Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2019, nº 101, 121-136**

La puesta en juego de actividades propias del quehacer matemático mediadas por el empleo de un software de geometría dinámica

María Florencia Cruz
Ana María Mantica
Universidad Nacional del Litoral

Resumen: *Es innegable que el trabajo con tecnologías digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática se hace presente en los diferentes niveles del sistema educativo. A su vez el empleo de las mismas compone una preocupación central para los investigadores en Educación Matemática.*
Con el fin de aportar información se presentan los resultados de una investigación que tiene por objetivo comprender el lugar que otorgan al software de geometría dinámica Cabri 3D futuros profesores en matemática al formular y validar propiedades geométricas en el dominio de la geometría tridimensional empleando la noción de lugar geométrico.
Palabras clave: *Software de Geometría Dinámica – Conjeturar – Validar – Futuros Profesores – Geometría Tridimensional.*

Mathematical task gameplays mediation by the usage of dynamic geometric software

Abstract: *We cannot deny that the usage of digital technologies in teaching and learning of mathematical processes is present in all different educative systems. At the same time, its employment is one of the main concerns between mathematics education researchers. With the aim to provide information, here we show the results of a research whose main goal is to understand the role given to Cabri 3D software in dynamic geometrics, by pre-service mathematics teachers, when stating and validating geometrical properties in the tridimensional geometric domain using the geometric locus knowledge.*
Keywords: *Dynamic Geometry Software – Conjecture – Validate – Pre-service Mathematics Teachers – Tridimensional Geometry.*

INTRODUCCIÓN

Es innegable que el trabajo con tecnologías digitales en la formación de futuros profesores se hace necesario, pues los estudiantes que actualmente se encuentran en las aulas de la escuela secundaria son nativos digitales. Es necesaria la presentación de propuestas que lleven a los estudiantes a formular y validar conjeturas, evitando problemas de tipo "probar que…" que aseguran la validez de los que se pretende probar, devolviendo así la responsabilidad matemática a los estudiantes.

En la presente investigación se tiene por objetivo estudiar el lugar que otorgan futuros profesores en matemática al software de geometría dinámica *Cabri 3D* al conjeturar y validar afirmaciones en el dominio de la geometría tridimensional, en particular, cuando se pone en juego la noción de lugar geométrico. La temática es considerada de interés por diversos investigadores (Burgos Navarro y Flores Martínez, 2017; Cruz y Mantica, 2017; Gómez-Chacón, Botana, Escribano y Abánades, 2016; Gutiérrez y Jaime, 2015; Gómez-Chacón y Escribano, 2014).

Esta investigación se lleva a cabo con estudiantes argentinos de la Facultad de Humanidades y Ciencias (FHUC) de la Universidad Nacional del Litoral (UNL) de la ciudad de Santa Fe. Los estudiantes se encuentran transitando el tercer año de la carrera Profesorado en Matemática, han cursado entre otras asignaturas Geometría Euclídea Plana y se encuentran cursando la última semana de Geometría Euclídea Espacial, materia en la cual se emplea habitualmente el Software de Geometría Dinámica (SGD) *Cabri 3D*.

La importancia de que futuros profesores en matemática conjeturen y validen situaciones problemáticas que abordan la noción de lugar geométrico, con diferentes tecnologías, radica en parte, en el lugar que documentos regulatorios oficiales le otorgan a estas actividades matemáticas. En el último documento realizado por profesores en matemática que se desempeñan en carreras de profesorados de instituciones superiores universitarias y no universitarias de Argentina (2010), convocados para su realización por el Instituto Nacional de Formación Docente se plantea, la necesidad del trabajo con distintos recursos tecnológicos (lápiz y papel, compás, regla, escuadra, transportador, instrumentos mecánicos, software de geometría dinámica, entre otros) en prácticas específicas de geometría, particularmente la construcción de figuras y lugares geométricos. También se destaca la importancia de que los futuros docentes exploren, elaboren y validen propiedades geométricas.

Los núcleos de aprendizaje prioritarios para la educación secundaria (2011), propuestos por el Ministerio de Educación de Argentina sostienen que en el nivel secundario se apunta a lograr en los estudiantes la producción y validación de enunciados sobre relaciones y propiedades de figuras y cuerpos geométricos, procurando avanzar desde argumentaciones empíricas hacia otras más formales. A su vez proponen plantear situaciones donde el análisis y construcción de figuras se validen utilizando propiedades geométricas, particularmente en situaciones problemáticas en las que se emplea la noción de lugar geométrico.

Como se menciona anteriormente los documentos regulatorios apuntan a que los futuros profesores en el transcurso de su formación tengan acceso a actividades propias del quehacer matemático como conjeturar, validar, emplear diferentes recursos tecnológicos, entre otras. El realizar este tipo de actividad durante su formación puede redundar en beneficio de sus propuestas de enseñanza en la escuela secundaria. Se considera que este modo de trabajo puede potenciar su labor como docentes logrando mejoras en la enseñanza de la matemática.

MARCO DE REFERENCIA

Se realizan consideraciones teóricas de términos o expresiones principales que se utilizan en el presente texto y de la influencia de la utilización del SGD cuando se llevan a cabo los procesos de formulación y validación de conjeturas que involucran la noción de lugar geométrico.

Cuando se menciona la actividad matemática de conjeturar afirmaciones se hace referencia a las sospechas matemáticas que los estudiantes realizan a partir de exploraciones, ensayos, errores, uso de datos conocidos, saberes previos, entre otros. A partir de la experiencia de trabajo sobre una tarea matemática se establecen afirmaciones de las que se tiene un cierto margen de certeza, aunque con lo realizado hasta dicho momento no es posible asegurar que realmente es así y no puede ser de otra manera (Itzcovich, 2007).

