Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2016, Vol. 33 (2), nº 93, 63-78**

Errores en la construcción de ecuaciones a partir de enunciados que contienen relaciones de proporcionalidad

Juan Gutiérrez-Soto
Universitat de València,
Jose Antonio González-Calero
Universidad de Castilla-La Mancha
David Arnau
Universitat de València

Resumen: *Las dificultades en la traducción del lenguaje verbal a ecuaciones se mantienen incluso en niveles universitarios. En esta investigación pretendemos identificar modelos explicativos de los errores cometidos cuando se construyen ecuaciones a partir de enunciados que contienen relaciones de proporcionalidad. Con este fin, desarrollamos una experimentación, en la que participaron 106 estudiantes universitarios, con una metodología mixta consistente en un estudio de grupo y en un estudio de casos. Los resultados muestran que tanto el error de inversión como otros errores identificados parecen consecuencia de interpretar incorrectamente el signo igual como indicador de simetría entre los miembros o son consecuencia de una traducción lineal del enunciado.*
Palabras clave: *álgebra, problemas verbales, error de inversión, razón y proporción*

Errors in the translation from word problems involving ratios into equations

Abstract: *The difficulties in the translation of verbal language into equations remain even at the university level. This study aims to identify explanatory models of the committed errors when the students set up equations from statements that contain proportionality relationships. An experiment with 106 university students was carried out. The experimental design consists of a mixed methodology that combines a quantitative study with a case study. Results show that both reversal error and other identified errors seem to be the result of an erroneous interpretation of the equals sign, in which the equals sign works as an indicator of symmetry between both sides of the equation, or a consequence of a linear translation of the statement.*
Keywords: *algebra, verbal problems, reversal error, ratio and proportion*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Clement (1982) estudió las dificultades que presentaban estudiantes universitarios al simbolizar en lenguaje algebraico ciertas relaciones expresadas en lenguaje natural. En algunos ítems se proponía la traducción de relaciones de proporcionalidad como: "Escribe una ecuación usando las variables *C* y *S* para representar la siguiente afirmación: 'En el restaurante de Mindy, por cada 4 personas que pidieron tarta de queso, hay 5 personas que pidieron strudel'. Donde *C* representa el número de pasteles de queso y *S* el número de strudels" (p. 17). Se encontró que solo el 27% daban la solución correcta y que el error más común era invertir el orden de los números en la ecuación ($4C=5S$). Sin embargo, la parte en la que más se profundizó fue en la traducción de comparaciones multiplicativas como, por ejemplo: "Escribe una ecuación usando las variables *S* y *P* para representar el enunciado siguiente: 'Hay seis veces tantos estudiantes como profesores en esta universidad'. Usa *S* para el número de estudiantes y *P* para el número de profesores" (p. 17). Así, en la colección de trabajos publicados por John Clement y colaboradores (Clement, Lochhead y Monk, 1981; Clement, Lochhead y Soloway, 1980) se propusieron dos posibles explicaciones para interpretar el error de inversión cuando se traducían comparaciones multiplicativas: 1) la coincidencia del orden de las palabras; y 2) la comparación estática. Sin embargo, estos modelos no necesariamente darían cuenta del fenómeno de la inversión en la traducción de relaciones de proporcionalidad. Así, en Rosnick y Clement (1980) se muestran casos en los que estudiantes que no invertían en la traducción de comparaciones multiplicativas sí que lo hacía al traducir relaciones de proporcionalidad. De hecho, en las entrevistas realizadas a estudiantes en Rosnick y Clement (1980) se puso de manifiesto una falta de compresión conceptual en la interpretación de las situaciones de proporcionalidad que no se daba en la situación de comparación multiplicativa.

La novedad principal de la investigación que presentamos reside en que se ha intentado controlar el efecto de la variables de la tarea para observar su influencia sobre la mayor o menor incidencia del error de inversión y otros errores de traducción en situaciones de proporcionalidad. Esta misma línea ya ha sido seguida en los estudios dedicados al análisis del error de inversión en la traducción al lenguaje del álgebra de enunciados con comparaciones multiplicativas. Una de las líneas analizadas ha sido determinar el efecto de la información matemática implícita que proporciona el contexto descrito en el enunciado en la mayor o menor incidencia del error de inversión. Así, una situación en la que se describe una relación entre profesores y estudiantes permite decidir qué cantidad es mayor y, por lo tanto, el resolutor podría utilizar este conocimiento para determinar si la ecuación que acaba planteando tiene o no sentido dentro de la situación descrita. Sin embargo, en estudios como los de Cohen y Kanim (2005), González-Calero, Arnau y Belenguer-Laserna (2015) y Wollman (1983) se ha concluido que la incidencia del error de inversión no se veía influida por la presencia de estas pistas contextuales. No obstante, el diseño experimental de estos estudios impidió determinar si realmente la información implícita se tenía en cuenta, aunque no fuera relevante en relación con el error de inversión, o si ni tan siquiera era detectada por los sujetos.

