Evaluación del alumnado mediante resolución de problemas asistida por software matemático

Ángel F. Tenorio
Universidad Pablo de Olavide

Resumen: *Este trabajo muestra una propuesta para evaluar una asignatura de matemáticas basándonos en dos principios: a) no memorizar, sino manejar y aplicar correctamente la información y realizar razonamientos correctos; y b) trabajar con software computacional. Explicaremos cómo evaluamos un semestre de Cálculo Numérico en Ingeniería Informática y cómo pasamos de la memorización y calculística a la comprensión, aplicación e interpretación razonada y correcta de los métodos. Focalizamos el proceso de enseñanza/aprendizaje en la adquisición de competencias matemáticas, de modo que el alumnado afronte un problema seleccionando la metodología y procedimiento más adecuado al contexto y datos disponibles, favoreciendo un aprendizaje constructivo y significativo en el alumnado.*
Palabras clave: *Evaluación, docencia con TIC, matemáticas, cálculo simbólico, competencia digital.*

Student's assessment via problem solving aided with mathematical software

Abstract: *This article shows our proposal to assess students in a mathematics course based on two criteria: a) no memorization, but use of information, applying it correctly and constructing valid reasonings; and b) data processing with symbolic computation packages. We discuss how to assess students in a semester on Numerical Analysis for Computer Science Engineering. The importance of assessment goes from memorization and calculus into correct and reasoned understanding, application and interpretation of numerical methods. The teaching-learning process is focused on the acquisition of mathematical competences, looking for students to be able to face problems choosing the most appropriate method and procedure according to context and given data, which favors students' meaningful and constructive learning.*
Keywords: *Assessment, ICT-aided teaching, mathematics, symbolic computation, digital competence.*

INTRODUCCIÓN

En el curso 2010/11, los grados en ingeniería habían comenzado su proceso de implantación, siendo solo unos pocos los que habían comenzado antes de ese curso. Dichos grados tuvieron una fase de experimentación gracias a las múltiples experiencias piloto para adaptar la docencia universitaria a la filosofía del Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Los cambios acontecidos no se han limitado a los puramente organizativos (BOE 2003, 2005, 2007), sino que también han influido en la docencia, causando una profunda reflexión sobre cómo entenderla y cómo adecuar las metodologías docentes y evaluativas en las aulas (incluso la renovación de estas).

En este artículo, expondremos cómo evaluar un semestre de Cálculo Numérico para una ingeniería informática (concretamente en la Ingeniería Informática en Sistemas de Información de la Universidad Pablo de Olavide) mediante la resolución de problemas asistida por software computacional. Pasar de una formación basada fuertemente en la componente teórica a otra eminentemente práctica, se fundamenta en primar el desarrollo de competencias en el alumnado y realizar una formación basada en "aprender a aprender" tal y como defiende el EEES (MECD, 2003; ANECA, 2005).

Basándonos en esta filosofía evaluativa de saber afrontar y resolver cualquier problema planteado, hemos ido generando un sistema de evaluación por competencias basado en la resolución de problemas asistida por ordenador. El germen reside en el sistema de evaluación usado en la experiencia piloto para la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión (ITIG) (Bermudo et al., 2006; Hernández-Jiménez et al., 2008a), que ha evolucionado hasta un sistema de evaluación continua sin exámenes finales en el Grado de Ingeniería Informática en Sistemas de Información (GIISI) y del que algunos datos preliminares pueden verse en Tenorio et al. (2011). Este cambio gradual permitió dar un rodaje en la ITIG y depurar defectos previamente a implantarlo como sistema de evaluación continua en el GIISI. De este modo, hemos aprovechado los cambios educativos del último lustro para introducir modificaciones evaluativas y metodológicas en nuestra docencia para usar el software matemático y orientar el proceso de enseñanza/aprendizaje hacia la aplicación correcta y contextualizada por el alumnado de los conocimientos y competencias que trabajan, evitando meros automatismos operacionales y algorítmicos.

Nuestras asignaturas de matemáticas trabajan tres competencias esenciales (según nuestra opinión) en el alumnado:

a) Aplicar correcta, contextualizada y justificadamente procedimientos numéricos para resolver problemas (formación matemática).

b) Tratar computacionalmente estos problemas con las herramientas y técnicas computacionales actuales (formación computacional).

c) Seleccionar y actualizar conocimientos según las necesidades que le van surgiendo profesional o socialmente (actualización formativa).

La noción de competencia (McClelland, 1973) surge como alternativa a los test de inteligencia para saber si una persona podrá realizar su actividad profesional. Son múltiples las definiciones en el ámbito educativo (Mateo, 2007; Roe, 2002), pero todas la consideran la habilidad para seleccionar, actualizar, combinar y usar recursos y conocimientos al resolver un problema o situación en contexto.

La competencia digital en nuestras asignaturas es esencial en pleno siglo XXI ya que, como profesionales, el alumnado tendrá que usar software adecuado a sus diferentes tareas. En una ingeniería informática, ser competente digitalmente es una obligación.

Nuestro objetivo es mostrar cómo puede usarse un sistema evaluativo por competencias para evaluar nuestra asignatura y cómo la resolución de problemas asistida por ordenador resulta una propuesta educativa de gran utilidad para realizar dicha evaluación. En este sentido, mostraremos unos ejemplos que integran la competencia digital con las competencias matemáticas.

DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA Y DE SU EVALUACIÓN

Este artículo se encuadra en la asignatura "Métodos Matemáticos para la Ingeniería" (MMI) del GIISI de la Universidad Pablo de Olavide, formando un bloque de contenidos con las asignaturas "Álgebra" y "Cálculo", que habrán sido previamente cursadas. Para esta asignatura, el profesorado optó por actualizar su forma de enseñar matemáticas en base a la experimentación previa realizada en la experiencia piloto de la ITIG. Aunque describiremos brevemente la organización de la asignatura y su sistema de evaluación, una descripción detallada puede consultarse en Tenorio et al. (2011).

La docencia se organiza en sesiones teóricas y prácticas de cadencia semanal con en torno a 80 alumnos matriculados: las teóricas en un único grupo y las prácticas (en aulas de informática) en subgrupos de entre 20 y 25 estudiantes. Los contenidos corresponden a Álgebra Numérica y Cálculo Numérico, trabajándose con valores aproximados y procedimientos algorítmicos para obtener dichos valores.

La asignatura se plantea desde la perspectiva de la resolución de problemas por parte del alumnado, planteando problemas (y no meros ejercicios) para la evaluación del alumnado. Dicha resolución se trabaja desde una perspectiva tanto tradicional ("a mano") como computacional usando paquetes de cálculo simbólico (como Mathematica©). De hecho, la mayoría de los problemas tratados requieren de un tratamiento computacional, volviendo esencial el uso de dichos paquetes para las actividades a realizar (incluidas las evaluativas).

Las sesiones teóricas explican nociones y resultados con ejemplos numéricos y dificultades similares a las necesarias para superar la asignatura. En las sesiones prácticas, el alumnado trabaja esos contenidos en problemas con dificultades adicionales a superar. Aunque se apoye en el software Mathematica©, siempre debe razonar y justificar el procedimiento seguido y la respuesta dada.

