Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2013, Vol. 30(3), nº 85, 21-36*

Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto

Rubí Real

Bernardo Gómez

Olimpia Figueras

La caracterización de los modelos de enseñanza de las fracciones es el propósito principal de esta investigación. El estudio incluye el análisis de libros de texto y las sugerencias didácticas del currículo de secundaria. Este documento versa sobre los aspectos de la fracción en el modelo de enseñanza estructurado por medio de secuencias de actividades de un libro de primer curso. Los resultados más relevantes son: los autores favorecen el aspecto de fracturador, hay actividades en las que aparecen diferentes aspectos de la fracción tales como fracturador, relación razón y operador razón, además se observa una tendencia al uso de todos discretos.
Palabras clave: *Modelos de enseñanza, fracciones, libros de texto, fracturador, relación razón, operador razón y todos discretos.*

Fraction's aspects on teaching models: the case of a mathematics textbook

Characterizing teaching model of fractions is the main purpose of this research. The study included analysis of mathematical textbooks and the didactical suggestions of current curriculum for secondary. This paper describes the teaching model of fractions structured by activities sequences of a first grade textbook for secondary school. The most relevant results are: the authors favour the aspect of fracturer, there are activities in which different aspects of fraction such as fracturer, ratio relation and ratio operator appears, also a tendency to use discrete wholes is observed.
Key words: *Teaching models, fractions, textbooks, fracturer, ratio relation, ratio operator and discrete wholes.*

La comprensión de los números racionales es un desafío formidable para el aprendizaje, porque, como ha mostrado el análisis de las componentes del concepto llevado a cabo por diferentes investigadores desde la década de los sesentas, entre otros Rappaport (1962), Riess (1964), Novillis (1976), Kieren (1976, 1980 y 1988), Usiskin (1979) y Berh, Lesh, Post y Silver (1983), puede ser interpretado de hasta seis maneras distintas, conocidas como subconstructos en la terminología usual: relación parte-todo, decimal, razón, cociente, operador y medida de cantidades discretas o continuas.

En relación con ese desafío, Lesh, Landau y Hamilton (1980) señalaron que el concepto de número racional es un conjunto de subconstructos y procesos integrados que están relacionados con un rango amplio de conceptos elementales, los cuales se presupone están integrados en una gran variedad de situaciones problema. Por su parte, Kieren (1980 y 1988), quién solo considera cuatro subconstructos: medida, cociente, operador y razón, argumenta que la relación parte-todo sirve como base para instaurar los diferentes subconstructos.

Respecto a la didáctica de las fracciones, Freudenthal (1983) sostiene que está caracterizada por tendencias unificadoras ya que se supone que los estudiantes pueden aprender con un sólo enfoque. Este autor señala que el centramiento en la relación parte-todo es limitado, no sólo fenomenológicamente sino también desde el punto de vista de las matemáticas, debido a que sólo produce fracciones propias.

Figueras (1988) afirma que las diferentes nociones de fracción están implícitas en los modelos de enseñanza y en las interrelaciones que se pueden establecer con referentes más concretos para los alumnos; en su investigación identificó cinco modelos de enseñanza, así como las dificultades que enfrentan los estudiantes al estudiar con esos diferentes modelos.

Tanto los resultados de las investigaciones referidas anteriormente, como otros factores, influyeron en las reformas educativas de los años 90's en España, Estados Unidos, Inglaterra y México. En esos cambios curriculares se incorporaron diferentes significados de la fracción, los cuales se reflejaron en las actividades que se proponen en los libros de texto.

Ahora bien, la manera en la que los autores de los libros de texto interpretaron los cambios curriculares de las reformas educativas para proponer actividades de fracciones ha sido diferente. Por ejemplo, mientras que en los libros de texto de Estados Unidos se pone más énfasis en las situaciones de la vida cotidiana y en la comprensión conceptual, en los de Singapur y Taiwán, se tiende a acentuar el dominio de los procedimientos de cálculo (Yang, Reys y Wu, 2010).