El objetivo global de nuestra investigación es describir modelos plausibles que expliquen la aparición de errores, y en especial del error de inversión, en la traducción algebraica de relaciones de proporcionalidad. En este artículo nos proponemos, en concreto, (1) determinar

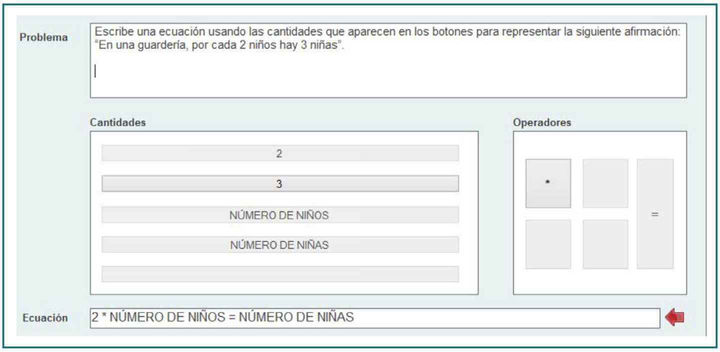

Figura 1: Aplicación informática diseñada para la recogida de datos.

si se observan diferencias en el tipo de respuestas con error de inversión según la inclusión o no en los enunciados de contextos que permiten detectar qué cantidad es mayor; (2) describir el tipo de respuestas erróneas que producen los estudiantes en este tipo de tareas; e (3) identificar los razonamientos empleados por los estudiantes cuando abordan estas tareas.

DISEÑO DE ESTUDIO EMPÍRICO

Participantes y metodología general

En el estudio participaron 106 estudiantes de tercer curso del Grado de Maestro en Educación Primaria de una universidad pública española. Los estudiantes estaban cursando una asignatura sobre didáctica de la aritmética y ya habían sido instruidos en la enseñanza de fracciones y razón y proporción. La elección de este nivel educativo respondió a que en las investigaciones realizadas sobre el error de inversión es habitual recurrir a estudiantes universitarios tanto de ciencias como de ciencias sociales (Clement, 1982; Fisher, Borchert y Bassok, 2011). Por otro lado, la existencia de estos estudios previos en este mismo nivel educativo nos permite contar con un referente a la hora de analizar los resultados de nuestra investigación.

Como es habitual en la investigación en educación, nuestro estudio empírico recurre a una muestra de conveniencia no aleatoria. El diseño experimental combina una fase inicial de estudio de grupo con otra posterior de estudio de casos, lo que permite una mayor comprensión de los hallazgos cuantitativos (Kelle y Buchholtz, 2015).

Instrumentos

Hemos empleado en esta investigación una herramienta informática en la que el estudiante construye las ecuaciones en un entorno gráfico. La aplicación se puede configurar para exigir que la respuesta del estudiante contenga algunos elementos de manera obligatoria o para restringir los signos de operación que puede utilizar (Fig. 1). Para construir las ecuaciones deben emplearse los botones con los signos de operación y con las etiquetas permitidas en cada problema. En el presente estudio se optó por restringir el tipo de operaciones que los estudiantes podían emplear, obligándoles a usar la multiplicación exclusivamente. Además se configuró el sistema para obligar que las respuestas de los estudiantes contuvieran al menos un signo igual.

Se elaboraron dos ítems usando el mismo modelo empleado en Clement (1982) para la "tarea del restaurante de Mindy". Se hizo variar la presencia o no de pistas contextuales en el enunciado, mientras se mantenía constante en ambos casos que se relacionaran cantidades discretas. Se decidió usar nombres, en lugar de letras, tanto en la descripción de la tarea como en las etiquetas de los botones para minimizar el posible efecto de que los estudiantes consideren las letras como abreviaturas de objetos en lugar de número de objetos (Küchemann, 1978). Por esta misma razón se optó por utilizar un nombre en el que apareciera la palabra número (número de profesores) en vez de otro en el que no apareciera (profesores), pues, como señala Rosnick (1981), esto podría ser un posible desencadenante del error de inversión. Además, el uso de la herramienta informática garantizaba que todos los estudiantes hiciesen uso de los mismos nombres para las cantidades a la hora de construir las ecuaciones.

Los ítems empleados fueron:

- *Tarea m*édicos-pacientes (pista contextual). Escribe una ecuación, usando las cantidades 3, 29, NÚMERO DE MÉDICOS, NÚMERO DE PACIENTES, para representar la siguiente afirmación: "En un hospital, por cada 3 médicos hay 29 pacientes".
- *Tarea niños-niñas (sin pista contextual)*. Escribe una ecuación usando las cantidades 2, 3, NÚMERO DE NIÑOS, NÚMERO DE NIÑAS, para representar la siguiente afirmación: "En una guardería, por cada 2 niños hay 3 niñas".

ESTUDIO DE GRUPO

La recogida de datos

La recogida de datos se realizó en una de las aulas de informática del centro con la aplicación informática diseñada *ad hoc*. Todos los estudiantes que participaron en el estudio resolvieron las mismas tareas, pero el orden en que se les presentó fue aleatorio para evitar la influencia de efectos como el aprendizaje.

Para instruir a los estudiantes en el uso de la aplicación, uno de los investigadores resolvió una tarea similar. En esta primera tarea se solicitaba construir una ecuación pero para evitar cualquier sesgo, el enunciado contenía relaciones aditivas no comparativas. En concreto, la tarea empleada decía: "Escribe una ecuación usando Z, Y, 5 y 3 para representar el enunciado siguiente: "Z menos 3 es igual a 5 más Y". Una vez los estudiantes manifestaron tener claro el funcionamiento del programa, se les indicó que podían iniciar la prueba.