La expresión “procesos de validación”, en términos de Balacheff (2000), refiere a la actividad intelectual que se ocupa de la manipulación de información, dada o adquirida, para producir nueva información que permita asegurar la veracidad de una afirmación y, eventualmente producir una explicación.

Arcavi y Hadas (2000) afirman que algunos aspectos de la actividad matemática se potencian con la utilización del SGD. Consideran que el empleo del mismo contribuye a la visualización, experimentación, sorpresa y retroalimentación. Sostienen que los SGD:

- Otorgan la posibilidad de construir figuras con ciertas propiedades y permiten la transformación de las mismas en tiempo real lo cual potencia la *visualización* y es posible que brinde bases intuitivas que se utilicen para la formulación y validación de conjeturas.
- Permiten la obtención de gran cantidad ejemplos lo que colabora a que los estudiantes logren el desempeño de la *experimentación.* La información que se obtiene por la *experimentación* puede ser de colaboración para la determinación de generalizaciones y la formulación de conjeturas.
- Posibilitan poner en tela de juicio las predicciones de los estudiantes al obtener un resultado determinado. Cuando la devolución del SGD genera diferencias con respecto a las predicciones que explícitamente enunciaron, se provoca una *sorpresa* que puede ser un detonador para lograr un aprendizaje significativo.
- Provocan diferencia entre las expectativas de cierta acción y el resultado que se obtiene en el SGD, es decir, una reacción que brinda una *retoalimentación*. Esta retroalimentación puede motivar a los estudiantes a revisar, verificar e incluso a demostrar.

Villarreal (2004) afirma que la incorporación del SGD cuando se llevan a cabo procesos de pensamiento matemático, son condicionados por la incorporación de esta tecnología y no determinados por la misma. La autora retoma aportes de Hershkowitz y Schwarz (1997) quienes determinan un conjunto de normas sociomatemáticas que se encuentran relacionadas con la incorporación de tecnologías en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, entre ellas: los resultados que se obtienen de los SGD pueden ayudar a generar justificaciones y a pesar de la evidencia que puede mostrar el SGD es necesaria la presencia de pruebas o justificaciones.

Benitez Mojica (2006) destaca la importancia de la utilización del SGD para resolver problemas en los que se debe determinar el lugar geométrico, considera que se establece un "puente" entre la visualización y la argumentación de ideas matemáticas. El autor sostiene que en este tipo de problemas se realiza la construcción con las condiciones solicitadas y se ponen en juego características propias que aporta el SGD como lo son, el arrastre, la traza y el lugar geométrico. Utiliza la expresión "prueba del arrastre" cuando refiere a la acción de control que utiliza el movimiento de los objetos del software para constatar una conjetura e indica que el uso de ésta juega un papel importante en el proceso de argumentación. En su investigación reporta tres niveles de argumentación: el reconocimiento visual, la prueba del arrastre y la prueba con lápiz y papel. Señala la peligrosidad para la formación matemática de los estudiantes del uso del SGD como herramienta de demostración.

Laborde (1996) sostiene que en el trabajo con SGD al desplazar un elemento base del dibujo, el mismo se deforma respetando las propiedades geométricas utilizadas para su construcción y las que dependen de estas. La construcción de un objeto geométrico implica comunicar al programa un procedimiento geométrico, por esta razón el uso del SGD debería favorecer el empleo de conocimientos geométricos. Si la construcción se realiza a "ojo", es decir, sin respetar propiedades, se deforma.

En relación con lo mencionado, Laborde (2015) sostiene que es difícil que los estudiantes comprendan que la construcción se conserva en el transcurso del desplazamiento si se realiza teniendo en cuenta las propiedades geométricas del objeto considerado, que esto hace que modifique su tamaño, pero no su forma. Esto que denomina "arrastre" y es fundamental tanto para la relación entre el objeto y su representación, como para el trabajo en la formulación y validación de conjeturas, debe ser enseñado. El entorno permite determinar la variabilidad de los elementos del objeto geométrico en cuestión y de su dominio de variación. Habilita a descartar interpretaciones erróneas que en muchos casos pueden ser inferidas del dibujo estático que lo representa, dado que al realizar el arrastre y deformar el dibujo pueden dejar de cumplir propiedades establecidas.

CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS

La presente investigación es de naturaleza cualitativa, se pretende un trabajo intensivo teniendo en cuenta que un empleo cuidadoso proporciona resultados replicables, información válida de los fenómenos estudiados e incluso un conocimiento acerca de la comunidad a la que pertenecen los sujetos de estudio, a pesar de perder la posibilidad de establecer generalizaciones (Mc Knight, Magid, Murphy y Mc Knigt, 2000). Se realiza un estudio de casos en el que interesa comprender la complejidad y particularidad del mismo (Stake, 1998).

Los sujetos de estudio son dos alumnos que cursan la asignatura Geometría Euclídea Espacial (GEE) en el profesorado en matemática de la FHUC de la UNL. En la asignatura mencionada se desarrolla la geometría en tres dimensiones. Esta materia se encuentra en el tercer año del plan de estudio de la carrera y los estudiantes previamente cursaron y regularizaron Geometría Euclídea Plana. Para regularizar GEE los estudiantes deben obtener en un examen teórico práctico al menos 50% y, si superan este último, deben aprobar un taller que se lleva a cabo la última semana de cursado.

La investigación se realiza en el taller dado que se considera que los estudiantes disponen algunos conocimientos básicos de la geometría tridimensional que posibilitan y potencian la formulación y validación de conjeturas en este dominio. Por lo mencionado se considera que la muestra es no probabilística e intencional (Kazez, 2009).