Pese a ese intento por facilitar el aprendizaje de las fracciones incorporando diferentes subconstructos, no se puede decir que hasta este momento se haya logrado diseñar una secuencia de enseñanza adecuada. A la vista de cómo se han incorporado esos significados en los libros de texto, no es claro en las actividades que se proponen cómo se establecen los vínculos entre las diferentes componentes del concepto de tal forma que le permitan al estudiante integrarlos para construir un mejor objeto mental de fracción.

Lo anterior pone de manifiesto la necesidad de continuar investigando y analizando la principal herramienta que usan los profesores para llevar a cabo su práctica docente: el libro de texto.

MARCO TEÓRICO

La investigación tema de este artículo está sustentada en dos referentes teóricos fundamentales: la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983), y el modelo de enseñanza y los procesos de reconstrucción del todo identificados por Figueras (1988).

Fenomenología didáctica

El análisis fenomenológico consiste en describir tanto los fenómenos que se organizan a través de un concepto u objeto matemático, como las relaciones que se pueden establecer entre el concepto o estructura y los fenómenos (Filloy, Rojano y Puig 2008, pág. 39).

En el caso particular que nos ocupa, Freudenthal (1983) describe la fenomenología didáctica a través de los fenómenos de las fracciones que se pueden considerar como contextos adecuados en las secuencias de enseñanza (Puig, 1997, pág. 64). Estos fenómenos están relacionados con la comparación o descripción de objetos, la división de substancias medidas por magnitudes, la distribución de cantidades y el sistema decimal de medida.

Cuando las fracciones se usan en el lenguaje cotidiano, sirven para expresar el resultado de una comparación de cantidades o valores de magnitud, lo cual se asocia con la fracción como comparador, en un primer nivel de abstracción. Las fracciones también pueden describir: cantidades o valores de magnitud por medio de otros valores o cantidades, razones, procesos cíclicos o periódicos.

En un segundo nivel de abstracción de la fracción como comparador se incluyen los aspectos de operador fracturante, relación de fractura, relación razón, operador razón y transformador.

Si se comparan objetos que están juntos, uno dentro del otro, o se piensa que lo están, la fracción puede tener un aspecto de operador fracturante o de relación de fractura. El aspecto de la fracción como relación razón está presente al comparar dos objetos que están separados con respecto a un número o valor de magnitud. La fracción como operador razón actúa sobre una cantidad, número o valor de magnitud convirtiéndolo en otra cantidad o en otro número o valor. En su aspecto de transformador, la fracción actúa sobre las dimensiones de los objetos por deformación o por aplicación a una escala a/b.

Al dividir substancias medidas por magnitudes, éstas se fracturan en partes iguales para relacionar una parte o algunas partes con el todo, de tal forma que la fracción representa una relación parte-todo y hace referencia a la fracción como fracturador.

En la distribución de pequeñas o grandes cantidades, las fracciones van a estar relacionadas con un proceso que puede asociarse a un modelo de conjunto finito y/o a un modelo de magnitud, de tal forma que las fracciones representan el resultado de ese proceso (en el sentido de Freudenthal, 1983, pág. 29).

Las fracciones asociadas a un sistema decimal de medida, la recta numérica o una unidad de medida pueden corresponder con las fracciones decimales.

Es preciso mencionar que a partir del espécimen de fenomenología didáctica de Freudenthal centrando la atención en procesos matemáticos, Real y Figueras (en proceso) estructuraron una red de constructos que se usa como herramienta para analizar los modelos de enseñanza que subyacen tanto en el curriculum, como en los libros de texto.

Modelo de enseñanza y reconstrucción del todo

Figueras (1988) caracterizó un modelo de enseñanza como un conjunto formado por cinco elementos: 1) los significados de un subconstructo, 2) su tratamiento didáctico, 3) el lenguaje que interviene en la secuencia de enseñanza, 4) las habilidades que se requieren para comprender el significado del constructo a partir del tratamiento didáctico, y 5) las relaciones entre todos estos elementos.

