Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2017, nº 96, 7-22*

El Tratado de Geometría Analítica de Juan Cortázar a través de sus ediciones

Carmen León-Mantero
Universidad de Córdoba
María José Madrid
Universidad Pontificia de Salamanca
Dicleny Castro
Universidad del Tolima

Resumen: *En las últimas décadas, los investigadores en Historia de la Educación Matemática han centrado su interés en el estudio de los manuales escolares, debido a que su análisis manifiesta los conocimientos científicos de la época, los conocimientos que se impartían en los centros y cómo se enseñaban, así como el modelo organizativo del plan de estudios vigente. El presente estudio analiza una de las obras del autor del siglo XIX, Juan Cortázar, el Tratado de Geometría Analítica, publicada por primera vez en 1855 y reeditada en cuatro ocasiones más. Se realizó un análisis de contenido que mostró la estructura conceptual de la obra, así como los cambios sufridos a través de las dos primeras ediciones publicadas. Para ello se atendió a los contenidos que incluyen y los ejemplos, ejercicios y problemas propuestos.*
Palabras clave: *libros de texto, análisis de contenido, libros antiguos, Juan Cortázar, Geometría.*

The Tratado de Geometría Analítica written by Juan Cortázar through its editions

Abstract: *During the past decades, researchers on History of Mathematics Education have focused their interest in the study of textbooks, because their analysis shows the scientific knowledge of the time, the knowledge that was given in the schools and how they were taught, as well as the organizational model of the curriculum. The present study analyzes one of the textbooks written by the 19th century author, Juan Cortazar, the Treaty of Analytical Geometry, published in 1855 and reprinting four more times. It has been made a content analysis that showed the conceptual structure of the textbook, as well as*

the changes undergone through the first two published editions. To do so, the contents included and the examples, exercises and problems proposed were considered.
Keywords: *textbooks, content analysis, old textbooks Juan Cortázar, Geometry.*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones realizadas dentro del campo de estudio de la Historia de la Educación matemática analizan la evolución histórica de los conceptos matemáticos, aquellos aspectos que permitan conocer las razones por las cuáles estos adquirieron su significado actual, así como los cambios que ha sufrido la enseñanza de la disciplina tras las sucesivas incorporaciones de avances científicos.

En este sentido, el análisis de libros de texto, que han sido herramientas fundamentales en la escuela, proporcionando soporte a alumnos y profesores y, estableciendo los escasos registros de información que han llegado hasta nuestros días, nos da acceso al conocimiento científico y académico de la época. (Maz-Machado y Rico, 2015).

A través de las numerosas publicaciones realizadas en este campo, se deduce el creciente interés de los investigadores, que toman al libro de texto como fuente documental y los analizan para determinar el tratamiento dado a conceptos y disciplinas matemáticas (Beyer, 2006; Frejd, 2013; Schubring, 1988). A nivel nacional encontramos estudios que analizan los distintos métodos usados en la historia para el cálculo mental (Gómez, 1995), la historia de las ideas algebraicas a través del texto *De Numeris Datis* (Puig, 1994), el concepto de continuidad en los manuales de segunda enseñanza de la segunda mitad del siglo XX (Sierra, González y López, 2003), la evolución de los números negativos en los textos publicados en el siglo XVII y XIX (Maz, 2005) o los contenidos matemáticos y didácticos de los libros de Aritmética publicados en castellano en el siglo XVI (Madrid, 2016).

El objetivo del presente estudio es analizar la estructura conceptual de la más tardía de las obras del ingeniero Juan Cortázar, el *Tratado de Geometría analítica*, publicada por primera vez en 1855, así como los cambios sufridos a través de las dos primeras ediciones, caracterizadas por haber sido publicadas en el contexto de dos planes de estudio diferentes.

La relevancia de este estudio se manifiesta por tratarse de uno de los autores de manuales escolares que mayor influencia tuvo en la difusión y constitución de las matemáticas escolares en España y la formación matemática de varias generaciones de españoles durante la segunda mitad del siglo XIX. Sus obras fueron reeditadas en 150 ocasiones y llegaron al medio millón de ejemplares vendidos, incluso fueron traducidas y publicadas sin la autorización de su autor en París y Nueva York (García, 1984).

Desde el año 1846, y de forma escalonada en el tiempo, los tratados elementales de Cortázar - *Aritmética, Algebra, Geometría, Trigonometría y Topografía* - comenzaron a ser elegidos para formar parte de la lista oficial de libros de texto a usar en Universidades, Institutos y Escuelas Profesionales que el Estado publicaba periódicamente. Asimismo, los tratados superiores, Álgebra superior y *Geometría analítica* aparecieron en las listas oficiales para las Facultades, Escuelas Superiores y Profesionales a partir del año 1856 (Vea y Velamazán, 2011).

Su producción abarca un amplio número de temas, para todos los ámbitos de las matemáticas y para todas las etapas educativas, desde la educación Primaria hasta la

Superior y Técnica. Incluso publica la obra *Memoria para el cálculo del interés*, cuyo objetivo fue el de instruir a las personas que no tenían conocimientos de álgebra, en el cálculo de intereses y descuentos y así, evitar que fueran engañados al firmar este tipo de contratos. Además de la publicación de sus tratados, Cortázar es autor de obras incompletas inéditas, como son los *apuntes de Cálculo infinitesimal, Mecánica racional, Cosmografía y Lógica matemática* (Irueste, 1912).