En el taller se presenta una situación geométrica en la cual se invita a los estudiantes a conjeturar y validar una afirmación. Se organiza en dos etapas, en la primera trabajan con un par en el desarrollo de una respuesta a la situación y en la segunda realizan una exposición frente a las docentes de la asignatura del proceso llevado a cabo. En esta última instancia las docentes intervienen con el fin de interpelarlos y potenciar la validación de afirmaciones.

La interacción entre pares potencia, en el ámbito investigativo, el acceso a los procesos que llevan a cabo, las decisiones que toman, sus ideas y los procedimiento empleados (Balacheff, 2000). Quaranta y Wolman (2003) afirman que en instancias de producción los intercambios posibilitan la escucha y puesta a prueba de sugerencias, las confrontaciones, las justificaciones entre alumnos, entre otros factores que potencian la puesta en juego de procesos de validación. Las autoras indican que la interacción entre estudiantes encuentra determinadas limitaciones cuando un estudiante asume la dirección de la solución y los otros acepten sin cuestionamiento, o si un alumno sin utilizar argumento de orden matemático se opone sistemáticamente a las propuestas del resto.

El taller tiene una duración de 3 horas reloj y para el desarrollo del mismo se diseña la siguiente tarea[1]:

Tabla 1: tarea presentada a los estudiantes.

TAREA: Sean el plano α, la recta r paralela a α y A y C puntos de r. Construir los rombos ABCD tal que B sea un punto de α. Hallar el lugar geométrico de D al variar B.

Los estudiantes saben que en el taller es obligatorio el empleo del SGD *Cabri 3D*, por esta razón no se explicita en la tarea. La construcción es realiza en una netbook del departamento de matemática de la FHUC de la UNL que posee la licencia del mismo. Es habitual el empleo del SGD en diversas asignaturas de la carrera Profesorado en Matemática y particularmente en GEE se usa *Cabri 3D* en clases teóricas y prácticas. Se considera importante el manejo del mismo por las potencialidades mencionadas en el marco teórico y por las consideraciones destacadas en Cruz y Mantica (2017), es un complemento que los estudiantes están acostumbrados a emplear en instancias de formulación y validación de afirmaciones y deben poner en juego conceptos y propiedades geométricas

1. La tarea se diseña en el marco de un trabajo colaborativo entre las investigadoras y la profesora Marcela Götte.

al realizar construcciones. Es de destacar que se considera valioso que los estudiantes empleen el SGD en instancias de formación docente porque el hábito de su uso puede potenciar su empleo en su futura labor docente.

Se registra la información, teniendo el consentimiento de los estudiantes, a través de artefactos escritos, grabaciones en audio y la descripción del SGD con el fin de alcanzar un estudio fiable y válido (Mc Knight, et al., 2000). Se destaca que la herramienta "descripción" posibilita observar cada paso que se lleva a cabo para realizar la construcción. Gutiérrez (2005) destaca que con dicha herramienta se logra conocer la sucesión de pasos llevados a cabo para realizar la construcción y el comando usado en cada uno de ellos.

ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

Se presenta el análisis del trabajo que realizan los dos estudiantes que participan de la experiencia, Bartolo (B) y José (J). Los nombres empleados son pseudónimos con el fin de preservar la identidad de los sujetos. Se utiliza letra cursiva (itálica) para expresar las transcripciones textuales obtenidas del audio[2]. Se realiza el análisis, en una primera instancia de las interacciones de los estudiantes en la resolución de la situación, en una segunda de la exposición de su resolución frente a las docentes de la asignatura en la que explican y fundamentan su proceso de resolución. En esta última instancia se aprecian intervenciones de las docentes, P y M, invitando a los estudiantes a validar sus conjeturas a partir de propiedades disponibles.

Análisis de las interacciones entre los estudiantes

Los estudiantes comienzan el proceso de resolución utilizando el SGD *Cabri 3D*. En un primer momento José intenta ubicar los vértices del rombo en la zona de trabajo y "supone" que los puntos se encuentran en un plano sin considerar que si la figura es paralelogramo (por ser rombo) deben ser los cuatro vértices coplanares. En este sentido es de destacar que en esta primera instancia utilizan la intuición y no apoyan esta afirmación en propiedades y métodos geométricos trabajados en la asignatura.

—*B: Construir los rombos A, B, C, D…* [Refiere a los rombos dado que el problema solicita construir los rombos][3]

—*J: Ah, ¡sí! Ya está… para…*

—*B: ¿B quién es?*

—*J: No dice pero supongo que son puntos del plano.*

En la descripción de la construcción se aprecia que José utiliza la herramienta "paralela" para determinar un plano paralelo al de base por un punto exterior a él. Denomina

2. Los diálogos se expresan en variedad dialectal del español rioplatense.

3. En el texto las expresiones entre corchetes seguidas a las transcripciones textuales de los audios responden a interpretaciones de los investigadores.

