Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2018, nº 98, 49-56

Propuesta de aplicación del ajedrez como apoyo a la enseñanza de la geometría analítica en el plano

Francisco Jiménez-Bernal
David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Resumen: *Presentamos una propuesta de clase para la enseñanza de conceptos básicos de geometría analítica en el plano mediante el uso del tablero de ajedrez. Se trabajan representaciones de vectores y rectas a través de los movimientos posibles de las piezas y se aprovecha el carácter cartesiano del tablero para visualizar las rectas definidas por su ecuación implícita.*
Palabras clave: *Geometría analítica, geometría plana, ajedrez, Educación matemática.*

A class proposal using chess for the teaching of plane analytic geometry

Abstract: *We present a class proposal for the teaching of basic concepts of plane analytical geometry through the use of the chess board. Representations of vectors and lines are introduced through the possible movements of the pieces and the cartesian character of the board is used to visualize a line defined by its implicit equation.*
Keywords: *Analytic geometry, plane geometry, chess, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

Históricamente, el ajedrez y las Matemáticas han estado siempre relacionados de un modo u otro. La conocida leyenda hindú de Sisa y los granos de trigo en el tablero de ajedrez ya evidencia el uso de sucesiones geométricas y de la poca familiaridad con su ritmo de crecimiento para el no habituado a trabajar con ellas (Álvarez, 2004).

Si bien la difusión del ajedrez en el mundo occidental se debe a la expansión del mundo islámico durante los siglos VIII a XV, su origen se remonta a la civilización hindú en el siglo V aproximadamente, con la creación del Chaturanga, considerado el precursor del ajedrez moderno. Precisamente algo similar y paralelo ocurrió con nuestro sistema de numeración y el desarrollo del Álgebra, que pueden considerarse inicialmente desarrollados por los hindúes y cuya continuidad fue posteriormente garantizada mediante su transmisión a través de la cultura islámica.

Por la natural red cartesiana que conforma el tablero de ajedrez y el hecho de ser un juego que pertenece al ámbito cultural de prácticamente todo el alumnado, es candidato ideal como material para la enseñanza de la Geometría. Así, por ejemplo, podemos encontrar propuestas como las de Maz-Machado y Jiménez-Fanjul (2012) para el aula de primaria para trabajar conceptos como patrones geométricos y numéricos utilizando el tablero y los movimientos de las piezas. Una recopilación de una gran variedad de problemas que pueden plantearse a partir del tablero y los trebejos se puede ver en Ortega (2003).

Otros autores como Kovacic (2012) han estudiado la relación entre el rendimiento académico y la práctica del ajedrez, no sólo en Matemáticas, sino en otras áreas, obteniendo que en general los alumnos que practicaban ajedrez obtenían mejores calificaciones.

Incluso Euler en el s. XVIII, según Fernández (2007), ya estaba interesado en las *poligrafías de saltos de caballo* a lo largo del tablero por las figuras geométricas que resultaban.

No en vano, el otrora campeón mundial de ajedrez Anatoli Karpov, en uno de sus libros, establece una relación entre el Teorema de Pitágoras y el ajedrez (1999).

Duval (2006) recalca la necesidad de que el estudiante de Matemáticas no solamente debe conocer las distintas formas de representación de un objeto matemático sino que ha de saber alternar entre ellas. En este sentido, el tablero de ajedrez y los trebejos sirven como una forma de representación alternativa a la clásica representación geométrica en el plano.

Por su parte, el Real Decreto 1105/2014 de contenidos de Educación Secundaria Obligatoria, en vigor dentro del territorio español, establece como contenidos básicos en la materia Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO conceptos de geometría analítica en el plano como son las coordenadas, vectores y las ecuaciones de la recta.

Se empleará el juego del ajedrez como elemento auxiliar de apoyo en el tratamiento de los contenidos teóricos para el estudio de la geometría en el plano. Esto podría justificarse debido a la propia geometría plana del tablero de ajedrez y a su sistema de coordenadas para describir la posición de las piezas en las casillas.

Por último, hacer notar la naturaleza interdisciplinar del ajedrez, no solamente en Matemáticas, sino también en Filosofía por ejemplo, tal y como propugna Fernández (2010). Es precisamente este fenómeno de transferencia de unas competencias a otras, lo que justifica la inserción del ajedrez en el currículum, pues no solo se aprende a jugarlo, sino a utilizarlo como un medio para mejorar la percepción del mundo.