METODOLOGÍA

Este estudio está enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico, en el cual se realiza un análisis de contenido focalizado en la estructura conceptual de los contenidos matemáticos incluidos en él y que está basado en anteriores investigaciones que usan una metodología similar (Maz, 2005; Madrid, 2016).

Para ello se fijaron las siguientes unidades de análisis:

- La introducción y el prólogo, en los cuales el autor señala a quienes estaban dirigidas, el propósito de las obras y la secuenciación y justificación de contenidos propuestos con respecto a obras contemporáneas.
- Las definiciones, los ejercicios, los ejemplos, los problemas y las actividades que se incluyen en cada obra. Asimismo, el propio planteamiento de cada obra.
- Las notas incluidas tras cada uno de los bloques de contenido, que incluyen sugerencias y propuestas metodológicas, así como materiales manipulativos recomendados, para que el alumno optimice su trabajo y alcance los conocimientos requeridos en el correspondiente nivel educativo.
- Los anexos, en los que se incluyen láminas con representaciones gráficas, que sirven de apoyo a las explicaciones y demostraciones de resultados y teoremas principales.

Asimismo, se establecieron dos periodos históricos diferentes caracterizados por la implantación de los dos planes de estudio más influyentes del siglo XIX, para realizar una adecuada contextualización social y académica del tratado. Estos periodos son:

- PERIODO 1: Desde la implantación del Plan Pidal en 1845 hasta la implantación del Plan Moyano en 1857.
- PERIODO 2: Desde la implantación del Plan Moyano hasta la muerte de Juan Cortázar en 1873.

A continuación, fueron seleccionadas dos de las ediciones del tratado para su análisis, cada una de ellas escrita en un periodo diferente y en base a los siguientes criterios de selección:

- Que el autor fuese Juan de Cortázar o haya sido publicada antes de 1873, eliminando por tanto de la muestra, las ediciones corregidas y editadas tras su muerte por su hijo Daniel.
- Que la obra estuviera disponible, seleccionando una muestra intencional y por conveniencia de las obras que sí fueron publicadas y que en la actualidad no tienen acceso restringido.

- Que los textos hubieran sido publicados en España y en español, eliminando así, los textos que fueron traducidos y publicados en Nueva York y París ilegalmente, sin la supervisión de Cortázar.

Las ediciones elegidas para su análisis fueron:

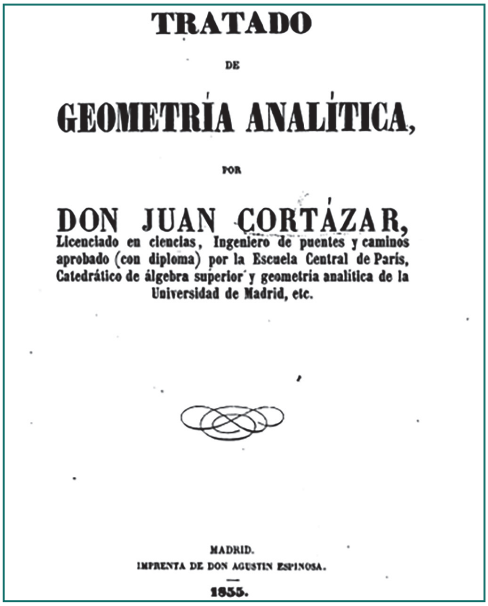
- Cortázar, J. (1855). *Tratado de Geometría analítica*. Primera edición. Madrid: Imprenta de Don Agustín Espinosa.
- Cortázar, J. (1862). *Tratado de Geometría analítica*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de D.F. Sánchez a cargo de D. Agustín Espinosa.

Posteriormente, se analizó la secuenciación de los contenidos, ejemplos, ejercicios y problemas y se construyó un mapa que recoge los focos conceptuales que se encuentran en cada una de ellas.

RESULTADOS

El *Tratado de Geometría analítica* salió a la luz con su primera edición en 1855 y, la última y quinta edición, se publicó entre los años 1883 y 1892. A partir de la segunda edición, la de 1862, se anuncia en la portada que la obra estaba señalada como libro de texto en las Universidades y Escuelas Superiores. Al igual que el Tratado de Álgebra superior, estaba destinada a los alumnos que cursaban la asignatura Álgebra Superior y Geometría Analítica de la cátedra de Cortázar en la Universidad Central. Apareció periódicamente en las listas oficiales de libros desde 1858 hasta 1868 (Vea y Velamazán, 2011).

En el análisis que realiza su alumno y sucesor Irueste (1912), a las últimas ediciones de las obras, destaca el desarrollo formal de los problemas generales de geometría plana y los del espacio hasta las superficies de segundo orden, aunque se deje constancia en el prólogo que Cortázar no aplicara métodos diferenciales e integrales a la resolución de ejercicios porque no los comprendía. Para Irueste (1912), "La analítica es, quizá, la mejor de todas, dentro del cuadro de la Ciencia de entonces, y sobre todo, de las necesidades de la Facultad, para cuyas tres Secciones eran obligatorios los dos primeros años de Matemáticas superiores" (p. 287).