En relación con los procesos de reconstrucción del todo, éstos implican obtener el todo continuo o discreto a partir de la parte. De una fracción, explicita o implícita, en el enunciado de un problema o en la información gráfica que representa la relación entre la parte y el todo, se identifica una unidad fraccionaria la cual se puede iterar o calcular para reconstruir el todo.

PROPÓSITO Y MÉTODO

El propósito general de la investigación es caracterizar modelos de enseñanza de las fracciones. Para ello se decidió analizar los libros de texto y el currículo de la Escuela Secundaria Obligatoria (ESO) de España y responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los aspectos de las fracciones que se utilizan en los modelos de enseñanza subyacentes en los libros de texto de la escuela secundaria?
- ¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre los modelos de enseñanza de los textos y las sugerencias didácticas del currículo oficial?

Para llevar a cabo el análisis se determinaron cuatro variables por medio de las cuales se establece una nueva caracterización de modelo de enseñanza reinterpretando los elementos que Figueras (1988) identificó:

1) sentido de uso de las fracciones que aparece en las actividades y explicaciones del texto, y el proceso matemático en el cual está implicado ese sentido de uso,
2) la caracterización del todo, la parte y la relación parte-todo,
3) las actividades, las preguntas y su intencionalidad, y,
4) las maneras de resolver las actividades o de responder las preguntas de un usuario competente del libro de texto.

El significado de un subconstructo considerado en la caracterización de Figueras, no se utiliza explícitamente sino que se incluye en una variable más completa: el sentido de uso.

Por ejemplo, en la actividad "En un mosaico, una fuente ocupa las 2/5 partes de las 80 baldosas. ¿Cuántas baldosas ocupa la fuente?", el significado de la fracción es de "fracturador" o "relación parte-todo", pero al resolver el problema el constructo es de operador, y por tanto su aspecto es el de operador razón. Aunque en este ejemplo están presentes dos diferentes aspectos de la fracción, el sentido de uso es el de operador razón ya que la fracción convierte una cantidad en otra.

En las actividades, las explicaciones del texto y el proceso matemático subyace el sentido de uso; éste se identifica a través de la información gráfica y las formas textuales que utilizan los autores del libro. Además, ese sentido de uso se relaciona con acciones que corresponden al proceso matemático en el cual está implícito.

Mediante el análisis de las formas textuales e información gráfica incluidas en una actividad también se caracterizan el todo, la parte y la relación parte-todo.

Las otras variables, segunda, tercera y cuarta se corresponden en cierto modo con los elementos segundo, tercero y cuarto: tratamiento didáctico, lenguaje y habilidades. Estas variables se refieren a las actividades, las preguntas y su intencionalidad; se analizan considerando el contexto y las formas textuales, de tal forma que se entresaca el aspecto de la fracción y el sentido de uso que los autores de los libros pretenden favorecer.

También se analizan las posibles maneras en las que un usuario competente resolvería las actividades o respondería las preguntas que éstas plantean, centrando la atención en los sentidos de uso que están involucrados en los procesos matemáticos utilizados por el resolutor.

A continuación se describe con ejemplos la aplicación de la metodología al libro de texto de primero de secundaria de la serie publicada en 2007 por la editorial Marfil.

CARACTERIZACIÓN DEL MODELO DE ENSEÑANZA DEL LIBRO DE TEXTO

El estudio de las fracciones en el libro de texto antes citado se organiza a través de una secuencia de enseñanza dividida en dos secciones con diferentes actividades. La primera también incluye el estudio de números decimales y porcentajes. La segunda solamente se centra en las fracciones. En los siguientes apartados se incluye el análisis de algunas actividades de las secciones de ese texto.

Resultados del análisis de la primera sección

En el párrafo introductorio, ver Figura 1, al hablar de un tipo de número muy útil para indicar las partes de un todo, pareciera que los autores se refieren a las fracciones. Sin embargo, se incluyen los números decimales y los porcentajes.