Análisis de los datos

La aplicación informática almacena en una base de datos las respuestas de los estudiantes en cada ítem así como los tiempos empleados en la respuesta. Para contabilizar los tiempos de respuesta se toma el tiempo entre dos pulsaciones del botón "Validar", lo cual incluía tanto la lectura de la tarea como la construcción de la ecuación.

Las respuestas de los estudiantes se clasificaron en correcta, error de inversión y otro tipo de error. Así, en el ítem médicos-pacientes, se consideró como error de inversión cualquier respuesta equivalente a la ecuación 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES, siendo la respuesta correcta cualquiera que pudiera transformarse mediante manipulaciones algebraicas a 29*NÚMERO DE PACIENTES = 3*NÚMERO DE MÉDICOS. Cualquier respuesta que no pudiera transformarse en ninguna de las ecuaciones anteriores se consideró otro tipo de error. Dentro de esta última categoría distinguimos las que se presentaban como un producto de números igual a un producto de literales (p. ej., “3*29=NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES”).

Por otro lado, también se tuvo en cuenta si el orden en que se simbolizaban las cantidades dentro de la ecuación era el mismo que el de aparición en el enunciado. En este análisis se determinó la aparición de los nombres (por ejemplo, NÚMERO DE MÉDICOS y NÚMERO DE PACIENTES en la tarea médicos-pacientes) a izquierda o derecha de la ecuación. Además, en el análisis se cuantificó la incidencia de la comisión del caso particular de error de inversión que supondría la construcción de la ecuación que coincide de manera lineal con el orden de las cantidades en el enunciado (por ejemplo, 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES en la tarea médicos-pacientes).

Tabla 1: Frecuencia absoluta y porcentaje de los tipos de respuesta.

Tipo de respuesta	ítem médicos-pacientes	ítem niños-niñas
Correcta	6 (5,7%)	9 (8,5%)
Incorrecta, inversión	40 (37,7%)	41 (38,7%)
Incorrecta, producto de números igual a producto de literales	21 (19,8%)	26 (24,5%)
Incorrecta, otras	39 (36,8%)	30 (28,3%)

En la tabla 1 se observa un porcentaje de respuestas correctas muy bajo en ambos ítems. Un test de McNemar confirmó que no había diferencias significativas en la proporción de respuestas correctas entre ambos ítems, lo que parece descartar la influencia de la presencia de información contextual que permitía determinar qué cantidad era mayor en las actuaciones (véase tabla 2). Tampoco se observan diferencias significativas cuando se comparaba la incidencia del error de inversión (véase tabla 3).

El análisis de las respuestas desde el punto de vista del orden en que aparecen las cantidades en la ecuación también ofreció resultados similares en ambos ítems. Entre las respuestas consideradas como error de inversión, la cantidad NÚMERO DE MÉDICOS apareció 39 veces a la izquierda de la ecuación sobre un total de 40 y la cantidad NÚMERO DE NIÑOS apareció 38 veces a la izquierda de la ecuación sobre un total de 41. Además 3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES (y 2*NÚMERO DE NIÑOS = 3*NÚMERO DE NIÑAS en el ítem niños-niñas) fue la ecuación que mayoritariamente se construyó cuando los estudiantes cometían error de inversión (30 de 40 en el ítem de médicos-pacientes y 29 de 41 en el ítem de niños-niñas). Esto, en un principio, podría deberse a que los estudiantes realizan una lectura lineal del enunciado de izquierda a derecha que traducen literalmente al lenguaje del álgebra.

Tabla 2: Tabla de contingencia de respuestas correctas

		ítem niños-niñas		
ítem médicos-pacientes		**Correctas**	**Incorrectas**	**Total**
	Correctas	3	3	6
	Incorrectas	6	94	100
	Total	9	97	106

Tabla 3: Tabla de contingencia de respuestas con error de inversión.

		ítem niños-niñas		
ítem médicos-pacientes		**Error de inversión**	**No error de inversión**	**Total**
	Error de inversión	34	6	40
	No error de inversión	7	59	66
	Total	41	65	106

Por otro lado, es destacable la aparición del error que hemos llamado producto de números igual a producto de literales (véase la Tabla 1), el cual en principio podría asociarse a una representación simétrica de la información a ambos lados del signo igual. Es decir, se podría interpretar que los estudiantes en esta construcción multiplican a ambos lados número de médicos por número de pacientes (y proceden de manera análoga en la tarea niños-niñas). Este razonamiento parece basarse de forma implícita en que el producto de pacientes por médicos debía ser constante o que el signo igual tenía un significado distinto al de equivalencia. Sin embargo, tampoco sería descartable que fuera consecuencia de la necesidad de los alumnos por realizar operaciones con los números dados.