En nuestra asignatura, buscamos que el alumnado aproveche los múltiples recursos a su alcance para continuar su proceso de enseñanza/aprendizaje en el semestre. Por ello, no solo hemos introducido las TICs en el manejo de software para resolver problemas, sino también como un recurso que complementase y apoyase nuestra actividad docente con el alumnado. La plataforma BlackBoard de formación a distancia (denominada aula virtual) es ya algo cotidiano y natural para el alumnado, encontrando allí toda el material de la asignatura y diversas herramientas de comunicación y de seguimiento y evaluación individualizado. Así, trabajamos transversalmente su competencia en el uso de herramientas digitales y de un entorno digital compartido. Esta competencia digital le será sumamente positiva al incorporarse al mundo laboral.

Proponemos un sistema de evaluación continua por competencias, en la que el alumnado (actor principal del proceso de enseñanza/aprendizaje) trabaja de manera autónoma diversas actividades supervisadas por el profesorado durante el semestre (supervisor y tutor de su evolución), tal y como sostienen Le Boterf (1997) o Morin (1999), para los que la evaluación debería centrarse en la habilidad adquirida para manejar, seleccionar, cambiar (actualizar y/o renovar) y combinar conocimientos con el fin de resolver problemas contextualizados y académicos. El seguimiento de tales actividades aportaría mucha y diversa información para evaluar al alumnado en el proceso de enseñanza/aprendizaje y no al final (como correspondería a un examen final) pues nos centraríamos en la aplicación coherente y reflexiva de conceptos y procedimientos como proponen Barberá (1999) y MacDonald et al. (2000).

Como seguimos una evaluación centrada en la comprensión significativa y constructiva de conocimientos y procedimientos por el alumnado, este debe ser capaz de aplicarlos y combinarlos argumentada y correctamente para resolver cualquier problema que se le plantee, llegando a completarlos y actualizarlos si fuese el caso. Por tanto, no buscamos la memorización de definiciones y resultados (de dudosa utilidad por la rapidez con la que los conocimientos quedan obsoletos). El centrar la evaluación en la aplicación e interpretación de procedimientos en lugar de en realizar meros cálculos está en consonancia con el uso de software para la resolución de problemas.

Nuestra evaluación emplea tres tipos de actividades, secuenciadas a lo largo del semestre, cada una con un porcentaje distinto en función de la complejidad que presenta su realización y el esfuerzo y dedicación necesarios. El alumnado trabaja todas las actividades bajo supervisión del profesorado. Concretamente, los tres tipos de actividades empleados y sus respectivos porcentajes en la evaluación son los siguientes: tareas de seguimiento supervisadas (60%), defensas orales (30%) y tutorías de seguimiento (10%).

Esta dinámica de tareas supervisadas para evaluar al alumnado se traduce en la elaboración de un portafolios por estudiante que recogerá todo su trabajo durante el semestre y permitirá ver su evolución y cómo va alcanzando competencias (Ballester et al., 2005). Precisamente, este portafolios será la principal herramienta de nuestra evaluación para valorar tanto el nivel de adquisición de competencias como el trabajo y esfuerzo empleado en su realización. Pero un portafolios no se limita a que el profesorado corrija y archive las tareas de su alumnado, sino que esta evaluación debe servir para que su alumnado corrija errores y falsas concepciones a lo largo de su evaluación.

Cada tarea de seguimiento se encomienda al alumnado al final de cada sesión práctica y consiste en una serie de problemas sobre conceptos, procedimientos y competencias de dicha sesión para trabajarlos autónomamente con el paquete Mathematica© y bajo supervisión del profesorado. El proceso es el siguiente:

1) Encomendar tarea tras sesión práctica: la tarea consiste en problemas tratados en dicha sesión para trabajarlos autónomamente.
2) Realizar tarea asesorado por el profesorado mediante tutorías: el alumnado plantea sus dudas y dificultades, buscando que el profesorado corrija los errores o falsas concepciones empleados.
3) Entrega (telemática) y evaluación por el profesorado, con emisión de informe incluyendo fallos y carencias encontrados.
4) Corrección de tarea usando informe y reenvío (telemático) de versión corregida para su evaluación.

El portafolios (Pozo Llorente, 2005; Pozo Llorente et al., 2006) es una de las estrategias evaluativas más ricas porque el alumnado construye su conocimiento de manera autónoma (aunque bajo supervisión del profesorado) y adquiere competencias al trabajar la asignatura. Por tanto, el trabajo del alumnado resulta esencial en nuestro sistema de evaluación, lo que nos lleva a un punto vital importancia (máxime en asignaturas de matemáticas): su motivación. El alumnado ve cómo su trabajo le hace avanzar en la consecución de los objetivos de la asignatura y la supervisión de sus tareas le permite llevar la asignatura al día evitándose la acumulación de contenidos y/o errores. Todo ello ha permitido evitar que el alumnado vea como algo imposible seguir el ritmo del semestre y a su vez reducir la tasa de abandono. Esto se debe a que ajustamos nuestra docencia a las necesidades del alumnado (función reguladora) y le permitimos tomar consciencia de sus errores, carencias y falsas concepciones para que puedan corregirlas mediante nuestra actuación individual como docentes sobre cada estudiante durante el semestre (función formativa). Además, todo ello hace que el alumnado participe activamente en su proceso de enseñanza/aprendizaje que, según Imbernon et al (2005), es esencial para una correcta evaluación por competencias.

Como el alumnado trabaja las tareas en su casa en las horas de trabajo no presencial, hemos tenido que habilitar mecanismos de control para comprobar y controlar que el trabajo realizado en las tareas fue realizado por cada estudiante y que ha asimilado los contenidos y procedimientos amén de alcanzar el nivel mínimo de competencias. Esa función la cubren tanto las defensas orales como las tutorías. Las defensas se centran en observar que el alumnado explica comprensiblemente las actividades encomendadas y que es capaz de responder a cuantas preguntas se le hagan al respecto.

Por otro lado, las tutorías nos permiten hacer un seguimiento continuado e individualizado del trabajo del alumnado y su evolución en la asignatura. Por tanto, la tutoría se vuelve una de las principales actividades (si no la más importante) no solo para que el alumnado realizar correctamente las tareas, sino también como nuestro principal recurso didáctico para evaluar, asesorar y supervisar al alumnado y que corrija sus errores y falsas concepciones para que llegue a ser competente (Arbizu et al. 2005). Por tanto, la tutoría se convierte en una acción formativa para orientar al alumnado en su trabajo y corregir las faltas cometidas y carencias detectadas. Además, podemos realizar parte de su evaluación observando y comprobando los procesos de resolución que sigue (cómo el alumnado trabaja las actividades) y su capacidad para comprender las indicaciones del profesorado y superar las dificultades que surgen durante el semestre. Toda esta riquísima información es básica para evaluar su evolución y la de sus competencias y la vamos almacenando en el historial de cada estudiante. Este seguimiento individualizado mediante las tutorías es también parte de la filosofía del portafolios porque requiere de un seguimiento y atención tutorial individualizada de cada estudiante durante el semestre.

