Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2017, Vol. 34, nº 95, 7-24**

La geometría analítica de Alberto Lista

Isabel Mª Sánchez Sierra
IES Vía de la Plata. Guijuelo
Mª Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Resumen: *En este artículo se presenta el análisis de los contenidos de Geometría Analítica que se hallan en Los Elementos de Matemáticas Puras y Mixtas de D. Alberto Lista, uno de los autores más importantes del siglo XIX.*
Dicho análisis, que forma parte de un trabajo más amplio sobre la Geometría Analítica en España en el s. XIX (Sánchez, 2015), caracteriza cómo se aborda esta parte de las matemáticas en esta obra. En él mostramos una Geometría Analítica, propia del siglo XIX en España, que conserva aún reminiscencias de la geometría de Descartes y que se ha perdido en nuestros días.
Palabras clave: *Historia de las matemáticas, Análisis de textos, Geometría analítica, Alberto Lista.*

Analytical geometry by Alberto Lista

Abstract: *In this paper we present the content analysis of the analytical geometry in Los Elementos de Matemáticas Puras y Mixtas by Alberto Lista, one of the most important authors of the nineteenth century.*
This analysis, which is part of broader study about analytical geometry in Spain during the XIX[th] *century (Sánchez, 2015), characterizes how this branch of mathematics is addressed in this book. We showed an analytical geometry that is typical of the nineteenth century in Spain, which retains reminiscences of the geometry by Descartes and which has been lost today.*
Keywords: *history of mathematics, analysis of textbooks, Analytical Geometry, Alberto Lista*

ANTECEDENTES

La Geometría Analítica nace en el siglo XVII de mano de René Descartes (1596-1650) y Pierre Fermat (1601-1665). Podemos encontrar algunos vestigios del uso de sistemas de referencia o representaciones similares a las coordenadas actuales en la obra de

Apolonio de Perga (262-190 a. C-?) (González, 2007), y en la de Nicolás de Oresme (c. 1323 - 1382) (Chica, 2001); así como el uso del álgebra para la resolución de problemas geométricos en la obra de Al-Khwarizmi (Chica, 2001), pero no de forma general y sistemática. A diferencia de los matemáticos anteriores, tanto Descartes como Fermat desarrollaron un método general para la resolución de problemas geométricos mediante la aplicación del Álgebra. En un principio será Descartes quien pase a la historia como el padre de la Geometría Analítica gracias a su *Geometría* (1637), apéndice del *Discurso del método*, y ello a pesar de que la geometría que describe en esta obra se parece poco a lo que hoy consideramos como Geometría Analítica. Más similar a la concepción actual es la que Fermat desarrolla en su libro *Ad locos planos et solidos isagoge* (1679), obra que fue publicada póstumamente, aunque fue escrita antes de la aparición de *La Geometría*, por lo que en la actualidad se le reconoce igual mérito que a Descartes.

La geometría de Descartes se asemeja, en ciertos aspectos, a la Geometría Analítica actual, ya que ésta deriva de aquélla, pero también existen importantes diferencias entre las dos. La más importante es la interpretación que hace Descartes de las letras y los números que forman las ecuaciones; mientras que actualmente se considera que tanto los parámetros como las incógnitas representan números, Descartes considera que representan segmentos de rectas. Esto conlleva una serie de problemas: por una parte se hace necesario que las fórmulas sean homogéneas –principal problema que tuvieron los geómetras antiguos para aplicar el Álgebra a la Geometría– ya que si a representa un segmento, a^2 representa un área y a^3 un volumen, por tanto la expresión $a^2b^2\text{-}b$ no tiene sentido. Descartes solucionará este problema introduciendo el concepto de *segmento unidad*, que utiliza de forma implícita, así, en la expresión "$a^2b^2\text{-}b$ debemos considerar la cantidad a^2b^2 dividida una vez por la unidad, y la cantidad b multiplicada dos veces por la unidad" (Descartes, 1637, /trad. 1947, p.52) lo que le permite operar libremente con expresiones de distinta *dimensión*.

Por otra parte, esta interpretación de las ecuaciones le lleva a ignorar las soluciones negativas por considerarlas *falsas*; hemos de tener en cuenta que, bajo su planteamiento, lo que se obtendrían serían segmentos de longitud negativa.

Otra importante diferencia entre el modo de hacer de Descartes y el actual se encuentra a la hora de dar la solución de un problema. En la actualidad una vez que se ha obtenido la solución algebraica simplemente se da su interpretación geométrica, sin embargo Descartes construye, a partir de la solución algebraica, la solución geométrica con regla y compás como se venía haciendo hasta entonces.

Muchas de estas características de la geometría de Descartes seguirán presentes en la Geometría Analítica que se estudiaba en España en el siglo XIX (Sánchez, 2015).

En España el primer texto sobre la Geometría Analítica de Descartes es *Elementos de Matemáticas* (1706) del jesuita Pedro de Ulloa. Anterior a ella es *Análisis geométrica* de Omerique (1634-1698), en la que trata la Geometría Analítica de manera muy distinta a Descartes o Fermat, a pesar de lo cual mereció los elogios de Newton (Peralta,1999).

Durante el siglo XVIII la producción matemática española es muy extensa, siendo sus principales protagonistas los jesuitas y los militares, aunque no encontramos en nuestro país ninguna obra original sobre Geometría Analítica.

Al comienzo del siglo XIX los avances conseguidos en España en el estudio de las ciencias –en particular las Matemáticas– durante el siglo XVIII se paralizaron, en primer lugar por la guerra de la Independencia y posteriormente por el clima de inestabilidad política y las sucesivas guerras presentes durante todo el siglo. Aunque en la primera mitad se llevará a cabo cierta obra en el campo de las Matemáticas, no será hasta mediados de siglo cuando se inicie la recuperación, aunque la verdadera modernización se llevará a cabo en el último tercio, fruto de la libertad ideológica existente en el sexenio junto a la calma política de la Restauración (Peralta, 2008; Etayo, 1992).

En relación a la Geometría Analítica, la podemos encontrar en los libros de texto utilizados en la segunda enseñanza y en los estudios universitarios, en un principio en la Facultad de Filosofía, y a partir de 1857 en la Facultad de Ciencias (Sánchez, 2015). Entre ellos destacaremos el *Tratado elemental de matemáticas* (1813) de Vallejo; la *Geometría Analítica-descriptiva* (1819) de Zorraquín; los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* (sic) de Alberto Lista (1825); el *Curso completo de matemáticas Puras* (1829) de José de Odriozola; el *Tratado Completo de Matemáticas* (1846) de Agustín Gómez Santa María, el *Tratado de Geometría Analítica* (1862) de Juan Cortázar; las *Lecciones de Geometría Analítica* (1883) de Santiago Mundi; la *Geometría Analítica* (1883) de Ignacio Sánchez Solís y el *Tratado de Geometría Analítica* (1906) de Miguel Vegas. Dichas obras tuvieron gran difusión en su época, bien por la relevancia de sus autores, bien por aparecer en las listas de libros de texto aprobadas por los distintos gobiernos.

