Épsilon - *Revista de Educación Matemática* **2014, Vol. 31(1), nº 86, 113-128**

El álgebra elemental en las Escuelas Normales Superiores a finales del siglo XIX

Vicente Meavilla Seguí
meavilla@unizar.es
Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza
Antonio M. Oller-Marcén
oller@unizar.es
Centro Universitario de la Defensa, Academia General Militar

Resumen: *Los contenidos de álgebra elemental estuvieron presentes en los programas de enseñanza de las Escuelas Normales Superiores y en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior durante la segunda mitad del siglo XIX. En este artículo analizaremos un manual consagrado a la enseñanza del álgebra elemental, el Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), escrito por Enrique Molina Borrego. Este análisis nos servirá para tratar de conocer el nivel de los conocimientos algebraicos exigidos a los maestros de primera enseñanza superior en dicha época.*
Palabras clave: *Álgebra elemental, Formación del profesorado, Escuelas Normales Superiores, Siglo XIX, Enrique Molina Borrego.*

The elementary algebra in Higher Normal Schools in the late nineteenth century

Abstract: *Elementary algebraic contents were present in the syllabus of the Escuelas Normales Superiores and of the civil service examinations to become an elementary or middle school teacher during the second half of the XIX century. In this paper we analyze a textbook devoted to the teaching of elementary Algebra, the Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898), written by Enrique Molina Borrego. This analysis will be useful in order to known the level of the algebraic knowledge of teachers by that time.*
Keywords: *Elementary algebra, Teacher training, Escuelas Normales Superiores, XIX Century, Enrique Molina Borrego.*

1. INTRODUCCIÓN

Actualmente el currículo de Educación Primaria en España se organiza en torno a cuatro bloques dedicados respectivamente a la Aritmética, a la medida de magnitudes, a la Geometría y al tratamiento del azar. En correspondencia con estos bloques de contenidos, los planes de estudio de los Grados de Maestro de Educación Primaria[1] no dedican tiempo a la formación algebraica de los futuros maestros. Lo mismo sucede en el caso de la Educación Infantil.

Sin embargo, durante la última parte del siglo XIX la situación era diferente. Ya desde 1847, año en que se dio a las Escuelas Normales la consideración de Escuelas profesionales (Melcón, 1992, p. 108), encontramos referencia al Álgebra en sus planes de estudios.

En este trabajo pretendemos analizar la formación algebraica de los maestros de primera enseñanza superior durante esa época. Para ello, puesto que "*los libros de texto determinan la enseñanza en la práctica más que los decretos de los diferentes gobiernos*" (Schubring, 1987), nos centraremos en analizar en detalle un manual que consideramos paradigmático dada la formación y los puestos académicos ocupados por su autor: El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* de Enrique Molina Borrego.

Fruto de dicho análisis, realizado siguiendo ideas de Picado, Rico y Gómez (2013), seremos capaces de determinar los conocimientos algebraicos que se esperaban de los maestros en esa época.

2. EL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN LOS PROGRAMAS DE ENSEÑANZA Y LAS OPOSICIONES DE LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX.

Comenzaremos el trabajo con la revisión de algunos textos legales de la época, que también muestra la evolución en el tratamiento de dicha materia dentro de los planes de estudios:

- En el Real Decreto de 30 de marzo de 1849 se incluye unas "Nociones de Álgebra" entre las materias que se han de dar durante los tres años que duren los estudios. Más en concreto, tanto la Circular del 4 de octubre de 1849, como la del 18 de septiembre de 1850 determinan que dicha materia debe impartirse en el segundo curso.
- En la Real Orden del 24 de septiembre de 1853 estas "Nociones de álgebra" se trasladan al tercer curso del plan de estudios.
- La Ley de Instrucción Pública de 9 de septiembre de 1857 (Ley Moyano) distinguía entre los títulos de Maestro de primera enseñanza elemental y superior (consistiendo el segundo en una ampliación del primero). El Álgebra se reservaba para los Maestros de enseñanza superior. De hecho, el Real Decreto de 20 de septiembre de 1858 establecía entre las asignaturas que debían superarse para optar al título de Maestro de primera enseñanza superior una titulada "Complemento de Aritmética y nociones de Álgebra".

1. Los autores han consultado los planes de estudios de las universidades de Zaragoza, Valladolid, Granada y Autónoma de Barcelona. Dado el actual proceso de convergencia europea no cabe esperar diferencias en el resto de universidades españolas.