TRATADO
DE
GEOMETRÍA ANALÍTICA,
POR
DON JUAN CORTÁZAR,
Licenciado en ciencias, Ingeniero de puentes y caminos aprobado (con diploma) por la Escuela Central de Paris, Catedrático de álgebra superior y geometría analítica de la Universidad de Madrid, etc.

MADRID.
IMPRENTA DE DON AGUSTIN ESPINOSA.
1855.

Figura 1. Portada del Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855).

Primera edición

La edición más antigua de la obra fue impresa en Madrid en 1855 por la Imprenta de Agustín Espinosa. El ejemplar analizado está digitalizado por el repositorio Google Books y forma o ha formado parte del British Museum.

La obra tiene 464 páginas, divididas en dos partes: la primera está estructurada en dos libros dedicados a la geometría plana; y la segunda, otros dos libros dedicados a la geometría en el espacio. Los libros están divididos en capítulos, 37 en total y, además incluye al final del tratado, 10 láminas con representaciones gráficas que sirven de apoyo a las demostraciones y resolución de los problemas y, dos notas dedicadas al Teorema de Taylor extendido a las funciones algebraicas de dos y tres variables y a la construcción de las raíces de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con una incógnita o resolución geométrica de estas ecuaciones.

Entre las referencias a otros autores en el texto, se cita a Tolomeo y su teorema sobre las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia y a Euler y sus ecuaciones para transformar las ecuaciones de las superficies de un sistema de ejes rectangulares a otro. También se citan las fórmulas de Descartes desarrolladas en su *Tratado de Álgebra elemental*, como aplicación algebraica a los signos de las raíces de las ecuaciones, pero no en relación con contenidos específicos de la obra. Y, por supuesto, hallamos referencias continuas al resto de tratados de Álgebra superior, *Geometría elemental* y *Trigonometría y Topografía*.

Cortázar incluye en el prólogo de la primera edición el objeto de estudio de la Geometría analítica en comparación con los que incluye esta obra (Tabla 1).

Tabla 1. Tabla comparativa entre el objeto de la Geometría analítica y los contenidos del Tratado de Geometría analítica de Juan Cortázar, 1855.

Objeto de la Geometría analítica	**Objeto de la obra**
Geometría plana **1.** Tangentes **2.** Asíntotas **3.** Centros y diámetros **4.** Semejanza **5.** Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las líneas **6.** Curvatura **7.** Cuadratura **8.** Rectificación	Geometría plana **1.** Tangentes a las curvas algébricas **2.** Asíntotas a las curvas algébricas y trascendentes **3.** Centros y diámetros para curvas de segundo grado **4.** Semejanza para curvas de segundo grado **5.** Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las líneas para curvas de segundo grado
Geometría del espacio **1.** Planos tangentes **2.** Centro y planos diametrales **3.** Semejanza de las superficies **4.** Número de condiciones necesario para determinar algébricamente las superficies **5.** Curvatura **6.** Curvatura de las superficies **7.** Curvatura de los espacios limitados	Geometría del espacio **1.** Planos tangentes para superficies de segundo orden **2.** Centro y planos diametrales para superficies de segundo orden

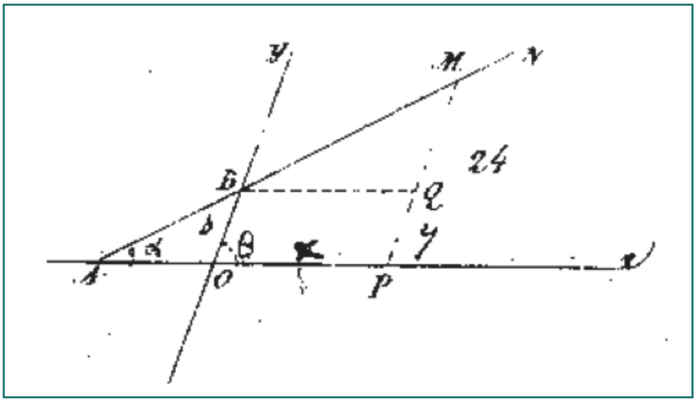


Figura 2. Construcción de la recta en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina II).

El tratado comienza con una introducción previa al estudio de la Geometría analítica. En este se define aplicación del Álgebra a la Geometría elemental o el estudio de la Geometría analítica como, "la ciencia que trata de la resolución de las cuestiones de la geometría elemental por medio del cálculo algébrico ordinario" (p. 1). Esto le lleva a definir la representación algebraica de líneas, superficies y espacios como el producto de los valores numéricos de sus dimensiones y así, poder resolver ejercicios y problemas algebraicamente.

La parte fundamental del tratado comienza con el estudio de la geometría analítica plana, desglosada en el estudio de las ecuaciones de las líneas y el estudio de las líneas de segundo orden. Antes de ello, debe sentar las bases que le permitan determinar un punto cualquiera en un plano. Para ello, define ejes de coordenadas, eje de abscisas, eje de ordenadas y origen de coordenadas. Así, "la posicion de un punto de un plano quedará determinada, con respecto á dos ejes que se hallen en dicho plano, conociendo su abscisa y su ordenada" (p. 54). El estudio de los ejes de coordenadas se realiza en los casos en los que los ejes son perpendiculares entre sí [ejes rectangulares] y, también, en el caso en el que no lo sean [ejes oblicuángulos].

Previo al estudio de las ecuaciones de las líneas, se define lugar geométrico de una ecuación de dos variables como la línea plana correspondiente a la construcción de sus diferentes soluciones. Así, "la ecuacion de una línea es la ecuacion que indica la relacion constante que hay entre las coordenadas de un punto cualquiera de dicha linea" (p. 57). Por tanto, la Geometría analítica plana "es la ciencia que se ocupa del estudio de las líneas planas por métodos generales, representándolas antes por medio de ecuaciones" (p. 57).

A continuación, se explica de forma general el método para hallar los puntos de intersección de dos líneas y los puntos de corte con los ejes de abscisas y ordenadas. Seguidamente se desarrolla el estudio de las ecuaciones de las líneas. En primer lugar, se estudian las ecuaciones de las líneas rectas por medio de los datos suficientes para determinar su posición(Figura 2).

Posteriormente estudia y desarrolla la ecuación de la línea recta en los casos particulares:

- la recta pasa por el origen,
- la recta es paralela al eje de abscisas,
- la recta coincide con el eje de abscisas,

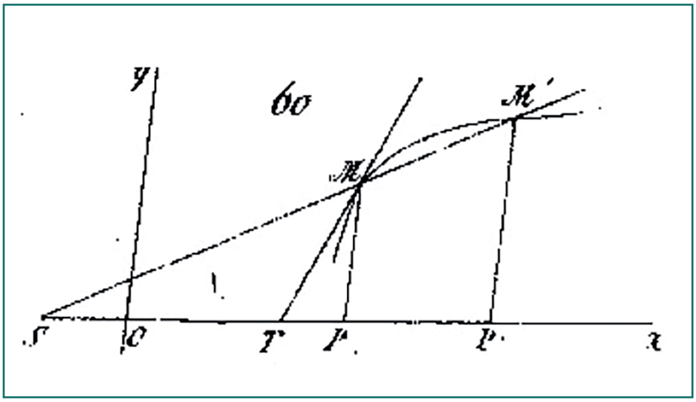


Figura 3. Tangente a una curva en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III).

- la recta es paralela al eje de ordenadas y,
- los ejes de coordenadas son rectangulares, por tanto, Θ=90º y $\frac{(sen\ \alpha)/}{(sen\ (\Theta\text{-}\alpha)} = tg\alpha$.

A continuación analiza la ecuación del círculo comenzando en el caso particular en el que el origen de coordenadas es el centro del círculo y los ejes de coordenadas son rectangulares, para después generalizar el resultado a un punto cualquiera.

En el siguiente apartado se define la elipse como la “curva en la que se verifica que la suma de las dos distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es una cantidad constante” (p. 71); la hipérbola como “una curva en la que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos á dos puntos dados es constante” (p. 73); y la parábola como “la curva en la que se verifica que la distancia de uno cualquiera de sus puntos á un punto dado es igual á la distancia del mismo punto á una recta dada” (p. 75).

Para poder hallar la ecuación de una línea respecto a otro sistema de ejes diferentes, el siguiente capítulo expone la transformación del sistema de coordenadas distinguiendo entre los casos: cambio del origen de coordenadas, siendo los nuevos ejes paralelos a los originales, cambio de la dirección de los ejes de coordenadas, sin variar el origen y cambios del eje y origen de coordenadas. Al final del capítulo, se aporta un ejemplo concreto en el que se debe hallar la ecuación de una circunferencia respecto a los ejes rectangulares, dada su ecuación con respecto a los ejes oblicuángulos.

En los siguientes capítulos se expone la clasificación de las líneas planas, en particular las líneas planas algebraicas, cuya ecuación general es $f(x,y) = Ay^m + (Bx+C)\ y^{m-1} + (Dx^2 + Ex+F)\ y^{m-2} + \dots +(ax^m + bx^{m-1} + \dots + k) = 0$. Por otro lado, se realiza el estudio de las de primer orden, que corresponden a las líneas rectas; se resuelve una relación de ejercicios correspondientes a las líneas rectas y se aplican sus propiedades a varias demostraciones de teoremas de geometría elemental. Los ejercicios que se aportan son de tipo:

- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo las coordenadas de uno de sus puntos y su dirección.
- Cálculo de la ecuación de la recta conociendo dos de sus puntos.
- Cálculo de la ecuación de la recta perpendicular a una dada, conocido uno de sus puntos.

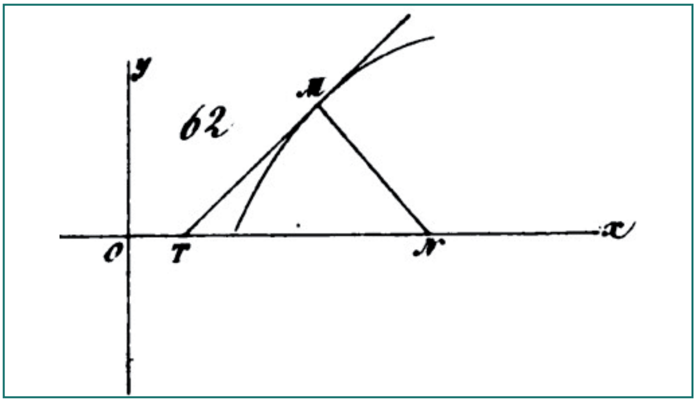


Figura 4. Ecuación normal en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III)

- Cálculo de la distancia entre dos puntos dados.
- Cálculo de la distancia entre un punto dado y una recta conocida.

En los primeros capítulos del siguiente libro, se definen los conceptos de tangente y asíntota de las curvas planas algebraicas (Figura 3).

Posteriormente se estudian dos casos particulares. El primero de ellos parte de la hipótesis de que la curva tiene la forma y=f(x); el segundo estudia las curvas de segundo grado. Por último, se aportan los enunciados y resolución de algunos problemas relativos al cálculo de las ecuaciones de las tangentes. Los objetivos de los problemas se clasifican en:

- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación por un punto dado que pertenece a la curva.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce su ecuación y la posición de los ejes de coordenadas por un punto dado.
- Cálculo de la ecuación tangente a una curva de la que se conoce la dirección de la tangente.

Asimismo, se estudia el problema del cálculo de ecuaciones normales a una curva, entendiendo por normal a una curva (Figura 4)

La obra continua con el estudio de las asíntotas de una curva, a las que define de la forma, pero en contraposición al caso de las tangentes, el estudio de las asíntotas se realiza de forma general, tanto para curvas algebraicas como trascendentes (Figura 5). Se distinguen los siguientes casos:

- Las asíntotas no son paralelas al eje de ordenadas, en el que las ecuaciones de las asíntotas serán $y = cx + d$, siendo c "el valor que toma $\frac{y}{x}$ cuando $x = \pm\infty$" (p. 123) y siendo d "el valor que toma $y - cx$ cuando $x = \pm\infty$" (p. 123).
- Las asíntotas paralelas al eje de ordenadas, en el que basta con calcular las asíntotas paralelas al eje de abscisas, tomando $x = cy + d$ análogamente al caso anterior.

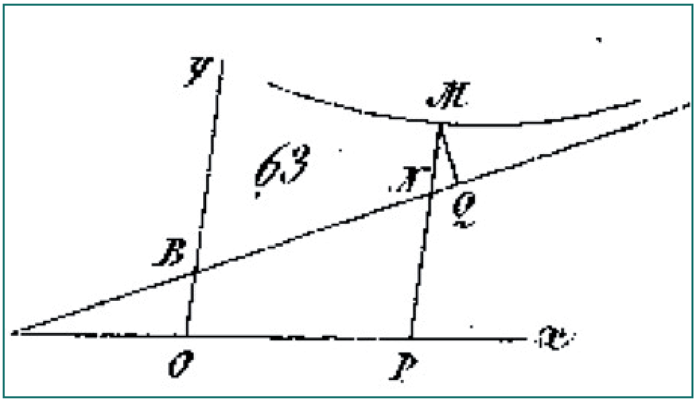


Figura 5. Asíntotas de las curvas en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina III)

Para facilitar el cálculo de las asíntotas, se aporta un algoritmo de cálculo que reduce los cálculos y el tiempo de resolución. Por último, se aportan numerosos ejemplos que presentan las diferentes situaciones que los alumnos pueden encontrar a la hora de calcular las asíntotas de las curvas.

En el siguiente capítulo se discute la ecuación de segundo grado $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$, es decir, se determinan "las diferentes líneas que esta ecuacion puede representar segun los valores de los coeficientes" (p. 147) y se hallan las formas que tienen dichas líneas. Esta explicación es complementada con numerosos ejemplos.

En particular, se estudian con detenimiento, a través de sus ecuaciones, las teorías de las tres curvas de segundo grado: elipse, parábola e hipérbola. Previamente, se reduce la ecuación general de cada curva a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares y trasladando el centro de la curva al origen de coordenadas.

En las tres teorías se estudia de manera análoga:

- El valor de los coeficientes de las ecuaciones reducidas. En el caso de la elipse y la hipérbola con respecto a sus ejes y en la parábola, con respecto a su eje y vértice.
- La construcción de las curvas. En el caso de la elipse, dados sus ejes y en la parábola, dado el parámetro . La construcción de la hipérbola dados sus ejes se considera complicada para ser incluida en el tratado.
- Los focos y directrices de las tres curvas.
- Las tangentes y normales de las tres curvas.

Además, se estudian las cuerdas suplementarias de la elipse y la hipérbola, los diámetros conjugados de la elipse, las asíntotas de la hipérbola y los diámetros de la parábola. Las tres teorías desarrolladas permiten la resolución de los problemas planteados en el capítulo sobre tangentes de las curvas, a través de estrategias de resolución más sencillas.

El tratado continúa con la adopción de otro sistema de referencia, el de coordenadas polares, que Cortázar considera "el mas ventajoso en la geometría analítica, despues del rectilíneo" (p. 283). El sistema se basa en "Determinar la posición de un punto con respecto á una recta dada y á un punto dado en ella" (p. 283).

Definido el sistema, se desarrollan las ecuaciones polares de la línea recta, de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola y de la parábola, así como la correspondencia para transformar las coordenadas rectilíneas en polares y viceversa, acompañadas de varios ejemplos que pueden clasificarse en:

- Hallar la ecuación polar de la elipse conocida su ecuación algebraica, siendo el centro de la elipse, el polo y el eje mayor, el eje polar.
- Hallar la ecuación polar de la línea recta conocida su ecuación algebraica.
- Hallar la ecuación algebraica de la circunferencia, conocida su ecuación polar.
- Hallar la ecuación algebraica de la parábola, conocida su ecuación polar, siendo el polo, el vértice de la parábola y siendo el eje de la parábola, el eje polar.

Posteriormente se estudian las secciones cónicas y cilíndricas, como las curvas de segundo grado que se generan mediante las secciones de las superficies cónicas y cilíndricas; la cuadratura de la elipse, hipérbola y parábola, así como las curvas semejantes a circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas.

El último capítulo, correspondiente a la Geometría analítica plana, estudia el número de condiciones necesarias para poder hallar la ecuación de las curvas de segundo grado. Se entiende que “una curva de segundo grado está algebraicamente determinada, cuando el número de ecuaciones distintas entre los datos y los coeficientes incógnitos a, b, c... sea igual al número de estos coeficientes que sean independientes entre sí” (p. 322). Se aportan numerosos ejemplos que complementan las explicaciones. Podemos clasificarlos en:

- Hallar la ecuación de la circunferencia conocidos tres puntos.
- Hallar la ecuación de la elipse conocidos cinco puntos.
- Hallar la ecuación de la parábola conocidos cuatro puntos.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro y tres puntos de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse dados el centro, uno de sus focos y la directriz correspondiente a ese foco.
- Hallar la ecuación de la hipérbola conocido el centro, una directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la parábola dados el eje, la directriz y un punto de la misma.
- Hallar la ecuación de la elipse, dados el centro, un foco y una tangente a la misma.

La segunda parte del tratado estudia la Geometría analítica en el espacio. Análogamente al caso de la Geometría plana, para estudiar las ecuaciones de las superficies y líneas, se fijan los criterios que permiten determinar un punto cualquiera en el espacio. Para ello, define planos coordenados y coordenadas de un punto respecto a esos tres planos. El estudio de los ejes de coordenadas se realiza tanto en el caso en el que los ejes son perpendiculares entre sí como en el caso en el que no lo son.

Tras analizar las formas que toman que en espacio, las ecuaciones de las líneas en el plano, se estudia la ecuación de la forma f(x, y, z)=0. Así se demuestra que “toda ecuacion con tres variables corresponde una superficie” (p. 337) y que la forma de dicha superficie se conoce, ya que “si hallamos las intersecciones de dicha superficie con varios planos paralelos á los coordenados las distancias que hay desde los planos secantes á los coordenados, y la forma de las respectivas intersecciones, manifestarán la forma de dicha superficie” (p. 338).

Posteriormente, se aporta la definición de las ecuaciones de las líneas y las superficies en el espacio y las soluciones de varios problemas relacionados. Con respecto a la línea recta son del tipo:

- Hallar las ecuaciones de una recta, que pasa por un punto dado, conociendo los ángulos que sus dos proyecciones verticales forman con el eje Oz.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por dos puntos dados.
- Hallar las ecuaciones de una recta que pasa por un punto dado y es paralela a una recta dada.
- Hallar la relación entre los coeficientes de las ecuaciones de dos rectas para que tengan sean secantes, además de calcular el punto de intersección.
- Hallar la distancia entre dos puntos siendo los ejes rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos rectas en el espacio.
- Hallar los ángulos que una recta forma con los ejes rectangulares.
- Hallar el coseno del ángulo que forman dos rectas, conocidos los cosenos de los ángulos que ambas forman con los ejes rectangulares.

Análogamente, se aporta una relación de ejercicios con solución sobre las superficies, de los tipos:

- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es paralelo a otro plano dado.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por tres puntos dados no alineados.
- Hallar la ecuación del plano que contiene a una recta dada y es paralelo a otra, no siendo esta última paralela a la primera.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta dada y pasa por un punto dado no perteneciente a la recta.
- Hallar la ecuación de una recta que pasa por un punto dado, conociendo un plano al cual es perpendicular, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que pasa por un punto dado y es perpendicular a una recta dada, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la distancia de un punto dado a un plano dado, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman dos planos, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar los ángulos que forma un plano con los planos coordenados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar el ángulo que forman una recta y un plano dados, en el caso en el que los ejes son rectangulares.
- Hallar la ecuación de un plano que contiene a una recta oblicua o es paralela a otro plano, siendo el primer plano perpendicular al segundo y siendo los ejes rectangulares.

El estudio de las superficies continúa con los casos de la superficie cilíndrica, las superficies de revolución, como el cono de revolución o la esfera. Asimismo, se estudia el caso del paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, elipsoide, hiperboloide de una hoja e hiperboloide de dos hojas (Figura 6).

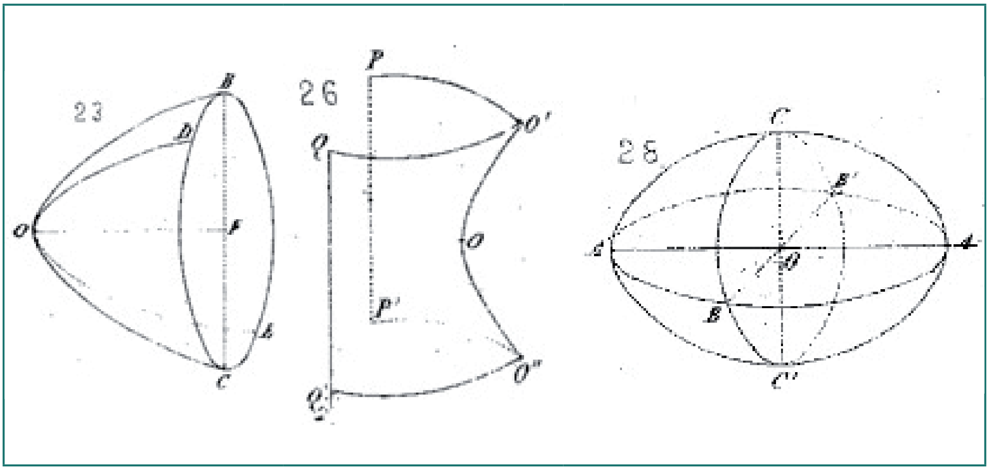


Figura 6. Paraboloide elíptico, hiperbólico y elipsoide en el Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855, lámina 9)

Se expone a continuación, la transformación del sistema de coordenadas con el mismo objetivo en el caso de la Geometría plana, "teniendo la ecuacion de una superficie con respecto á ciertos ejes, hallar la ecuacion de la misma con respecto á otros ejes diferentes de los primeros, pero cuya posicion esté determinada con respecto á estos" (p. 380). Se distinguen dos casos de transformación: cambio a ejes paralelos a los originales y cambio de ejes rectangulares a oblicuángulos o rectangulares. Se estudian también las fórmulas de Euler para pasar de ejes rectangulares a otros también rectangulares.

En el siguiente capítulo se expone la clasificación de las superficies, en particular las superficies planas, cuya ecuación general es . Se estudian planos tangentes, centros y planos diametrales de las superficies curvas algebraicas de segundo orden y el cálculo de la ecuación normal a una superficie. La obra continúa con el estudio de los centros y planos diametrales de las superficies de segundo orden.

En los siguientes capítulos se estudian las teorías de las superficies: elipsoide, hiperboloide de una hoja, hiperboloide de dos hojas, paraboloide elíptico y paraboloide hiperbólico (Tabla 2), aunque previamente, se reduce la ecuación general de cada superficie a expresiones más sencillas representándolas en sistemas de ejes rectangulares.

Además, se estudian los conos asintóticos en el caso de los hiperboloides y, las secciones cónicas en los casos del hiperboloide de una hoja y el paraboloide hiperbólico.

Se presenta el mapa conceptual (Figura 7) del contenido de la edición en el que se construye y demuestra algebraicamente los elementos y propiedades de la Geometría plana y del espacio.

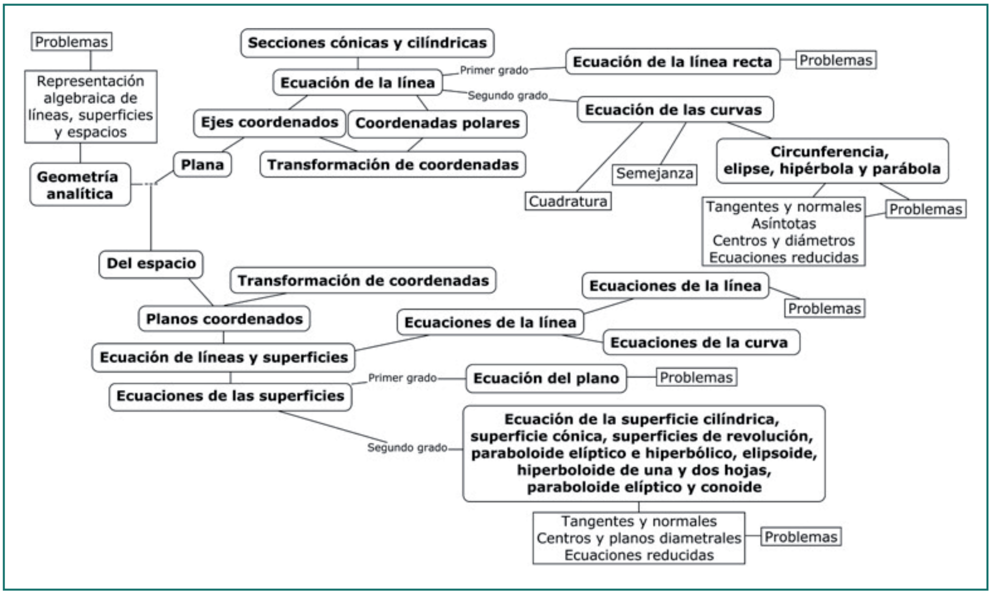


Figura 7. Mapa conceptual del Tratado de Geometría analítica de Cortázar (1855)

Tabla 2. Aspectos que se estudian en las superficies de segundo orden en el Tratado de Geometría analítica de Cortázar, 1855.

	Forma	**Secciones circulares**	**Planos tangentes**	**Planos diametrales y diámetros conjugados**
Elipsoide	X	X	X	X
Hiperboloide de una hoja	X	X	X	X
Hiperboloide de dos hojas	X	X	X	X
Paraboloide elíptico	X	X		
Paraboloide hiperbólico	X			

En esta nueva edición, se reduce el número de páginas a 379 y cuenta con un total de 34 capítulos. Se reduce también el número de láminas con representaciones gráfica a 8 en total. Con respecto al índice de contenidos, son eliminados algunos capítulos de la primera edición, para ser incorporados en otros, siguiendo una secuenciación diferente.