Buscando usar la tutoría como un recurso más para evaluar a nuestro alumnado, hemos considerado los siguientes aspectos para una tutoría tanto sincrónica/asincrónica como presencial/virtual (esto último mediante BlackBoard):

1) Máxima disponibilidad para tutorías presenciales. Además de los horarios oficiales de tutorías, se posibilitan citas fuera del mismo para el alumnado que no pueda acudir por motivos justificados (e. g. compatilizar trabajo con estudios o asignaturas de distintos cursos).

2) Reducción del tiempo de espera del alumnado para entrar a tutoría. En ocasiones, se forman colas para las tutorías porque el alumnado opta por acudir simultáneamente a tutoría. Por tanto, quienes esperan fuera están perdiendo un valioso tiempo de estudio y quienes están dentro se sienten presionados y terminan la tutoría antes de tiempo. En nuestra asignatura, la tutoría es un recurso esencial para el seguimiento de cada estudiante, por lo que hemos establecido el mecanismo de cita previa. Las citas concertadas permiten reservar un intervalo de tiempo para su seguimiento en tutoría, de 20 a 30 minutos. Se habilitan unos 22 turnos de tutoría a la semana (18 en horario oficial y 4 fuera del mismo). Si un estudiante aparece sin cita y hay una tutoría concertada, esta será la que tenga prioridad. Debe tenerse en cuenta que el profesorado está disponible en su despacho en el horario oficial de tutoría aunque no haya cita concertada. Durante el curso, el alumnado aprovechó las tutorías concertadas y utilizó todos los turnos semanales. El alumnado es responsable de sus citas a tutoría y, en ese sentido, se le enfatiza a anular aquellas citas a la que no vayan a asistir para otro/a estudiante pueda aprovechar ese turno. En general, toda tutoría se concertaba en la misma semana que se solicitaba. A veces, varios/as estudiantes (no más de tres) acordaban asistir juntos, asignándoseles turnos consecutivos y preguntando sus dudas conjuntamente al igual que trabajan las tareas.

3) Tutorías virtuales. En ocasiones, el alumnado no puede asistir a tutoría en los turnos disponibles esa semana o quiere realizar una consulta puntual y concreta mientras trabaja un determinado problema. Para ello, usamos tres herramientas incluidas en la plataforma virtual BlackBoard: a) la mensajería interna; b) los foros; y c) la pizarra virtual y/o el "classroom". Las dos primeras permiten una comunicación asíncrónica para contestar dudas puntuales y concretas, mientras que la última permite una comunicación sincrónica para realizar una tutoría virtual solventando en la pizarra o en videoconferencia las consultas del alumnado. Todas las consultas se responden en menos de 48 horas. En alguna ocasión, el alumnado usó el chat para consultas rápidas cuando el profesorado está conectado. Por tanto, la tutoría virtual se convierte en uno de los principales mecanismos para evaluar el seguimiento individualizado del alumnado en su proceso de enseñanza/aprendizaje a distancia (Sáenz Castro, 2001).

Durante la exposición de nuestro sistema de evaluación continua por competencias no hemos hecho referencia en ningún momento al examen final. De hecho, al decidir cuál iba a ser nuestro sistema de evaluación tuvimos que plantearnos si una evaluación final nos permitiría evaluar las competencias del alumnado durante el semestre. Esta cuestión planteó un interesante debate en nuestro equipo docente ya que se suele ser muy reticente a suprimir dicha evaluación final por temor a no realizar un seguimiento adecuado del alumnado y equivocarnos al determinar el nivel de sus competencias. Pero ante esas dudas, solo hemos de pensar si seríamos capaces de determinar dicho nivel con una única prueba escrita al final del semestre. Esto se debe a lo complicado que resultaría evaluar las competencias del alumnado en una ventana temporal tan limitada, ya que impediría ver cómo el alumnado tantea distintas estrategias antes de optar por una concreta para resolver el problema planteado. Más aún, no podríamos supervisar (mucho menos de manera individualizada) al alumnado mientras realiza un examen final. Todo ello nos llevó a suprimir el examen final y realizar la evaluación mediante actividades durante el semestre. Así, este se ha relegado a la actividad de evaluación para la segunda convocatoria anual, una vez no alcanzadas las competencias mínimas en primera convocatoria.

En la próxima sección, discutiremos razones de índole formativo para incluir una perspectiva computacional en nuestra docencia.

USANDO PAQUETES DE CÁLCULO SIMBÓLICO PARA TRABAJAR LAS MATEMÁTICAS

Ya hemos hecho referencia al uso de las TIC en el aula por medio de las plataformas digitales como herramienta de seguimiento, pero no es el recurso informático que nos preocupa en el presente trabajo. En matemáticas, es esencial usar el software existente para tratar computacionalmente problemas matemáticos. Cada vez se hace más necesario el formar al alumnado en el uso de paquetes de cálculo simbólico, de simulación o de tratamiento estadístico de datos, buscando sacar el máximo provecho en su actividad profesional. Hemos de formar profesionales competentes en matemáticas, bajo una perspectiva actual evitando trabajar los problemas como en el siglo XIX y aprovechando los avances tecnológicos existentes. Debemos alfabetizar computacional y digitalmente a nuestro alumnado y eso conllevaría la actualización de nuestra forma de trabajar y resolver problemas matemáticos en el aula (Salinas, 2004).

Trabajar los problemas con ayuda de calculadoras y ordenadores no es nuevo como tampoco lo es evaluar al alumnado mediante la resolución de problemas. Esta filosofía educativa aparece previamente en la literatura como por ejemplo en Contreras el al. (2005), Tenorio (2008) o Tenorio et al. (2010). Tales trabajos no solo abogan por usar recursos TIC para realizar la actividad docente y evaluativa acorde a los tiempos en que vivimos, sino que trabajan los problemas matemáticos empleando el software apropiado.

Obviamente, el tratamiento de un problema matemático asistido por un paquete de cálculo simbólico puede distar mucho del tratamiento que dicho problema en una resolución tradicional, pudiéndose simplificar e incluso evitar pasos.

Por tanto, no podemos basar toda nuestra docencia y evaluación en la mera y correcta repetición de algoritmos de “lápiz y papel”, obviando los recursos informáticos o limitándonos a cuestiones puramente calculísticas. No estamos renegando de tales algoritmos, los cuales son esenciales para desarrollar el pensamiento matemático y la argumentación de cada paso realizado. Lo que queremos decir es que el alumnado universitario (que ya ha trabajado dichos algoritmos con esa finalidad) debe centrarse en la aplicación práctica y razonada de los distintos procedimientos trabajados, aunque también se trabajarán “a mano” para aprovechar las virtudes de los algoritmos tradicionales de cálculo. Es decir, nuestro alumnado debe ser capaz de resolver los problemas desde un punto de vista academicista y clásico (más distante del tratamiento práctico que realmente se hace). Así, se pueden plantear problemas que, se trabajen con ayuda de un ordenador, pero se requiere de una comprensión teórica de los procedimientos y conceptos involucrados para resolverlos correctamente e interpretar los resultados al contexto en cuestión. Es más, previamente a la asignatura MMI, el alumnado ha cursado sendos semestres de Álgebra y de

Cálculo en los que se trabajan conceptos más teóricos basados en resolver problemas sin usar un paquete de cálculo simbólico.