En correspondencia con su presencia en los planes de estudios, el Álgebra también hacía aparición en los programas para las oposiciones a las Escuelas del Grado Superior. Así, en la Real Orden de 12 de noviembre de 1894, que establecía dichos programas, se proponían los diecinueve temas siguientes:

- 62. ¿Cuál es el objeto del Álgebra y en qué se diferencia de la Aritmética? Signos del lenguaje algebraico: su utilidad. Expresión algebraica monomio y polinomio. Ejemplos.
- 63. Coeficiente y exponente. Qué son términos semejantes y cómo se simplifican. Fórmula algebraica. Valor numérico de una expresión literal. Ejemplos.
- 64. En qué consisten las operaciones algebraicas. Cómo se suman las cantidades literales. Cómo se hace la sustracción algebraica. Ejemplos.
- 65. Origen de las cantidades negativas. Modo de interpretar semejantes expresiones. Convertir la adición en sustracción y viceversa. Ejemplos.
- 66. Objeto de la multiplicación algebraica. Regla para el signo del producto. Cómo se multiplican dos potencias de una misma cantidad. Multiplicar un monomio por otro. Ejemplos.
- 67. Cómo se multiplica un polinomio por un monomio. Separar el factor que sea común a varios términos de un polinomio. Cómo se multiplica un polinomio por otro.
- 68. Cuál es el cuadrado de un binomio. Ídem del cubo. Cuál es el producto de la suma de dos números por su diferencia. Ejemplos.
- 69. Cuál es el objeto de la división algebraica. Regla para el signo del cociente. Cómo se dividen dos potencias de una misma cantidad. Dividir un monomio por otro. Ejemplos.
- 70. Cómo se divide un polinomio por un monomio. Ordenar los términos de un polinomio. Dividir un polinomio por otro. Correspondencia entre la división algebraica y la aritmética. Ejemplos.
- 71. Qué se entiende por fracción literal. El valor de una fracción literal no altera si se multiplican o dividen sus dos términos por una misma cantidad literal. Demostración y ejemplos.
- 72. Simplificación de una fracción literal. Cómo se convierten varias fracciones literales a un denominador común. Sumar cantidades fraccionarias.
- 73. Sustracción de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 74. Multiplicación de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y manera de resolverlos.
- 75. División de cantidades literales fraccionarias. Casos que pueden ocurrir y modo de resolverlos.
- 76. Qué se entiende por ecuación. Ecuaciones de primer grado. Trasposición de términos en una ecuación. Cómo se quitan los denominadores. Ejemplos.
- 77. Cómo se resuelve una ecuación de primer grado con una incógnita. Un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas. Métodos de eliminación. Ejemplos.

- 78. Cómo se forma el cuadrado de un monomio. Ídem de un binomio. Extraer la raíz cuadrada de un monomio. La raíz cuadrada de un producto es igual al producto de las raíces cuadradas de sus factores. Ejemplos.
- 79. Progresión. Progresión aritmética y geométrica. Término general de una progresión aritmética. Suma de los términos de una progresión aritmética. Ejemplos.
- 80. Progresión. Progresión geométrica. Término general de una progresión geométrica. Suma de los términos de una progresión geométrica. Ejemplos.

3. EL TRATADO DE ÁLGEBRA ELEMENTAL PARA LAS ESCUELAS NORMALES

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* (Molina, 1898a) fue escrito por Enrique Molina Borrego. De este autor sólo sabemos que fue profesor y secretario de la Escuela Normal Superior de maestros de Córdoba y catedrático de la asignatura de Álgebra en ese centro de enseñanza, tal como se detalla en la portada de su obra. Además de su «Tratado de Álgebra», Molina también escribió un *Tratado de Aritmética para las Escuelas Normales* (Molina, 1898b).

Dada la formación académica del autor y su título de catedrático de Álgebra, estimamos que el antedicho manual puede ser una herramienta válida para establecer el nivel de conocimientos de carácter algebraico exigido a los maestros de primera enseñanza superior.

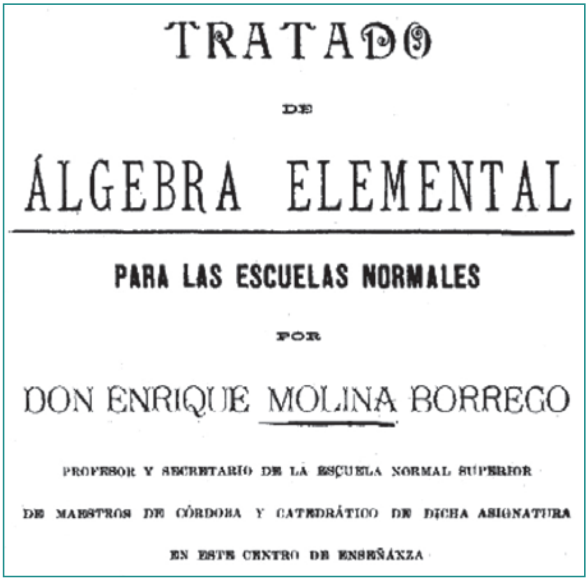
TRATADO
DE
ÁLGEBRA ELEMENTAL
PARA LAS ESCUELAS NORMALES
POR
DON ENRIQUE MOLINA BORREGO
PROFESOR Y SECRETARIO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR
DE MAESTROS DE CÓRDOBA Y CATEDRÁTICO DE DICHA ASIGNATURA
EN ESTE CENTRO DE ENSEÑANZA