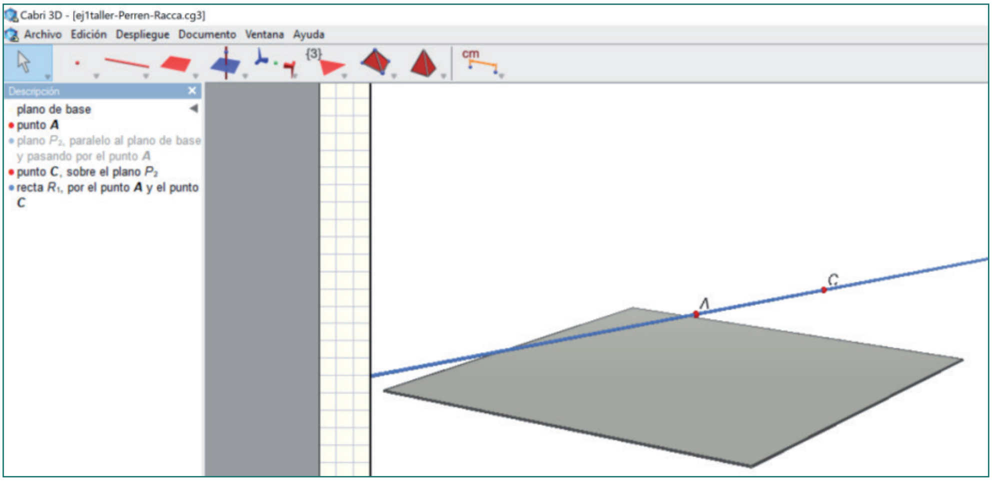

Figura 1. Construcción de la recta AC en Cabri 3D.

A al punto exterior y C otro punto cualquiera en el mismo plano. Posteriormente traza la recta que contiene a los puntos A y C y oculta el plano. Las acciones que ejecuta el estudiante corresponden a lo solicitado en la consigna. Pone en juego el concepto de recta paralela a un plano dado y utiliza la propiedad que afirma que toda recta contenida en un plano paralelo a uno dado es paralela al mismo (sin explicitarla). Se destaca que en la asignatura GEE se define recta paralela a un plano como aquella que no tiene puntos en común con él. Como se menciona anteriormente es habitual el uso de *Cabri 3D* en las clases y por tanto los estudiantes conocen que este software no tiene una herramienta que permita construir una recta paralela a un plano.

Durante este momento de la construcción en el audio se aprecia que José explicita oralmente a Bartolo los procedimientos que lleva a cabo, se considera que la interacción produce limitaciones, dado que uno de los estudiantes asume la dirección de la resolución y el otro acata sin intervenir y cuestionar. La docente a cargo de la asignatura GEE confirma que José es un estudiante intuitivo y extrovertido dando respuestas inmediatas, sin realizar un análisis profundo de lo formulado, siendo este posterior a la verificación en el software. En este sentido parece que Bartolo se encuentra apabullado por la actitud de José, dado que necesita realizar un análisis previo para expresar la conjetura; en el audio se aprecia que no realiza intervenciones en este momento de la resolución.

Posteriormente José continúa tomando decisiones respecto a la construcción. Se supone que utiliza las propiedades de diagonales de rombo, dado que realiza un plano perpendicular a la recta AC por el punto medio del segmento AC y determina la recta intersección de este plano con el plano base (plano que se encuentra predeterminado en el software).

Para realizar lo mencionado en primera instancia se aprecia que José explicita que debe representar la recta perpendicular al segmento AC, Bartolo pone a prueba la producción de José, ya que pregunta si lo que traza es un plano perpendicular a la recta por el punto medio del segmento AC. En este sentido, es de destacar que Bartolo pone en juego

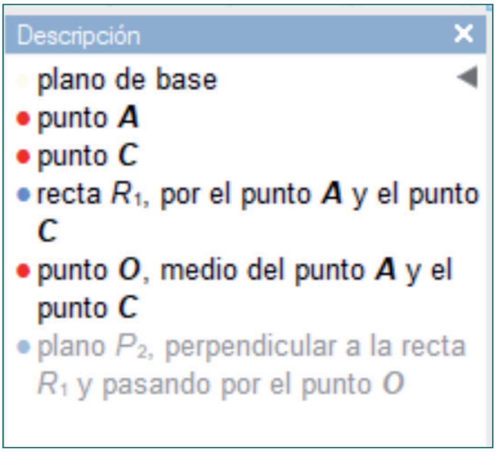

Figura 2. Descripción propuesta por el SGD.

un concepto de la geometría tridimensional, dado que por un punto de una recta pasan infinitas perpendiculares a ella incluidas en un plano perpendicular a la recta. José visualiza la representación en el plano (pantalla de la computadora). Como plantean Arcavi y Hadas (2000) la visualización que posibilita el SGD brinda bases intuitivas que potencian en este caso el interrogante de Bartolo, detonante de la formulación y validación de la conjetura formulada por José.

En caso que no se produjera la intervención de Bartolo la construcción no hubiera sido posible con el software, dado que no construye una recta perpendicular a otra por un punto en el espacio tridimensional por no ser única la recta. Al ejecutar las opciones propone como puede verse en "descripción" la utilización de plano perpendicular a recta por un punto (no construye la recta solicitada y explicita en gris que es posible construir un plano perpendicular al segmento AC por su punto medio). En este caso particular se observa el potencial del SGD, dado que realiza una devolución inesperada, sorprendiendo al estudiante que utiliza erróneamente un concepto. Esto último hubiera detonado en una sorpresa y retroalimentación producida por el SGD (Arcavi y Hadas, 2000).

—*J: Pero hay que buscar el punto medio del AC primero.*

—*B: Punto medio.*

—*J: Acá, punto medio, y la recta perpendicular… ahí está…*

—*B: ¿Le pusiste plano perpendicular a recta?*

—*J: ¿Sabes qué? tendría que, a ver… borrar y poner el plano, en vez de la recta*

—*B: Si, porque después podes sacar más rápido el punto.*

—*J: ¡No! Además hay que buscar un lugar geométrico, así que…*

—*B: Si bueno, dice construir los rombos, LOS* [Remarca que el rombo a construir no es único].