DESDE AHORA... FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES

Vas a trabajar un tipo de número muy útil para indicar **las partes de un todo**, y que con toda seguridad ya habrás usado en primaria. Estas actividades nos servirán para ir recordando esos números y para con posterioridad, en los siguientes apartados, estudiarlos de forma más separada y poder así aprender algunas propiedades y operaciones con cada uno de ellos.

Figura 1. Párrafo introductorio de la primera sección (Marfil, 2007, pág. 50).

La primera sección está formada por siete apartados (44-50); cuatro tratan sobre fracciones (44, 45, 46 y 50).

El apartado 44, Las figuras escondidas, tiene cuatro actividades: 44.1 ¿Qué fracción veo?, 44.2 ¿Cuántos cristales hay?, 44.3 El tren y 44.4 La chimenea.

En la actividad 44.1 (ver Figura 2), el todo y la parte están caracterizados por imágenes, el todo es una ventana dividida en 8 partes, cada parte contiene un cristal; sugiriendo la unidad fraccionaria 1/8. Aunque se pueden identificar varias particiones del todo, 1/2, 1/4 y 1/8, se centra la atención en la que tiene más elementos.

Figura 2. Caracterización gráfica de la parte y el todo continuo, discretizado de manera textual con referencia a la partición (Ibid).

Considerando la unidad fraccionaria más pequeña, la respuesta es 2/8, pero tomando en cuenta la unidad fraccionaria formada por 2 cristales, es 1/4. El todo es continuo, un rectángulo dividido en 8 partes iguales, pero también puede ser discreto, 8 cristales. Al requerir una fracción que describa la relación entre la parte y el todo se trata de la fracción como fracturador.

En la actividad 44.2 (ver Figura 3), el fragmento de texto "…puedes ver 1/3 de la ventana" caracteriza la unidad fraccionaria: un cuadrado dividido en cuatro partes iguales.

Figura 3. Caracterización de la parte de forma gráfica y simbólica, búsqueda de un todo continuo discretizado a través de la partición (Ibid).

Para reconstruir el todo se puede iterar tres veces esa unidad fraccionaria y obtener un rectángulo dividido en 12 partes iguales. La fracción describe una relación entre la parte y el todo asociada a la fracción como fracturador. En este caso, la parte es de un todo continuo aunque también se puede asociar a una parte discreta.

En la actividad 44. 3 (ver Figura 4), se caracteriza la parte y la unidad fraccionaria a través de "…puedes ver sólo 1/4 de este tren…" y de la imagen; cada unidad fraccionaria está compuesta por tres vagones. El fragmento textual "…el tren completo" caracteriza al todo discreto.

La fracción 1/4 describe la relación entre la parte y el todo; se refiere a la fracción como fracturador. El todo se puede reconstruir iterando cuatro veces la parte visible del tren, 3 vagones, obteniéndose un tren de 12 vagones.

El fragmento "…las 4/5 partes…" y la pregunta ¿Cuánto mide en total? caracterizan la parte y el todo continuo en la actividad 44.4 (ver Figura 5). La fracción 4/5, representada por un segmento de recta al que se le asocia un valor de magnitud: 12 metros, describe una relación entre la parte y el todo.

Para determinar el valor de la unidad fraccionaria, el segmento de recta que representa 4/5 partes de la altura puede partirse en cuatro partes iguales mediante la operación $12 \div 4 = 3$ y reconstruir el todo iterándola cinco veces, o bien calculando $3 \times 5 = 15$. El aspecto de la fracción es de fracturador.