Figura 1. Detalle de la portada del Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales (1898)

3.1. La estructura del libro

El *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* ocupa ciento cinco páginas, no contiene prólogo y sus contenidos se organizan según las treinta y cinco secciones siguientes, tal como se detalla en el índice de la obra:

- 1. Nociones preliminares.
- 2. Adición de las cantidades algebraicas
- 3. Sustracción de las cantidades algebraicas
- 4. Multiplicación de las cantidades algebraicas.
- 5. Consecuencias de la multiplicación de polinomios.
- 6. División de las cantidades algebraicas.
- 7. Consecuencias de la división de polinomios.
- 8. De las fracciones algebraicas.
- 9. Cálculo de las cantidades con exponente negativo.
- 10. Interpretación de las expresiones a/0 y 0/0.
- 11. Ecuaciones de primer grado.
- 12. Resolución de las ecuaciones de primer grado con una incógnita.
- 13. Discusión de los valores de la incógnita en una ecuación de primer grado.
- 14. Problemas de primer grado con una incógnita
- 14. Eliminación de incógnitas.
- 16. Resolución de un número cualquiera de ecuaciones de primer grado con igual número de incógnitas.
- 17. Discusión de los valores de las incógnitas de un sistema de dos ecuaciones de primer grado.
- 18. Problemas de primer grado con dos o más incógnitas.
- 19. Resolución de un cierto número de ecuaciones de primer grado con mayor número de incógnitas.
- 20. Resolución de varias ecuaciones de primer grado con menor número de incógnitas.
- 21. Potencias de los monomios.
- 22. Raíces de los monomios.
- 23. Coordinaciones.
- 24. Permutaciones.
- 24. Combinaciones.
- 26. Binomio de Newton.
- 27. Potencias de los polinomios.
- 28. Raíz cuadrada de los polinomios.
- 29. Raíz cúbica de los polinomios.
- 30. Cálculo de los radicales algebraicos.
- 31. Cálculo de las cantidades que tienen exponentes fraccionarios.
- 32. Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado.
- 33. Ecuaciones de segundo grado.
- 34. Discusión de la ecuación general de segundo grado con una incógnita.
- 35. Problemas de segundo grado con una incógnita.

3.2. El contenido del manual

Picado, Rico y Gómez (2013) consideran que los contenidos de un libro de texto se pueden caracterizar desde tres categorías: generalidades, contenido matemático y didáctica.

Estos autores establecen diversas unidades de análisis para cada una de las antedichas categorías. Así, los aspectos históricos, los conocimientos previos, etc., sirven como unidades de análisis para la categoría «generalidades»; los conceptos, procedimientos, representaciones y contextos pueden organizar la categoría «contenido matemático»; por último, la categoría «didáctica» se puede analizar desde los objetivos, tareas, materiales, etc.

En lo que sigue utilizaremos una adaptación de las técnicas anteriores para la caracterización de los contenidos del «Tratado de Álgebra elemental».

3.2.1. El contenido matemático

Para analizar el contenido matemático de la obra objeto de estudio nos centraremos en los aspectos siguientes: Notaciones, conceptos, procedimientos, resultados y representaciones.

Notaciones

Un aspecto muy a tener en cuenta en las Matemáticas en general y en el Álgebra en particular es el uso de distintas notaciones y convenciones por parte del autor. Vamos a señalar las principales peculiaridades de este texto.

- A la hora de construir expresiones algebraicas, el autor utiliza las primeras letras minúsculas del alfabeto para representar los datos o coeficientes y las últimas para designar las incógnitas. Esta práctica es la más habitual aún hoy en día. Por otro lado, los signos para las operaciones o la igualdad que se utilizan son los mismos que los de la Aritmética salvo los dos símbolos de ambigüedad: y .
- En lo que concierne a los paréntesis, Molina Borrego también utiliza barras verticales[2], especialmente en aquellos casos en que se deben agrupar términos semejantes (véase la figura siguiente).