—*J: Si.*

—*B: A, B, C, D tal que B sea un punto de α, hallar el lugar geométrico de D al variar B.*

Los estudiantes asumen el papel de un matemático en la resolución de la situación, dado que como afirma Schoenfeld (2001), controlan la situación con cuidado, siguen pistas interesantes y abandonan los caminos que parecen no conducir a la solución correcta de la tarea; realizan una revisión de lo solicitado por la consigna en varios momentos.

Trazan el plano mediador (perpendicular a AC por O) del segmento AC, al respecto se considera que utilizan que las diagonales del rombo son perpendiculares y se cortan en su punto medio, a pesar de no explicitarlo. Determinan la recta intersección del plano de

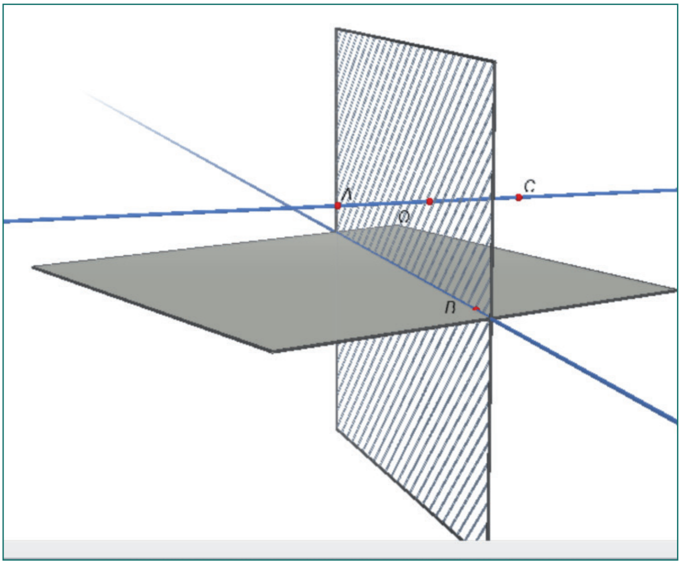

Imagen 3: Construcción del vértice B en Cabri 3D.

base con el plano mediador y consideran B un punto cualquiera de dicha recta (llámese b). Hasta el momento determinan 3 vértices del rombo.

—*J: Y tiene que ser una recta perpendicular a esta y paralela al plano, porque tiene que conservar esta distancia, es decir, esto es una simetría central, entonces la recta tiene que ser paralela a esta de acá abajo, o sea, va a ser paralela al plano.* [Refiere a que la recta que contiene al vértice D se encuentra en una recta ortogonal[4] a la recta AC y paralela al plano base y a la recta b]

—*B: Si, van a ser paralelas seguro.* [Refiere a que la recta que contiene al vértice B es paralela a la recta que contiene al vértice D]

—*J: Y además como este plano es perpendicular esto* [Segmento AC] *la recta va a ser perpendicular a este, ehh… ortogonal.* [Refiere a que la recta AC será ortogonal a la recta que contiene a D]

Si bien José no hace explícitas las propiedades de rombo para justificar la construcción, en un momento determinado, necesita volver a la definición de rombo y se la pregunta a Bartolo. En el texto se hace referencia a un trabajo individual, dado que Bartolo acepta lo propuesto por José y se limita a repetir lo que este dice y a intentar responder sus interrogantes. En general no formula conjeturas.

Se considera que José necesita hacer visible la imagen que tiene de rombo y para ello pregunta por la definición. En el diálogo cuando Bartolo explicita características de esta figura geométrica, José rápidamente e interrumpiéndolo afirma “ya está”. Parece que recupera la imagen asociada a rombo que le permite continuar con la resolución de la tarea.

4. Se toma la definición que se utiliza en la asignatura GEE: Dos rectas son ortogonales sí y sólo sí por una de ellas se puede trazar un plano perpendicular a la otra.

Fischbein (1993) afirma que cuando se imagina una figura geométrica particular se hace pensando en una figura dibujada y no en la figura matemática que es el objeto del razonamiento matemático. Hasta el momento utiliza propiedades de rombo sin trabajar con la noción de concepto figural de rombo que implica, como sostiene el autor, la fusión de la imagen y el concepto.

—*J: ¿Qué era un rombo che? , no me acuerdo… decime la definición*

—*B: Y… tenían los cuatro lados iguales… era como un…*

—*J: Ah… bien… si, ¡ya se cual es!, ¡Ya está! Un punto sobre la recta… este va a ser el punto.*

—*B: El punto B de α.*

Determinan el homólogo del punto B utilizando simetría central con centro en el punto medio del segmento AC, denominándolo D. Trazan una recta paralela a la recta b (contiene a B) por D.

—*J: Al otro hay que hacerlo simétrico, una simetría central.*

—*B: Sí.*

—*J: Simetría central, tengo que poner primero el centro, ayuda… imagen del centro O… listo… al revés.* [Refiere a la ayuda que brinda el software respecto del uso de un comando determinado]

—*B: Tendrías que poner el centro y después… el punto.*

—*J: ¿Cuál es?*

—*B: El punto D.*

Finalmente determinan con la herramienta “polígono” el rombo de vértices ABCD. Con la construcción realizada los alumnos consideran que han encontrado el lugar geométrico solicitado en la situación.