El orden en el que aparecen las cantidades en los errores catalogados como producto de números igual a producto de literales refleja que la mayoría de los que contestaron de esta forma buscaron una simetría al escribir las ecuaciones. Por ejemplo, en el ítem médicos-pacientes, identificaron 3 con NÚMERO DE MÉDICOS y 29 con NÚMERO DE PACIENTES, y construyeron la ecuación multiplicando 3*29 en un miembro y NÚMERO DE MÉDICOS y NÚMERO DE PACIENTES en el otro, manteniendo el mismo orden que se había usado al multiplicar los números. Así, se observa que en el ítem médicos-pacientes, las 21 respuestas catalogadas con este error son de la forma 3*29=NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES, o su equivalente intercambiando los miembros de la ecuación o la ecuación NÚMERO DE PACIENTES*NÚMERO DE MÉDICOS=29*3. En el caso del ítem niños-niñas, 24 de las 26 respuestas catalogadas con este error son de alguna de las formas siguientes: 2*3=NÚMERO DE NIÑOS*NÚMERO DE NIÑAS, o su equivalente intercambiando los miembros de la ecuación; o la ecuación NÚMERO DE NIÑAS*NÚMERO DE NIÑOS=3*2 o su equivalente al intercambiar los miembros de la ecuación.

ESTUDIO DE CASOS

Selección de los participantes

La intención inicial de esta parte del estudio era identificar los razonamientos que habían llevado a los estudiantes a cometer error de inversión en el estudio de grupo. Sin embargo, la aparición del error no documentado al que hemos identificado como producto de números igual a productos de literales nos condujo también a interesarnos por su origen. Se seleccionaron cinco estudiantes: el sujeto 1 y sujeto 2 que construyeron las ecuaciones utilizando criterios distintos en los ítems del estudio de grupo; el sujeto 3 que igualó las cuatro cantidades en ambos ítems; el sujeto 4 que incurrió en ambos ítems en el error que hemos llamado producto de números igual a producto de literales; y el sujeto 5 que cometió en ambos ítems error de inversión construyendo ecuaciones en las que las cantidades se disponían en el mismo orden que aparecían en el enunciado.

Metodología

El estudio se realizó seis días después de que hubieran resuelto los problemas del estudio de grupo. Como la intención del estudio era que los estudiantes explicaran su razonamiento, se decidió, siguiendo las recomendaciones de Schoenfeld (1985), realizar entrevistas individuales con el menor grado de intervención posible por parte del entrevistador.

A partir de los vídeos obtenidos se elaboraron los protocolos escritos. En las transcripciones hemos intentado ser fieles al discurso de los estudiantes. Los puntos suspensivos se emplean dentro de la transcripción de las verbalizaciones para indicar una interrupción en el discurso, un final impreciso, una duda o una rectificación inmediata a lo que se acaba de decir. En algunos casos, hemos decidido eliminar algunos fragmentos cuando el discurso se alejaba de la línea de razonamiento. Esto lo hemos marcado con puntos suspensivos entre corchetes.

Análisis de los resultados

a) El caso del sujeto 1

El sujeto 1 fue seleccionado porque en el estudio de grupo dio una respuesta clasificada como error de inversión (2 * NÚMERO DE NIÑOS = 3 * NÚMERO DE NIÑAS) y otra incorrecta en la que no usaba las cuatro cantidades que se ofrecían (29 = 3 * NÚMERO DE MÉDICOS). La intención era observar qué explicación daba al error de inversión. Así, se le propuso en primer lugar resolver la tarea de niños-niñas pudiendo usar tanto el signo de multiplicación como de división. Construyó la ecuación inversa 2*NÚMERO DE NIÑOS=3*NÚMERO DE NIÑAS y cuando se le pidió que explicara por qué ha escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 1: He puesto que niños y niñas es equis. Por lo tanto, he multiplicado dos por número de niños, que sería como la incógnita por así decirlo… O sea... [...]... Es como… en la ecuación son cosas que valen lo mismo, entonces he multiplicado dos por niños es igual a tres por niñas, suponiendo que niños y niñas es la equis de la ecuación.

Observamos que en lugar de razonar sobre las relaciones matemáticas empleadas a la hora de construir la ecuación en esa disposición concreta, focaliza su atención en la representación de las cantidades, explicando que las palabras “NÚMERO DE NIÑOS” y “NÚMEROS DE NIÑAS” hacen el papel de letras.

A continuación se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero en este caso en la aplicación solo estaba disponible el signo de multiplicar tal y como se le había presentado en el cuestionario inicial. El sujeto construyó la ecuación inversa 3*NÚMERO DE MÉDICOS=29*NÚMERO DE PACIENTES y dio la siguiente explicación:

> Sujeto 1: Aquí pone que en un hospital, por cada tres médicos hay veintinueve pacientes… Entonces, es que yo sinceramente no veo ninguna ecuación ahí, ¿sabes?
>
> Entrevistador: Pero has escrito una…
>
> Sujeto 1: Sí, o sea, he puesto lo de antes [parece referirse a la tarea que acaba de realizar]… tres por número de médicos igual a veintinueve por equis, [...], pero yo no le veo sentido a esta ecuación,… no veo que sea una ecuación.