Las perspectivas tradicional y computacional deben convivir en nuestras aulas, pues hemos de formar a nuestro alumnado en el procedimiento de resolución formal de problemas matemáticos desde un punto de vista teórico (incluyendo formalidad en la notación, comprobación de hipótesis y aplicación correcta de resultados). Pero esa necesidad no puede llevarnos a dejar de lado que la gran mayoría de nuestro alumnado necesitarán las matemáticas como una herramienta (y no como un ente "per se"), con lo que la relación que tendrán con ella en sus ocupaciones será transversal y no dispondrán de tiempo para resolver un cálculo matemático, que con el software adecuado se resolvería en cuestión de segundos.

Pensando en una distribución temporal para planificar una actividad de evaluación, debemos decidir si nos interesa evaluar en el alumnado sus capacidades operativas o si, por el contrario, nos centramos en determinar si el alumnado selecciona los procedimientos apropiados, justifica su elección y posterior uso y aplica correcta y adecuadamente dicho procedimiento interpretando los resultados que obtiene.

Si solo nos interesa lo primero, entonces debemos preparar actividades cuyas complicaciones se encuentran en los cálculos, asumiendo que son cálculos en los que el alumnado invertirá su tiempo de trabajo. Si, por el contrario, queremos evaluar la competencia del alumnado, entonces tendremos que preparar actividades pensadas para trabajarlas con ayuda de un software matemático. Esto es lo que defenderemos en el presente trabajo.

Tenemos pues que plantear otra forma de proponer problemas al alumnado y, por ende, de evaluar la resolución de los mismos para percibir si se han asimilado realmente los contenidos y si se usa correctamente el software. Concretamente, los problemas a trabajar deben conllevar una traducción al lenguaje del software empleado para mostrar si se interpreta y utiliza correctamente la información devuelta por el software al resolver el problema planteado y continuar/finalizar el mismo.

Un paquete de cálculo simbólico solo realiza cálculos y permite comprobar (pero no probar) las propiedades que se le indican al alumnado siempre será este quien deberá indicar al software qué propiedad ha de comprobarse y cuáles son las operaciones que permiten realizar dicha comprobación. Es más, tendrán que interpretar el significado de los cálculos realizados por el software en el contexto del problema a resolver.

Por tanto, podemos seguir evaluando contenidos, pero cambiando la forma de preguntar y priorizando otros ítems distintos a la realización de cálculos (que ya no haría el alumnado). Lo importante sería el planteamiento, uso y aplicación de los resultados obtenidos, además de la interpretación de los datos obtenidos con el software. Los paquetes de cálculo simbólico permiten trasladar la importancia de la calculística (que en universidad pueden hacerse con ayuda de un paquete computacional) a la adquisición de competencias y, más concretamente a la correcta aplicación y uso de conceptos y procedimientos, amén de la interpretación y contextualización de los cálculos realizados. Ya no evaluaríamos cálculos y resultado final (que serían secundarios), sino que evaluaríamos la corrección y justificación en la aplicación de procedimientos, la manipulación de datos y la interpretación de los cálculos obtenidos tanto para continuar con el problema como para contextualizarlo a la situación (del mundo real) que se modeliza con

Épsilon, 2016, Vol. 33 (2), nº 93, 87-106, ISSN: 2340-714X

el problema matemático resuelto. Por ejemplo, deberíamos plantear problemas con dificultades para satisfacer directamente las hipótesis de aplicación de los procedimientos y que requieren de su manipulación previa para traducirlo en otro equivalente que sí pueda resolverse con dicho procedimiento.

El software matemático le permite al alumnado “trastear” el problema y “manipularlo” con ejemplos que le permiten tener una intuición del comportamiento al modificar datos o el procedimiento aplicado. Así, le permitimos experimentar con el problema y aprender mediante acierto-error en un menor tiempo y sin tener que estar realizando un sin número de cálculos.

Tras hablar de las ventajas para la evaluación de la resolución de problemas asistido por un paquete de cálculo simbólico, queremos resaltar que también hay una motivación procedimental para trabajarlos desde una perspectiva computacional y evaluar al alumnado desde esta perspectiva: trabajar un problema matemático con un paquete de cálculo simbólico usualmente sigue un tratamiento muy diferente al de su resolución “a mano”.

Aclaremos esta afirmación con un sencillo ejemplo sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Manualmente, primero discutiríamos si el sistema tiene o no solución estudiando los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada para saber si tiene sentido realizar el elevado número de operaciones que conlleva resolver el sistema. Si el sistema no tiene solución, ¿para qué realizar dichos cálculos? Por el contrario, si en un paquete de cálculo simbólico se ejecuta la orden para resolver el sistema y ver que tiene solución sin estudio teórico previo de su número de soluciones. De este modo, al calcular las soluciones (o, en el peor caso, aproximaciones suyas), determinamos cuáles y cuántas, llegando a la conclusión de que no las hay si no son calculadas. No tiene sentido pues discutir el sistema previamente. Si el sistema es paramétrico, siendo algunos de los coeficientes un parámetro desconocido, se necesita un tratamiento teórico para no perder soluciones que el ordenador puede haber descartado para continuar su resolución. Esto ocurre, por ejemplo, al resolver ecuaciones polinómicas de grado elevado o ecuaciones en las que aparecen funciones algebraicamente trascendentes (e. g. trigonométricas, exponenciales, logarítmicas…). Entonces es necesario un estudio de casos para determinar todas las (familias de) soluciones, basándonos en las técnicas tradicionales aunque el ordenador nos facilitará los cálculos.

EJEMPLOS DE PROBLEMAS TRABAJADOS

A continuación, veremos algunos ejemplos de problemas trabajados en la asignatura MMI del GIISI. En cada problema, indicaremos los criterios utilizados para determinar si el alumnado está aplicando los conceptos y procedimientos correctamente y si la solución dada al problema es adecuada. Queremos resaltar que la mayoría de los problemas no tienen una única resolución, dando por válida cualquiera debidamente justificada y argumentada a partir de los recursos disponibles. Los problemas indicados en esta sección se resuelven con ayuda del paquete de cálculo simbólico Mathematica©, que permitirá obviar los pesados y repetitivos cálculos que conllevan la mayoría de los procedimientos numéricos.

Como estamos evaluando la capacidad del alumnado para resolver razonada y justificadamente un problema, no nos centramos en los cálculos al aplicar un método, sino en justificar todos los pasos, decisiones y razonamientos para llegar a la resolución final del mismo. Seguimos, pues, la filosofía de Pérez Jiménez (2005) y Jiménez Montero (2006), entre otros, para evaluar al alumnado resolviendo problemas o aplicando procedimientos algorítmicos sin interferencias de problemas calculísticos (que podrían estar enquistados de etapas anteriores), viendo de este modo si el alumnado presenta dificultades en los conceptos y procedimientos estudiados.

Con un tratamiento computacional, los cálculos los realiza un software a gran velocidad y, como docentes, nos centramos en preguntar sobre conceptos y procedimientos, sin necesidad de "preparar" cálculos para que no se compliquen. Precisamente, las complicaciones al resolver un problema es lo realmente enriquecedor para la formación del alumnado y lo que permite evaluar si se limita a repetir automáticamente un procedimiento o si lo ha asimilado y sabe adaptarlo a la situación planteada para resolver el problema en cuestión.

