Comparación de razones: "¿qué es mejor, dos pizzas medianas o una familiar?"

Bernardo Gómez Alfonso
Amparo García Nadal
Universidad de Valencia

Resumen: *En este trabajo se presenta una propuesta para evaluar situaciones de desproporción dentro del tema de razón y proporción. Las tareas diseñadas para el cuestionario son realistas extraídas de folletos de ofertas comerciales. Se analizan las tareas señalando sus componentes críticas y los patrones de respuesta de los estudiantes.*
Palabras clave: *razón y proporción, resolución de problemas, normalizar y relativamente*

Ratio comparisons: "what is better, two regular pizzas or a large pizza?"

Abstract: *This study presents a proposal to evaluate not proportion in ratio and proportion situations. The tasks realized for the test are real and drawn from brochures of commercial offers. Tasks are analyzed indicating its critical components and the students' responses patterns.*
Keywords: *ratio and proportion, problem solving, norming and relatively*

INTRODUCCIÓN

El concepto de razón es muy complejo y requiere un proceso de aprendizaje a largo plazo, donde es necesario que los estudiantes se vean confrontados con tantos aspectos de la razón como sea posible, y emparejados a tantos fenómenos como se pueda. Aunque se trata de una relación de equivalencia, definida por la igualdad: $a:b=c:d$ si el par (a, b) es equivalente a (c, d), su significado propio, lo que hace valiosa a la razón no es su valor numérico, sino hablar sobre igualdad o desigualdad de razones, sin conocer el tamaño de la razón (Freudenthal, 2001, p.67). Otro aspecto importante es que una razón es una relación invariante y que cualquier cambio en el antecedente (numerador) producirá un cambio en el consecuente (denominador); y que a diferencia de lo que ocurre con las fracciones no se necesita conocer el "todo", porque la relación no cambia de valor cuando cambia la cantidad total.

Los estudios sobre razón y proporción han estado influidos por el papel central asignado al razonamiento proporcional. Se distinguen dos tipos principales de estudios: los que se centran en el desarrollo cognitivo y los que se orientan a la estructura y caracterización del contenido matemático. Los primeros, se fijan en el estudio de las competencias en el sentido de Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009), es decir, lo que el alumno puede o no puede hacer (Tourniaire y Pulos, 1985); los segundos, se centran en el contenido matemático, como hace Freudenthal (2001) en su punto de vista fenomenológico, donde propone que en vez de empezar por el concepto "y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto se debería buscar primero fenómenos que pudieran compelir al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto". Las aportaciones de estos autores son pues los antecedentes de este trabajo.

LA INVESTIGACIÓN PRECEDENTE Y LAS PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

A lo largo de los últimos años se han usado diferentes tipos de tareas para evaluar el razonamiento proporcional: *Valor perdido, Comparación numérica* y *Comparación y predicción cualitativa*, *Proporciones que implican conversión de razones a razones de cambio o fracciones* y *Problemas de traslación*, (Cramer y Post, 1993; Lesh, Post y Behr, 1988). A partir del análisis de las respuestas a estas tareas se ha obtenido la descripción de estrategias correctas: *razón unitaria, factor de cambio, fracción* y *producto cruzado*; e incorrectas: *construcción progresiva, operaciones aleatorias y diferencia constante* (Cramer y Post, 1993; Hart, 1981).

Además, se han identificado variables que influyen en las decisiones de los estudiantes, unas son de tipo estructural y otras referentes al contexto. Entre las variables estructurales, se distinguen dos tipos de comparaciones denominadas "interna" y "externa" por Freudenthal (2001) o "dentro" y "entre" por Noelting (1980).

Ligados a estos fenómenos, se señala la importancia de ideas tales como *relativamente* o *comparativamente*. Estas ideas permiten comparar cantidades con referentes diferentes transformando el referente.