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4\begin{array}{l|}+a\\+b\\+c\\+d\\ \\ \\ \end{array}x^3\begin{array}{l|}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}x^2\begin{array}{l|}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\\ \\ \\ \end{array}x+abcd$$

Figura 2. Desarrollo del producto de cuatro binomios (p.67)

2. Un simbolismo similar ya fue utilizado por René Descartes en su Geometría (1637).

- En la sección 32 (*Cálculo de las expresiones imaginarias de segundo grado*) no se utiliza un símbolo específico para la unidad imaginaria[3].

$$(a+b\sqrt{-1})+(c+d\sqrt{-1})=(a+c)+(b+d)\sqrt{-1}$$

Figura 3. Adición de números complejos (p. 90)

- En el estudio de las combinaciones y permutaciones ordinarias no se utilizan los *números combinatorios*[4] o *coeficientes binomiales* ni el símbolo *factorial*[5].

Conceptos

A lo largo del manual, cuando se introducen conceptos, se utiliza un lenguaje verbal claro y ajustado al público al que va dirigido: los futuros maestros de primera enseñanza superior. En general, las definiciones se acompañan de ejemplos aclaratorios.

Para corroborar esta afirmación, sirvan los ejemplos siguientes:

- "Se llama expresión algebraica al conjunto de letras, o números y letras ligadas por los signos de las operaciones ordinarias, como por ejemplo, $a^2 b$ es una expresión algebraica, y la cantidad $2ab^2 + 12a^2b - ab^3$, es otra expresión algebraica" (p. 6).
- "Multiplicar una cantidad algebraica por otra es hallar una tercera cantidad que sea respecto de una de ellas en valor y signo lo que la otra es de la unidad positiva. La primera se llama multiplicando, la segunda multiplicador y la tercera producto" (p. 11).
- "A la reunión de dos cantidades unidas por el signo igual se da el nombre de igualdad. La cantidad colocada a la izquierda del signo recibe el nombre de primer miembro, y la que está a la derecha segundo miembro. Se llama identidad a la reunión de dos cantidades iguales unidas por el signo igual, y que sólo se diferencian en la forma, como 6 x 2 x 3 = 4 x 9. Se da el nombre de ecuación a la igualdad que contiene una o varias incógnitas, como $24x + \frac{x}{6} - 2 = 36$" (p. 29).

- "Se llaman combinaciones o productos diferentes a todos los diferentes grupos que se pueden formar con un número determinado de objetos tomándolos 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4. . . n a n, de modo tal que un mismo objeto sólo entre una vez en cada grupo y que dos cualesquiera de ellos difieran, a lo menos, en uno de los objetos de que están formados" (p. 63).

---

3. El símbolo *i* para la unidad imaginaria fue introducido por Leonhard Euler en su *De formulis differentialibus angularibus maxime irrationalibus, quas tamen per logarithmos et arcus circulares integrare licet* (1794).

4. El símbolo $\binom{m}{n}$ para el número de combinaciones ordinarias de *m* elementos tomados de *n* en *n* fue introducido en 1827 por Andreas von Ettingshausen (Meavilla, 2012).

5. El símbolo '!' para representar el factorial fue introducido por Christian Kramp en 1808 (Meavilla, 2012).

- "Llamamos módulo de una expresión imaginaria de la forma $a + b\sqrt{-1}$, a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las cantidades reales a y b; por tanto el módulo de la expresión anterior será $\sqrt{a^2+b^2}$" (p. 91).

Procedimientos

Dado el carácter eminentemente práctico de la obra, los contenidos algebraicos procedimentales son más numerosos que los conceptuales. Los procedimientos que se describen y ejemplifican a lo largo del texto se refieren principalmente a: operaciones con expresiones algebraicas, potencias de exponente entero y fraccionario, resolución y discusión de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, operaciones con radicales y operaciones con números complejos.

Las demostraciones que acompañan a algunos de ellos tienen el rigor que puede exigirse en un texto dedicado a la formación de maestros y dota al «Tratado de Álgebra» de un nivel superior al de algunos textos contemporáneos en los que las pruebas se sustituyen por comprobaciones.

A modo de ejemplo, presentamos la demostración del contenido procedimental concerniente a la resolución de una ecuación de segundo grado incompleta (pp. 93 – 94).

Sea ahora la ecuación incompleta

$$ax^2-bx=0.$$

Dividiendo ambos miembros por a, tendremos

$$x^2\frac{b}{a}x=0$$

y separando el factor común x, resulta

$$x\left(x-\frac{b}{a}\right)=0.$$

Para que este producto sea 0 es necesario que por lo menos sea 0 uno de los factores; luego $x=0$ es una solución.

Si convenimos que el otro factor $x-\frac{b}{a}$ sea igual á 0, tendremos la ecuación

$$x-\frac{b}{a}=0$$

Pasando el término conocido al segundo miembro, resulta que

$$x=\frac{b}{a}$$

De lo demostrado anteriormente, resulta que *la incógnita de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2-bx=0$, tiene dos valores: uno de ellos es 0 y el otro es igual al coeficiente del segundo término con signo contrario partido por el coeficiente del primer término.*

Figura 4. Procedimiento para la resolución de una ecuación de 2º grado incompleta

Resultados

Además de presentar conceptos y de describir procedimientos, la mayor parte del texto se dedica a la presentación de propiedades y de diversos resultados (ya sean proposiciones, teoremas o corolarios).

113. *El valor de un radical no varía multiplicando su índice por cualquier número entero positivo, si además la cantidad subradical se eleva á una potencia de igual grado que el que expresa referido número entero.*

En efecto, elevando ambos miembros de la identidad

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a$$

á la potencia n, tendremos

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^{mn} = a^n$$

Pero esta igualdad quiere decir que

$$\sqrt[m]{a}$$

es la raiz del grado mn de a^n, y por lo tanto

$$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$$

La igualdad anterior nos demuestra el principio enunciado, y también que una cantidad radical no se altera dividiendo el índice y exponente de la cantidad subradical por un factor que les sea común.

Figura 5. Propiedad de los radicales

En la Figura 5 se presenta uno de los múltiples ejemplos que pueden encontrarse a lo largo del texto. Se observa que el autor no se conforma con enunciar el resultado, sino que presenta una demostración detallada del mismo en la que se presta mucha atención a la hora de explicar y justificar cada uno de los pasos del razonamiento.

Además del mencionado rigor en la presentación y deducción de los resultados, el autor presenta en ocasiones apuntes de carácter histórico que contribuyen a ampliar la formación del lector. Por ejemplo, en la página 66, al inicio de la sección dedicada a la fórmula del Binomio de Newton, leemos la siguiente información de carácter histórico:

> "*Newton halló la fórmula general para elevar directamente un binomio a una potencia cualquiera sin pasar por las potencias inferiores, y de dicha fórmula se deduce fácilmente el medio de formar la potencia de cualquier grado de un polinomio dado. La demostración de la fórmula de Newton se funda en la teoría de las combinaciones.*"

Representaciones

Por representación (López Esteban, 2011) entendemos cualquier modo de hacer presente un concepto o procedimiento mediante distintos tipos de símbolos, gráficos o signos. Existe una gran diversidad de modos de representar conceptos y procedimientos matemáticos: mediante signos o símbolos especiales, mediante esquemas, gráficos o figuras, principalmente.

En el texto objeto de estudio los sistemas de representación más utilizados son el verbal y el que hace uso del simbolismo algebraico (ver Figura 6).

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}$$

Figura 6. Representación simbólica del radical de un producto (p. 59)

Además de estos sistemas de representación hemos localizado otros tipos de representaciones utilizadas de manera esporádica. En concreto:

- Representación simbólico-esquemática:
  Un ejemplo de este tipo de representación se observa, por ejemplo, en el tema dedicado al producto de polinomios (Figura 7); donde se esquematiza un proceso en varios pasos.

Multiplicando.	$4a^4 - 5a^3b + 7a^2b^2$
Multiplicador.	$2a^3 - 6a^2b + 4ab^2$
Productos parciales.	$8a^7 - 10a^6b + 14a^5b^2$
	$-24a^6b + 30a^5b^2 - 42a^4b^3$
	$+16a^5b^2 - 20a^4b^3 + 28a^3b^4$
Producto total.	$8a^7 - 34a^6b + 60a^5b^2 - 62a^4b^3 + 28a^3b^4$

Figura 7. Representación simbólico-esquemática del productode polinomios (p. 14)

- Representación gráfica:
  Este sistema de representación es utilizado especialmente en los problemas de móviles. Por ejemplo, en la página 34 encontramos el siguiente problema, que ya había sido utilizado por otros autores contemporáneos (Moya, 1885; Salinas y Benítez, 1892):

  "Dos móviles A' y B' parten en un mismo instante de los puntos A y B, que distan entre sí d kilómetros, y recorren en una misma dirección [y sentido] la recta indefinida MN; el primero con una velocidad v kilómetros por hora y el otro de v'. ¿A qué distancia del punto B se encontrarán, suponiendo que caminan con movimiento uniforme?"

En la Figura 8 se observa el sistema de representación utilizado por el autor para codificar la información anterior.

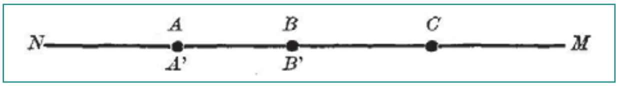

Figura 8. Representación gráfica asociada a un problema de móviles (p. 34)

- Representación matricial o tabular:
  Esta forma de organizar la información resulta especialmente útil cuando debe enumerarse una serie de cálculos que siguen una pauta común (Figura 9) o bien cuando se desean estudiar de forma conjunta los diversos casos posibles en una situación concreta (Figura 10).

Formemos las coordinaciones binarias posibles con las letras *a, b, c, d*.

Para ello, á la derecha de cada letra, se irán colocando sucesivamente una á una todas las demás letras.

La letra *a*	nos dará	las siguientes	coordinaciones	*ab, ac, ad.*
La letra *b*	»	»	»	*ba, bc, bd.*
La letra *c*	»	»	»	*ca, cb, cd.*
La letra *d*	»	»	»	*da, db, dc.*

Figura 9. Representación matricial de las variaciones ordinarias de cuatro elementos tomados de dos en dos (p. 61)

	Ecuaciones.	Raices.	
1.ª	$ax^2+bx+c=0.$	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2.ª	$ax^2-bx+c=0.$	$x=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$	$x=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
3.ª	$ax^2+bx-c=0.$	$x=\frac{-b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a};$	$x=\frac{-b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$
4.ª	$ax^2-bx-c=0.$	$x=\frac{b+\sqrt{b^2+4ac}}{2a};$	$x=\frac{b-\sqrt{b^2+4ac}}{2a}$

Figura 10. Cuadro resumen de las soluciones de los cuatro tipos de ecuaciones de segundo grado completas (p. 98)

3.2.2. Algunas consideraciones didácticas y metodológicas

El objetivo del autor del *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* es ofrecer a los alumnos de dichas instituciones educativas un libro de texto en el que se transmitan los conceptos y procedimientos básicos del Álgebra elemental. Para ello, Molina Borrego utiliza un lenguaje verbal claro, y no carente de rigor, que se ajusta al nivel matemático del público al que se dirige el manual.

Los contenidos teóricos y los procedimientos generales que salpican el tratado se complementan con ejemplos concretos que facilitan su comprensión. Además, las proposiciones y teoremas van acompañados de demostraciones que tienen el rigor que puede exigirse a un texto dedicado a la formación de futuros maestros. La presencia de demostraciones dota al «Tratado de Álgebra» de un nivel matemático superior al de otros manuales contemporáneos en los que las pruebas se sustituyen por comprobaciones.

En cuanto a las representaciones gráficas, es notoria la ausencia de aquellas relacionadas con las «expresiones notables» y la resolución diagramática de la ecuación de segundo grado con una incógnita propuesta por al-Khwarizmi (Rosen, 1891). Este tipo de representaciones ya gozaron de cierta popularidad en los manuales medievales y renacentistas (Meavilla y Oller, 2013). La exclusión de este tipo de representaciones disminuye las oportunidades de aprendizaje de aquellos alumnos cuya orientación cognitiva es eminentemente visual en el sentido de Krutetskii (1976).

En general, los programas de enseñanza han prestado poca atención a los aspectos visuales de las Matemáticas (excepción hecha, claro está, de los conocimientos de tipo geométrico) y se han centrado casi exclusivamente en su componente analítica. Este enfoque adolece de las siguientes deficiencias (Meavilla, 1998):

1) No cubre las necesidades de los alumnos visuales o armónico-pictóricos.
2) Propicia el abandono de estudiantes que podrían acceder a las Matemáticas a través de su componente visual.
3) Oculta los aspectos visuales que ayudan a conseguir la comprensión de conceptos y procedimientos.
4) Ignora las representaciones visuales como herramientas potentes para la resolución de problemas no necesariamente geométricos.
5) No contempla las demostraciones visuales como demostraciones matemáticamente legítimas.

El tratamiento teórico-práctico de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones es adecuado. Sin embargo, no se estudian las ecuaciones con radicales ni las ecuaciones reducibles a cuadráticas, tópicos que podrían tener cabida en un tratado de Álgebra elemental.

Molina Borrego propone el siguiente método (aplicable a problemas con una sola incógnita y generalizable a cuestiones que involucren más) para “poner en ecuación” un problema de enunciado verbal (p. 35):

> “La resolución de los problemas de Álgebra se verifica generalmente por medio de ecuaciones, y como ya nos es conocido el procedimiento que hemos de seguir para hallar en ellas el valor de la incógnita, daremos a conocer el método para ponerlas en ecuación, ya que no podemos dar una

regla general fija, por la variación constante que hay en las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas. En primer término debe estudiarse con gran detenimiento el enunciado del problema, y una vez comprendido representar la incógnita por una de las últimas letras del alfabeto, sometiendo a esta a todas las operaciones que habrían de verificarse con el número que se busca."

Este método se aplica a la resolución de treinta problemas: diez de primer grado con una incógnita, diez de primer grado con dos o más incógnitas, y diez de segundo grado con una incógnita. En ninguno de ellos se comprueba la solución o soluciones obtenidas. Esta omisión, que elimina la cuarta etapa del modelo teórico de Polya (1989) para la resolución de problemas, no es recomendable en la formación del profesorado de Matemáticas en general y de la de los maestros en particular.

2.° *Determinar la longitud de lo base de un triángulo sabiendo que el área del mismo es 320 metros cuadrados y que la altura tiene 24 metros menos que la base.*

En Geometría se demuestra que el área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura, esto es $Area = \frac{Base \times Altura}{2}$.

Llamando x á la base del triángulo, la altura estará representada por $x-24$, y tendremos

$$\frac{x(x-24)}{2}=320.$$

Quitando denominadores y paréntesis, resulta

$$x^2-24x=640.$$

Pasando todo al primer miembro, será

$$x^2-24x-640=0.$$

Y por último

$$x=12\pm\sqrt{144+640}=12\pm28$$

Separando las dos raices, queda

$$x=12+28=40; \qquad x=-16$$

Luego la base tiene 40 metros.

Figura 11. Resolución de un problema de segundo grado con una incógnita (p. 101)

Pese a esta relativamente amplia colección de problemas resueltos, no se proponen actividades para que el alumno las trabaje y evalúe su aprendizaje.

4. IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN ALGEBRAICA DE LOS MAESTROS SUPERIORES EN EL SIGLO XIX

El análisis detallado que hemos efectuado del texto de Molina Borrego, que consideramos significativo a la hora de aproximarnos al conocimiento algebraico, nos permite tener una idea relativamente clara de la formación algebraica de los maestros superiores de la época.

En la figura 12 se organizan (utilizando terminología actual) los contenidos, tanto conceptuales como procedimentales, del *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales*. En dicho tratado no aparece indicación explícita alguna relativa a la Didáctica del Álgebra, debido seguramente a que en el programa para las oposiciones a las escuelas del grado superior (R. O. de 12 de Noviembre de 1894) no se exigían conocimientos relativos a la enseñanza del Álgebra.

Además, recordando que el lenguaje verbal utilizado en el «Tratado de Álgebra» se ajusta al público al que va dirigido y que las demostraciones que acompañan a algunas proposiciones y teoremas tienen el rigor que puede exigirse en un texto dedicado a la formación de maestros, podemos concluir que, a nuestro entender, el *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales* persigue los objetivos siguientes:

- Ofrecer a los futuros enseñantes los contenidos conceptuales y procedimentales básicos del Álgebra elemental (similares a los que actualmente se ofrecen a los estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria).
- Valorar la utilidad del simbolismo algebraico en la transmisión de información.
- Contribuir a que el futuro maestro aprecie y valore el rigor matemático que está presente en algunas demostraciones sencillas concernientes a contenidos básicos de carácter algebraico.
- Valorar la importancia de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones en la resolución de problemas matemáticos elementales.

Los objetivos anteriores permiten enumerar los que consideramos que eran los conocimientos algebraicos exigidos a los maestros de primera enseñanza superior en la parte final del siglo XIX:

- Conocer los contenidos conceptuales y procedimentales básicos del Álgebra elemental
- Utilizar el simbolismo algebraico para la transmisión de información.
- Conocer demostraciones sencillas relativas a contenidos básicos de carácter algebraico.
- Resolver algebraicamente problemas matemáticos sencillos.

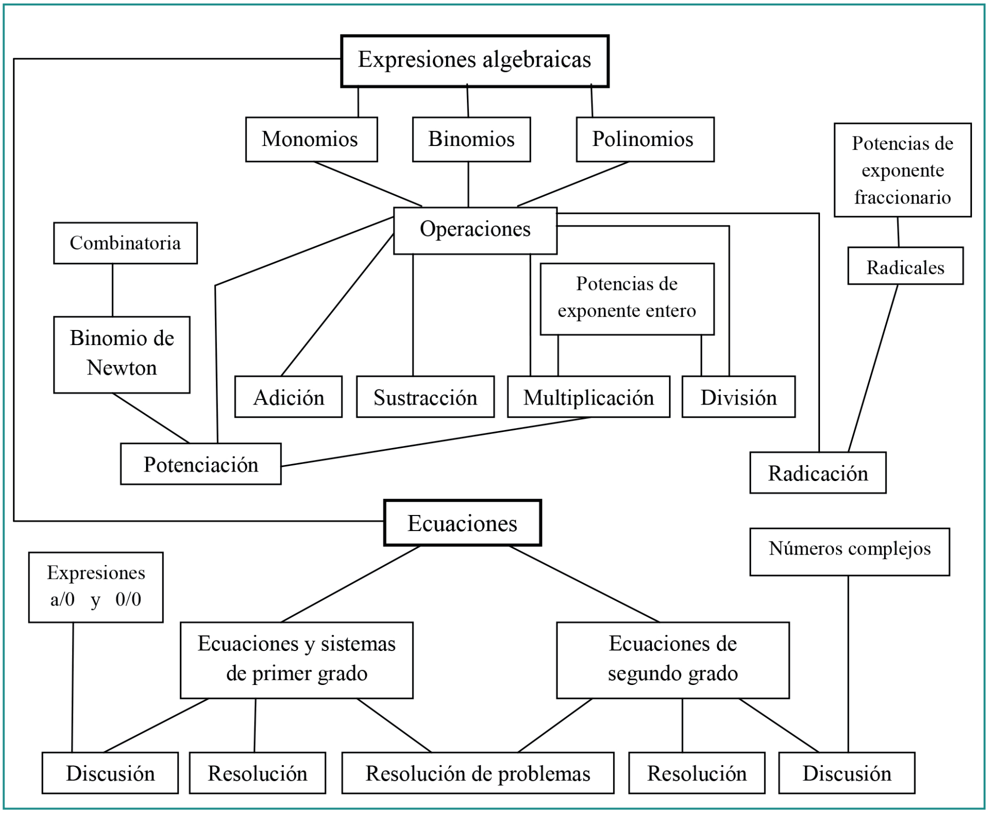

Figura 12. Contenidos del «Tratado de Álgebra elemental»

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ferrer y Rivero, P. (1891). *Tratado de la legislación de primera enseñanza vigente en España* (sexta edición). Madrid: Librería de la viuda de Hernando y Compañia.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University Chicago Press.

López, M. C. (2011). *La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral. Facultad de Educación (Dpto. de Teoría e Historia de la Educación). Universidad de Salamanca.

Meavilla, V. (1998). *Algunas contribuciones al estudio de la influencia de las interacciones verbales sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra elemental.* Tesis doctoral. Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad Autónoma de Barcelona.

Meavilla, V. (2012). *Esto no estaba en mi libro de Matemáticas.* Córdoba: Editorial Almuzara.

Meavilla, V. y Oller, A. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 82, 89–100.

Molina Borrego, E. (1898a). *Tratado de Álgebra elemental para las Escuelas Normales*. Córdoba: Imprenta y Librería del Diario de Córdoba.

Molina Borrego, E. (1898b). *Tratado de Aritmética para las Escuelas Normales*. Córdoba: Tipografía «La Región Andaluza»

Melcón, J. (1992). *La formación del profesorado en España (1837-1914)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Moya, A. (1885). *Elementos de Matemáticas*. Madrid: Agustín Jubera.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2013). El Sistema Métrico Decimal en un libro de texto de matemáticas para la instrucción primaria en las Islas Canarias en el siglo XIX. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 82, 37-53.

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (decimoquinta reimpresión). México: Editorial Trillas.

Rosen, F. (1831). *The Algebra of Mohammed ben Musa.* London: The Oriental Translation Fund.

Salinas y Angulo, I. y Benítez y Parodi, M. (1892). *Álgebra*. Toledo: Imprenta, Librería y Encuadernación de Menor Hermanos.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

NORMATIVA LEGAL

Real decreto de 30 de Marzo de 1849. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 88 – 92.

Circular de 4 de Octubre de 1849. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 244 – 251.

Circular de 18 de septiembre de 1850. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 308 – 316.

Real orden de 24 de Septiembre de 1853. Colección legislativa de Instrucción primaria. Madrid: Imprenta Nacional (1856), pp. 350 – 353.

Real orden de 12 de Noviembre de 1894. Boletín Oficial de la Provincia de Madrid, nº 301, lunes 17 de Diciembre de 1894.