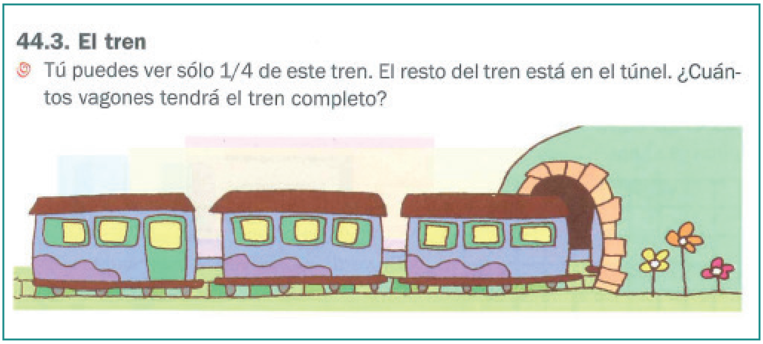

Figura 4. Caracterización de la parte de manera gráfica y simbólica, búsqueda de un todo discreto (Marfil, 2007, pág. 51).

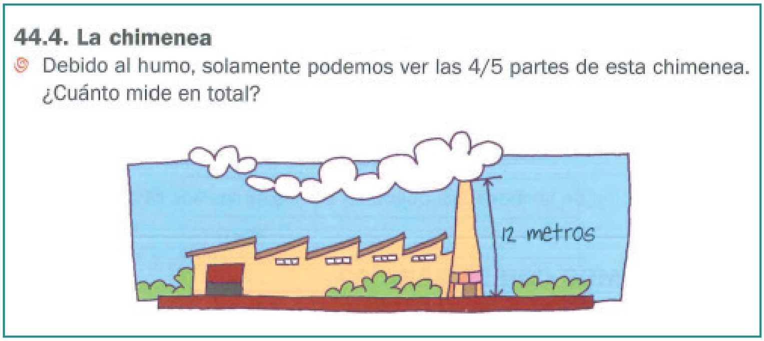

Figura 5. Caracterización de las partes de forma gráfica y simbólica, búsqueda de un todo continuo, discretizado a través de unidades de medida (Ibid).

El apartado 45 del libro de texto incluye cuatro actividades: 45.1 La valla, 45.2 Completa la valla, 45.3 El rombo y 44.4 La cuadrícula, de las cuales sólo se describe el análisis de las primeras dos.

"Esta valla mide 24 metros de largo" es la frase que en la actividad 45.1 caracteriza al todo continuo: la longitud de la valla expresada con un valor de magnitud. Como puede verse en la Figura 6, la valla está dividida en dos partes diferenciadas por el color y está formada por tablas horizontales y tablas verticales distribuidas de manera equitativa.

La caracterización de la parte está dada por la imagen y por las palabras "fracción" y "parte". Pareciera que se sugiere contar para responder la primera pregunta, en vez de comparar la parte pintada y la no pintada. Con este proceso es claro que la primera es tres veces mayor que la segunda, evocando una partición del largo de la valla en cuatro partes iguales. Por ello, la fracción 3/4 indicaría el valor de la longitud de la parte pintada y describiría la comparación de una parte con respecto a la otra, destacando a la fracción como comparador.

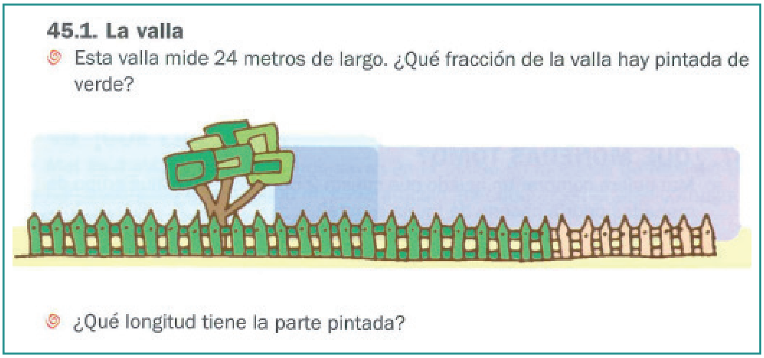

Figura 6. Todo continuo discretizado por unidades fraccionarias gráficas y a través de unidades de medida (Ibid).