A menudo hay razones que en principio son difíciles de imaginar o visualizar. En esos casos, Freudenthal (2001) hace uso de un conjunto de técnicas a las que denomina *normalizar*. La *normalización* es un proceso de reconceptualización de un sistema en relación con alguna unidad fijada o estándar (Lamon, 1994, p.94).

Se asume la precariedad de la enseñanza tradicional de la razón, que se construye con objetos matemáticos desconectados de la realidad y no da cuenta de la riqueza fenomenológica de ese concepto. Así, el objetivo de este trabajo es aportar tareas relevantes tomadas de la vida diaria para la enseñanza de la razón que pongan en juego el objeto mental "relativamente", las técnicas de normalización, las relaciones entre cantidades y la comparación de razones desiguales.

Con el fin de organizar el estudio planteado se formulan las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Cuáles son las componentes críticas de las tareas diseñadas?
- ¿Qué características comunes y no comunes que se pueden identificar en las respuestas de los estudiantes al intentar resolverlas: patrones de respuestas y perfiles de los estudiantes?

METODOLOGÍA

La investigación es de tipo cualitativo y se basa en el "análisis de las tareas" teórico y empírico. Para ello se diseña un cuestionario ex-profeso. El trabajo previo de Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig (2009) es el referente de la metodología.

En este apartado se especifica cómo se implementó el cuestionario, la muestra tomada para el estudio, cómo se diseñaron las tareas, sus componentes críticas y un esquema de clasificación de las respuestas de los estudiantes por categorías y subcategorías.

Diseño, muestra e implementación

Las tareas elegidas son realistas ya que han sido tomadas de la vida diaria, concretamente de los folletos de ofertas comerciales corrientes en los establecimientos.

Son tareas que involucran el objeto mental *relativamente* y las técnicas de *normalización*. Son tareas de *comparación numérica* (Cramer y Post, 1993) en situaciones de *desproporción*, porque hay que juzgar cuál de dos razones es mayor o menor, o tal vez iguales: A/B (<, =, >) C/D, y esto se puede hacer de modo grosero o preciso.

Además, en estos problemas suele ser conveniente que se requiera efectuar una *traslación entre o conversión de normalizaciones* para homogeneizar las razones cuando vienen normalizadas de modo diferente.

El cuestionario inicial que se diseñó consta de 7 tareas, denominadas: "pizzas", "cervezas", "antimosquitos", "arroz", "fairy", "papel higiénico 1" y "papel higiénico 2".

Se implementó en tres niveles educativos: 1º bachillerato, 2º magisterio y máster de profesorado, mediante hojas individuales. En los tres grupos la actitud fue participativa e interesada.

ANÁLISIS DE TAREAS

Con el fin de ilustrar el trabajo realizado, se ofrece a continuación el análisis de una tarea. Se señalan sus componentes críticas y se muestra cómo dichas componentes sustentan los procesos de resolución de la tarea.

Tarea "Pizzas"

Se presenta a los estudiantes una imagen que corresponde a una oferta de pizzas. El texto dice: ¿Qué es mejor, dos pizzas medianas de 30cm de diámetro y 14,95€ cada una, o una pizza familiar de 50cm de diámetro y 27.95€?

Figura 1.Tarea Pizzas.

Objetivo cognitivo

El objetivo de esta tarea no reside en responder qué pizza es más barata en términos absolutos, sino relativos, es decir, qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida.

Se trata de una tarea de comparación numérica en un contexto cotidiano (ofertas comerciales) y la respuesta no tiene porqué ser precisa, puede ser grosera, en el sentido de Freudenthal (2001, p.125). La relación entre cantidades que permite resolver la tarea puede ser interna o externa, según la estrategia elegida.

La respuesta que se espera de los alumnos es la que contesta a qué oferta ofrece más cantidad de comida al menor precio.