El análisis de estas obras, que forma parte de un trabajo más extenso (Sánchez, 2015), nos ha permitido caracterizar la Geometría Analítica en nuestro país en el siglo XIX. Este estudio nos muestra que hasta el último cuarto de siglo la Geometría Analítica que se hace en España conserva muchas características de la *Geometría* de Descartes. En primer lugar se sigue operando con segmentos, lo que obliga a que las ecuaciones sean homogéneas y por tanto se sigue haciendo alusión al *segmento unidad*, que permite hacer homogénea cualquier ecuación. Por otra parte se hace necesaria una interpretación de las soluciones negativas de un problema y por último, "tras la resolución algebraica del pro¬blema, ésta se construye geométricamente, lo que obliga a insertar una parte teórica en la que se explique cómo se *construyen las fórmulas* (Sánchez, 2015).

Para mostrar esta forma de trabajar incluimos en el presente artículo el análisis realizado a uno de los libros citados anteriormente, en concreto los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* (sic) de Alberto Lista (1825). En esta obra se muestra de forma clara y sencilla, mucho más que en otras más amplias y complejas, todos los elementos característicos de la Geometría Analítica decimonónica que acabamos de enumerar, por lo que hemos considerado pertinente utilizarla como muestra.

EL LIBRO DE TEXTO EN LA INVESTIGACIÓN HISTÓRICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

González (2004a, p. 17) señala que "si el conocer y el comprender el pasado componen el saber, ellos debieran ser la brújula que oriente nuestra manera de actuar y transformar la realidad". Esta máxima se puede llevar al ámbito de la Educación Matemática y aunque mostrar el proceso de desarrollo de los conceptos matemáticos desde su origen hasta su forma final resulta ser una herramienta muy útil en este campo, pocos temas hay que se presenten más disociados de su historia que las Matemáticas.

Diversas investigaciones (Maz, 1999; González, 2004a; Maz, Torralbo y Rico, 2006) ponen de relieve que la integración de la historia de las Matemáticas en la enseñanza supone un elemento importante en la mejora de su calidad. Su estudio puede ayudar en la presentación de los temas del currículo, a descubrir los obstáculos y dificultades que se han presentado a lo largo del tiempo, y a dar una visión de la actividad matemática como una actividad humana insertada en el contexto socio-cultural de cada época. Por todo ello el papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza es legítimamente considerada una parte de la investigación en educación matemática (Bagni, 2000).

Pero, ¿qué entendemos por investigación histórica en educación? González y Sierra (2003) consideran la investigación histórica como un proceso de búsqueda sistemática de datos que respondan preguntas acerca de fenómenos del pasado con el propósito de alcanzar una mejor comprensión de instituciones, prácticas, tendencias y aspectos relacionados con la educación. Dentro de este tipo de investigación existen varias corrientes entre las que se encuentra el análisis de los libros de texto (Gómez, 2003), en la que se incluye nuestro estudio.

Esta tendencia se fundamenta en que “los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos” (Schubring, 1987). El libro de texto fue durante años un objeto de estudio olvidado por los historiadores en educación, sin embargo son múltiples los estudios que han puesto de manifiesto en los últimos años la importancia del manual escolar (Delgado 1983; Puelles, 2000; Collados, 2008).

Desde el punto de vista de la historia de la educación, el libro de texto es una fuente inestimable ya que permite conocer las opiniones e ideas de sus autores o editores, podemos encontrar sus orientaciones metodológicas, sus concepciones pedagógicas y los autores a los que se remiten. En este sentido, los libros de texto indican la cantidad de ciencia que fue capaz de incluir su autor para el consumo escolar, su nivel de conocimientos científicos, así como su nivel pedagógico y su habilidad didáctica (Delgado, 1983). Por otra parte los manuales escolares indican cómo ha sido llevada a la práctica la política educativa de un país, ya que seleccionan, priorizan e imponen unos contenidos frente a otros, así como una determinada forma de transmitirlos, son representaciones del currículo y su papel principal es y ha sido actuar como nexos entre el currículo y el aula (Collados, 2008).

Todas las características expuestas hacen del libro de texto una importante fuente documental a la vez que un objeto de difícil precisión conceptual y de una gran complejidad.

METODOLOGÍA

Para llevar a cabo el estudio de los textos citados utilizamos el método de análisis de contenido que diversos trabajos (Gómez, 2002; Maz, 2005; Rico, 2008; Maz, 2009) muestran como una herramienta eficaz para el análisis de manuales escolares. Para ello nos fijamos en tres aspectos del texto: la estructura conceptual, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico (Gómez, 2002).

En relación a las representaciones nos centramos en las representaciones externas utilizadas por el autor, y dentro de estas en los símbolos y los gráficos.

En cuanto al análisis fenomenológico hemos de tener en cuenta que en el caso particular de la Geometría Analítica los problemas y situaciones que se plantean en estos libros son solamente de tipo matemático. El análisis de los problemas nos mostró una forma similar de resolución en todos los autores de la época, que siguen los mismos pasos: suponen el problema resuelto, realizan el planteamiento geométrico del que obtienen la ecuación algebraica correspondiente, y una vez resuelta se construye geométricamente la solución obtenida.

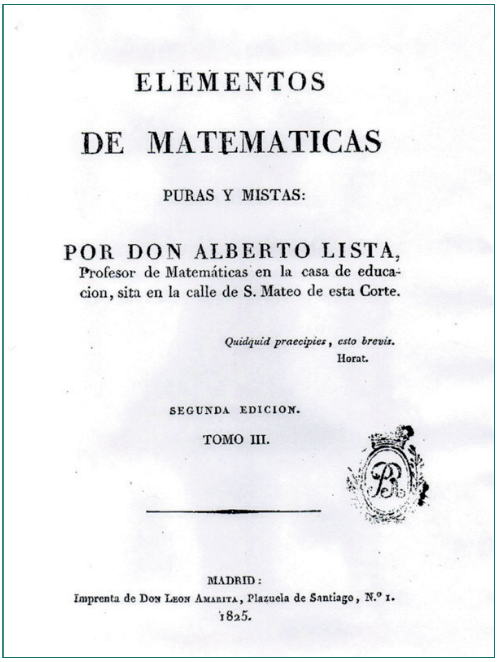
Por último señalar que para contextualizar la obra y el autor, y poner de manifiesto su importancia, incluimos una biografía sucinta del mismo y el nivel educativo donde fue utilizada.