Si la primera pregunta se responde a través del conteo el aspecto de la fracción es de fracturador, si se responde mediante la comparación entre el número de tablas pintadas y el número de tablas no pintadas, el aspecto de la fracción es de relación razón. Para responder la segunda pregunta el aspecto de la fracción 3/4 es de operador razón ya que convierte el valor de magnitud 24 en 18 mediante la operación 3/4 x 24 = 18.

En la actividad 45.2 (ver Figura 7), se caracteriza la parte y el todo continuo a través de los textos "…1/5 del total de la valla…" y "…la longitud total…".

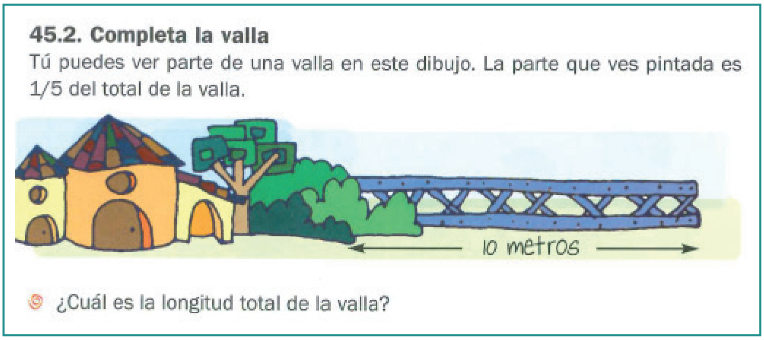

Figura 7. Convivencia de dos particiones distintas: unidad fraccionaria simbólica, unidad de medida gráfica, búsqueda de un todo continuo discretizado (Ibid).

La fracción 1/5 describe la relación entre la parte y el todo, asociada a la fracción como fracturador. Para reconstruir el todo se requiere considerar la unidad fraccionaria 1/5 –10 metros– y calcular 5 x 10 = 50.

En la actividad del apartado 46 (ver Figura 8), se caracteriza el todo discreto y la parte mediante los textos "…baraja española de 40 cartas…", "…probabilidad…" y "…el porcentaje de veces que debería salir un as sería del 10%".

46. ¿JUGAMOS CON LA BARAJA?

En una baraja española de 40 cartas se saca una carta al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de oros?
b) ¿Y de que sea de bastos?
c) ¿Y de que sea un rey?
d) ¿Y de que sea un número menor que 7?
e) Mat afirma que al jugar 40 partidas, el porcentaje de veces que debería salir un as sería del 10%. ¿Estás de acuerdo?

Figura 8. Uso de la fracción como comparador en un contexto de probabilidad (Marfil, 2007, pág. 52).

El estudio de las fracciones en un contexto de probabilidad es lo que más llama la atención de esta actividad.

Considerando que la probabilidad teórica relaciona el número de casos favorables y el número de casos posibles, en las dos primeras preguntas se trata de relacionar el número de cartas de un palo y el número de cartas de toda la baraja, de tal modo que la fracción 10/40 representa esa relación.

Para responder la tercera pregunta se puede relacionar el número de cartas que tienen rey y el número de cartas de la baraja o el número de reyes y el número de cartas por palo, estas relaciones se representan con las fracciones 4/40 y 1/10.

En la cuarta pregunta, también se trata de relacionar el número de cartas con un número menor que 7 y el número de cartas de toda la baraja o el número de cartas con un número menor que 7 y el número de cartas por palo, las fracciones 24/40 y 6/10 representan estas relaciones.

Aunque el aspecto de la fracción es de relación razón, también se puede considerar que es de fracturador ya que se hace referencia a un subconjunto de elementos con respecto al cardinal de ese conjunto.

El apartado 50 contiene seis actividades, sólo se hará referencia a dos: en una de ellas, la 50.2 se incluye en la Figura 9. Los textos: "…3/5 partes de la superficie…" y "…la superficie total del planeta es de 510 millones de kilómetros cuadrados" caracterizan la parte y el todo respectivamente.