En general, si los problemas se trabajan manualmente sin un software, solo preguntar por un concepto conllevaría un gran gasto de tiempo y no se podría preguntar por un segundo concepto relacionado con el anterior.

En el semestre de MMI, todo problema numérico pueden incluirse apartados preguntando sobre la exactitud y precisión de las aproximaciones que van siendo calculadas en lugar de los valores exactos. Debe tenerse en cuenta que un paquete de cálculo simbólico permite realizar los cálculos para determinar tanto la exactitud como la precisión ejecutando sencillas órdenes cuya salida solo debe interpretar el alumnado para traducirlas en los términos apropiados de exactitud y precisión. Recuérdese que tanto exactitud como precisión de una solución aproximada (que no exacta) miden cuánto dista del valor exacto. Mientras que la exactitud lo hace en términos absolutos, la precisión lo hace en términos relativos (i. e. tanto por uno). Precisamente, precisión y exactitud permiten evaluar aspectos sobre la competencia del alumnado, ya que los problemas pueden prepararse para que el alumno tenga que tomar decisiones sobre la precisión y exactitud de los datos de partida para que el software calcule una aproximación con las restricciones impuestas en el problema. Veremos en el Problema 1 un ejemplo de cómo los errores se usan para decidir cuándo un método iterativo (i. e. obtener un valor aproximado más ajustado a partir de uno anterior mediante la aplicación de una expresión algebraica) debe detenerse con el fin de indicarle al software cuando debe truncar el proceso y dejar de calcular más iteraciones. Por su parte, en el Problema 2, observaremos cómo cambia radicalmente los ítems a evaluar en un problema basado en el uso de Mathematica©, primando el manejo de los conceptos y la interpretación de los resultados que se van obteniendo sobre los meros cálculos.

Problema 1: Métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel (unidad didáctica de resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales).

Partimos de un sistema de ecuaciones $\boldsymbol{A} \bullet \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, con una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{r,s}\right)$ de coeficientes de orden $\boldsymbol{n}$ y determinante no nulo, con un vector $\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{b}_r)$ de términos independientes y con un vector $\vec{x} = (x_r)$ de incógnitas. Si el determinante es no nulo, la solución del sistema es única y la convergencia del método será a dicha solución.

Si cada elemento $a_{r,r}$, en la diagonal principal de A, es distinto de cero, se puede construir una sucesión $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k\in\aleph}$ de "aproximaciones" de la solución exacta. En el método de Jacobi, el vector $\vec{x}^{(k)}$ tiene las siguientes coordenadas en función de las del vector anterior $\vec{x}^{(k-1)}$:

$$x_r^{(k)} = \frac{b_r - \sum_{s\neq r} a_{r,s}\cdot x_s^{(k-1)}}{a_{r,r}} \text{ con } 1 \leq r \leq n$$

mientras que las coordenadas en el método de Gauss-Seidel serían:

$$x_r^{(k)} = \frac{b_r - \sum_{1\leq s\leq r-1} a_{r,s}\cdot x_s^{(k)} - \sum_{r+1\leq s\leq n} a_{r,s}\cdot x_s^{(k-1)}}{a_{r,r}} \text{ con } 1 \leq r \leq n.$$

Como ya se indicó, la expresión iterativa del método requiere del vector $\vec{x}^{(k-1)}$ para obtener el vector $\vec{x}^{(k)}$. Por tanto, su aplicación necesita seleccionar una primera "aproximación" $\vec{x}^{(0)}$ que generará las restantes "aproximaciones". Esta elección de $\vec{x}^{(0)}$ no es trivial ya que debemos asegurar que los vectores $\vec{x}^{(k)}$ se van aproximando a la solución, que es cuando el método se dice convergente y los vectores $\vec{x}^{(k)}$ estiman la solución.

La convergencia de ambos métodos se tiene si comprobamos que la matriz A es estrictamente diagonal dominante; i.e.:

$$a_{r,r} > a_{r,1} + \ldots + a_{r,r-1} + a_{r,r+1} + \ldots + a_{r,n} \text{ con } 1 \leq r \leq n.$$

Entonces, cualquier vector $\vec{x}^{(0)}$ sirve de aproximación inicial, aunque lo más cómodo computacionalmente resulta $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. Para cada elección de $\vec{x}^{(0)}$, se obtendría una sucesión distinta de aproximaciones.

Con la fundamentación teórica del método, tenemos los primeros indicios para evaluar al alumnado sobre su aplicación correcta y razonada: Primero, tras expresar matricialmente el sistema de ecuaciones, debería comprobar que la matriz A tiene determinante no nulo (usando el comando pertinente) y concluir que la solución del sistema es única. Una vez hecho esto, tiene sentido usar ambos métodos de resolución numérica. Eso sí, deberá estudiar la condición de diagonalidad estrictamente dominante para justificar que la sucesión $\{\vec{x}^{(k)}\}_{k\in\aleph}$ converge a la solución del sistema con la elección hecha de $\vec{x}^{(0)}$. Por esa razón, en un problema de esta tipología, la matriz A no debería satisfacer la condición de diagonalidad estrictamente dominante para que el alumnado tenga que manipular previamente la matriz mediante transformaciones elementales y obtener un sistema equivalente al dado (i. e. con la misma solución) que sí satisfaga la condición. De este modo, evaluamos el que las hipótesis que permiten la aplicación adecuada del método y la capacidad de adaptar el sistema a otro equivalente que las satisfaga. En consecuencia, si no hace este estudio, veremos que el alumnado aplica automáticamente los procedimientos, pero sin saber cuándo, cómo y por qué debe aplicarlos.

Tras obtener el nuevo sistema (pues las transformaciones afectan al orden de incógnitas y/o términos independientes), el alumnado debe aplicar los métodos al sistema resultante para aproximar numéricamente la solución, por lo que el alumnado está mostrando su comprensión del procedimiento. Si obtiene la matriz equivalente, comprueba que es estrictamente diagonal dominante, pero aplica las fórmulas iterativas al sistema original, entonces no habrá comprendido que ha modificado el sistema para asegurar (con la diagonalidad estrictamente dominante) que los cálculos posteriores llevarán a una aproximación de la solución buscada.

Veámoslo mejor con un ejemplo numérico. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rrrr} 8{,}012x & -3{,}132y & +4{,}104z = & 2{,}101 \\ -1{,}132x & +3{,}096y & -6{,}013z = & -1{,}112 \\ 4{,}104x & -7{,}013y & +1{,}014z = & 1{,}011 \end{array}$$

cuya expresión matricial resulta ser:

$$\begin{pmatrix} 8.012 & -3.132 & 4.104 \\ -1.132 & 3.096 & -6.013 \\ 4.104 & -7.013 & 1.014 \end{pmatrix} \infty \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.101 \\ -1.112 \\ 1.011 \end{pmatrix}$$

en la que la matriz de coeficientes tiene determinante no nulo, pero no es estrictamente diagonal dominante (para la segunda fila, $3.096 < 1.132 + 6.013$).