Componentes críticas de la tarea "pizzas"

Como se ha dicho previamente, el objetivo de la tarea no es contestar qué pizza es más barata en términos absolutos, sino qué pizza es más barata en relación con la cantidad ofrecida. Esto sitúa la componente crítica de la tarea en los procesos de *relativizar*. Para ello es necesario:

C.C.1. Calcular:

a) El área de las pizzas (de la familiar y de las dos medianas).

b) El coste de las dos pizzas medianas.

C.C.2. Comparar:

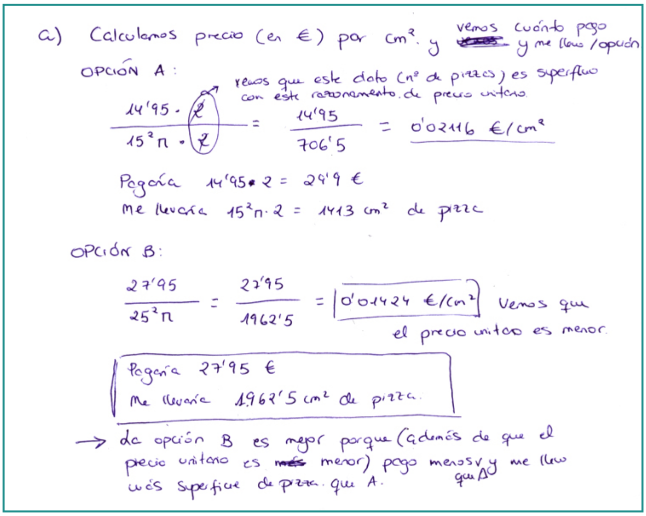
c) Internamente: áreas (¿dónde hay más cantidad?), precios (¿cuál es más barata?), y luego comparar ambas comparaciones.

d) Externamente: precios con áreas (*relativizar*), obteniendo así los costes unitarios (o la relación inversa) de cada oferta y luego compararlos.

Soluciones aportadas por los expertos

Con el fin de conocer a priori qué estrategias se puede esperar de los estudiantes y tener información sobre los procesos de resolución se implementó el cuestionario con 4 expertos. Se considera experto a todo profesor experimentado y/o con sólida formación matemática.

Como ejemplo, se presenta la resolución aportada por la experta X que utiliza las dos opciones, C.C.2.a y C.C.2.b.


a) Calculamos precio (en €) por cm². y veremos cuánto pago y me llevo / opción

OPCIÓN A:

vemos que este dato (nº de pizzas) es superfluo con este razonamiento de precio unitario.

$$\frac{14'95 \cdot 2}{15^2\pi \cdot 2} = \frac{14'95}{706'5} = 0'02116 \text{ €/cm}^2$$

Pagaría $14'95 \cdot 2 = 29'9$ €

me llevaría $15^2\pi \cdot 2 = 1413$ cm² de pizza

OPCIÓN B:

$$\frac{27'95}{25^2\pi} = \frac{27'95}{1962'5} = \boxed{0'01424 \text{ €/cm}^2}$$ Vemos que el precio unitario es menor.

Pagaría 27'95 €
Me llevaría 1962'5 cm² de pizza.

→ la opción B es mejor porque (además de que el precio unitario es ~~más~~ menor) pago menos que A y me llevo más superficie de pizza que A.

Figura 2. Experta x.

Esta experta calcula el coste (C_m) y el área (S_m) de las pizzas medianas ($C_m = 2 \cdot 14{,}95 = 29.9$€ y $S_m = 2 \cdot \pi \cdot 15^2 = 1413\text{cm}^2$) y el área ($S_f$) de la pizza familiar ($S_f = \pi \cdot 25^2 = 1962.5\text{cm}^2$) ya que el coste individual viene dado como dato (C.C.1). Luego calcula los valores unitarios ($C_m/S_m = 0.02116$€/cm² y $C_f/S_f = 0.01424$€/cm²) en cada caso y los compara (C.C.2.b). Finalmente apoya su conclusión con que "la opción B es mejor porque [...] pago menos que A y me llevo más superficie de pizza que A" (C.C.2.a).