ALBERTO LISTA: VIDA Y OBRA

Ilustración 1. Retrato de Alberto Lista. Litografía de "La Revista Médica"

Alberto Rodríguez de Lista y Aragón nació en Sevilla el 15 de octubre de 1775. En la Universidad de Sevilla estudió filosofía, teología y cánones (Pérez, 1848). Su primera formación científica la recibió en Sevilla en el Seminario Hispalense y en el Colegio de San Hermenegildo, regentado por la Sociedad Económica de Amigos del País. Profundizó en sus conocimientos matemáticos en la Escuela de Matemáticas de esta sociedad entre 1788 y 1790 (Ausejo, n.d.a), donde fue nombrado profesor de matemáticas a los quince años (Pérez, 1848). En 1796 ocupó la cátedra de Matemáticas en el Colegio de Náutica de San Telmo (Sevilla), en 1803 obtuvo la cátedra de Filosofía en el colegio de San Isidoro, en 1806 ocupó la cátedra de Humanidades en la Sociedad Económica de Amigos del País y en 1807 fue nombrado catedrático de Retórica y Poética en la Universidad de Sevilla, desempeñando algunas de esas cátedras simultáneamente (Pérez, 1848).

En 1803 se hace sacerdote y comienza su colaboración como poeta y escritor en periódicos y revistas hasta el comienzo de la Guerra de la Independencia. Desde los inicios de la contienda hasta 1810 colabora en periódicos de carácter político afectos al Gobierno patriota, pero en ese año los franceses entran en Sevilla y Lista se pone a su servicio (Ausejo, n.d.a), lo que le obliga a exiliarse en Francia cuando la guerra concluye.


ELEMENTOS
DE MATEMATICAS
PURAS Y MISTAS:
POR DON ALBERTO LISTA,
Profesor de Matemáticas en la casa de educacion, sita en la calle de S. Mateo de esta Corte.

Quidquid praecipies, esto brevis.
Horat.

SEGUNDA EDICION.
TOMO III.

MADRID:
Imprenta de Don Leon Amarita, Plazuela de Santiago, N.º 1.
1825.

Ilustración 2. Carátula del libro.

Regresa a España en 1817 obteniendo en 1819 la cátedra de Matemáticas del Consulado de Bilbao. Allí publica el *Tratado elemental de Aritmética, Tratado elemental de Algebra* y *Tratado elemental de Geometría* (1819) (Ausejo, n.d.a).

En 1820, tras el triunfo de la revolución liberal, se desplaza a Madrid y se asocia con Juan Manuel Calleja fundando una Casa de Educación para la que escribió unos *Elementos de Matemáticas Puras para el uso de la Casa de Educación, (…), continuación de los de aritmética, álgebra y geometría, escritos para el uso de la escuela de matemáticas del ilustre consulado de Bilbao* (1822) (Ausejo, n.d.a). El Colegio es clausurado a raíz de la restauración del régimen absolutista y Lista se ve obligado a emigrar de nuevo a Francia.

En 1833 vuelve a la Corte como director de la *Gaceta de Madrid*. En esta etapa madrileña, participa en la Comisión redactora del Plan de estudios de la Universidad de Madrid y es nombrado catedrático de la Universidad Central (1836). Pierde este cargo en 1838, trasladándose a Cádiz, donde durante cinco años es profesor del Colegio de San Felipe Neri. En 1843 se incorpora al claustro de la Universidad de Sevilla, en 1846 es canónigo de la catedral y en 1847 ingresa en la Academia de la Historia (Ausejo, n.d.a). Fallece en Sevilla el 5 de octubre de 1848 (Pérez, 1848).

La obra analizada es la segunda edición (1825) de los *Elementos de Matemáticas puras y mistas* de Alberto Lista. Consta de cuatro partes: Geometría elemental, Superficies, Trigonometría plana y Aplicación del Álgebra á la Geometría. Como vemos, no existe ningún epígrafe en el libro que haga referencia a la Geometría Analítica, pero esta se encuentra englobada bajo el título Aplicación del Álgebra á la Geometría.

Esta forma de hacer *Geometría Analítica* nada tiene que ver con el concepto actual que tenemos de ella, aunque gran número de matemáticos españoles de aquel siglo sí utilizaron este término moderno para designarla, como Mariano Zorraquín, Agustín Gómez Santa María, José Odriozola e Ignacio Sánchez Solís, entre otros (Sánchez, 2015). Por ello en este artículo utilizaremos ambos nombres –*Aplicación del Álgebra á la Geometría* y *Geometría Analítica*– para referirnos al mismo concepto.

Por tanto, de las cuatro partes en que está dividido el libro sólo hemos analizado la última, la cual está dividida a su vez en tres capítulos titulados *Construcción de las fórmulas*, *Teoría de los signos en la análisis geométrica* y *Problemas geométricos de 1º y 2º grado*, respectivamente.

Este texto no aparece en ninguna lista de libros oficial pues hasta el plan Pidal (1845) no se establecen oficialmente listas de libros de texto, dejando libertad a los profesores para su elección. Sin embargo con el título de *Elementos de matemáticas* –que es como se denominan las asignaturas de matemáticas en los primeros planes de estudios de segunda enseñanza– se publicaron multitud de textos para este nivel educativo a lo largo del siglo XIX (Vea, 1995). Dada la importancia del autor en su época, podemos suponer que esta obra fue una de las más usadas en la segunda enseñanza.

APLICACIÓN DEL ÁLGEBRA A LA GEOMETRÍA

En el capítulo I Lista da la definición de *Aplicación del Álgebra a la Geometría*, explica cómo obtener la solución analítica de un problema geométrico y analiza qué tipos de problemas se pueden resolver con este método. También define dimensión de una ecuación, ecuaciones homogéneas y heterogéneas y explica cómo convertir las segundas en las primeras, aunque gran parte del capítulo lo dedica a la construcción geométrica de las expresiones algebraicas de hasta grado tres.

El capítulo II trata íntegramente de la interpretación de las soluciones negativas en la Geometría Analítica y en el III se resuelven diez problemas que ejemplifican la teoría.

En nuestro análisis no seguiremos este orden exactamente, sino que insertaremos algunos de los problemas resueltos por el autor tras la explicación de los distintos conceptos.