El sujeto repite en dos ocasiones que en la expresión que ha construido no ve ninguna ecuación, lo que podría poner de manifiesto que el sujeto se ha limitado a representar la información que se ofrecía en el enunciado sin realizar un razonamiento sobre las cantidades implicadas. La acción y la posterior explicación podría ser modelada por la interpretación conocida como *coincidencia en el orden de las palabras* (Clement, 1982). Esto supondría considerar que ha realizado una traducción lineal de izquierda a derecha del enunciado al lenguaje del álgebra.

b) El caso del sujeto 2

El sujeto 2 fue seleccionado porque en el estudio de grupo dio una respuesta correcta (NÚMERO DE MÉDICOS * 29 = NÚMERO DE PACIENTES * 3) y otra incorrecta clasificada como producto de números igual a producto de literales (NÚMERO DE NIÑOS * NÚMERO DE NIÑAS = 2 * 3). La intención era observar si esta última respuesta era el resultado de un despiste o si realmente era fruto de algún razonamiento que evidenciara dificultades conceptuales serias.

En el estudio de casos, en primer lugar, se le propuso resolver la tarea de niños-niñas permitiéndoles usar tanto el signo de multiplicación como el de división. Construyó la ecuación 2/NÚMERO DE NIÑAS=NÚMERO DE NIÑOS/3 usando exclusivamente la operación división. Cuando se le pidió que explicara por qué había escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 2: He pensado que dos, que son los niños, partido por el número de niñas, equivaldría al número de niños que está representado por dos partido por tres que es lo que representa el número de niñas... He pensado que dos que es el número de niños partido por el número de

niñas, que no lo he puesto con el número sino con las letras, equivaldría al número de niños, en este caso el dos, partido tres que equivaldría al número de niñas.

La verbalización anterior nos permite deducir que el sujeto 2 replica en ambos términos de la ecuación un esquema *número de niños partido por número de niñas*. La base de este razonamiento podría apoyarse sobre la idea correcta de igualar razones, como sería igualar 2/3 a NÚMERO DE NIÑOS/NÚMERO DE NIÑAS. Sin embargo, el alumno entiende que 2 y NÚMERO DE NIÑOS, y 3 y NÚMERO DE NIÑAS, son dos representaciones de una misma cosa intercambiable, como se pone de manifiesto en "he pensado que dos que es el número de niños partido por el número de niñas, que no lo he puesto con el número sino con las letras". En definitiva parece centrarse en un razonamiento correcto quizá apoyado en la idea de que se cumpla una simetría respecto del signo igual, pero plantea una equivalencia no existente entre cantidades por el mero hecho de referirse a una colección formada por el mismo tipo de objetos (2, el número de niños usando para construir la razón, y NÚMERO DE NIÑOS, que sería un número de niños cualquiera).

A continuación, se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero, en este caso, la aplicación se configuró para que solo pudiera utilizar el signo de multiplicar. Construyó la ecuación 3*29=NÚMERO DE MEDÍCOS*NÚMERO DE PACIENTES y, cuando se le pidió que explicara por qué ha escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 2: Éste es muy sencillo. Como dice que cada tres médicos hay veintinueve pacientes, lo que haríamos sería multiplicar el número de médicos por el número de pacientes, que es tres por veintinueve y eso equivaldría al número de médicos que se representa por el número tres por el número de pacientes que se representa por veintinueve. Una equivalencia entre número y las letras.

Al forzar al sujeto a usar el signo de multiplicación, construyó la ecuación empleando un esquema similar al caso anterior: *número de niños por número de niñas*. Esto vuelve a poner de manifiesto que interpreta el signo igual como un indicador de que la estructura de las expresiones algebraicas de ambos términos debe ser la misma. Nuevamente el estudiante considera intercambiables 3 y NÚMERO DE MÉDICOS como se refleja en "y eso equivaldría al número de médicos que se representa por el número tres por el número de pacientes que se representa por veintinueve".

c) El caso del sujeto 3

El sujeto 3 produjo dos respuestas erróneas incluidas en la categoría otros (NÚMERO DE NIÑOS = 2 = NÚMERO DE NIÑAS = 3 y NÚMERO DE MÉDICOS = 3 = NÚMERO DE PACIENTES = 29). La singularidad de las respuestas condujo a incluirlo en el estudio de casos.

Se le ofreció la tarea de niños y niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división. El sujeto construyó la ecuación correcta 2/3*NÚMERO DE NIÑAS = NÚMERO DE NIÑOS. Cuando se le pidió que explicara por qué había escrito esta ecuación, no proporcionó una explicación sino que se limitó a describir lo que había escrito:

Sujeto 3: Para sacar el número de niños que hay, habría que calcular que … que si sabes el número de chicas, pues dos tercios equivaldría al número total de niños.

A continuación se le ofreció la tarea médicos-pacientes, pero esta vez teniendo disponible solamente el signo de multiplicar. El sujeto 2 construyó la ecuación correcta 29*NÚMERO DE MÉDICOS = NÚMERO DE PACIENTES*3, y al preguntarle por qué había escrito esa ecuación, respondió:

Sujeto 3: Pues no sé, ¿puedo cambiar?
Entrevistador: Prefiero que expliques por qué has escrito esta ecuación.
Sujeto 3: No sé, había puesto una cosa… Es que es cada tres [señala al enunciado] Es que había puesto por ejemplo [señala la ecuación] tres por número de médicos por veintinueve, porque así, por cada médico... por cada… La cifra de los médicos, la multiplico por tres… Eso me da grupos de tres, que se multiplicaría por veintinueve, porque cada tres médicos le corresponden veintinueve… y me saldría el número de pacientes…. No sé…
Entrevistador: ¿Cómo sería?
Sujeto 3: He pensado que si a cada grupo de tres médicos le corresponden veintinueve pacientes, para saber el número de pacientes, lo que puedo hacer es multiplicar tres por el número de médicos, para agruparlos de tres en tres, por veintinueve… entonces tendría el número de pacientes. No sé si tiene sentido.