Esta profesora percibe la invariancia de la razón: "vemos que este dato (nº pizzas) es superfluo con este razonamiento de precio unitario".

Los expertos han mostrado dos tipos de respuestas: una que se basa en el cálculo del coste unitario de las pizzas y otra que se centra en la idea de qué oferta proporciona más cantidad a menor precio. De los 4 expertos, 2 de ellos usan las dos estrategias y de los otros 2, uno hace C.C.2.a y otro C.C.2.b. Se debe señalar que de los expertos que responden mediante dos razonamientos diferentes, la primera reacción que se observa es la de buscar el coste unitario que es una respuesta típicamente escolar y poco flexible.

Soluciones de los estudiantes

Para clasificar las respuestas de los estudiantes e identificar los patrones de respuestas, los datos se organizan atendiendo a tres criterios principales:

- Perspectiva absoluta versus relativa (relativiza o no relativiza).
- Razones internas o externas (comparadas de forma grosera o precisa).
- Estrategias observadas.

De aquí se sigue un esquema de clasificación con las siguientes categorías:

1. Relativiza
  1.1. Compara razones adecuadas: internas o externas
    1.1.a. Precisa
    1.1.b. Grosera
  1.2. No compara razones adecuadas
    1.2.a. Precisa
    1.2.b. Grosera
2. No relativiza
  2.1. Cualitativa
  2.2. Cuantitativa/absoluta
3. No identificados

De acuerdo con las preguntas de investigación, entre las que se busca identificar patrones de respuesta en los estudiantes, se presentan a continuación algunos ejemplos que ilustran y explican las categorías y subcategorías definidas para ello. Cabe señalar que del esquema general que organiza esas categorías para todas las tareas del cuestionario, solamente se extrae la parte referente a la tarea de las pizzas.

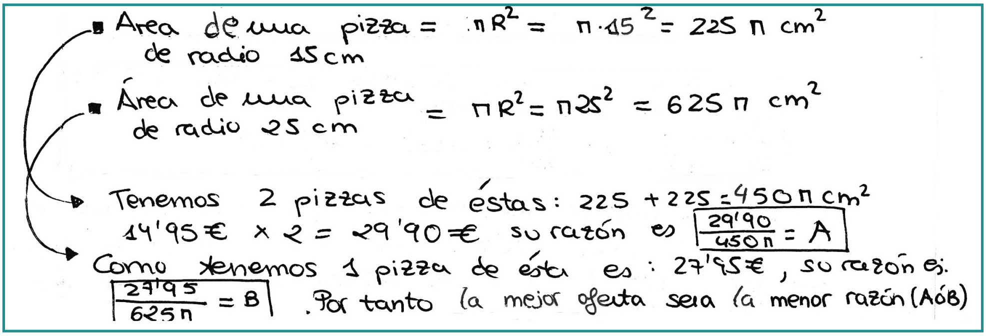
Categoría 1: Relativiza

Aquí se incluyen respuestas en las que los alumnos realizan comparaciones con datos relativos para dar solución a la tarea.

Subcategoría 1.1. Compara razones adecuadas: internas o externas

Se han identificado los dos tipos de respuestas diferentes, C.C.2.a y C.C.2.b. En la primera se usan relaciones entre cantidades internas y en la otra externas. Hay que señalar que las respuestas incluidas en esta subcategoría son todas correctas.

Clase 1.1.a. Precisa



■ Area de una pizza de radio 15 cm = $\pi R^2 = \pi \cdot 15^2 = 225\,\pi\ cm^2$

■ Área de una pizza de radio 25 cm = $\pi R^2 = \pi 25^2 = 625\,\pi\ cm^2$

Tenemos 2 pizzas de éstas: $225 + 225 = 450\,\pi\ cm^2$

14'95€ × 2 = 29'90 € su razón es $\boxed{\frac{29'90}{450\pi} = A}$

Como tenemos 1 pizza de ésta es: 27'95€, su razón es: $\boxed{\frac{27'95}{625\pi} = B}$. Por tanto la mejor oferta sera la menor razón (AóB)

Figura 3. Alumno 14 Máster.