Para este sistema, los método de Jacobi y de Gauss-Seidel podrían generar "aproximaciones" de la solución que no sabríamos con certeza si realmente lo son, pues la convergencia no está asegurada. Por tanto, se buscaría un sistema equivalente que si asegurase la convergencia. Intercambiando las filas 2 y 3, se obtiene el siguiente sistema resultante:

$$\begin{array}{rrrr} 8{,}012x & -3{,}132y & +4{,}104z = & 2{,}101 \\ 4{,}104x & -7{,}013y & +1{,}014z = & 1{,}011 \\ -1{,}132x & +3{,}096y & -6{,}013z = & -1{,}112 \end{array}$$

que sí es estrictamente diagonal dominante:

$$8.012 > 3.132 + 4.104$$

$$7.013 > 4.104 + 1.014$$

$$6.013 > 1.132 + 3.096$$

Por tanto, ahora ambos métodos serían convergentes y aplicaríamos las fórmulas iterativas de cada uno para calcular aproximaciones de la solución. Como las transformaciones elementales empleadas, han afectado a los términos independientes, podemos ver fácilmente si el alumnado las ha asimilado correctamente, ya que debe cambiar de orden las ecuaciones al completo y no solo la parte de la matriz de coeficientes.

Parte del alumnado no estudia si el método converge, por lo que no justifica que su resultado aproxime a la solución buscada. Otra parte solo justifica la convergencia viendo la dominancia diagonal estricta del sistema o de otro equivalente, pero aplica el método al sistema de partida y no al que satisface la convergencia. Todas estas acciones informan sobre fallos en el alumnado: la primera nos indica que no ve necesidad de comprobar las hipótesis necesarias de aplicación y que se limita a repetir los cálculos sin importarle llegar a conclusiones y resultados erróneos por una aplicación incorrecta; mientras que la segunda nos permite ver que entiende la necesidad de las hipótesis, pero no que las modificaciones realizadas para cumplir las hipótesis conlleva la modificación de los datos con los que trabaja. Todo este proceso mental de justificar la convergencia y aplicar el método requiere de la comprensión de los conceptos y no afecta el uso del ordenador.

Justificada la convergencia, puede tomarse como aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$ cualquier vector, siendo lo más habitual tomar $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$.

Seguidamente, el alumnado debe aplicar el método al sistema para resolverlo numéricamente con ayuda del paquete Mathematica©. Pese a su uso, el alumnado tendrá que emplear los procesos cognitivos necesarios para resolver el problema matemáticamente, llevando a cabo las interpretaciones de los resultados intermedios obtenidos con el software. En este ejemplo, debe aplicar correctamente la fórmula de iteración del método trabajado.

A continuación, volvemos a evaluar los conocimientos y competencias del alumnado, pues debería saber determinar cuántas aproximaciones ha de realizar antes de detener el algoritmo y dar el último valor calculado como la aproximación adecuada de la solución. Esa decisión debe basarse en el manejo de los siguientes conceptos: criterio de parada, error absoluto, error relativo, cifra decimal exacta, cifra significativa, precisión y exactitud. Explicaremos un poco más detalladamente a qué nos referimos con esto.

Cuando se pide una aproximación de la solución de un problema, esta debe tener una determinada exactitud (número de cifras decimales exactas) y/o precisión (número de cifras significativas), imponiendo la más restrictiva cuando se estudien ambas. Esta condición, de índole computacional, recibe el nombre de criterio de parada y debe explicitarse para testar si la cumple la aproximación calculada y dar como válido el resultado. Si el criterio de parada se expresa en función de la exactitud, el alumnado está estudiando cuándo el error absoluto (o una estimación) es menor que el valor fijado (llamado tolerancia). Si se usa la precisión, el error considerado es el error relativo (o una estimación).

Para el error absoluto, se usa la estimación $\boldsymbol{E_A} \approx \| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)} \|_\infty$ con los dos últimos iterados calculados $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ y $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)}$, ya que la convergencia del método asegura que $\vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})}$ es una mejor aproximación de la solución. Tomaremos cómo aproximación aquella cuyo error absoluto puede estimarse menor que la tolerancia. Para el error relativo, la estimación suele ser $\boldsymbol{E_R} \approx \dfrac{\| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} - \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k}-1)} \|_\infty}{\| \vec{\boldsymbol{x}}^{(\boldsymbol{k})} \|_\infty}$, usando la convergencia nuevamente para justificarlo. En ambos casos, el alumnado ha de asimilar que numéricamente no son necesarios los valores exactos de las expresiones sino solo aproximaciones coincidentes en un determinado número de cifras (decimales exactas o significativas).

En los problemas numéricos, realizar operaciones puede conllevar pérdida de precisión y/o exactitud en las aproximaciones obtenidas sucesivamente. Este aspecto debe ser controlado por el alumnado y, por tanto, debe ser evaluado. Para aproximar con una determinada precisión y/o exactitud, todas las aproximaciones y cálculos intermedios deberían tener al menos dicha precisión y/o exactitud. Por tanto, el alumnado debe comprobar si con los datos y cálculos empleados se produce esa problemática y, en tal caso, trabajar datos iniciales con la precisión y/o exactitud necesaria para compensar la pérdida detectada.

Esto es relativamente sencillo con un paquete de cálculo simbólico ya que: a) para trabajar el problema con mayor precisión/exactitud, basta con actualizar los datos iniciales y correr de nuevo todas las órdenes (por lo que los cálculos los repite el ordenador); y b) la pérdida de exactitud y/o precisión de las aproximaciones se reduce a que la cadena de cifras es más corta de una aproximación a la siguiente.

Estas cuestiones son sumamente importantes para determinar el nivel de competencia digital del alumnado al trabajar estos problemas, pues son tanto de índole computacional como matemática.

Cuando un mismo problema puede resolverse usando diferentes métodos (como en este caso), también puede trabajarse la noción de velocidad de convergencia (i. e. qué método necesita menos iteraciones para alcanzar la precisión y/o exactitud deseada). En nuestro ejemplo, el método de Gauss-Seidel es más rápido qu el de Jacobi por su propia construcción. Obviamente, el alumnado debe ser capaz de seleccionar el método a aplicar en base a su velocidad de convergencia, lo cual se traduciría en primar el uso del método de Gauss-Seidel sobre el de Jacobi.

Problema 2: Factorización LU (unidad didáctica de resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales)

Expliquemos cómo evaluar al alumnado en un problema sobre factorización. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2.01x + y + 2z = 5.01 \\ 2x + 3y + 2z = 7 \\ 4x + 16y + 4z = 24 \end{cases} \tag{1}$$

el alumando ha de expresarlo matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

con matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ y vector de términos independientes $\vec{\boldsymbol{b}}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 16 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 5.01 \\ 7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el Problema 1, se ha de comprobar que $\boldsymbol{A}$ tiene determinante no nulo para que exista solución única. Una vez hecho esto, tiene sentido la factorización LU. Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{r,s})$ de orden $\boldsymbol{n}$ con determinante no nulo admite una factorización LU si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L} \bullet \boldsymbol{U}$, siendo $\boldsymbol{U}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$ con ceros por debajo de la diagonal principal y $\boldsymbol{L}$ una matriz cuadrada de orden $\boldsymbol{n}$ con ceros por encima de dicha diagonal y con unos sobre la misma. Como esta factorización no siempre existe, el alumnado debe asegurar si la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ es factorizable y así aplicar la factorización. Si $\boldsymbol{A}$ es factorizable, no hay que manipular el sistema para aplicar el método; en otro caso, la matriz no es factorizable (que es lo habitual) y el alumnado debe considerar un sistema equivalente que sí sea factorizable.