Construcción de las fórmulas

Comienza Lista con la definición de aplicación del Álgebra a la Geometría, y las partes de que consta la solución analítica de un problema geométrico:

1. Llámase *aplicación del álgebra á la geometría* la solución de los problemas geométricos por medio de ecuaciones algebraicas.
2. La solución analítica de un problema geométrico consta de cuatro partes: Iª, representar por letras los datos y las incógnitas: 2ª, poner el problema en ecuación, ya por las propiedades de la figura geométrica, ya por las condiciones del problema: 3º, despejar las incógnitas: 4ª construir las fórmulas, es decir, hacer las operaciones geométricas que indica el valor de la incógnita (Lista, 1825, p. 121).

Es decir, Lista, al igual que Descartes, construye con regla y compás la solución geométrica a partir de la solución algebraica. Veremos que explica cómo hacerlo, pero antes trata otras cuestiones importantes, entre ellas los tipos de problemas que se pueden resolver con este método.

3. Las construcciones de la geometría elemental se hacen por medio de la línea recta y del círculo; y como las propiedades de estas dos líneas, demostradas en la geometría, solo producen ecuaciones de primero y segundo grado, se infiere que en la aplicación del álgebra á la geometría elemental solo se pueden construir fórmulas de primero y segundo grado (Lista, 1825, p. 121).

Esto es importante ya que para resolver el problema es necesario saber construir todos los tipos de soluciones que puedan surgir de la resolución algebraica. Con esta consideración se sabe que se presentarán polinomios, cocientes, radicales o una combinación de ellos.

También trata el problema de las ecuaciones homogéneas, y es que Lista, al igual que Descartes, considera que las letras y números de las ecuaciones representan segmentos, con lo cual sigue siendo necesario que las ecuaciones sean homogéneas:

> **4.** Si suponemos que todas las letras del cálculo representan distancias, la ecuacion debe ser homogénea, es decir, todos sus términos deben constar del mismo número de dimensiones ó factores literales; pues si la ecuacion fuera por ejemplo, $a=bx-c^3$, querria decir que una recta es igual á un rectángulo menos un cubo.
>
> **5.** Llámense ecuaciones eterogéneas aquellas cuyos términos no contienen igual número de factores literales, por haberse hecho alguno de ellos igual á la unidad. Para hacer homogénea una ecuacion heterogénea se hace =1 una letra, por ejemplo r, y se multiplican por sus potencias los términos que tengan menos dimensiones. Ejemplo. Si la ecuacion heterogénea es $a=bx-c^2m$ hecha homogénea será $ar^2=brx-c^2m$ (Lista, 1825, p. 122).

Es decir, sigue en todo el razonamiento de Descartes, y resuelve el problema de la misma manera, utilizando el segmento unidad, cosa que lleva a cabo de forma implícita ya que en ninguno de los ejemplos propuestos en el último capítulo hace una transformación explícita de ecuación heterogénea a homogénea. Lo que sí hace es plantear siempre los problemas en términos de ecuaciones homogéneas. Un ejemplo de esto lo vemos en el problema VIII:

> Hallar dos rectas, dada la suma de sus cuadrados y el área del rectángulo que forman.
>
> Sean x é y las dos rectas. Sea la suma de sus cuadrados a^2, y sea b^2 un cuadrado igual á su rectángulo.
>
> Las ecuaciones serán $x^2 + y^2 = a^2$, $xy = b^2$ (Lista, 1825, p. 134).

Obsérvese que iguala la suma de cuadrados y el producto de las longitudes a cantidades cuadradas.

Además, como las soluciones algebraicas deben venir dadas por expresiones homogéneas, deduce cómo deben ser estas:

> **6.** De aquí se infiere: 1º, que si x representa una distancia, y su valor algebraico es un polinomio, no puede ser otra cosa que la suma ó diferencia de varias líneas representadas por los términos del polinomio: 2º, si el valor de x es fraccionario, debe tener en su numerador un factor mas que en su denominador, para que despejando quebrados, resulte la ecuacion homogénea: 3º, si el valor de x es un radical de segundo grado, la cantidad que esté debajo debe tener dos factores, para que elevando al cuadrado ambos miembros, resulte la ecuación homogénea (Lista, 1825, p. 122).

Por último, una vez que ha deducido qué tipo de *fórmulas* podemos encontrar, pasa a explicar cómo se construyen. Indica cómo hacerlo en el caso de un polinomio, un valor fraccionario y radicales:

> **7.** Construir un polinomio.
> Sea $x=a+b-c+d-h$. Sobre una misma recta tómense las líneas positivas a, b, d, á continuación unas de otras. Quítesele á la línea que resulta la suma de las rectas c y h, y el residuo será el valor de x (Lista, 1825, p. 122).

En el caso de un cociente muestra diferentes variaciones del mismo, que se reducen al caso más sencillo en que $x = \dfrac{ab}{c}$, cuya construcción es la de una cuarta proporcional:

> **8.** Construir un valor fraccionario.
> Hay varios casos. 1º, siendo los dos términos monomios. La fórmula más sencilla para este caso es $x = \dfrac{ab}{c}$; de donde $c{:}a{::}b{:}x$. Búsquese una cuarta proporcional á c, a y b, y dicha cuarta proporcional será el valor de x (Lista, 1825, p. 122).

Por último explica cómo se construyen los radicales cuadrados. Los casos más sencillos que podemos encontrar son $x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, cuyas construcciones se reducen a la de la media proporcional de tres factores, la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o la de un cateto. Como en el caso de los cocientes explica la construcción de radicales más complejos, que se reducirán a los casos anteriores.

Veremos un ejemplo de todo lo expuesto en la solución del problema I:

> Inscribir un cuadrado en un triángulo dado (Lista, 1825, p. 127).
>
> Sea el triángulo dado ABC, y supongamos ya inscrito el cuadrado, y sea $DEFG$.
> Sea la base $AC=a$, la altura $BH=b$, y el lado del cuadrado $DE=IH=x$. Los triángulos semejantes ABC, DBE dan $\dfrac{AC}{BH} = \dfrac{DE}{BI}$

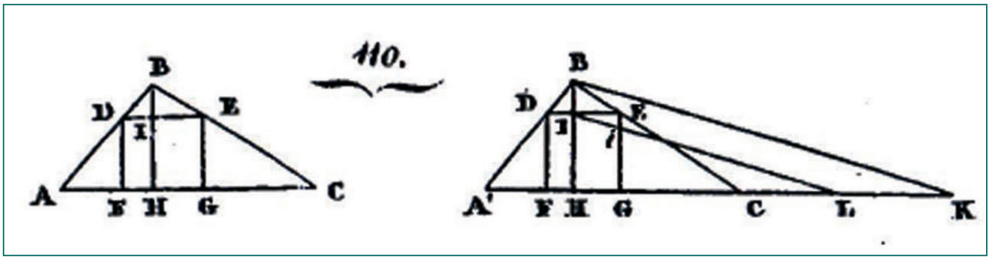


Ilustración 3. Lista, 1825, Figura 110

ó analíticamente $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x}{b - x}$. Resuelta la ecuacion, da $x \dfrac{ab}{a+b}$, fórmula, que se construye buscando una cuarta proporcional á a+b, a y b. (Lista, 1825, pp. 127-128).