—*B: Hallar el lugar geométrico de D al variar B.*

—*J: Bueno, ya lo hicimos pero hay que escribirlo.*

—*B: Sí, ¿hay que escribirlo al lugar geométrico?*

—*P: Si.*

—*J: En una hoja… ¿hay que justificarlo también? podemos justificarlo pero…*

—*B: O escribimos la construcción*

—*J: Claro, ¿la construcción también hay que escribirla? El por qué decimos que es así.*

—*P: Todo lo que ustedes quieran…*

—*J: Lo que sea necesario.*

—*P: Lo que a ustedes les parezca necesario.*

Los estudiantes no manifiestan explícitamente la necesidad de escribir la conjetura con la rigurosidad de una propiedad o teorema matemático y validarla. Recurren a la profesora para que les confirme que deben llevar a cabo estas actividades propias del quehacer matemático a pesar de que habitualmente lo realizan por ser alumnos avanzados del Profesorado en Matemática. Pareciera que lo devuelto por el SGD influye en la decisión acerca de la validación de su conjetura, no tienen en cuenta que a pesar de la evidencia

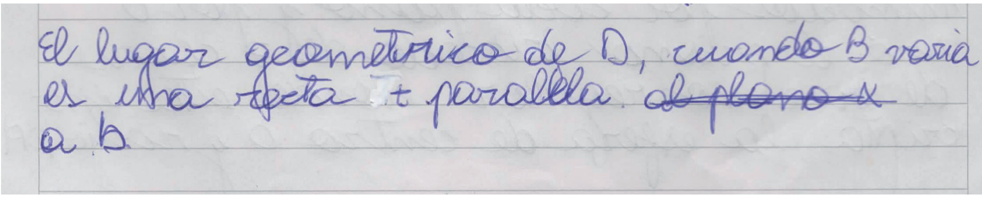
El lugar geométrico de D, cuando B varía
es una recta t paralela ~~al plano α~~
a b.

Figura 4. Conjetura establecida[5].

que les devuelve el software las normas sociomatemáticas establecen que es necesaria la puesta en juego de una prueba (Hershkowitz y Schwarz, 1997, citado en Villarreal 2004).

La docente en ese momento les devuelve la responsabilidad a los estudiantes con el fin de que ellos tomen la decisión de explicitar la conjetura y realizar una validación formal. Brousseau (2007) afirma que la devolución se produce cuando el docente no explicita la respuesta que espera, sino que otorga la responsabilidad de que tomen decisiones por sus propios medios.

Finalmente escriben de modo formal la conjetura establecida. Esto puede deberse a que en el desarrollo de la asignatura se escriben formalmente las conjeturas y demostraciones y este es un trabajo de evaluación. Se aprecia que en la conjetura se da por supuesto que la recta (t) que describe D es paralela a la recta b, y no se justifica esto utilizando la propiedad de simetría central (la simétrica de una recta que no pasa por el centro de simetría es una paralela a ella).

Análisis de la defensa del trabajo realizado.

Esta instancia se realiza especialmente para que la intervención docente potencie la validación de afirmaciones por parte de los estudiantes recurriendo a propiedades. Ateniendo a lo planteado en documentos curriculares vigentes en Argentina respecto a la formación docente que consideran necesaria la validación de propiedades geométricas.

Barolo toma la iniciativa de explicar el modo en que comenzaron la construcción en el SGD, sin embargo José necesita reafirmar lo planteado por el par. Nuevamente se aprecia la necesidad de José de ser el protagonista de la situación. En la continuidad del diálogo se nota esta actitud constante del estudiante.

—*B: Trazamos la paralela. Sería un punto en el espacio y después trazamos el plano paralelo a α y después trazamos la recta.*

—*J: Para la paralela primero trazamos un plano paralelo y después en el plano paralelo la recta.*

—José utiliza un lenguaje más riguroso que Bartolo en la exposición. Posteriormente explican el modo en que determinan la recta paralela al plano y los vértices A y C de la diagonal y del rombo.

5. El lugar geométrico de B, cuando D varía es una recta t paralela a b.

—*B: Después el punto medio del segmento AC (...) O, y trazamos.*
—*P: ¿Pedía la consigna el punto medio?*
—*J: No, no… lo trazamos porque determinamos el plano perpendicular a la recta por O.*
—*M: ¿Por qué?*
—*J: Perpendicular a la recta por O, por eso buscamos O.*
—*P: ¿Por qué por O?, es decir, ¿por qué por el punto medio y no por otro?*
—*J: Por el punto medio para que esta sea… está explicado en el texto…*
—*P: ¿Por qué trazaron el plano perpendicular?*
—*J: Ah… está buena esa pregunta…*
—*P: Por algo lo trazaron…*

Los estudiantes no responden explícitamente la pregunta del docente que exige explicitar propiedades de las diagonales del rombo. No logran validar formalmente la decisión respecto de por qué es necesario considerar el punto medio del segmento AC y el plano perpendicular a dicho segmento. Explican el modo en el que determinan la recta b.

José manifiesta que la explicación se encuentra en el texto escrito, sin embargo, se aprecia una ausencia de validación formal, dado que en la imagen 5 que se presenta se muestra que en el texto expresan lo mismo que en la exposición oral.

Imagen 5: Texto escrito por los estudiantes.[6]

Se menciona en la interpretación del diálogo y del análisis de la descripción del software que emplean propiedades de cuadriláteros, no obstante, no las explicitan y pareciera que lo realizan en forma intuitiva. Alsina, Burgués y Fortuny (1999) destacan la existencia de dos modos diferentes de comprensión y expresión del conocimiento en el dominio de la geometría tridimensional. El conocimiento geométrico intuitivo se logra de modo directo y visual y el conocimiento geométrico reflexivo se logra empleando la lógica. Generalmente el inicio del estudio geométrico se realiza a través de la intuición geométrica, sin embargo ambos tipos de conocimientos son complementarios y necesarios en el desarrollo de este tipo de pensamiento.