Como se observa en el diálogo anterior, cuando se le pide que razone la respuesta, el estudiante rechaza su validez y pretende modificarla. El estudiante se centra en la ecuación que hubiera querido construir y en su razonamiento introduce una idea incorrecta que llevaría a plantear la ecuación 3*29* NÚMERO DE MÉDICOS = NÚMERO DE PACIENTES. Parece que el estudiante intenta adaptar la ecuación que había construido anteriormente (cuando había construido correctamente 2/3*NÚMERO DE NIÑAS = NÚMERO DE NIÑOS) al caso actual en el que solo puede utilizar el signo de multiplicación. De todo lo anterior se puede concluir que el estudiante prioriza conservar la estructura espacial sin tener en cuenta la necesidad de equivalencia que debe haber entre los términos de la igualdad.

Tras este diálogo el entrevistador reconduce la situación hacia la ecuación que realmente había escrito el alumno.

Entrevistador. Esto es lo que has pensado, pero no lo has escrito...
Sujeto 3: No lo he escrito porque se me ha ocurrido después. Esto lo he escrito como para acabar el problema… Lo he escrito porque… No sé… por cruzar un poco los datos.
Entrevistador: ¿Por qué has elegido ese orden?
Sujeto 3: He elegido ese orden porque… Si hubiera hecho tres por el número de médicos… si cambio el orden tendría más sentido. He escrito eso porque, no sé, se tenía que cruzar los datos. La cantidad de unos se debería cruzar con la de los otros. Lo que pasa es que, si hubiera hecho tres por número de médicos igual a veintinueve por número de pacientes, habría hecho lo mismo que antes… habría tenido que por cada tres médicos… me habría salido esa proporción.

En el diálogo se pone de manifiesto que el estudiante al construir la ecuación correcta no estaba realizando un razonamiento correcto, sino que se apoyaba sobre una intuición en la que nuevamente no se tenía en cuenta la necesidad de que el signo igual conectara dos cantidades equivalentes. La guía en este caso era la idea de "cruzar un poco los datos", la cual parece plausible asociar a un construcción mental de un esquema de regla de tres.

d) El caso del sujeto 4

El sujeto 4 fue seleccionado al contestar las dos veces igualando el producto de números al producto de literales (NÚMERO DE NIÑOS * NÚMERO DE NIÑAS = 2 * 3 y NÚMERO DE MÉDICOS * NÚMERO DE PACIENTES = 3 * 29). El objetivo era poner de manifiesto por qué había dado esas respuestas y si al permitirle el uso de la división construiría la misma ecuación pero con división, obteniendo así una solución correcta. Se le ofreció la tarea de niños-niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división y construyó la ecuación correcta NÚMERO DE NIÑOS/NÚMERO DE NIÑAS = 2/3. Lo justificó del siguiente modo:

> Sujeto 4: La he hecho igual.. de la misma forma que hice todos los problemas. [se refiere al estudio de grupo] Porque en clase hemos hablado de la fracción como dos partes, entonces pone de cada dos de cada tres... Lo que pasa a mí el… por cada dos niños hay tres niñas [leyendo] el por cada me lía bastante, pero lo he hecho… tal como lo hemos hecho en clase yo creo que es… dos… comparar dos partes. No es una fracción para operar ni nada de eso sino como comparar dos partes y lo pongo así porque... número de niños… o sea, pongo a una parte las letras y a la otra las... la fracción no sé por qué. Lo he hecho siempre así. No sé. Porque yo de normal cuando me dan dos niñ… por cada dos niños hay tres niñas, yo pongo la fracción, entonces, a una parte pongo las letras y a la otra la fracción.

La estudiante justifica su respuesta utilizando algunas de las ideas sobre fracciones, razón y proporción que posiblemente se han presentado a lo largo de su formación como maestra. Manifiesta las dificultades que le plantea la comparación "por cada" y afirma que se apoya sobre la idea de fracción como parte-parte. En la parte final de su explicación introduce un razonamiento que se apoya sobre la disposición de elementos a ambos lados del signo igual ("pongo a una parte las letras y a la otra las... la fracción no sé por qué"). Es decir, parece construir la ecuación atendiendo a una configuración espacial, pero sin tener en cuenta la necesidad de que ambos miembros del signo igual representen cantidades iguales.

A continuación se le ofrece la tarea médicos-pacientes, pero obligándole a usar el signo de multiplicar. Construye la ecuación NÚMERO DE MÉDICOS*NÚMERO DE PACIENTES = 3*29 y lo justifica de la siguiente manera:

> Sujeto 4: No tengo un porqué en sí, porque cuando hicimos los problemas que hicimos [se refiere al cuestionario del estudio de grupo] habían tanto de multiplicación como de división. Cuando me dejaba hacer solo la multiplicación yo veo un problema igual que el de división… Yo haría una división…
>
> Entrevistador: ¿Y cómo la harías?
>
> Sujeto 4: Igual que he hecho el anterior.
>
> Entrevistador: Venga.