CONCEPTOS PREVIOS

Partimos de la base de que el alumnado conoce los movimientos básicos de las piezas del ajedrez. Utilizando un retroproyector mostraremos el tablero y definiremos el uso de las coordenadas asociadas a las casillas del tablero. De igual manera, si disponemos de material, se repartirán tableros a grupos de alumnos para la realización de las actividades.

Las actividades planteadas están pensadas para una introducción a conceptos básicos de geometría analítica, de modo que el alumno no necesita ningún tipo de conocimientos previos en esta área.

DESARROLLO DE LAS ACTIVIDADES

Las actividades se desarrollarán en 4 sesiones que pasamos a describir a continuación:

Primera sesión:

En esta sesión introduciremos al alumnado en la correspondencia entre notación algebraica del ajedrez y las coordenadas cartesianas. Para ello, con la ayuda del retroproyector mostraremos un tablero de ajedrez (también pueden usarse tableros de ajedrez en grupos de 3-4 alumnos).

Figura 1: Numeración de las casillas utilizando la notación algebraica.

Con algunos ejemplos mostraremos la notación algebraica que utiliza la forma letra-número donde la letra denota la columna (empezando por la izquierda) y el número denota la fila (empezando por abajo). Siempre asumimos que las piezas blancas están en la parte inferior del tablero.

Con esta notación se establece por convenio el origen de coordenadas (0,0) en la casilla a1 (esquina inferior izquierda, desde el punto de vista del jugador de blancas) (Figura 1).

Una vez establecida esta correspondencia, hacemos algunos ejercicios para consolidar lo aprendido, con preguntas como las siguientes:

- ¿En qué coordenadas se encuentra el rey blanco? ¿Y el negro?
- ¿Cuáles son las coordenadas del peón de dama blanca? ¿A dónde puede moverse?

Una vez que el alumnado coge soltura en la correspondencia entre las dos formas de notación de coordenadas en el tablero, cartesiana matemática y algebraica de anotación ajedrecística, introducimos cómo se representarían los vectores en el plano y para ello aprovechamos la estructura cartesiana del tablero.

La idea de este planteamiento consiste en que el movimiento de las piezas se puede asimilar a vectores, en tanto que la componente inicial del vector es la casilla donde se encuentra la pieza y la componente final sería la casilla a donde dicha pieza se mueve (Figura 2).

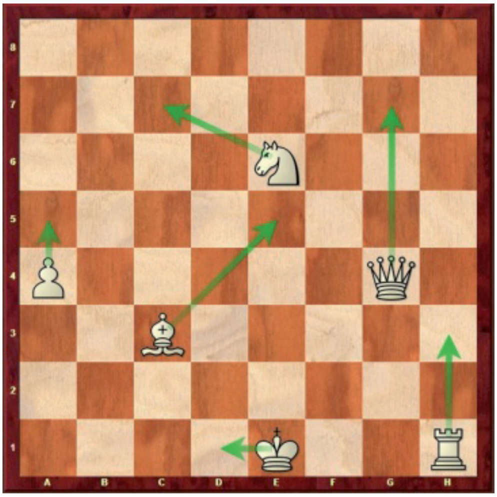

Figura 2: Movimientos de figuras y correspondencia con vectores.

Mediante el diagrama de la Figura 2 mostramos algunos ejemplos de movimientos de piezas y realizamos preguntas como las siguientes:

- ¿En qué coordenadas está el alfil? ¿A qué coordenadas puede moverse?-Según la flecha que aparece, ¿cuál es la casilla de destino?
- Si tuviéramos que describir al alfil cómo ha de moverse para llegar a la casilla de destino, ¿cómo se lo diríamos? Pista: Tienes que moverte X casillas a la derecha e Y casillas hacia arriba
- Repetimos las preguntas anteriores con la pieza del rey, con la dificultad de, al moverse hacia la izquierda, habrán de usar números negativos para representar "moverte X casillas a la derecha" y el 0 para "moverte Y casillas hacia arriba".
- Repetimos la dinámica con el resto de figuras, y cuando el alumnado haya asimilado correctamente que hay que usar dos números (positivos y/o negativos) para indicar cómo se mueve una pieza, estamos en condiciones de introducir el concepto de vector.
- Así, decimos, una forma abreviada de indicar el movimiento del alfil sería que se mueve con vector (2,2) o el caballo (-2,1).

Segunda sesión:

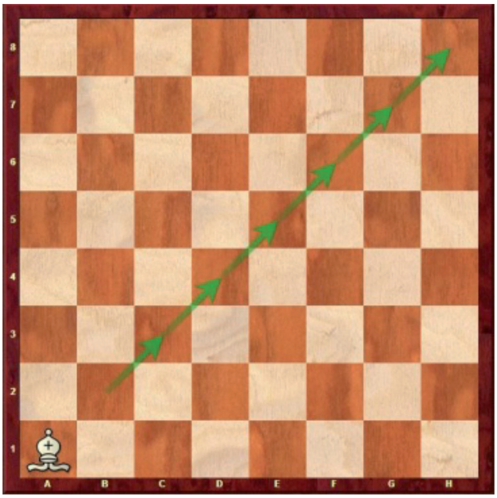

Figura 3: Recta definida por movimiento del alfil.

Mostraremos en la pantalla el tablero de la Figura 3, donde se muestran todas las posibles casillas en las que puede desplazarse el alfil en una misma dirección. Preguntaremos qué figura geométrica describe el movimiento de dicha pieza, que es una recta.

A continuación preguntaremos cuáles son las coordenadas cartesianas de las casillas que forman dicha recta y si ven algún patrón en ellas. Al alumnado no debe costarle trabajo inferir que las casillas son de la forma (n, n) donde n es un número natural.

Sabiendo que el alfil se encuentra en la casilla (0,0), podemos entonces obtener una forma de representar todas las casillas que forman la recta, que serán (0,0) + (1,1), (0,0) + (2,2) etc. Esto puede ponerse en la forma (0,0) + λ (1,1), donde λ es un número natural. Esto, decimos, se llama la ecuación vectorial de una recta (Figura 4).

Posteriormente, se aumenta el plano casuístico con los casos de alfiles que no están en el origen de coordenadas, como se aprecia en la Figura 4.

Adicionalmente, se plantea el siguiente reto: Si el caballo que aparece en la Figura 4 pudiera disparar un rayo láser en las posibles direcciones en las que se mueve, ¿cuáles serían las ecuaciones vectoriales de las correspondientes rectas?

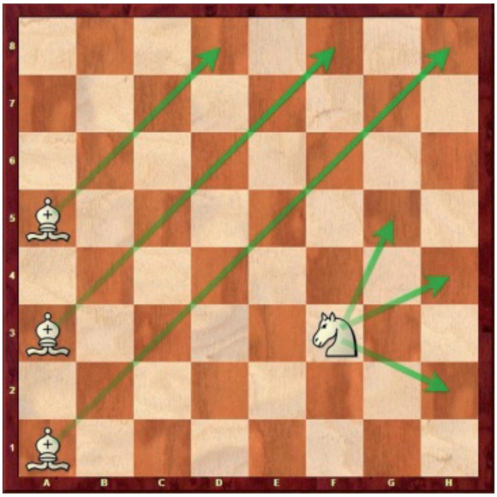

Figura 4: Movimiento de distintas piezas como vectores.

Por otro lado, introducimos a partir de aquí las ecuaciones paramétricas de la recta, que se obtienen directamente separando las componentes horizontal y vertical de la ecuación vectorial.

Así, en el ejemplo del primer alfil, la ecuación de la recta en su forma paramétrica sería:

$$x = 0 + \lambda \cdot 1$$
$$y = 0 + \lambda \cdot 1$$

Y dejamos como propuesta que los alumnos hallen las ecuaciones paramétricas de los alfiles y el caballo de la anterior figura.

Tercera sesión:

En esta sesión introduciremos la ecuación continua. El procedimiento se explicará con el habitual tratamiento algebraico. Se utilizará el tablero como refuerzo para que los alumnos, una vez calculada la ecuación continua de una recta, comprueben manualmente si las casillas de dicha recta cumplen o no la ecuación.

Cuarta sesión:

En esta sesión introduciremos la idea de ecuación general de la recta. Para continuar con la ayuda del ajedrez, se utiliza la tabla incluida en la Figura 5. En ella, se ha representado el tablero de ajedrez y en cada escaque aparece un número (-C), resultante de realizar la operación Ax + By con los valores arbitrarios A = 1 y B = -1 por ejemplo.

Es importante que los alumnos tengan claro cómo se han rellenado las casillas con los números, para poder relacionarlo posteriormente con la ecuación implícita de la recta.

A tenor de las cifras obtenidas y observando la repetición de patrones numéricos, mirando desde una casilla cualquiera a su alrededor en horizontal, vertical o diagonal, se desprende que existen relaciones lineales entre casillas según tales direcciones.

8	7	6	5	4	3	2	1	0
7	6	5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
	1	2	3	4	5	6	7	8

Figura 5: Casillas de ajedrez con numeración para la ecuación implícita x-y=C

Podemos entonces contar que hemos convertido el tablero de ajedrez en una sopa de números, y preguntamos, por ejemplo, dónde están las casillas que tienen un 1 en su interior, y si forman alguna figura conocida. Los alumnos, después de algunos ejemplos, verán rápidamente que, dependiendo del número elegido, saldrán rectas paralelas.

Si cada casilla tiene coordenadas, llamémoslas (x, y) preguntamos entonces, qué condición cumplen las coordenadas de las casillas que tienen un 1. Deberán llegar a la conclusión de que son todas las que cumplen $x - y = 1$ (ya que en este ejemplo concreto hemos usado como coeficientes $A = 1$, $B = -1$).

Para reforzar, podemos pedir a los alumnos, que coloreen las casillas que cumplen una determinada ecuación, por ejemplo $x - y + 2 = 0$ o $x = y - 1$.

Podemos repetir esta actividad variando los coeficientes que utilizamos para numerar las casillas. Así por ejemplo, podemos usar $A = B = 1$ para las rectas de la forma $x + y = C$, los coeficientes $A = 1$, $B = 0$ para las rectas de la forma $x = C$, etc.

Por último, indicaremos que existe una forma de expresar la ecuación de la recta, llamada explícita, donde simplemente despejamos la variable y. La explicación, al igual que antes, es puramente algebraica y no precisa del tablero de ajedrez. Sí podemos, sin embargo, añadir una interpretación en el tablero con la siguiente actividad: En la Figura 4, el alfil de la casilla a3, supongamos que lo movemos hasta la columna f, nos preguntamos entonces si podemos deducir en qué fila estará, y si podemos expresar explícitamente su coordenada a partir de su coordenada x, como una función. Esta función, decimos, es la ecuación explícita de la recta.

Como ejercicio, se pedirá a los alumnos que deduzcan qué forma tienen que tener la ecuación implícita y explícita de las rectas que definen el movimiento de una torre, luego las de un alfil, y por último las de la dama.

CONCLUSIONES

Con la presente propuesta se pretende fomentar en los alumnos una representación de los conceptos de geometría plana, aplicada a algo tan cotidiano como es un tablero de ajedrez, cuya estructura no está únicamente vinculada al juego en sí, sino que aparece de forma natural en muchas otras situaciones de la vida cotidiana, como manzanas de una ciudad, losetas del suelo, etc. La propia estructura visual del tablero ayuda al alumno a visualizar y entender mejor las coordenadas cartesianas y los vectores en el plano y, por ende, la recta. Una vez adquirida la dinámica de representación, puede extrapolarse a conceptos como posiciones relativas de rectas, pertenencia de un punto a una recta, distancia entre 2 puntos, etc. El uso de piezas de ajedrez como medio de representación permite darle un dinamismo a conceptos que por lo general el alumnado concibe como estáticos, como el punto y la recta. Por otra parte, la propia naturaleza reflexiva del juego-ciencia, permite inculcar al alumnado una actitud reflexiva hacia la matemática en general y de que ésta se encuentra en muchas situaciones de la vida cotidiana.

REFERENCIAS

Álvarez, P. (2004). *Las 64 casillas*. Barcelona: Editorial Paidotribo.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, 9(1), 143–168.

Fernández, F. J. (2010). *El ajedrez de la filosofía*. Pozuelo de Alarcón (Madrid): Plaza y Valdés.

Fernández, S. (2007). Leonhard Euler y el recorrido del caballo de ajedrez. *Revista Sigma, 31,* 225-228.

Karpov, A. (1999). *El ajedrez: Aprender y progresar*. Barcelona: Editorial Paidotribo.

Kovacic, D. M. (2012). Ajedrez en las escuelas. Una buena movida. *PSIENCIA. Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica*, *4*(1).

Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2012). Ajedrez para trabajar patrones en matemáticas en Educación Primaria. *Epsilon,* 81, 105-112.

Ortega, J. A. (2003). El juego-rey y la ciencia de los números. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 44, 53-64.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado,* 3 de enero de 2015, núm. 3, p. 179, p. 193, pp. 395-398.