Los estudiantes oralmente explican el modo en que realizan la construcción del rombo. Determinan que el vértice B del rombo debe estar en la recta ortogonal a la que contiene a AC, sin realizar una fundamentación matemática para afirmar esta conjetura. Posteriormente determinan el vértice D como el simétrico de B respecto de O. Finalmente afirman que los cuatro vértices se encuentran en un plano utilizando propiedades de simetría.

La docente interviene preguntando si determinaron el lugar geométrico que solicita la consigna. José afirma que la construcción les permite probar que el cuadrilátero construido es un rombo, dado que los cuatro vértices son coplanares y los cuatro lados son iguales. Utiliza que las diagonales son perpendiculares, puesto que la construcción es realizada de este modo; sin embargo, no lo explicita como condición para afirmar que la figura es un rombo.

6. Sea el segmento AC. Sea O el punto medio de AC. Trazamos el plano β perpendicular a la recta r (recta AC). Trazamos la intersección de los planos α y β. Sea αβ=b. Sea Bb.

—*J: Para comprobar que las longitudes son iguales, después encontramos que los cuatro puntos están en el mismo plano. Entonces están en el mismo plano y las distancias son las mismas, es un rombo.* [Refiere a que los lados del cuadrilátero tienen longitudes iguales]

Los estudiantes prueban que la figura obtenida es un rombo utilizando propiedades disponibles, a pesar de no explicitarlas siempre. No responden del mismo modo para probar lo que la consigna solicita que es el lugar geométrico (LG) obtenido, a pesar que lograron conjeturarlo.

Bartolo manifiesta que sin realizar el arrastre del punto B sobre la recta b utilizando el SGD no hubiera logrado determinar el LG, por el contrario, José afirma que al leer la consigna logra visualizar la situación y determina que el LG es la recta paralela a b.

—*B: Y después las paralelas, el lugar geométrico.*
—*J: Ah… el lugar geométrico es la paralela a esta recta acá.*
—*M: ¿Cómo encontraron ese lugar geométrico?*
—*J: Lo habíamos propuesto sin el software primero.*
—*B: Así de pensarlo sin el software capaz que a mí no me salía.*
—*J: Pero es…*
—*P: ¿En qué te ayudo el software para saber que el lugar geométrico es una recta?*
—*B: Claro, y después ir moviendo…*
—*P: ¿Qué movieron?*
—*B: El punto B, en la recta que teníamos B entonces te ibas dando cuenta que ibas trazando una recta.*
—*M: ¿Usaron traza?*
—*B: No, no*
—*J: Yo tenía en mente que era esa, después la marcamos.*

La docente interviene para solicitar una explicación acerca del LG obtenido, dado que como se plantea anteriormente los estudiantes lo determinan de diferente modo. Bartolo desplazando el punto sobre la recta b visualiza que el mismo se mueve sobre la recta paralela, José no necesita realizar el arrastre del punto, porque como manifiesta, logra visualizarlo sin necesidad de realizar la construcción.

—*M: ¿Por qué la recta paralela es el lugar geométrico solicitado?*
—*J: Bueno… primero son paralelas…están en el mismo plano.*
—*B: Están en el plano perpendicular a α, que pasa por O*
—*J: Está ahí porque así lo construimos y esto está acá por la simetría.*
—*M: Pero, ¿por qué se dieron cuenta que ese era el lugar geométrico?*
—*B: Movimos…*
—*A: ¿Qué movieron?*
—*B: El punto B, íbamos mirando como el D se desplazaba. Porque yo para el lugar geométrico sino solo así tenía el punto D y después sacar la recta paralela no se me hubiera ocurrido, no se me venía a la mente nunca, entonces moviendo el punto B iba mirando que iba pasando.*

La docente solicita a los estudiantes una validación de la conjetura establecida, no obstante, no se hacen cargo de la responsabilidad que les otorga la misma. Validan formalmente su construcción pero no su conjetura. Las propiedades de lados y diagonales del rombo (utilizadas de manera intuitiva) son suficientes para determinar que las rectas son paralelas. Esto último puede deberse a que no disponen los conocimientos que permiten fundamentar la decisión o porque no lo consideran necesario debido a la visualización en el SGD. A partir del análisis presentado se considera que para los estudiantes la visualización (Bartolo) o la intuición (José) son suficientes para determinar la propiedad geométrica.

CONCLUSIONES

Ateniendo al objetivo propuesto en la presente investigación y el análisis presentado se afirma que el lugar que otorgan los estudiantes a la actividad matemática de conjeturar cuando emplean *Cabri 3D* es diferente en José y Bartolo. Bartolo considera necesario realizar la construcción geométrica en el SGD para establecer la conjetura y manifiesta que no hubiera podido determinarla sin el mismo. José no lo emplea para establecer la conjetura, visualiza el lugar geométrico a determinar y lo construye con el SGD para cumplir con lo solicitado para la aprobación del taller.

En función de la representación realizada principalmente por José, Bartolo desplaza el punto B (en la recta b) y observa que D se mueve sobre la recta paralela a b. Este último utiliza el software para afirmar la conjetura, sin embargo obtiene el LG desde la visualización influenciada por la conjetura de su par. Se aprecia que no utiliza las herramientas que le ofrece para obtener el lugar geométrico, por ejemplo "trayectoria". Al variar el punto lo que se observa en la pantalla es que la sucesión de ellos "parecen" estar alineados. No obstante podría ocurrir que fuera de lo que se visualiza en la pantalla los puntos describan otro lugar geométrico.