Una línea cualquiera se representará de una manera general por una letra, que será la razon comensurable ó incomensurable de dicha línea á otra que se haya tomado por unidad. Una superficie cualquiera se representará de un mo-

2. Si llamamos *a* al valor numérico de una recta limitada, ó lo que es igual, si representamos dicha recta por *a*, es claro que toda línea limitada, recta ó curva, tendrá una razón *m* con la recta *a*, y por consiguiente su valor numérico será *ma*, ó lo que es igual, dicha línea limitada quedará representada por *ma*, siendo *m* un número abstracto y *a* el valor numérico de una recta.

Figura 9. Uso de expresiones algebraicas en la segunda edición del Tratado de Geometría analítica (Cortázar, 1855; 1862)

Segunda edición

La segunda edición fue impresa en Madrid en 1862 en la Imprenta de D. F. Sánchez, a cargo de D. Agustín Espinosa. Este ejemplar puede encontrarse en las bibliotecas de las Universidades Complutense y Politécnica de Madrid. Ha sido localizada a través del repositorio digital de Google Books.

La segunda edición posee aproximadamente, unas 100 páginas menos que la primera. Si bien es cierto que, son eliminados algunos de los capítulos y artículos de mayor dificultad, los contenidos que incluye la segunda edición, son similares. En concreto, se elimina el estudio de las ecuaciones de particulares de rectas y planos, pasando a estudiar ampliamente el caso general.

Por otro lado, se reorganiza la secuenciación de los temas, buscando una mayor conexión entre la exposición de los resultados y teoremas y su aplicación a la resolución de ejercicios y problemas. Por ejemplo, los problemas sobre las rectas y los planos, se sitúan tras la explicación teórica de sus ecuaciones y no, al final del bloque correspondiente.

En general, añade más ejemplos por cada concepto estudiado y particulariza los enunciados de algunos problemas, por ejemplo, centrando la atención en el estudio de las ecuaciones de líneas y superficies con respecto a ejes rectangulares. También acompaña con expresiones algebraicas algunas demostraciones de teoremas, que clarifican la secuencia de los razonamientos. Un ejemplo de lo anterior, puede observarse en la introducción de la obra, cuando expone la representación de las líneas, superficies y espacios, para poder resolver problemas geométricos a través del Álgebra (Figura 9).

Las curvas elipse, hipérbola y parábola son estudiadas en profundidad en ambas ediciones, sin embargo, la segunda edición incorpora numerosas notas sobre las principales características de estas curvas inmediatamente después de la definición de cada una de ellas, lo que ayuda al lector a asimilar las propiedades de las curvas previamente a la exposición de cada una de las teorías.

CONCLUSIONES

Si bien Cortázar dejó constancia de que no comprendía la resolución de los problemas geométricos mediante métodos diferenciales e integrales, desarrolló formalmente los problemas generales de geometría plana y los del espacio de forma bastante completa, aunque sólo hasta las superficies de segundo orden (Irueste, 1912).

La formalidad y rigurosidad características de las obras de Cortázar, encuentran su máxima representatividad en los tratados destinados a los estudios superiores. Aun así, a lo largo de la obra se incluyen numerosas notas con sugerencias, además de láminas con representaciones gráficas que ayudan al lector en el estudio de la disciplina, en particular, para reforzar el aprendizaje de las curvas cónicas.

Todos los resultados vienen acompañados de su rigurosa demostración o de la referencia en la que se encuentran ubicados, en alguna otra de sus obras. Es destacable también la gran variedad de ejemplos y situaciones que se encuentran; desde el estudio de los números negativos, hasta la resolución de ecuaciones, pasando por el cálculo de expresiones algebraicas.

REFERENCIAS

Beyer, W. O. (2006). Algunos libros de Aritmética usados en Venezuela en el período 1826-1912. Revista de Pedagogía, *XXVII*(78), 71-110.

Freijd, P. (2013). Old algebra textbooks: a resource for modern teaching. *BSHM Bulletin, 28*, 25-36.

García, E. (1984). La matemática en la España del siglo XIX. En M. Hormigón (coord.), *La ciencia y la técnica en España entre 1850 y 1936* (pp. 115-130). Jaca: SEHCYT.

Gómez, B. (1995). Los métodos de cálculo mental vertidos por la tradición reflejada en los libros de aritmética. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 5,* 91-101.

Irueste, J. A. (1912). D. Juan Cortázar. *Revista de la Sociedad Matemática Española, 1*(8), 285-290.

Madrid, M.J. (2016). *Los libros de aritmética en España a lo largo el siglo XVI*. (Tesis Doctoral), Universidad de Salamanca, Salamanca.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* . (Tesis Doctoral), Universidad de Granada, Granada.

Maz-Machado, A., y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa 18* (1), 49-76.

Puig, L. (1994). El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis, 10*, 47-92.

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et

1845. *Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique* (pp. 137-145). Editions La Pensée Sauvage.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. Educación Matemática, 15(1), 21-50.

Vea, F. y Velamazán, M.A. (2011). La formación matemática en la ingeniería. En M. Silva (ed.), *Técnica e ingeniería en España. Volumen VI. El ochocientos. De los lenguajes al patrimonio* (pp. 299-344). Zaragoza: Real Academia de ingeniería.