

Uso de la calculadora para el descubrimiento de reglas para el cálculo mental en el caso de división con decimales

David Gutiérrez-Rubio
Universidad de Córdoba

Resumen: *Se presenta una serie de actividades para el aula de último ciclo de primaria utilizando como recurso una calculadora, no necesariamente científica, que servirá para que el alumnado descubra patrones en la expresión decimal de un número al ser dividido por una cifra que le permitirán realizar cálculos mentales.*

Palabras clave: *calculadora, cálculo mental, división decimal*

Using the calculator to the discovery rules for mental calculation in the case of division with decimals

Abstract: *We describe a series of activities for the classroom using a hand-held calculator, not necessarily a scientific one, in order to discover patterns in the decimal expansion of a decimal division by a single digit number. These patterns will help the student to develop tools for mental calculus.*

Keywords: *calculator, mental calculation, decimal division*

INTRODUCCIÓN

Las calculadoras han sido desde hace varios años una herramienta común para el alumnado. El debate entre si la calculadora es o no apropiada para la clase de matemáticas ha existido desde entonces, especialmente para educación primaria o secundaria. Multitud de estudios se han realizado al respecto, del que cabe destacar un meta-análisis

realizado por (Hembree & Dessart, 1986) de 79 estudios previos concluyendo que en general, se constataba una mejora del alumnado a la hora de resolver problemas.

Más recientemente, estudios como el de (Close, Oldham, Shiel, Dooley, & O'Leary, 2012) han observado que el uso de la calculadora puede mejorar no solo la capacidad de resolución de problemas sino la actitud del alumnado hacia las matemáticas.

El National Council of Teachers of Mathematics si bien establece que “La tecnología no deberá ser usada como reemplazo de la comprensión e intuición básicas” (NCTM, 2000, pág. 25), esta sí debe ser utilizada como apoyo para el desarrollo de las habilidades matemáticas, cuando el objetivo buscado no sea el cálculo en sí.

Por otra parte, en el Real Decreto de Educación Primaria se establece que “Para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, es necesario actuar con seguridad ante los números y las cantidades, utilizarlos siempre que sea necesario e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos.” (MEC, 2014, p. 19386).

Confrey y Maloney (2007) establecen 4 formas de uso de la tecnología para enseñar la matemática: 1) Enseñar conceptos y habilidades sin recursos tecnológicos y usarlos posteriormente como recursos para la mejora de las capacidades, 2) Usar la tecnología para ayudar en la búsqueda de patrones y como apoyo a conceptos matemáticos, 3) Usar la tecnología como un entorno mejorado para mostrar los conceptos matemáticos, y 4) Centrarse en el modelado y resolución de problemas, considerando la tecnología como una herramienta para su solución.

Las actividades que aquí planteamos usan mayoritariamente el segundo enfoque, es decir, a través de las calculadoras vamos a proponer ejercicios de búsqueda de patrones numéricos en las divisiones decimales por un número de una cifra.

Dichas actividades están pensadas para ser impartidas en los últimos ciclos de Primaria, cuando el alumnado ya es familiar con los desarrollos decimales de un número.

CONSIDERACIONES PARA LAS ACTIVIDADES

Para las actividades se asume que el alumnado está familiarizado con la división euclídea y que es capaz de realizarla mentalmente sin esfuerzo, al menos para dividendos pertenecientes a la tabla de multiplicar. Por ejemplo, el alumnado debe ser capaz de deducir mentalmente que 38 entre 9 es 4 con resto 2, porque sabe que $36=4 \times 9$.

Haremos énfasis, dado que las actividades se centrarán en la parte decimal de los resultados, en que el alumnado sepa que la última cifra decimal de la calculadora usualmente está redondeada, por lo que no sabremos si esa cifra es exacta o no. Por tanto, para las actividades que haremos, no nos fijaremos nunca en la última cifra decimal. Cualquier calculadora es suficiente para las actividades aquí planteadas, si bien es recomendable que la pantalla tenga al menos capacidad para 9 cifras.

ACTIVIDADES

Actividad 1: Dividir por 2

Esta actividad es muy sencilla y funciona como elemento introductorio para las siguientes actividades. Dado que el alumno debe de saber dividir por 2 sin problema, apenas hará falta el uso de la calculadora. Empezaremos preguntando un par de divisiones con diferente casuística y que el alumno verbalice las propiedades, a fin de prepararle para las siguientes actividades más complejas. Cabe recalcar que todas las divisiones se entenderán divisiones decimales, salvo que se diga lo contrario.

- Ejemplo:
 - ¿Cuánto es $1:2$? 0,5 ¿Y $2:2$? 1 ¿Y $24:2$? 12 ¿Y $25:2$? 11,5
- Preguntas para la clase:
 - ¿Por qué la tercera división no tiene cifras decimales?
 - ¿Por qué la cuarta sí?
 - ¿Hay algún número que al dividirlo por 2 no sea entero ni su parte decimal sea 0,5?

Llegados a la conclusión de que no hay números así, diremos que al dividir por 2 nos encontramos sólo con 2 casos posibles: Que sea entero (parte decimal 0) o que su parte decimal sea 0,5.

Así pues, podemos establecer una sencilla regla para la parte decimal de un número al ser dividido por 2: Si el número es par, la parte decima es 0, si el número es impar, la parte decimal es 0,5.

Hecho esto, estamos en situación de ver cómo podemos obtener reglas para la división con decimales por los otros números de una cifra.

Actividad 2: División por 3

Como la división por 3 no es tan trivial como la anterior, decimos, empezaremos por casos sencillos. Usando la calculadora, escribir el resultado de las siguientes operaciones:

$1:3=0,3333333...$	$2:3=0,6666666...$	$3:3=1$	$4:3=1,33333...$
$5:3=1,6666$	$6:6=2$	$7:6=2,33333...$	

Recordamos que las últimas cifras decimales “no son de fiar” porque no sabemos si la calculadora ha redondeado para arriba o para abajo, por lo que las descartamos.

Realizaremos preguntas para que los alumnos descubran la relación entre los diferentes cocientes.

- ¿Qué relación hay entre los decimales del primer y segundo cociente?
Respondida la pregunta anterior ¿Entonces $3:3$ no debería ser $0,999999...$?

Dicho esto, les pedimos que realicen de cabeza la siguiente división con resto, y justo debajo la misma con calculadora:

$14:3=4$ resto 2

$14:3=4,6666666\dots$

• Preguntas:

– ¿Qué tienen en común ambas divisiones? ¿El resto y la parte decimal están relacionadas? Si no tuviéramos calculadora, ¿podríamos haber hecho la segunda división igualmente de cabeza?

Mediante algunos ejercicios más conseguimos que el alumnado entienda la relación entre el resto de la división entera y la parte decimal de la división con decimales.

– ¿Cuántos posibles restos puedo tener al dividir por 3? ¿Cuántos posibles casos tengo entonces para los decimales al dividir por 3?

Llegados a este punto introducimos el concepto de “tabla de los decimales de 3”, que consiste en las expresiones decimales de $1/3$ y $2/3$ respectivamente (la de $3/3$ la obviamos porque no tiene decimales).

Así, si conocemos la tabla de los decimales de 3 podemos dividir mentalmente cualquier número entre 3, realizando primero la división con resto y luego pasándola a decimal. Verbalizaremos el procedimiento para asegurarnos de que todos lo han entendido.

Actividad 3: División por 4

Antes de construir la tabla de los decimales podemos preguntar cuántos elementos tendrá de antemano, basándose en los casos anteriores. La tabla que han de realizar los alumnos con la calculadora es:

$1:4=0,25$	$2:4=0,5$	$3:4=0,75$
------------	-----------	------------

En este punto observamos que la tabla siempre tiene una estructura similar, en la que el primer número decimal (0,25) se va multiplicando repetidamente (0,5, 0,75).

• Preguntas:

– ¿Por qué $2:4=0,5$, esos decimales no habían salido ya en la división por 2?

Se realizarán algunos ejercicios para dividir, tales como $27:4$, $15:4$, $41:4$, etc. El alumnado podrá comprobar los resultados sobre la marcha con la calculadora.

Actividad 4: División por 5

Tabla:

$1:5=0,2$	$2:5=0,4$	$3:5=0,6$	$4:5=0,8$
-----------	-----------	-----------	-----------

En este punto la tabla de decimales ya tiene 4 elementos y su memorización ya no es tan inmediata. Por otra parte al tener más elementos es más fácil observar patrones dentro de la tabla.

- Preguntas:

- ¿Qué relación hay entre el dividendo y la parte decimal del cociente?

De nuevo se realizarán ejercicios para que el alumnado divida mentalmente con decimales, como por ejemplo 33:5, 26:5, 49:5, etc.

Actividad 5: División por 6

Tabla de decimales:

$1:6=0,1666666\dots$
$2:6=0,3333333\dots$
$3:6=0,5$
$4:6=0,6666666\dots$
$5:6=0,8333333\dots$

Podemos realizar las siguientes preguntas a fin de que el alumnado detecte patrones en la tabla:

- ¿Por qué 3:6 no tiene infinitos decimales? ¿Por qué en 2:6 y 4:6 salen números que ya hemos visto antes?

Actividad 6: División por 7

Esta actividad puede ser la más rica y a la vez más gratificante para el alumnado, primero porque el patrón que se esconde en la tabla de decimales es más elaborado, segundo porque los resultados al dividir mentalmente con esta técnica pueden ser bastante espectaculares. Pedimos al alumnado que con la calculadora escriba la tabla de decimales del 7.

$1:7=0,14285714\dots$
$2:7=0,28571428\dots$
$3:7=0,42857142\dots$
$4:7=0,57142857\dots$
$5:7=0,71428571\dots$
$6:7=0,85714285\dots$

De nuevo hay que hacer énfasis en el que el alumnado no copie el último decimal al estar éste redondeado.

El patrón que subyace en esta tabla es muy diferente al resto, y no deja de ser curioso. La serie de 6 números “142857” se repite constantemente en todos ellos, de forma

periódica. La única diferencia entre los diferentes desarrollos decimales es el primer decimal con el que empieza a “recitarse” la serie. Por ejemplo en $6:7$ el primer decimal es 8, por lo que la serie decimal empezaría “857 142857 142857...”

Debemos dejar al alumnado que descubra este patrón, dejándole que examine los números. Una ayuda puede ser pedirles que lean en voz alta las cifras decimales para que aprecien las repeticiones que hay en las series. También puede ser de ayuda escribir en la pizarra varias cifras decimales más de las que admite la calculadora, para que se vea claramente la repetición.

Una vez que el alumnado es consciente de que las partes decimales constan de la misma serie “mágica” de números 1, 4, 2, 8, 5, 7 repetidos indefinidamente, y de que la única diferencia es cuál es la primera cifra decimal, les pedimos al alumnado que inspeccione la primera cifra decimal de cada elemento de la tabla y que busquen alguna relación. Por experiencias previas hechas en clase, podemos decir que lo más normal es que primero se den cuenta de que la primera cifra va aumentando, para posteriormente darse cuenta de que es la serie “mágica” 1, 4, 2, 8, 5, 7 ordenada de menor a mayor: 1, 2, 4, 5, 7, 8.

De esta forma, concluimos, para poder dividir por 7 con decimales solo necesitamos memorizar estos números 1, 4, 2, 8, 5, 7 y proceder de la siguiente manera:

Ejemplo: Queremos calcular mentalmente $46:7$. Se que el múltiplo de 7 que más se acerca por debajo es $6 \times 7 = 42$, por lo que $46:7 = 6$ con resto 4. En este punto ya conozco la parte entera, vamos a por la parte decimal, que la obtendré calculando $4:7$.

A priori no conozco de memoria el desarrollo de $4:7$, pero se que debe empezar por la cuarta cifra de menor a mayor de la serie “mágica” 1, 4, 2, 8, 5, 7. La cuarta cifra de menor a mayor es 5. Así la parte decimal de $4:7$ consistirá en recitar la serie “mágica” comenzando desde el 5 y repitiendo indefinidamente:

$$4:7=0,57142857\dots$$

Por lo que el resultado final será $46:7=6,5714825714\dots$

Recitando una y otra vez la serie “mágica” rápidamente sobrepasamos la capacidad de la calculadora. Es fácil ver que, para alguien que no esté familiarizado con este procedimiento, el resultado puede ser bastante espectacular.

Se pueden practicar divisiones mentales sin más ayuda que la serie “mágica” 1, 4, 2, 8, 5, 7 escrita en la pizarra. Después de unas cuantas divisiones el alumnado será capaz de hacerlo sin ningún tipo de ayuda.

Actividad 7: División por 8

De nuevo pedimos al alumnado que realice la tabla de los decimales, obteniendo 7 elementos:

$1:8=0,125$
$2:8=0,25$
$3:8=0,375$
$4:8=0,5$
$5:8=0,625$
$6:8=0,75$
$7:8=0,875$

Para esta tabla podemos hacer las siguientes preguntas:

– ¿Qué pasa con los números de 2:8, 4:8 y 6:8, los has visto antes?

Si se cuánto vale 1:8 y 4:8, ¿puedo obtener fácilmente 5:8?

Actividad 8: División por 9

Esta actividad puede resultar sorprendente a los alumnos que a priori pueden encontrarse con alguna tabla compleja, pues es la más extensa de todas, sin embargo, esa percepción rápidamente desaparece cuando escriben los primeros elementos de la “tabla de decimales”:

$1:9=0,11111111\dots$
$2:9=0,22222222\dots$
$3:9=0,33333333\dots$
$4:9=0,44444444\dots$
$5:9=0,55555555\dots$
$6:9=0,66666666\dots$
$7:9=0,77777777\dots$
$8:9=0,88888888\dots$

• Preguntas:

– ¿Qué relación hay entre el dividendo y la expansión decimal?

Siguiendo con la lógica de la tabla ¿qué decimales corresponderían a 9:9? ¿A qué equivale eso?

Una vez familiarizados con la tabla, de nuevo se practicarán divisiones mentales de un número por 9.

Actividad 9: Preguntas finales

Al terminar con todos los posibles casos de división por una cifra, podemos realizar las siguientes preguntas desde una visión global de las actividades:

- ¿Has notado que a veces salen infinitas cifras decimales y a veces no? ¿Qué divisores generan siempre una cantidad finita de cifras decimales? La respuesta será 2, 4, 5 y 8.
- ¿Qué tienen de especial esos números que no tienen los demás? La respuesta es: todos se descomponen en productos de 2 o 5, que son los divisores de 10.
- De los divisores que generan siempre una cantidad finita, ¿cuáles generan como mucho un único decimal? ¿Cuáles generan como mucho dos? ¿Cuáles tres?
- La respuesta es: Para 1 decimal, 2. Para 2 decimales, $4=2 \times 2$. Para 3 decimales, $8=2 \times 2 \times 2$

De aquí podemos hacer la siguiente pregunta: ¿Cuántas cifras decimales nos saldrán como mucho al dividir un número entre 32? Comprobar con la calculadora.

CONCLUSIONES

Con dichas actividades se pretende:

- Fomentar la percepción de patrones numéricos en el desarrollo decimal de una división por una cifra.
- Aplicar dichos patrones a una aplicación práctica, que es la construcción de reglas para el cálculo mental.
- Utilizar la calculadora como herramienta para investigar, no como un elemento que nos da la solución.
- Fomentar la verbalización de propiedades, mediante la participación en clase.

REFERENCIAS

- Close, S., Oldham, E., Shiel, G., Dooley, T., & O'Leary, M. (2012). Effects of Calculators on Mathematics Achievement and Attitudes of Ninth-Grade Students. *The Journal of Educational Research*, 105(6), 377–390.
- Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A Theory of Mathematical Modelling in Technological Settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education*, 57–68. Springer US.
- Hembree, R., & Dessart, D. J. (1986). Effects of Hand-Held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(2), 83–99.
- MEC (2007). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.