Los estudiantes, como se menciona anteriormente, utilizan el arrastre para observar que el punto se desplaza sobre la recta representada (que consideran como LG). Laborde (1996, 2015) destaca la importancia del empleo del mismo en la visualización de la variabilidad de elementos geométricos y su potencial para determinar el dominio de validación de la conjetura.

En relación con los aspectos del quehacer matemático potenciados con el uso del SGD en la resolución de tareas geométricas, plateados por Arcavi y Hadas (2000), se destaca que la visualización y la experimentación se emplean por los estudiantes y en momentos perjudica la puesta en juego de validaciones formales. La sorpresa y la retroalimentación se opacan, en este caso, por la interacción entre pares, no obstante de no mediar el debate entre ellos el SGD en situaciones hubiera generado diferencias con respecto a las predicciones que explícitamente plantean.

En el texto escrito los estudiantes realizan un análisis del proceso de construcción del rombo y en momentos validan sus decisiones a pesar de no expresar siempre las propiedades geométricas empleadas. No proceden de modo análogo al probar el lugar geométrico. Villarreal (2004) sostiene que en momentos los resultados obtenidos con el empleo del SGD potencian validaciones formales, dado que al utilizarlo deben poner en juego propiedades geométricas para realizar la construcción, estas podrían emplearse para fundamentar las afirmaciones establecidas. En este caso particular, la evidencia que muestra el SGD respecto al lugar geométrico es una limitación para la producción de una validación matemática formal.

En relación con los niveles de argumentación mencionados en Benitez Mojica (2006) se aprecia que logran el reconocimiento visual y la prueba de arrastre, sin embargo no alcanzan una prueba matemática formal en lápiz y papel de la conjetura establecida. En concordancia con lo planteado por el autor se destaca en el presente escrito la peligrosidad de la utilización del SGD como prueba de demostración.

Se considera interesante realizar investigaciones futuras en las que se diseñen problemas que potencien las diferencias entre las devoluciones que brinda la pantalla de la computadora (SGD) y las conjeturas establecidas. De modo tal que las "sorpresas" de los estudiantes fomenten las validaciones que se ponen en juego.

Una limitación de la investigación es que los estudiantes que participan de la propuesta son los que logran la superación previa de un examen en el que se ponen en juego nociones de la geometría tridimensional, por lo que no es posible prever respuestas de diversos estudiantes que se encuentran cursando la asignatura.

Los sujetos de estudio pusieron de manifiesto diversas cuestiones que se mencionan en el marco de referencia como la posibilidad de lograr retroalimentación con el SGD, el empleo de la visualización como un factor que puede potenciar la formulación de conjeturas pero limitar la puesta en juego de procesos de validación, la no utilización del recurso "traza", entre otros.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1999). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid: Síntesis

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* (5), (pp. 25-45). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente.

Benitez Mojica, D. (2006). Resolución de problemas de cónicas con el apoyo de la geometría dinámica. En J. Luna; C.J. Luque; A. Oostra; J.H. Pérez y C. Ruiz. (Eds.), *Memorias del XVI encuentro de geometría y IV de aritmética* (pp. 77-88). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación a estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Zorzal.

Burgos Navarro, M. y Flores Martínez, P. (2017). Reflexión sobre la práctica del profesor de matemáticas en la enseñanza de las funciones. *Épsilon*. 97, 65-74.

Cruz, M.F y Mantica A.M. (2017). El uso del software de geometría dinámica en la formulación y validación de conjeturas. *UNIÓN.* 51 (3). 69-82.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (2). 139-162.

Gómez-Chacón, I. y Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Relime*. 17 (4 II). 361-383.

Gómez-Chacón, I., Botana, F., Escribano, J., y Abánades, M.Á. (2016). Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. *Bolema*. 30 (54). 67-94

Gutierrez, A. (2005) Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometria dinámica. A. Maz Machado; B. Gómez Alfonso y M. Torralbo Rodríguez (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*. (pp. 27-46). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015): Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional, *PNA, 9*(2), 53-83.

Itzcovich, H. (Ed.). (2007). *La matemática escolar.* Buenos Aires: Aique.

Kazez, R. (2009). Los estudios de casos y el problema de la selección de la muestra: aportes del sistema de matrices de datos. *Subjetividad y procesos cognitivos*, 13(1), 71-89.

Laborde, C. (1996). Cabrí-Geómetre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig y J. Calderón (eds.). *Investigación y didáctica de las matemáticas*. (pp. 67-85). Madrid: MEC-CIDE.

— (2015). *Matemática con Tecnología. Entrevista Colette Laborde*. Recuperado el 12 de julio de 2017 de https://www.youtube.com/watch?v=1vqJ1OOJMU0

Mc Knight, C., Magid, T. M. yMc Knigt, M- (2000). *Mathematics Education Research: A Guide for the Research Mathematician*. Rhode Island: American Mathematical Society.

Ministerio de Educación Ciencia y Tecnología. (2011). NAP. Tercer ciclo. Disponible en: https://www.educ.ar/recursos/110570/nap-secundaria-matematica

Ministerio de Educación. (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Áreas: Biología, Física, Matemática y Química. Disponible en: https://cedoc.infd.edu.ar/upload/Matematica.pdf

Quaranta, M. y Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza (Comp.). *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas* (pp. 189-243). Buenos Aires: Paidós.

Schoenfeld, A. (2001). La enseñanza del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En L. Resnik y L. Klopfer (Comp). *Currículo y cognición* (pp. 141-170). Buenos Aires: Aique.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Morata.

Villarreal, M. (2004). Transformaciones que las Tecnologías de la Información y la Comunicación traen para la Educación Matemática. *Yupana* 1 (04), 41-55.