Más concretamente, debe usar el resultado que dice: El sistema se resuelve mediante el método de reducción sin reordenar las ecuaciones (i.e. las filas de $\boldsymbol{A}$) si y solo si $\boldsymbol{A}$ admite una factorización LU.

Este resultado le indica al alumnado que si $\boldsymbol{A}$ no es factorizable, entonces basta con reordenar las ecuaciones para obtener un sistema equivalente que sea factorizable. Este sistema será el que deban utilizar desde ese momento.

Determinar si el sistema es factorizable y, en caso negativo, cuáles son los cambios de ecuaciones a realizar es una de las funcionalidades del Mathematica, aunque será el alumnado quien interpretará las salidas que devuelve Mathematica a este respecto.

Si el alumnado calculase manualmente las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$, realizaría un número muy elevado de operaciones para obtener $\boldsymbol{U}$ a partir de la matriz escalonada del método de reducción (sin despejar las incógnitas). Posteriormente, $\boldsymbol{L}$ sería el producto de las matrices representando las transformaciones realizadas sobre $\boldsymbol{A}$ para obtener $\boldsymbol{U}$. Esto conllevaría invertir un tiempo considerable en volver a evaluar competencias de la asignatura Álgebra ya cursada y no las propias de MMI que se está cursando. Sin embargo, con Mathematica© podemos omitir el procedimiento algebraico, centrándonos solo en evaluar el numérico, ya que las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$ se calculan rápida, aunque inmediatamente, aplicando un comando a la matriz $\boldsymbol{A}$ e interpretando razonadamente los datos devueltos. Comprobémoslo definiendo la matriz $\boldsymbol{A}$ con Mathematica y aplicándole el comando LUDecomposition:

```
          ( 2.01  1   2 )
In[1]:= a := (  2    3   2 )
          (  4   16   4 )

In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]

Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}

In[3]:= MatrixForm[lu]

Out[3]//MatrixForm=
   (   4.       16.        4.      )
   ( 0.5025   -7.04      -0.01     )
   (  0.5    0.710227  0.00710227  )
```

La última matriz expresa abreviadamente las matrices $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{U}$. De la diagonal principal hacia arriba, se obtienen los datos de $\boldsymbol{U}$, mientras que por debajo de dicha diagonal corresponde a $\boldsymbol{L}$. Por tanto, el alumnado ha de interpretar esta información para obtener ambas matrices:

$$U = \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \text{ y } L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix}.$$

Más aún, el comando LUDecomposition siempre devuelve una factorización *LU*, pero no necesariamente de la matriz ***A*** introducida. El alumnado debe interpretar si la factorización es de ***A*** o si, por el contrario, corresponde a la matriz de un sistema equivalente. Para ello, solo debe comprobar si Mathematica© reordenó las filas, lo cual consiste en interpretar lo siguiente:

```
In[2]:= {lu, p, cn} = LUDecomposition[a]
Out[2]= {{{4., 16., 4.}, {0.5025, -7.04, -0.01}, {0.5, 0.710227, 0.00710227}}, {3, 1, 2}, 6262.8}
```

El dato resaltado debe interpretarse como el orden de las filas de ***A*** usado por Mathematica© para la factorización. El vector {3,1,2} indica que primero se considera la fila 3, después la fila 1 y por último la fila 2. Por tanto, ***A*** no pudo factorizarse y sus filas debieron reordenarse:

$$\begin{pmatrix} 4 & 16 & 4 \\ 2.01 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix}$$

Ahora evaluamos competencias del alumnado: reordenar filas en ***A*** equivale a reordenar ecuaciones en el sistema (1). Por tanto, el sistema a trabajar es el resultante de dicha reordenación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0.00710227 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Por tanto, el alumnado habrá comprendido la factorización *LU* si reordena los términos independientes al expresar el sistema factorizado. Usando esa expresión factorizada, el alumnado de calcular la solución del sistema en dos etapas, cada una consistente en aplicar el método de reducción sobre un sistema con matriz triangular, que equivale al despeje directo y automático de las incógnitas. Es decir, multiplicar la expresión (2) consecutivamente por las inversas de ***L*** y ***U***. Ambas estrategias deben aplicarse tras factorizar el sistema, siendo el alumnado quien toma la decisión sobre cuál usar y explicará lo que está haciendo en cada momento.

El primer sistema a resolver, con matriz de coeficientes ***L***, sería:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5025 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.710227 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 5.01 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

siendo ***x'***, ***y'*** , y ***z'*** incógnitas auxiliares, que representan el resultado de ***U*** por el vector de incógnitas original ***(x, y, z)^t*** (a determinar en el segundo paso). La solución del sistema (3) corresponde al valor de las incógnitas auxiliares:

$$(\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{y} \quad z)^t = (1 \quad 1 \quad 1)^t$$

Estas incógnitas auxiliares serán los términos independientes del sistema a resolver en el segundo paso, lo cual el alumnado debe tener completamente claro para continuar con el problema. La relación entre las incógnitas auxiliares y las incógnitas originales es:

$$\begin{pmatrix} 4. & 16. & 4. \\ 0 & -7.04 & -0.01 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

El alumnado debe usar las incógnitas auxiliares como términos independientes y así calcular las incógnitas del sistema (1). Por tanto, la solución del problema de partida resulta ser:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

El alumnado no es evaluado en resolver el sistema, ya que lo hace asistido por el paquete Mathematica©. Por tanto, nos centramos en evaluar el manejo del sistema y la interpretación de los resultados (tanto intermedios como finales).

Así, habríamos finalizado el problema y evaluado tanto conceptos teóricos como su aplicación práctica. Estos problemas pueden conllevar un contexto en el mundo real, permitiendo trabajar la modelización y matematización de la realidad: el alumnado traduciría la situación real a un sistema cuya solución se interpretaría en términos del contexto trabajado.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado nuestra percepción sobre el uso de los paquetes de cálculo simbólico para evaluar competencias matemáticas y digitales en nuestro alumnado. En este sentido hemos indicado algunas causas por las que el uso de dichos paquetes permite evaluar dichas competencias y cómo dicha evaluación se realizaría mediante de la resolución de problemas.

También hemos hecho énfasis en el cambio de las preguntas a realizar ya que la evaluación de dichas actividades no puede recaer en los cálculos, sino en los procedimientos y razonamientos. De este modo, aumentamos la complejidad en el tratamiento previo del problema y en la interpretación de los cálculos intermedios para que el alumnado demuestre su competencia al afrontar estos problemas y al aplicar los métodos trabajados, incluido el ser capaz de reducir un problema a otro resoluble con los métodos disponibles. Así evaluamos el manejo del alumnado en los métodos y procedimientos usados de manera razonada y argumentada, no por mera repetición mecánica.

