. (2018). Uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, educación y Sociedad*, 1(1), 11-21. Recuperado a partir de <http://mesjournal.es/ojs/index.php/mes/article/view/5>
- Guillén, J. C. (2015, enero 14). El juego, un mecanismo natural imprescindible para el aprendizaje [Blog]. Recuperado 16 de febrero de 2019, de <https://escuelaconcerebro.wordpress.com/2015/01/14/el-juego-un-mecanismo-natural-imprescindible-para-el-aprendizaje/>
- Hogle, J. G. (1996). Considering Games as Cognitive Tools: In Search of Effective “Edutainment”. Georgia: Department of Instructional Technology: University of Georgia. Recuperado de <https://eric.ed.gov/?q=Considering+Games+as+Cognitive+Tools%3a+In+Search+of+Effective&id=ED425737>
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. (2013, 10 de diciembre). Boletín Oficial del Estado, 2013(295), 97858–97921. Recuperado de [https://www.boe.es/diario\\_boe/](https://www.boe.es/diario_boe/)
- Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado. (2016, 28 de julio). Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 2016(144), 108–396. Recuperado de <http://www.juntadeandalucia.es/boja>
- Ore, O. (1960). Pascal and the invention of probability theory. *The American Mathematical Monthly*, 67(5), 409-419.
- Pamo Vargas, J.M. y Maz-Machado, A. (2014). LAS MATEMÁTICAS “NO EUROPEAS”: Historia de las Matemáticas en la E.S.O. *Epsilon, Revista de Educación Matemática*, 31(1), 93-107.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. (2015, 3 de enero). Boletín Oficial del Estado, 2015(3), 169-546. Recuperado de [https://www.boe.es/diario\\_boe/](https://www.boe.es/diario_boe/)

Recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo, de 18 de diciembre de 2006, sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente. (2006, 30 de diciembre). Diario Oficial de la Unión Europea, 2006(394), 10-18. Recuperado de [https://www.boe.es/diario\\_boe](https://www.boe.es/diario_boe)