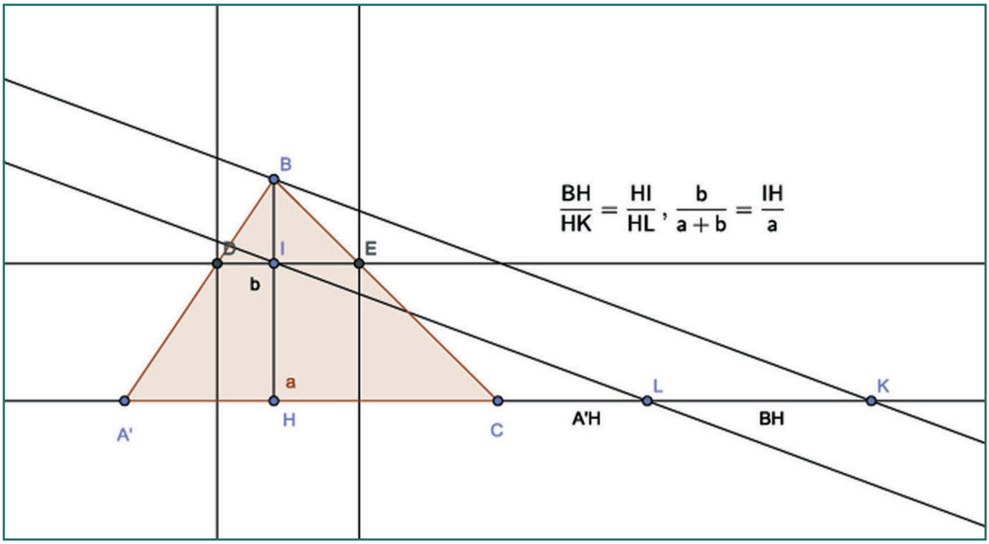


Ilustración 4. Reproducción de la figura 110 utilizando Geogebra.

Para ello toma sobre la prolongación de la base dos puntos *L* y *K* de manera que *HL=a* y *LK=b*. Traza por este último punto la recta *KB*, y una paralela a ella por L, formándose así dos triángulos semejantes de los que se obtiene la proporción $\frac{b}{a+b} = \frac{IH}{a}$, es decir el segmento IH es el segmento buscado. Para construir la solución traza una paralela a la base por el punto I, y seguidamente dos perpendiculares por los punto D y E respectivamente obteniéndose así el cuadrado inscrito pedido.

Teoría de los signos en *la análisis geométrica*

En el capítulo II trata el problema de las soluciones negativas, que Lista no rechaza como hacía Descartes, pero que sigue sin admitir con naturalidad. El hecho de que les dedique un capítulo da idea del problema que suponen para él.

Para explicar la construcción e interpretación de las soluciones negativas introduce el concepto de *figuras directas e indirectas*:

> **20.** Cuando dos figuras no se diferencian sino en el tamaño de sus partes, y estas estan colocadas ambas en un mismo sentido, se dice que las figuras estan en correlacion directa. La ecuacion que ligue entre sí las partes de dichas figuras, debe ser la misma para ambas; pues son casos particulares de una misma cuestion. (Lista, 1825, p. 125)

Parece que está hablando de figuras semejantes pero después pone un ejemplo en el que vemos que eso no es así.

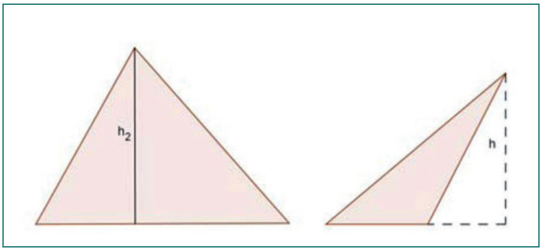


Ilustración 5. Figuras indirectas

21. Cuando dos figuras estan entre sí combinadas de tal manera, que una parte es en la una la suma de dos líneas, y en la otra es la diferencia de las mismas líneas, se dice que las figuras están en *correlacion indirecta*; y las ecuaciones, que las representen, deben diferenciarse en el signo de la línea, que es sumando en la una y substraendo en la otra. Las líneas que se añaden en una figura, y se restan en la otra, y que por consiguiente varian de signo en la ecuacion, se llaman *indirectas*. Para abreviar la frase, se suelen llamar las figuras directas ó indirectas segun su correlacion.
Ejemplo. Comparando entre sí dos triángulos, cuyas alturas caigan una dentro y otra fuera, son indirectos, porque la distancia de un vértice A á la perpendicular en el uno es = á la base menos el otro segmento; y en el otro la distancia del vértice correspondiente á la perpendicular es igual á la base mas el otro segmento. Este segmento, que es substraendo en la primera figura, y sumando en la segunda, es la cantidad indirecta[1]. (Lista, 1825, p.126)

Este tratamiento de las soluciones negativas, introduciendo sistemas correlativos, aparece también en la *Geometría analítica-descriptiva* (1819) de Mariano Zorraquín, que se basa, así mismo en la *Geometría de la Posición* de Carnot, como el mismo Zorraquín señala en su obra (Sánchez, 2015).

Lista continúa explicando que en un problema, sirve la misma ecuación para las dos figuras, con tan sólo variar el signo de aquellas cantidades que pasan de directas a indirectas (p. 126), y finalmente cómo se han de interpretar y construir las soluciones negativas de una ecuación:

> 23. Cuando de la resolucion de un problema geométrico resulta un valor negativo de la incógnita x, se muda el signo de esta en la ecuacion, y se tendrá la condicion á que satisface dicho valor negativo. Entonces se conocerán las líneas que se hacen indirectas en el problema, para que el valor negativo de x, hecho positivo, lo satisfaga (Al.21.3º)[2] (Lista, 1825, p.126).

Es decir, cuando se obtiene una solución negativa se ha de cambiar de signo para convertirla en positiva, se observa el efecto que este cambio produce en la ecuación de la que hemos obtenido x viendo qué líneas pasan de ser directas a indirectas para construirlas en sentido contrario que en el caso de la solución positiva. Esto se muestra claramente en el problema III, que analizaremos con detalle posteriormente.

Tras esta explicación, que sería el modo general de obrar con una solución negativa, Lista explica cómo ha de construirse tal solución cuando la variable se toma sobre una recta desde un punto fijo.

1. En el libro no hay figuras, las hemos insertado para una mejor comprensión del concepto.
2. Es una referencia que él inserta. Suponemos que Al. se refiere a álgebra.

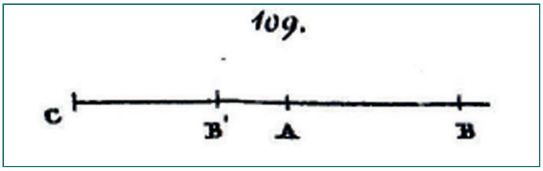


Ilustración 6: Lista, 1825, Fig. 109.

24. Si la x representa una parte, que se debe tomar sobre una recta desde un punto fijo, el valor negativo satisface al problema, tomándolo desde dicho punto fijo hácia la parte opuesta á aquella en que se hubiera tomado, si la x hubiera sido positiva (Fig. 109). Porque sea A el punto fijo, y sea la incógnita x la distancia de A á B, quedando este punto B determinado por una condicion establecida, sobre la cual se funda la ecuacion (2). Sea C otro punto cualquiera fijo tomado en la línea. Cuando este punto B está á la derecha de A, es $CB=CA+AB$: cuando está á la izquierda es $CB'=CA-AB'$: luego AB es cantidad indirecta, y su signo debe mudar de un caso para otro: luego el valor negativo de x debe interpretarse tomándolo á la izquierda del punto A (Lista, 1825, p. 127).

Tras esto hace una interesante reflexión:

> La análisis da negativo este valor, por la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion; pues en dicha figura hemos puesto el punto buscado B á la derecha de A, debiendo estar á la izquierda, segun lo ha hecho conocer el cálculo, dando negativo el valor de x. (Lista, 1825, p. 127)

Es decir, no considera las soluciones negativas absurdas, que en principio lo serían pues representan un segmento de longitud negativa, sino que deduce que se han obtenido tales soluciones porque se ha partido de una premisa errónea al plantear geométricamente el problema. Veremos esto también en el problema III.

Por último, considera cómo varía una cantidad que pasa de directa a indirecta de forma continua.

> 25. Toda cantidad variable, que de directa se hace indirecta, se hace igual á cero ó igual al infinito en el valor intermedio.
>
> Dem. Si la cantidad x se hace indirecta, será sumando antes y substrayendo después; de modo que habrá dos cantidades a y b tales que $a=b+x$, cuando x es directa, y $a=b-x$, cuando es indirecta. En el primer caso $x=a-b$, en el 2º $x=b-a$: luego en el primer caso a era mayor que b, y en el 2º menor; luego en el intermedio ha habido un caso en que $a=b$, y $x=0$.
>
> Puede suceder que el valor de x se determine por una fórmula de esta especie $x = \frac{A}{a-b}$, y entonces en el caso intermedio en que a=b, será x=∞: luego etc. (Lista, 1825, p. 127).

También podemos encontrar esta interpretación en la obra de Zorraquín:

> Con este objeto observemos que si en un sistema se tiene $a+x=b$ y en otro $a-x=b$, para el 1º será $x=b-a$ y para el 2º $x=a—b$ y puesto que siendo $b>a$ ha pasado á ser $b<a$, y además la variación se ha verificado por continuidad, habrá habido un caso en que $a=b$ y $x=0$ .Del mismo modo quando $x = \frac{1}{b-a}$ se convierte en $x = \frac{1}{a-b}$, resulta para x el valor intermedio

$\frac{1}{0} = \infty$. Concluiremos pues que *una cantidad inversa no puede hacerse directa por el movimiento continuo de las partes del sistema á que pertenece sin pasar por 0 ó*? (Zorraquín, 1819, p.31).

Y de nuevo esta idea proviene de Carnot, ya que:

> In 1801, Carnot even sees a relation between his approaches for the analyse infinitesimal and the quantités directes et inverses: they show "much analogy." In the former case, for an invariant system of quantities, one observes a second comparison system whose quantities transform into the quantities of the initial system through a continuous approximation to the limit. In the latter case, one likewise compares the quantities of two systems, and these are the absolute values in both systems that are equal to each other at the limit. (Schubring, 2005, p. 357)

Todo lo expuesto se observa claramente en las soluciones del problema que veremos a continuación:

> **Problema III:** Dado un diámetro y una cuerda perpendicular á él, tirar desde el estremo del diámetro otra cuerda tal, que su parte comprendida entre la primera cuerda y su arco sea igual á una recta dada (m) (Lista, 1825, p.129).

Los datos son el diámetro *AB* y la cuerda *CD*, y supone el problema resuelto siendo *AE* la cuerda pedida, por lo que *IE=m*.

Toma *AD=a, AE=x, AI=u*, de donde se tiene *x-u=m*.

Demuestra que los triángulos *ADE* y *AID* son semejantes obteniendo de ellos la proporción

$$\frac{AE}{AD} = \frac{AD}{AI}.$$

O $\frac{x}{a} = \frac{a}{u}$; de donde xu = a^2. Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} xu = a^2 \\ x - u = m \end{cases}$ que tiene como

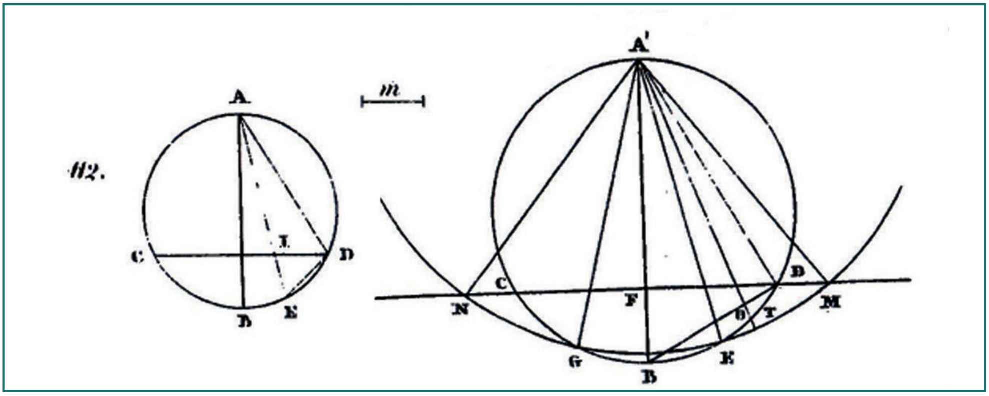


Ilustración 7. Lista, 1825, Figura 112, planteamiento del problema III construcción de las soluciones

soluciones: $u=-\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$, y $x=\frac{1}{2}m\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$. Los valores superiores de x y u son positivos, los dos inferiores negativos (Lista, 1825, p. 129).

Primero construye el valor positivo de la x:

Construyamos primero el valor positivo de *x*. Sea *A'B* el diámetro, *CD* la cuerda: tiro *A'D* y *DB*, que forman ángulo recto. Tomo $TO=\frac{1}{2}$: tiro la hipotenusa *A'O*, que será igual $\sqrt{\left(\frac{1}{4}m^2+a^2\right)}$. Prolóngola, hasta que la prolongación $TO=\frac{1}{2}$. Será *A'T* el valor de x. Hago centro en *A'* con él, y describo un círculo. Si este corta al dado en dos puntos, *E* y *G*, tirando las *A'E*, *A'G*, estas darán dos soluciones del problema. Se ve, pues, que un solo valor de la incógnita puede dar mas de una solucion. (Lista, 1825, p. 130)

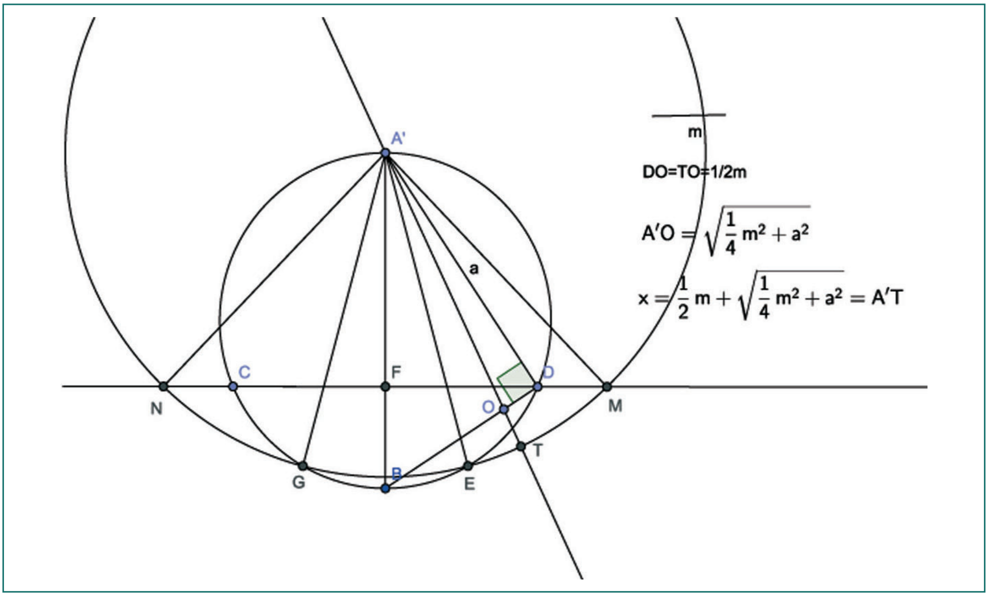


Ilustración 8. Construcción de las soluciones positivas.

Por último interpreta los valores negativos de x:

Vamos a interpretar los valores negativos de *x* y de *u*. Haciendo ambas incógnitas negativas en las ecuaciones del problema, $xu=a^2$ no se altera; pero x-u=m, se reduce á u-x =m lo que prueba 1º que la *m* es la línea que se hace indirecta; pues era x=u+m, y ahora es =u-m. (Lista, 1825, p. 130)

Es decir, cambia de signo los valores de *x* y *u* para hacerlos positivos y poderlos construir, y observa los cambios que esto produce en las ecuaciones originales, viendo qué líneas pasan de ser directas a indirectas. En este caso es *m* la línea que se hace indirecta, ya que habrá que "restarla" a *u* en vez de sumarla, es decir que habrá que construirla en sentido contrario al que se tomó en el caso de las soluciones positivas.

Además de esta conclusión saca una segunda, consecuencia de la primera:

> 2º Que ahora es $u>x$, y por tanto que la cuerda pedida debe cortar al círculo antes que á la cuerda *CD* (Lista, 1825, p. 130)

Tengamos en cuenta que *u* es la distancia entre el extremo del diámetro y el punto de corte de la cuerda solución con la cuerda dada, mientras que *x* es la distancia entre el mismo extremo del diámetro y el punto de corte de la cuerda solución y la circunferencia, por lo que ahora el segmento comprendido entre la cuerda y la circunferencia será exterior a esta y no interior, de ahí la obtención de la solución negativa, aparentemente absurda: en el dibujo que nos sirvió para realizar el planteamiento del problema habíamos supuesto que este segmento era interior. Vemos aquí un ejemplo de la explicación que da sobre la existencia de soluciones negativas, que él justificaba diciendo que se han obtenido por *la absurdidad que se ha cometido en la figura hipotética, que nos ha servido para formar la ecuacion* (Lista, 1825, p. 127).

Tras los razonamientos anteriores pasa a construir la solución negativa:

> Observando que el valor negativo de *u* es igual al positivo de *x*, se ve que prolongando la cuerda

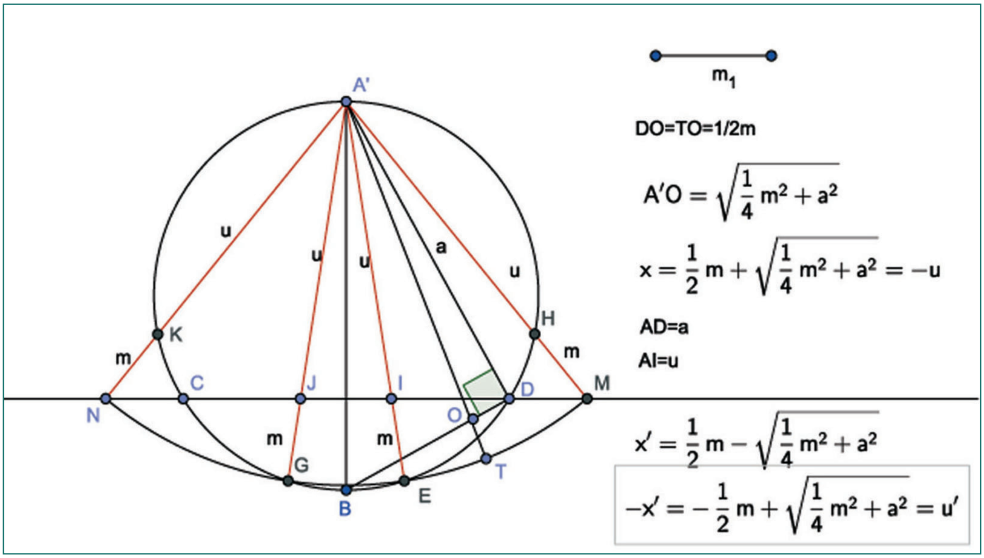


Ilustración 9. Construcción de todas las soluciones.

> *CD* y el arco *EG* hasta que se encuentren en *M* y *N*, y tirando la *A'M, A'N*, estas serán iguales al valor negativo de *u*, y darán otras dos soluciones del problema:(…) (Lista, 1825, p.130).

Vemos que Lista construye las cuatro soluciones que tiene el problema partiendo de una de ellas sin más que interpretar los cambios de signo que aparecen en las demás.

Para terminar señalaremos que a diferencia del resto de autores del siglo XIX (Sánchez, 2015), Lista no incluye en su estudio de la Geometría Analítica los sistemas de coordenadas, ni hace mención al concepto de lugar geométrico de una ecuación, y por tanto no obtiene las ecuaciones de una recta, ni introduce conceptos tales como distancias o ángulos entre elementos del plano.

CONCLUSIONES

Tras todo lo expuesto podemos sacar dos conclusiones importantes del análisis realizado a la obra de Lista:

Por una parte, como hemos visto, la Geometría Analítica de este autor está más próxima a la de Descartes que a la actual, trabajando con segmentos en vez de con números, arrastrando por tanto el problema de las ecuaciones homogéneas y de las soluciones negativas, aunque Lista no utiliza los sistemas de coordenadas, ni siquiera en el sentido en que lo hacía Descartes.

Por otra parte, se observa que, a pesar de utilizar el Álgebra para resolver los problemas, no abandona la Geometría por completo en ningún momento; y este no desligarse de la Geometría tiene por una parte una ventaja, y es que Lista tiene una visión geométrica de la parte algebraica que se ha perdido en nuestros días, ya que actualmente una vez que se obtienen las ecuaciones algebraicas del problema se olvida la situación geométrica de fondo hasta llegar a la solución, de la cual sólo damos la interpretación geométrica.

Pero estar tan atado a la Geometría también tiene sus inconvenientes, ya que en muchas ocasiones se complican innecesariamente los problemas al verse obligado a plantear siempre ecuaciones homogéneas y a construir las soluciones, tanto positivas como negativas, siendo la interpretación y construcción de éstas últimas un asunto bastante complejo en algunos casos, como hemos podido comprobar en los problemas mostrados. Quizá fuera esta complicación innecesaria una de las razones de la desaparición de este modo de hacer Geometría Analítica, en favor de otros planteamientos más algebraicos.

REFERENCIAS

Alberto Lista y Aragón. El autor: Vida y obra. (n.d.). En *Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes.* Recuperado en junio de 2014 de http://www.cervantesvirtual.com/portales/alberto_lista/autor_biografia/

Ausejo, E. (n.d. a). Rodríguez de Lista y Aragón, Alberto (1775-1848). En *divulgaMAT. Real Sociedad Matemática Española.* Recuperado el 28 de junio de 2014 de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=3415%3Arodrez-de-lista-y-aragalberto-1775-1848&catid=45%3Abiograf-de-matemcos-espas&directory=67&limitstart=1

Bagni, G. (2000). The role of the history of mathematics in mathematics education: reflections and examples. *Proceedings of CERME-1,* Schwank, I. (Ed.), II. Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck, 220-231.

Chica, A. (2001) *La matemática en sus personajes. Descartes. Geometría y método.* Madrid. NIVOLA.

Collados, E. (2008) El concepto de dibujo y su práctica en los libros de texto de educación primaria publicados en España en el periodo comprendido entre 1915-1900. *Historia de la Educación,* 27, 323-346.

Delgado, B. (1983). Los libros de texto como fuente para la historia de la Educación, *Historia de la Educación*, 2, 353-358.

Descartes, R. (1637) *La Geometría*. Traducido por Pedro Rossell. Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1947.

Etayo, J.J. (1992). El reinado de la Geometría Proyectiva. *Historia de la Matemática.* pp. 115-138. Recuperado en enero de 2012 de http://dmle.cindoc.csic.es/revistas/detalle.php?numero=5161.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En E. Castro (Coord.), *Investigación en Educación Matemática*. *Séptimo Simposio de la SEIEM*. pp.79-85. Granada. España; Universidad de Granada.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA. 7(3),* 251-292.

González, M. T. y Sierra, M. (2003) El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En E. Castro, P. Flores, T. Orega, L. Rico y A. Vallecillo (eds.) *Investigación en Educación Matemática VII*, 109-130 Granada: Universidad de Granada.

González, P.M. (2004a). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 45*, 17-28.

González, P.M. (2007).Raíces históricas y trascendencia de la geometría analítica. *Sigma: revista de matemáticas = matematikaaldizkaria. 30,* 205-236.

Lista, A. (1825) *Elementos de matematicas puras y mistas (sic).* Tomo III. Madrid. Imprenta de Don Leon Amarita.

Maz, A. (1999) La historia de las matemáticas en clase: ¿por qué? y ¿para qué? En Berenguer, M.I; Cardeñoso, J.M. y Torquero, M. (Eds). *Investigaciones en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* (pp. 205-209) Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). Santander. SEIEM

Maz, A., Torralbo, M., Rico, L. (Eds.) (2006). *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Peralta, J (2008). La matemática española del siglo XIX. *La Ciencia antes de la Gran Guerra.* Fundación la Orotava de Historia de la Ciencia.

Pérez. F. (1848). *Biografía de Alberto Lista y Aragón, seguida de una colección de poesías inéditas unas, y otras no comprendidas en las ediciones que se han hecho de las de dicho señor.* Madrid, Cuesta.

Puelles Benítez, M. (2000). Los manuales escolares: un nuevo campo de conocimiento. *Historia de la Educación*, *19*. 5-11.

Rey, J y Babini, J (1986). *Historia de la Matemática. Vol. 2. Del Renacimiento a la Actualidad.* Barcelona, GEDISA.S.A.

Rico, L y otros. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*. *58*, 7-23.

Sánchez, I.M. (2015). *La Geometría Analítica en los libros de texto para secundaria y universidad en España en el siglo XIX.* Tesis doctoral. Universidad de Salamanca.

Schubring, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. New York: Springer.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, *7 (3)*, 41-51.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España en el siglo XIX.* Zaragoza. Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón. Facultad de Ciencias (Matemáticas).

Zorraquín, M. (1819). *Geometría Analítica-Descriptiva*. Alcalá de Henares, Oficina de Manuel Amigo. Impresor de la Real Universidad.