Sujeto 4: Tres partido de veintinueve… Pero no puedo porque no tengo la división. Yo lo escribiría así, seguramente estaría mal porque no sé cómo lo escribiría… no sabría escribirlo de otro manera… Yo lo escribo así, bueno será lo mismo… [...]... Yo leo esto "por cada tres médicos hay veintinueve pacientes" y yo haría otra vez fracción. Pero si me das esos datos haciendo una multiplicación, no sabría qué hacer porque no puedo multiplicar las palabras por un número.

En el diálogo anterior, se observa que la estudiante es capaz de mantener el razonamiento que le llevaría a la producción de una ecuación correcta si pudiera usar la división. Sin embargo, afirma que no puede hacerlo usando multiplicación. En su razonamiento se pone de manifiesto que es capaz de transformar la ecuación que plantearía usando divisiones a una ecuación en la que solo haya multiplicaciones, pero considera imposible "multiplicar las palabras por un número". Nuevamente, parece que lo que gobierna las decisiones sobre la corrección de la ecuación son criterios de configuración espacial sobre la idea de expresar cantidades equivalentes. En este caso parece que intentar trasladar la idea de colocar una operación con los números en un lado y una operación con los literales en el otro. Esta interpretación se refuerza al continuar el diálogo:

Entrevistador: ¿No puedes?

Sujeto 4: Yo no puedo mult… O sea, si yo multiplico número de médicos por veintinueve estoy haciendo lo mismo que pone en la misma [sic] tres por veintinueve. Porque número de médicos es tres y número de pacientes es veintinueve daría igual que pusiera el número con las letras en todo caso porque sería lo mismo.

De hecho, la afirmación que realiza inicialmente ("si yo multiplico número de médicos por veintinueve") le llevaría a un planteamiento correcto. Sin embargo, supone una equivalencia incorrecta entre el número de médicos que aparece en la comparación (representado por 3) con un número de médicos cualquiera (representado por un literal) que le permite elegir una representación incorrecta en la que se conserve la idea de colocar números en una parte de la ecuación y literales en la otra.

e) El caso del sujeto 5

El sujeto 5 fue seleccionado por haber cometido dos veces el error de inversión en el estudio de grupo (3*NÚMERO DE MÉDICOS = 29*NÚMERO DE PACIENTES y 2*NÚMERO DE NIÑOS = 3 * NÚMERO DE NIÑAS). En primer lugar, se le ofreció la tarea de niños-niñas, teniendo disponible tanto la multiplicación como la división. Construyó la ecuación 2/NÚMERO DE NIÑAS = 3/NÚMERO DE NIÑOS lo que implicó cometer un error de inversión. Cuando se le pidió que explicase por qué había escrito esta ecuación, respondió:

Sujeto 5: Por cada dos número de niños [señala el botón 2], o sea de niñas, no lo voy a multiplicar por el número total... sino… Esto es la multiplicación, ¿no? [Señala el signo de la multiplicación]

Entrevistador: Sí.

> Sujeto 5: Si pusiera dos por número de niñas, estaría multiplicando los datos totales, y por eso he utilizado la barrita de división [señala la división]. He puesto que cada dos números de niñas (señala el primer miembro de la ecuación construida) tenemos tres números de niños (señala el segundo miembro de la ecuación). Cuando hice esto [se refiere al estudio de grupo] empecé haciéndolo así, y a mitad cambié, porque pensé en lo de las multiplicaciones, o sea, si esto es igual, yo diría, dos (señala dos en la ecuación que ha construido) por número de niños (señala NÚMERO DE NIÑOS en el otro miembro), y el tres por el número de niñas. La multiplicación en cruz y entonces me lie y lo cambié todo otra vez.

Al explicar la ecuación el sujeto se refirió a los miembros de la ecuación de manera idiosincrásica (2/NÚMERO DE NIÑAS como "dos número de niñas") y explicó que había llegado a esta ecuación partiendo de una representación mental de la ecuación invertida 2*NÚMERO DE NIÑOS =3*NÚMERO DE NIÑAS y pasando los literales dividiendo al otro término ("multiplicando en cruz").

A continuación se le ofreció la tarea de Médicos-pacientes, pudiendo disponer tan solo la multiplicación como en el estudio de grupo y construyó la ecuación incorrecta 3*NÚMERO DE MÉDICOS=NÚMERO DE PACIENTES. Cuando se le pidió que explicase por qué había escrito esta ecuación, respondió:

> Sujeto 5: El número total de pacientes tiene que ser el total de la operación... porque en un hospital por cada tres médicos, hay veintinueve pacientes… entonces, es que el veintinueve no lo quería multiplicar… cada tres médicos… tres por el número de médicos igual al número de pacientes… No lo entiendo!

La afirmación "El número total de pacientes tiene que ser el total de la operación" podría permitir explicar el comentario "Si pusiera dos por número de niñas, estaría multiplicando los datos totales" realizado en el ítem niños-niñas. Parece que la estudiante realiza un razonamiento que podríamos ligar a una concepción procedimental del lenguaje algebraico que se refleja en la dificultad para aceptar la falta de clausura (Collis, 1981).