Como queremos evaluar al alumnado con este tipo de actividades, hemos llegado a la tesitura de plantear un sistema de evaluación basado en realizar actividades de resolución de problemas durante todo el semestre para ir evaluando todo el proceso de enseñanza-aprendizaje y no solo el tramo final con un examen final. Por tanto, también hemos de evaluar la evolución del alumnado amén de las competencias adquiridas, aunque siempre exigiendo unos niveles mínimos. Por ello, el trabajo continuado del alumnado en el semestre es esencial para adquirir las competencias y superar la asignatura En estas actividades realizadas con ayuda de ordenador, se trabajan competencias transversales como el manejo de software y equipo informático (competencia digital) y la adquisición autónoma de conocimientos (aprender a aprender); todo ello además de trabajar pensamiento científico y tratamiento numérico (competencias matemáticas).

La resolución de problemas con ordenador nos ha permitido centrarnos más en los procesos mentales y de razonamiento realizados por el alumnado y trabajar las dificultades que presentan a ese respecto. En lugar de meras cuestiones de cálculo, las dudas del alumnado se centran en el planteamiento y resolución de problemas y en el tratamiento de datos, correspondientes a las competencias matemáticas y computacionales trabajadas.

Finalmente, este trabajo nos ha permitido mostrar cómo los problemas pueden trabajarse en clase con un paquete de cálculo simbólico y cómo esto nos permite centrar la evaluación en los conceptos y procedimientos. Tanto los cálculos como los algoritmos de "lápiz y papel" se vuelven auxiliares, no siendo en ocasiones materia propia de la asignatura sino herramientas a emplear. Así, los paquetes de cálculo simbólico nos ofrecen una vía para trabajar la asignatura con el alumnado pese a las carencias que pudiera traer de etapas previas, posibilitándole continuar su formación y convertir en actividad complementaria el solventar dichas carencias sin obstaculizar la asimilación de conceptos y procedimientos por su parte. Todo ello permitiendo la evaluación en el alumnado de los objetivos impuestos en la asignatura. Para ello, mostramos ejemplos de cómo evaluar problemas resueltos con ayuda de estos paquetes. Esto nos permite además integrar las TIC en nuestra docencia y trabajar específicamente la competencia digital tan importante en futuros ingenieros e ingenieras informáticas. En conclusión, creemos haber resaltado la importancia y utilidad como recurso didáctico y evaluativo de los paquetes de cálculos simbólicos siempre y cuando se replanteen las preguntas y actividades de evaluación que le proponemos al alumnado.

REFERENCIAS

ANECA (2005). *Libro Blanco del Título de Grado en Ingeniería Informática*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.

Arbizu, F., Lobato, C. y del Castillo, L. (2005). Algunos modelos de abordaje de la tutoría universitaria. *Revista de Psicodidáctica*, 1, 7-22.

Ballester, L. y Nadal, A. (2005). La Evaluación del alumnado en la universidad: rutinas y concepciones del profesorado. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 8(4), 1-7.

Bermudo, S., Moreno, P. y Tenorio, A.F. (2006). Una experiencia piloto en la Universidad Pablo de Olavide: "Fundamentos Matemáticos de la Informática I y II" y "Estadística" de la Ingeniería Técnica de Informática de Gestión. En *Actas de I Jornadas Nacionales de Intercambio de Experiencias Piloto de Implantación de Metodologías ECTS* , 8pp. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Boletín Oficial del Estado, 18 de septiembre de 2003, núm. 224 "Real Decreto 1125/2003, de 5 de septiembre, por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones en las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional", pp. 34355-34356.

Boletín Oficial del Estado, 25 de enero de 2005, núm. 21 "Real Decreto 55/2005, de 21 de enero, por el que se establece la estructura de las enseñanzas universitarias y se regulan los estudios universitarios oficiales de Grado", pp. 2842-2846.

Boletín Oficial del Estado, 30 de octubre de 2007, núm. 260 "Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales", pp. 44037-44048.

Contreras, A., Font, V., García, M., Luque, L. y Marcolini, B. (2005). Aplicación del programa Matemática a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En Maz Machado, A.M.; Gómez Alfonso, B. y Torralbo Rodríguez, M. (eds.). *Actas Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática*, pp. 271-282. Córdoba: SEIEM y Universidad de Córdoba.

Hernández-Jiménez, B.; Moreno Navarro, P. y Tenorio Villalón, A.F. (2008a). ¿Cómo se enfoca la metodología ECTS y la virtualización en las asignaturas de contenido estadístico-matemático de la Ingeniería Técnica en Informática de Gestión de la Universidad Pablo de Olavide? En Peña Ros, R. y otros (eds.), *Actas de XIV Jornadas de Enseñanza Universitaria de la Informática*, pp. 377-384. Madrid: LibroTeX.

Imbernon, F. y Medina, J.L. (2005). *Metodología participativa en el aula universitaria. La participación del alumnado*. Cuadernos de Docencia Universitaria 04. Barcelona: Editorial Octaedro

Jiménez Montero, L. (2006). Enseñanza de la matemática dominada por algoritmos versus una enseñanza más conceptual. En *Actas de I Encuentro Enseñanza de la Matemática*. Costa Rica: Universidad Estatal a Distancia.

Le Boterf, G. (1997). *L'ingénierie et l'évaluation des compétences*. Paris: Editions d'Organisation.

Mateo, J. (2007). Interpretando la realidad, construyendo nuevas formas de conocimiento: el desarrollo competencial y su evaluación. *Revista de Investigación Educativa*, 25(2), 513-531.

McClelland, D.C. (1973). Testing for competence rather than for 'intelligence'. *American Psychologist*, 28(1), 423-447.

MECD (2003). *La integración del sistema universitario español en el Espacio Europeo de Enseñanza Superior. Documento-marco*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Morin, E. (1999). *Seven complex lessons in education for the future.* Paris: UNESCO Publishing.

Sáenz Castro, C. (2001). Una nueva función formativa: la tutoría telemática. *Tarbiya: Revista de Investigación e Innovación Educativa*, 29, 119-133.

Salinas, J. (2004). Innovación docente y uso de las TIC en la enseñanza universitaria. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento*, 1, 1-16.

Pérez Jiménez, A.J. (2005). Algoritmos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 1, 37-44.

Pozo Llorente, T. (2005). The viability of the portfolio for learning and teaching evaluation: an innovation experience carried out in a university context. *International Journal of Learning*, 12, 269-278.

Pozo Llorente, M.T. y García Lupión, B. (2006). El portafolios del alumnado: una investigación-acción en el aula universitaria. *Revista de Educación*, 341, 737-756.

Roé, R.A. (2002). What makes a competent psycologist? *European Psycologist*, 7(3), 192-202.

Tenorio, A.F. (2008). Propuestas de actividades con calculadora gráfica para el tratamiento de operaciones matriciales en el aula. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15, 171-190.

Tenorio. A.F. y Oliver, E. (2011). Una experiencia docente sobre evaluación continua y seguimiento personalizado del alumnado de ingeniería en asignaturas de matemáticas. En García-García, M.J. e Icarán, E. (Eds.), *Actas de VIII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria* (8pp.). Madrid: Universidad Europea de Madrid.

Tenorio, A.F.; Paralera, C. y Martín, A.M. (2010). Evaluación mediante competencias digitales: una experiencia con Mathematica. *Epsilón: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES*, 75, 123-136.