Como se observa en la figura 3, el alumno calcula el coste unitario de cada opción (Medianas: A = 29.90/450π; Familiar: B = 27.95/625π). Concluye que "la mejor oferta será la menor razón A ó B".

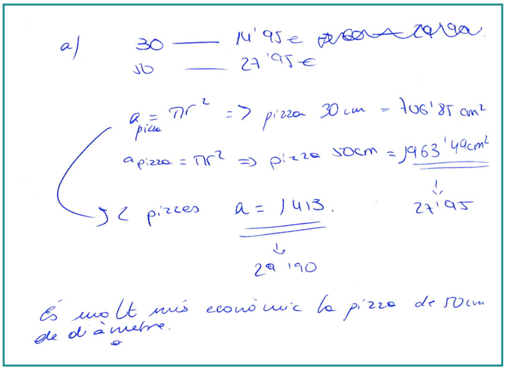
Las comparaciones realizadas por este alumno son externas y la estrategia, como ya se ha visto anteriormente, es adecuada.

Clase 1.1.b. Grosera

El alumno calcula el área y el coste de las medianas (C_m = 29.9€ y S_m = 1413cm^2) y el área de la familiar (S_f = 1963,49cm^2). Con estos datos, concluye que "es mucho más económica la pizza de 50cm de diámetro".

Este estudiante no necesita realizar los cálculos para obtener los costes unitarios, le basta con calcular las áreas y los costes y compararlos de forma interna.

Señalar que de los dos ejemplos de respuestas que se presentan dentro de esta subcategoría, la primera es una solución más formal que la proporcionada por el alumno de la figura 4.



a) 30 — 14'95€ 29'90.
50 — 27'95€

$a_{pizza} = \pi r^2 \Rightarrow$ pizza 30 cm = 706'85 cm²

$a_{pizza} = \pi r^2 \Rightarrow$ pizza 50cm = 1963'49cm² → 27'95

2 pizzes a = 1413. → 29'90

És molt més econòmic la pizza de 50cm de diàmetre.

Figura 4. Alumno 1 Bachillerato (CCSS).

Subcategoría 1.2. No compara razones adecuadas

Se recogen tres tipos de respuestas, similares a las de la subcategoría anterior, que principalmente, muestran un centramiento en la linealidad (De Bock et al. 1998). Ninguna respuesta aquí incluida es correcta.

Clase 1.2.a. Precisa

30 cm — 14'95
1 cm — x

$\boxed{x = \frac{14'95}{30} = 0'49833}$

50cm — 27'95
1 — x $\longrightarrow x = \frac{27'95}{50} = 0'559$

Dos pizzas medianas de 30 cm cada una a 14'95 €

Figura 5. Alumno 7 Máster.

Este alumno del máster calcula costes unitarios (precio/diámetro) mediante una regla de 3 (Mediana: 30cm → 14.95; 1cm → x; x = 14,95/30 = 0,49833; Familiar: 50cm → 27.95; 1cm → x; x = 27,95/50 = 0,559). Concluye que es mejor "dos pizzas medianas de 30cm cada una a 14.95" ya que observa que el coste unitario (comparación externa) es menor que en la familiar.

Una justificación visual de porqué no es adecuada es la de la figura 6, donde se ve que a igualdad de diámetros entre la familiar y las dos medianas, la familiar tiene mucha más área que las dos medianas juntas.

Otro ejemplo de problemas con la linealidad es la siguiente estrategia:

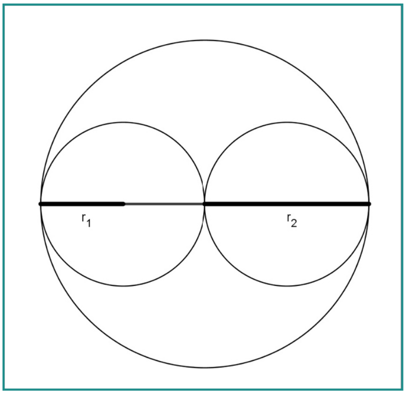


Figura 6.

30cm 14'95 } = 9'96 → Precio de dos medianas 29'9
20cm x
~~Tamaño~~ Precio en mediana equivalente a la grande 24'91

La pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas

Figura 7. Alumno 4 Magisterio.

El estudiante, tras calcular la diferencia de diámetros (50 - 30 = 20), plantea una regla de 3 (30/20 = 14.95/x ó 30/14.95 = 20/x → x = 9.96) para hallar lo que costarían los 20cm de más que tiene la pizza familiar en proporción al coste de una mediana, y de aquí obtiene, por adición, lo que debería costar la pizza familiar. Compara este coste con el de la oferta y concluye que la pizza familiar saldría más rentable que las dos medianas.

Al igual que el anterior, si en lugar de calcularlo respecto de los diámetros, lo calculase respecto de las áreas, la solución sería correcta y se habría encontrado otra estrategia adecuada para resolver la tarea.

Clase 1.2.b. Grosera

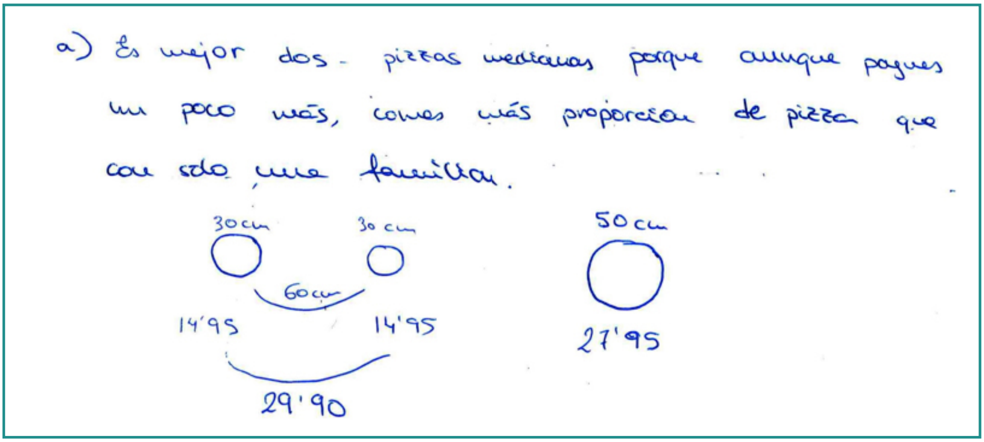


Figura 8. Alumno 3 Bachillerato (CCSS).

Este alumno procede de manera similar al de la figura 4 pero, en lugar de comparar áreas, ahora compara diámetros por un lado y precios por otro (Familiar: 50cm a 27,95€; Medianas: 60cm a 29,90€). Concluye que "es mejor dos pizzas medianas porque aunque pagues un poco más, comes más proporción de pizza que con una familiar".

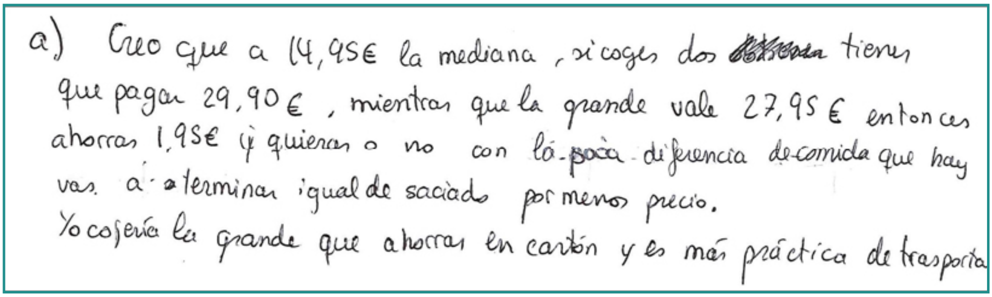
Notar que, aunque no se calculan costes unitarios o razones internas de áreas entre sí y costes entre sí, este tipo de estrategia sería correcta si hubiera calculado áreas.

Categoría 2: No relativiza

En esta categoría se engloban respuestas en las que no se comparan cantidades relativas, sino absolutas u otro tipo de respuestas.

Subcategoría 2.1. Cualitativa

Una respuesta habitual es la de tipo cualitativo. Esto significa que no se centra en datos numéricos de la oferta sino que se centra en aspectos superficiales.



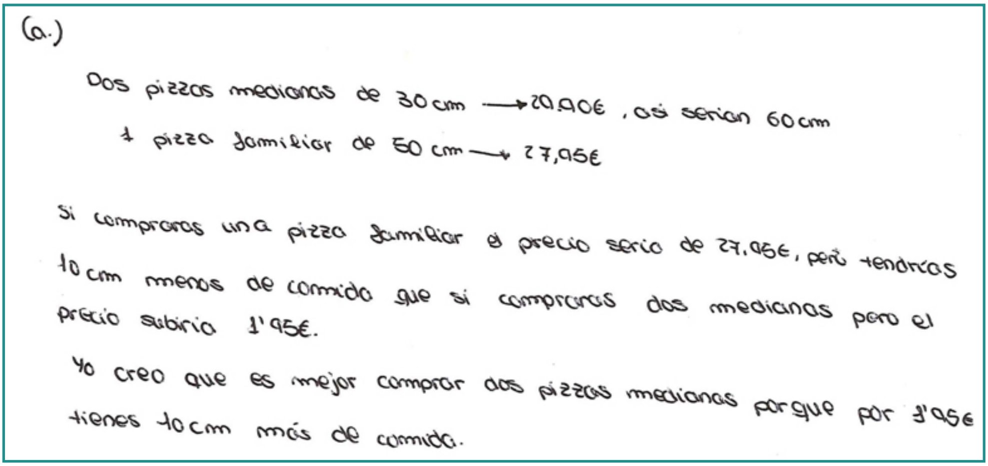
a) Creo que a 14,95€ la mediana, si coges dos tienes que pagar 29,90 €, mientras que la grande vale 27,95 € entonces ahorras 1,95€ y quieras o no con lo poca diferencia de comida que hay vas a terminar igual de saciado por menos precio.
Yo cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de trasporta

Figura 9. Alumno 37 Bachillerato (CC).

Este alumno inicia su respuesta haciendo cálculos aditivos pero finalmente concluye que "cogería la grande que ahorras en cartón y es más práctica de transportar". Está claro que esto no es suficiente ya que no tiene en cuenta los datos numéricos de la oferta.

Subcategoría 2.2. Cuantitativa/absoluta

Se muestran respuestas en las que se realizan cálculos aditivos que en ocasiones no contemplan la totalidad de los datos del enunciado.



(a.)

Dos pizzas medianas de 30 cm → 29,90€, así serían 60 cm
1 pizza familiar de 50 cm → 27,95€

Si compraras una pizza familiar el precio sería de 27,95€, pero tendrías 10 cm menos de comida que si compraras dos medianas pero el precio subiría 1'95€.

Yo creo que es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1'95€ tienes 10 cm más de comida.

Figura 10. Alumno 40 Bachillerato (CC).