CONCLUSIONES

El análisis de los datos del estudio de grupo nos lleva a concluir que la presencia de información en el contexto que permita determinar qué cantidad es mayor no repercute en la incidencia del error de inversión (objetivo 1). Este resultado se alinea con los obtenidos por Wollman (1983) y González-Calero, Arnau y Laserna-Belenguer (2015) al estudiar la traducción de enunciados con comparaciones multiplicativas al lenguaje del álgebra. El diseño experimental, sin embargo, no permite identificar si los estudiantes son conscientes de esta información pero no la usan o bien si ni tan siquiera la perciben. Esta limitación abre una línea futura de investigación sobre la gestión que realizan los estudiantes de las pistas contextuales presentes en el enunciado como un elemento de control a la hora de construir ecuaciones.

Por otro lado, en el estudio de grupo se observa que hay un porcentaje muy bajo de estudiantes que producen respuestas correctas (5,7% en médicos-pacientes y 8,5% en niños-niñas), mientras que el porcentaje de error de inversión alcanza casi un 40% de las respuestas (37,7% en médicos-pacientes y un 38,7% en niños-niñas). Hemos identificado un nuevo patrón incorrecto de respuesta que hemos codificado como *producto de números igual a producto de literales* que supone un 19,8% de las respuestas en la tarea médicos-pacientes y un 24,5% en niños-niñas. Además, en el análisis de las respuestas clasificadas como error de inversión, se observa que en el 75,0% de las ecuaciones producidas en el ítem médicos-pacientes y en el 70,7% en el ítem niños-niñas las cantidades se disponen en el mismo orden en el que aparecen en el enunciado. Esta coincidencia es prácticamente plena si sólo se atiende a la posición de los literales.

De hecho, y enlazando con la discusión del objetivo 3, las explicaciones que se ofrecen a los errores de inversión que se comenten en el estudio de casos se pueden encuadrar dentro del modelo conocido como coincidencia en el orden de la palabras. Es decir, una fuente del error de inversión puede ser que los estudiantes realizan una lectura de izquierda a derecha y lo traducen literalmente a la ecuación sin que exista una reflexión sobre la necesidad de producir una igualdad entre cantidades. Por otro lado, las ecuaciones que se han clasificado como *producto de números igual a producto de literales* parecen tener su origen en razonamientos apoyados sobre el respeto a una simetría de la configuración espacial, nuevamente, sin atender a la necesidad de igualdad entre cantidades. Además en la generación de este error también se pone en ocasiones de manifiesto la percepción errónea por parte de los estudiantes de que las cantidades que refieren a colecciones distintas formada por el mismo tipo de objetos son intercambiables. Esto podría interpretarse como el fenómeno inverso al conocido como error al asociar referentes múltiples a una misma representación, ya que en nuestro caso se asocian representaciones distintas a un mismo referente.

REFERENCIAS

Clement, J. J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. Journal for Research in Mathematics Education, 13(1), 16–30.

Clement, J., Lochhead, J., y Monk, G. S. (1981). Translation Difficulties in Learning Mathematics. The American Mathematical Monthly, 88(4), 286-290.

Clement, J., Lochhead, J., y Soloway, E. (1980). Positive effects of computer programming on students understanding of variables and equations. En Proceedings of the American Society for Computing Machinery 1980 Annual Conference (pp. 467-474). Nashville, TN: ACM.

Cohen, E. y Kanim, S. E. (2005). Factors influencing the algebra ”reversal error”'. American Journal of Physics, 73(11), 1072-1078. http://dx.doi.org/10.1119/1.2063048.

Collis, K. F. (1981). Cognitive Development, Mathematics Learning, Information Processing and a Refocusing (Report No WBDCIS-PP-B1-1). Centre for Science Education. Madison (WI): Wisconsin Research and Development Center for Individualized Schooling, The University of Wisconsin-Madison.

Fisher, K., Borchert, K., y Bassok, M. (2011). Following the standard form: Effects of equation format on algebraic modeling. Memory & Cognition, 39, 502-515.

González-Calero, J. A., Arnau, D., y Laserna-Belenguer, B. (2015). Influence of additive and multiplicative structure and direction of comparison on the reversal error. Educational Studies in Mathematics, 89(1), 133-147.

Kelle, U. y Buchholtz, N. (2015). The Combination of Qualitative and Quantitative Research Methods in Mathematics Education: A "Mixed Methods" Study on the Development of the Professional Knowledge of Teachers. En Bikner-Ahsbahs, A., Knipping, C. y Presmeg, N. (Eds.), Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods (pp. 321-361). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. Mathematics in School, 7(4), 23-26.
MacGregor, M. y Stacey, K. (1993b). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. Journal for Research in Mathematics Education, 24(3), 217-232.
Rosnick, P. (1981). Some Misconceptions concerning the Concept of Variable.. Mathematics Teacher, 74(6), 418-420.
Rosnick, P. y Clement, J. (1980). Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. Journal of Mathematical Behavior, 3(1), 3-27.
Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of "Out Loud" Problem-Solving Protocols. Journal of Mathematical Behavior, 4(2), 171-191.
Wollman, W. (1983). Determining the Sources of Error in a Translation from Sentence to Equation. Journal for Research in Mathematics Education, 14(3), 169-181.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la financiación recibida a través del proyecto EDU2015-69731-R (MINECO/FEDER), y de los proyectos GV/2016/118 y GVPrometeo/2016/143 de la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana.