Épsilon - *Revista de Educación Matemática* 2015, Vol. 32(2), nº 90, 21-30

Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear formulas

Sandra Guerrero y Pablo Flores
Universidad de Granada

Resumen: *Usualmente la enseñanza de la geometría pretende el aprendizaje de medidas, predominantemente empleando formulas, pero sin profundizar en su significado. Es relevante introducir procesos que favorezcan el aprendizaje de elementos geométricos, o de magnitudes que les afectan. Este texto describe el método empleado para trabajar el volumen del tetraedro regular*[1] *por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas, sustentado en una propuesta de enriquecimiento curricular diseñada para que los estudiantes obtengan relaciones y reglas generales empleando material manipulativo.*
Palabras clave: *volumen del tetraedro, no empleo de fórmulas, estudiantes con talento matemático.*

Getting the volume of tetrahedron mathematically talented students without using fórmulas

Abstract: *Usually the teaching of geometry learning aims names and measures, predominantly using formulas, but without going into its meaning. It is important to introduce processes that foster learning geometric elements, or of quantities that affect them. This paper describes the method employed to work the volume of the tetrahedron mathematically talented students without using formulas, based on a proposal of curricular enrichment designed for students to gain general rule sand establish relationships, using manipulative material.*
Keywords: *tetrahedron volume, no use of formulas, mathematically talented students.*

1. En lo sucesivo al referirnos al tetraedro regular que tiene por arista el lado del triángulo equilátero aludiremos a él como tetraedro o T.

INTRODUCCION

ESTALMAT (Estimulo del Talento Matemático)[2] es un proyecto desarrollado en España que tiene la finalidad de detectar el talento matemático y respaldar la calidad de estudiantes que lo manifiesten. Los estudiantes participantes en esta investigación se consideran con talento matemático, por haber superado una prueba de acceso al programa en la que dan cuenta de sus habilidades matemáticas. En la prueba compitieron con casi 500 compañeros de las 4 provincias andaluzas.

Un posible enfoque para la atención de estos alumnos es desarrollar sus potencialidades diseñando unas prácticas docentes que las atiendan, esta forma de intervención se adapta adecuadamente al grupo de alumnos que forman parte del proyecto ESTALMAT en Andalucía Oriental como se cita en (Ramírez, 2012).

Las clases del proyecto Estalmat se destinan al enriquecimiento curricular, es decir, no avanzan en los programas de matemáticas escolares, sino que afrontan nuevos problemas, incluyendo el tratamiento de aspectos matemáticos generalmente no tratados en clase.

La mayoría de estos alumnos no están diagnosticados mediante procesos objetivos baremados. El curso se compone de 25 alumnos de 14 a 16 años de edad, de los cuales asistieron 7 chicas y 16 chicos.

Durante una sesión del programa Estalmat para Andalucía Oriental, del curso 2013-2014, llevamos a cabo un enriquecimiento curricular enmarcado dentro de una actividad extraescolar, centrado en hallar el volumen del tetraedro, partiendo de la idea de que era posible que los estudiantes prescindieran de emplear fórmulas para calcular volúmenes, y lo suplieran mediante la comparación directa de cuerpos,

JUSTIFICACIÓN CURRICULAR

El Decreto 231/2007, de 31 de julio, en su artículo 5 establece la definición y principios para la determinación de las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. Especifica en el apartado d del punto 3, que “se deben integrar aprendizajes y experiencias que se consiguen o adquieren en espacios y tiempos escolares con los que se puedan conseguir o adquirir fuera de ellos” (Junta de Andalucía, 2007, p.5). Estas ideas nos han animado a presentar una sesión que tome en consideración actividades externas, para llegar a obtener el volumen del tetraedro.

METODOLOGIA

Durante la sesión se realizaron tareas de crecimiento grupal con los estudiantes para hallar el volumen del tetraedro empleando el mínimo de fórmulas posible. El foco de atención se centró en cubrir dos aspectos muy importantes como son: calcular el volumen del tetraedro por comparaciones y estudiar diversas pirámides en el interior del cubo

2. En adelante para mencionar al proyecto Estimulo del Talento Matemático, lo indicaremos como ESTALMAT.

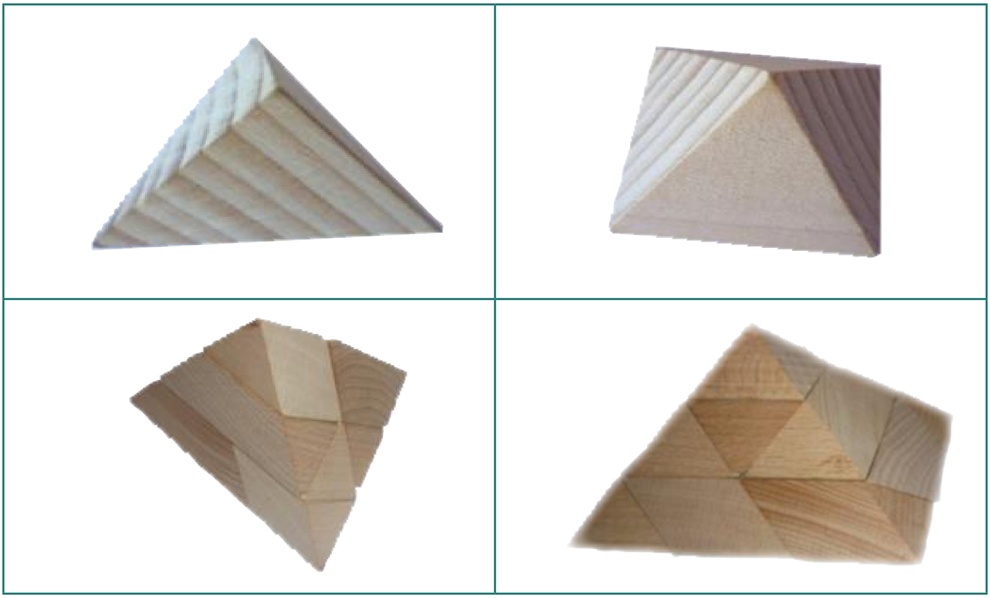

Figura 1: Tetraedro simple y triple *Pirámide simple y triple*

PLANEACIÓN Y DISEÑO DE LA SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO CURRICULAR

La sesión pretendía que los estudiantes apreciaran el volumen del tetraedro por percepción directa, comparando los volúmenes del tetraedro y la pirámide cuadrada[3] de lados iguales, determinando razonadamente cuál tiene mayor volumen tras examinar cómo se relacionan sus elementos. La continuidad de los argumentos de comparación la harían componiendo tetraedros y pirámides más grandes tomando como referencia los que tienen por lado la unidad, empleando para ello un puzle compuesto de pirámides y piezas de pirámides, descrito en Flores (2006). Esto les permitiría observar que el volumen de P es mayor que el de T, dado que el número de piezas utilizadas para su composición es mayor (figura 1).

Con objeto de concretar esta comparación y establecerla con una unidad de volumen conocida como es la del cubo, se propone buscar formas de componer el cubo a partir de tetraedros y pirámides, identificando qué pirámides se forman al obtener un tetraedro dentro del cubo, indicando cuántas caras tienen, qué son esas caras, qué relación tienen con los datos del cubo. (Figura 2).

Los alumnos dibujarían el tetraedro dentro del cubo. El problema entonces pasa a ser determinar el volumen de las figuras en que queda descompuesto el cubo, preferentemente en función de tetraedros y pirámides Es útil identificar que se puede componer una

3. En lo que sigue para referirnos a la pirámide cuadrada que tiene por arista el lado del triángulo equilátero la nombraremos como pirámide o P.

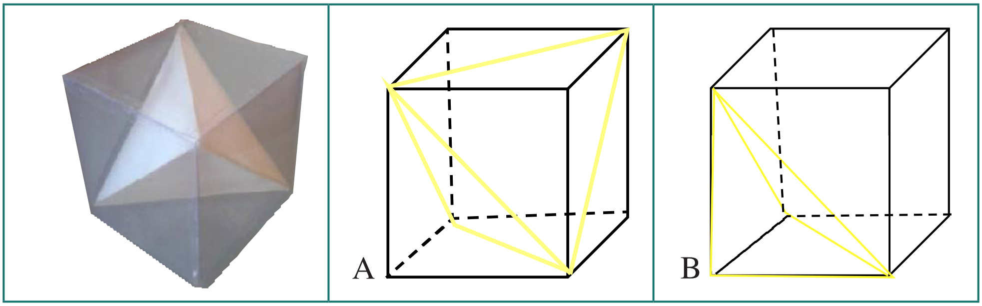

Figura 2: Tetraedro dentro del cubo(A), formado con diagonales de las caras. Se complementa con cuatro pirámides trirectángulas, como las que se indican en B

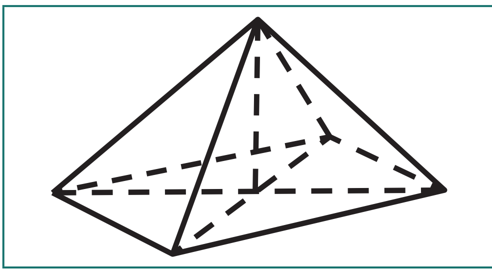

Figura 3. Pirámide cuadrada formada por 4 pirámides trirectángulas

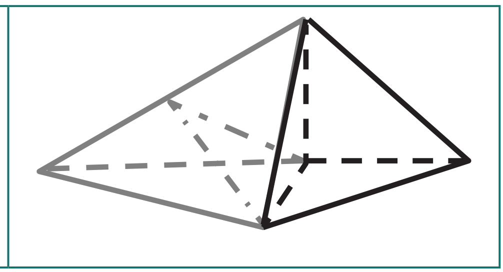

Figura 4. 2 pirámides trirectángulas unidas (gris), de igual base y altura que el tetraedro (negro)

pirámide con cuatro tetraedros trirectángulos (Ttr)[4]. El siguiente paso consiste en determinar el volumen del Ttr. Para ello se puede recurrir a unir dos Ttr para formar una pirámide oblicua de igual base y altura que el tetraedro como se detalla en Guerrero (2014), con lo cual, y aplicando que "dos pirámides de igual superficie de la base e igual longitud de la altura tienen el mismo volumen", se logra descomponer el volumen del cubo en la suma del volumen de tres tetraedros, precisando las relaciones de volumen 1:3 entre T y el cubo y 2:1 entre P y T. En este caso aceptamos que el volumen depende de la superficie de la base y de la altura, propiedad que se maneja desde los elementos de Euclides, pero que requiere para su justificación el Principio de Cavalieri. (Figuras 3-4)

A partir de los puzles tendrían muchos elementos de comparación, como por ejemplo que los volúmenes de la pirámide y el tetraedro juntos son iguales al del cubo.

Para obtener el volumen de manera perceptible hay que buscar otras estrategias, como determinar el volumen del Ttr a través de particiones infinitas.

En cualquier caso, ya están en disposición de calcular el volumen de tetraedros y pirámides de lados dados, a partir del cubo en el que ambos caben. Al introducir el tetraedro

4. En adelante para referirnos al tetraedro trirectángulo lo indicaremos como Ttr dentro del cubo se hace visible que su arista es igual a la diagonal de la cara del cubo. La secuencia de enseñanza propone relacionar la diagonal y el lado de la cara del cubo expresando estos segmentos unos en función de otros, como un paso previo para hallar el volumen del tetraedro en función de su arista, empleando el resultado obtenido, es decir, que su volumen es un tercio del volumen del cubo.

IMPLEMENTACIÓN DE LA SESIÓN DE ENRIQUECIMIENTO

Una vez diseñada la clase, las tareas se implementaron en el orden señalado, para conducir al estudiante a una evolución en sus razonamientos. En la primera de las tres horas que duró la sesión, se hizo una presentación en PowerPoint, mostrando la dificultad de justificar las fórmulas de cálculo del volumen. Durante el desarrollo se entregó un formulario por estudiante consistente en 4 cuestiones, comenzando por examinar y justificar la relación entre los volúmenes de T y P. Luego se formaron grupos de 2 estudiantes a los que se les repartió los puzles mencionados anteriormente, para que precisaran la relación. Posteriormente se pidió dibujar el tetraedro dentro del cubo y examinar el volumen del Ttr, para terminar pidiendo la fórmula que permite calcular el volumen de tetraedro en función de la longitud de su arista. A continuación presentamos cómo se desarrolló la sesión y examinamos las respuestas de los estudiantes.

TRABAJO DE LOS ESTUDIANTES DURANTE LA SESIÓN

Al comienzo, la comparación entre los volúmenes de P y T, la hicieron de manera intuitiva cotejando sus alturas y las áreas de las bases. Al comparar áreas de las bases aventuraron que el volumen de una pirámide debía ser proporcional al área de su base. Percibieron la dificultad de apreciar la diferencia de volúmenes de P y T dado el tamaño similar de ambos, mostrando cierta disposición para comparar con poliedros semejantes más grandes. Se sintieron tentados por el reto de componer una pirámide con todas las piezas del puzle (Flores, 2006), lo que distrajo su atención durante algún tiempo. Posteriormente comenzaron a construir pirámides y tetraedros de lados dobles y triples. Durante la composición de estos poliedros los estudiantes fueron hábiles con las piezas del puzle, pese a que son diferentes y presentan formas inusuales, apreciando que todas las piezas se descomponen en tetraedros y pirámides. La construcción de poliedros dobles y triples les permitió confirmar su hipótesis de partida de que el volumen de P es mayor que el de T. Para lo cual les fue útil analizar la cantidad de pirámides y tetraedros unidad, necesarios para componer los poliedros semejantes de lado n veces el lado del triángulo equilátero. En la tabla 1 aparecen las cantidades de tetraedros y pirámides empleadas para ello.

Una vez confirmado que el volumen de T es menor que el de P, se propuso buscar un tetraedro al interior del cubo. Una vez identificado se les suministró el puzle del tetraedro, consistente en un tetraedro y 4 Ttr. Los estudiantes trabajaron con este puzle, para realizar construcciones, pero también para elaborar representaciones planas en perspectiva de las mismas, y caracterizar el Ttr.

Tabla 1: Relaciones entre volúmenes de P_i y T_i[5]

Lado	Tetraedro		Pirámide		Observaciones
	Tetraedros	Pirámides	Tetraedros	Pirámides	
1	1	0	0	1	
2	4	2	4	6	P_2-T_2=$6P_1$
3	11	8	16	18	P_3-T_3=$5T_1$+$10P_1$
4	24	12	40	43	
5	45	40	80	84	

Finalmente obtuvieron reglas a partir de la generalización de las regularidades encontradas al relacionar la diagonal con la cara del cubo y establecer que el volumen de P es el doble de T y este la tercera parte del cubo.

En esencia establecieron comparaciones de volúmenes mediante el rellenado de pirámides.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS ESCRITAS DE LOS ESTUDIANTES AL FORMULARIO

Para examinar los razonamientos escritos de los estudiantes, se recogieron sus formularios escritos. Se realizó una tabla con los campos en los que se esperaba respuestas y se rellenaron revisando los escritos. Una vez apreciadas las respuestas se organizaron en 16 categorías, correspondientes a los procesos planteados en el camino hacia obtener el volumen del tetraedro.

En la tabla 2 aparecen las respuestas, así como las etapas previstas realizadas por los alumnos, teniendo en cuenta que, aunque asistieron 23 alumnos, recogimos 21 respuestas escritas, dado que dos formularios estaban firmados por dos parejas de alumnos.

Tabla 2: Respuestas satisfactorias de los alumnos a las etapas previstas

Categoría	**1**				**5**		**7**	**Ttr**			**11**					**16**
		2	3	4		6		8	9	10		12	13	14	15	
No. Alum.	21	16	10	2	15	2	9	4	9	7	20	21	21	20	17	18

5. La notación Pi y Ti corresponde a las pirámides y tetraedros de lado i.

Categorías

1) Afirman que el volumen de P es mayor que el de T
    2) Comparan las bases de P y T
    3) Comparan bases y alturas
    4) Otras justificaciones (comparación de peso, encuentran figuras interiores)
5) Componen y expresan T_2 y P_2
    6) Concluyen que el volumen de P no es triple del T
7) Componen y expresan T_3 y P_3
   Hallan volumen de Ttr:
    8) Por truncamientos reiterados
    9) Por descomposición.
    10) Por fórmula
11) Relacionan volúmenes de Ttr, P, T y cubo, determinando que el volumen P es el doble del volumen de T
    12) Dada la arista del cubo hallan la del tetraedro
    13) Dada la arista del tetraedro hallan la del cubo
    14) Dada la arista del cubo hallan su volumen y el del tetraedro
    15) Dada la arista del tetraedro hallan su volumen y el del cubo
16) Dado el volumen del tetraedro hallan su arista

A partir de la manipulación de figuras opacas todos los estudiantes encontraron que P tiene mayor volumen que T (Cat. 1), analizaron sus formas y propiedades. Dieciséis estudiantes comparan las pirámides estableciendo la proporcionalidad entre las bases y argumentan que el volumen de P es mayor que el de T porque su base tiene mayor área. Diez de ellos, además, comparan las alturas respectivas (cat. 2, 3 y 4). Otras justificaciones (cat. 4) acuden a dibujos interiores o a comparar el peso de las piezas entregadas, por ejemplo.

Quince estudiantes compusieron las pirámides y tetraedros de lados dos, nueve de ellos incluso construyeron las figuras triples y las expresaron en función de la pirámide y el tetraedro unidad. En todas las composiciones percibieron que para construir las pirámides, emplearon más piezas que para componer los tetraedros, lo cual lleva a dos alumnos a expresar (cat. 6) que el volumen de P es menor del triple del volumen de T. Sin embargo no tienen argumentos suficientes para precisar la relación entre P y T.

Una vez dibujado el cubo y en su interior el tetraedro, pasan a calcular el volumen de Ttr, que lo encontraron de tres maneras. Cuatro estudiantes reproducen un proceso de truncamientos reiterados infinitos mostrado en clase, mediante el cual se obtiene que el volumen de Ttr es 1/6 del cubo original (Flores, Ramírez y Rodríguez, 2014). Nueve estudiantes siguieron el proceso de descomposición empleando fórmulas de proporcionalidad, y sólo siete no han podido evitar emplear la fórmula, pese a que se ha planteado la actividad para obviarlas. En total veinte de las respuestas llegan a establecer la relación 1:6 entre el volumen del Ttr y el cubo.

Al relacionar aristas y volúmenes; todos los estudiantes relacionan la diagonal y el lado de la cara del cubo. Salvo el estudiante uno, los demás hallaron los volúmenes de T y del cubo conociendo la arista de este último. Diecisiete estudiantes hallan el volumen de T y el del cubo, dada la arista de T. Dieciocho estudiantes hallan la longitud de la arista de T, dado su volumen. Las tareas de la esta actividad fueron las que tuvieron más relaciones acertadas en todos y cada uno de los pasos.

Tras explicarles cómo construir un “tetrabrick” tetraédrico, con cartón, se les pidió realizar uno de medio litro de capacidad. Tenían que determinar la longitud de su arista y hacer las medidas adecuadas para construirlo. 18 respuestas recogen la relación que les permite determinar la arista de T conocido su volumen.

Todos los estudiantes siguen el razonamiento propuesto, independientemente del número de pasos contestados. En general hicieron un uso escaso de fórmulas, siguiendo el proceso planteado.

CONCLUSIONES

El proceso de relacionar volúmenes por comparación directa no es sencillo, salvo en casos en que se aprecie el proceso de descomposición y recomposición. Este proceso se complica en las pirámides, en las que para romperlo se suele emplear el principio de Cavalieri (González-López y Flores, 2001). Esta dificultad, junto con el interés en que los alumnos desarrollen sentido de la medida, apreciando que la magnitud (volumen en este caso), se aplica a cuerpos sólidos, preferentemente poliedros, en su comienzo, poniendo en juego destrezas de comparación, de suma, etc. (Moreno, Gil y Montoro, 2015), nos ha llevado a proponer un proceso de enriquecimiento curricular para alumnos de ESTALMAT basado en el volumen (Guerrero, 2014, Flores, Ramírez y Rodríguez, 2014). En este artículo hemos relatado el proceso llevado a cabo, y examinado el éxito de los alumnos al seguir el razonamiento propuesto.

Apreciamos que los estudiantes de ESTALMAT Andalucía Oriental, siguieron con cierta facilidad el proceso de razonamiento propuesto, mostrando con ello una gran sensibilidad para reconocer el papel de las fórmulas en el cálculo del volumen, evitando ponerlas en juego sin haber hecho antes otro tipo de razonamientos. Durante el proceso mostraron capacidad para identificar cuáles de sus razonamientos eran debidos a resultados aprendidos mediante fórmulas y cuáles se podían obtener por comparación directa de medidas, especialmente de comparación directa. Desarrollaron estrategias eficientes, encontraron patrones y establecieron relaciones. El modelo de combinar enriquecimiento curricular (en este caso, la comparación de volúmenes), con fijar su atención sobre aspectos de razonamiento matemático (el papel de la fórmula en matemáticas, en este caso) (Ramírez, 2012, Ramírez y Flores, 2015), lo han seguido de manera satisfactoria.

El proceso ante todo se enfocó a la comparación de cantidades de volumen de poliedros, a través del descubrimiento de relaciones entre segmentos, áreas y volúmenes mediante la composición y la descomposición de estos. Hasta finalizar las actividades, no se hicieron mediciones, por tanto no hay aplicación de medida directa en ningún momento, ya que no se ha definido una unidad de medida. Está pendiente completar este proceso de razonamiento mediante la introducción de las etapas de medición que den mayor sentido de la medida (Moreno et al., 2015), examinando qué tipo de deformaciones permite encajar las unidades de volumen, generalmente cúbicas, en pirámides.

REFERENCIAS

Flores, P. (2006). Una pirámide rellena de…pirámides. En Flores, P., Ruiz, F. y De la Fuente, M. (Coord.). *Geometría para el siglo XXI*. (pp. 2221 – 247). Badajoz, Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y SAEM Thales.

Flores, P., Ramírez, R. y Rodríguez, M. (2014). *Volumen del tetraedro.* Seminario ESTALMAT, Barcelona, 2014.

González-López, M.J. y Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las Matemáticas: el caso del volumen. *Educación Matemática*, XIII(1), 94-106.

Guerrero, S. (2014). *Obtención del volumen del tetraedro por alumnos con talento matemático, sin emplear fórmulas*. Trabajo Fin de Máster, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Junio de 2014.

Junta de Andalucía (2007). *Decreto 231/2007, de 31 de Julio, por el que se establecen las enseñanzas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía.*

Moreno, M.F., Gil, F. y Montoro, A.B. (2015). Sentido de la medida. En Flores, P. y Rico, L. (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 174-168). Madrid, Pirámide.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral inédita. Granada, Universidad de Granada.

Ramírez, R. y Flores, P. (2015). *Planificación de sesiones de Enriquecimiento matemático*. Taller en 17 JAEM, Cartagena, 5 al 8 de julio de 2015.