Este alumno compara aditivamente diámetros y precios (60 - 50 = 10cm y 29,90 - 27,95 = 1,95€). Concluye que "es mejor comprar dos pizzas medianas porque por 1,95€ tienes 10cm más de comida".

Categoría 3: No identificados

En esta categoría se clasifican respuestas de estudiantes que no se entienden, que no están justificadas mediante ningún cálculo ni ningún razonamiento, respuestas en blanco, etc.

CONCLUSIONES

En síntesis, del trabajo realizado en tareas de comparación numérica con razones desiguales, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1) Se observa una tendencia a usar la estrategia del coste unitario, que es una estrategia escolar que puede ser indicativa de poca flexibilidad y poca disponibilidad de estrategias alternativas. El uso de esta estrategia aumenta a medida que avanza el nivel educativo.
2) Esto concuerda con que los estudiantes prefieren usar la relación externa, pero preferentemente en el sentido euros por cm^2 o por cm y no en el sentido inverso: cm^2 por €. Esto es un indicativo de falta de percepción de la reversibilidad en la razón externa, como se puede observar también en otras tareas. Un ejemplo de esta falta de reversibilidad se observa al referirse al rendimiento de un coche, que la preferencia es darlo en litros/km y no en el sentido inverso: km/litro. Esto hace que aparezcan dificultades para asociar, por ejemplo, un rendimiento de 5l/100km con otro 20km/l, siendo ambos equivalentes.
3) Ningún estudiante manifiesta percibir la invariancia de la razón externa al calcular el coste unitario de las pizzas medianas porque utilizan el número de ítems que luego cancelan: $\frac{14.95 \cdot 2}{15^2 \pi \cdot 2}$
4) Aunque la estrategia del cálculo del valor unitario es adecuada, la respuesta en la que se realiza una comparación grosera ("a más de esto, menos de esto otro") es más eficiente ya que no necesita calcular razones y, simplemente obteniendo el área total de cada oferta y el coste de las medianas (el de la familiar es un dato del enunciado), puede proporcionar una respuesta correcta.
5) Aunque los estudiantes del máster de profesorado tienen una base matemática más amplia que los otros dos grupos, es relevante destacar que tropiezan con las mismas dificultades que en los cursos anteriores, aunque en menor medida. Siguen usando cálculos aditivos y algunos de ellos se centran en la linealidad.

Por último, algunas dificultades previsibles en esta tarea pueden ser que los alumnos no recuerden la fórmula del área del círculo y que el uso de la palabra "mejor" en la pregunta genere algún tipo de valoración subjetiva, ya que es un término no definido.

REFERENCIAS

Cramer, K. and Post, T. (1993). Proportional Reasoning, *The Mathematics Teachers, vol. 86*, pp. 404-407.

De Bock, D., Verschaffel, L. and Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures, *Educational Studies in Mathematics, vol. 35*, pp. 65-83.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O. y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la Escuela Primaria.* Valencia: Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València.

Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* (Textos seleccionados: El Método, Fracciones, el lenguaje algebraico, Razón y Proporcionalidad. Traducción, notas e introducción de Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Dordrecht: D. Reidel. 1983 por Luis Puig. Valencia. Dpt. Didáctica de la Matemática). México, D. F. Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV.

Hart, K.M. (1981). Ratio and Proportion. *Children´s Understandings of Mathematics, 11-16,* John Murray Ltd., London.

Lamon, S.J. (1994). Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel and J. Confrey (eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics,* pp. 89-120, SUNNY Press, Albany, N.Y.

Lesh, R., Post, T. and Behr, M. (1988). Proportional reasoning, in J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93-118, Reston, VA: NCTM.

Noelting, G. (1980). The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept: Part I – Differentiation of Stages', *Educational Studies in Mathematics*, *vol. 11*, pp. 217-253.

Tourniaire, F. and Pulos, S. (1985). Proportional Reasoning: a Review of the Literature, *Educational Studies in Mathematics, vol. 16,* pp. 181-204.