Para obtener cuántos kilómetros cuadrados están cubiertos por agua, primero se debe considerar que la fracción 3/5 es un fracturador que describe una relación entre la parte y el todo y ésta debe reinterpretarse como un operador razón que transforma un valor de magnitud en otro de la misma especie 3/5 x 510 = 306, lo cual se relaciona con la fracción como comparador. Para obtener cuántos kilómetros cuadrados son de tierra firme, se debe interpretar la fracción 2/5 como fracturador y reinterpretarla como un operador razón obteniéndose 2/5 x 510 = 204.

50.2.
Aproximadamente las 3/5 partes de la superficie terrestre está cubierta por agua. Sabemos que la superficie total del planeta es de 510 millones de kilómetros cuadrados. ¿Cuántos km^2 están cubiertos de agua y cuántos son tierra firme?

Figura 9. Caracterización verbal de un todo continuo discretizado a través de unidades de medida; partes complementarias (Marfil, 2007, pág. 55).

Resultados del análisis de la segunda sección

Como puede apreciarse en la Figura 10, en el párrafo introductorio de esta sección se pone énfasis en la fracción como una relación entre dos cantidades describiéndola como un fracturador. También se hace referencia a la fracción como una cantidad que se puede expresar de diferentes formas a través de fracciones equivalentes.

DESDE AHORA... FRACCIONES

Las **fracciones** representan la forma más natural de indicar la **relación** entre dos cantidades. La palabra fracción deriva del latín y significa romper o dividir un todo en partes. Y es ese significado, entre otros, el que trabajaremos más extensamente, viendo que en muchas ocasiones se puede expresar la misma cantidad de forma diferente por medio de **fracciones equivalentes**. Practicaremos también la suma y resta de fracciones.

Figura 10. Párrafo introductorio de la segunda sección (Marfil, 2007, pág. 56).

Esta sección incluye siete apartados (51-57): ¿Quién llega antes?, Dados y fracciones, El paraíso del donut, La abeja en el panal, El lenguaje de las fracciones, Repartos y fracciones y ¿Practicamos un poco? De estos apartados se incluye el análisis de las actividades de cuatro de ellos.

Un juego que requiere comparar y ordenar fracciones se propone en la actividad 51, ver Figura 11. Varias pueden ser las rutas que conducen a la llegada, se comentarán tres. Una es fijarse en la menor distancia entre la salida y la llegada, es decir, la diagonal del rectángulo, el diseñador del juego optó por poner la solución justamente en esa dirección: 3/8, 3/4, 7/8, 8/7 y 8/3; esa situación trivializa la resolución debido a que basta verificar que efectivamente la fracción siguiente es mayor que la anterior.

Otros acercamientos a la resolución del juego son: 1) usar fracciones equivalentes, que conduce a la comparación de números enteros, y 2) determinar el complemento a 1 o 2 unidades de cada una de las fracciones, es decir, de 1/2 a 1, 1/2; de 3/4 a 1, 1/4; de 2/3 a 1, 1/3. Este último acercamiento se puede visualizar con segmentos de recta y en consecuencia se comparan valores de longitud. Obsérvese que en los tres casos el aspecto de la fracción que sobresale es el de comparador.

51. ¿QUIÉN LLEGA ANTES?

Número de jugadores: Dos.

Material: Este tablero.

	7/6	11/6	5/4	5/2	8/3	Llegada
	6/5	11/12	8/9	8/7	8/9	
	5/6	6/7	7/8	7/3	7/8	
	1/2	3/4	4/3	5/3	6/7	
Salida	3/8	2/3	3/4	4/5	5/6	

Reglas del juego:

- Hay que llegar desde la salida hasta la llegada mediante un camino que una fracciones crecientes.
- No se pueden saltar celdas y te puedes mover desde una celda a otra en sentido horizontal, vertical o en diagonal.
- Gana el jugador o jugadora que haya necesitado ocupar menor número de celdas.

Figura 11. El todo se caracteriza de manera implícita como un segmento de recta (Ibid).

En el apartado 52 (ver Figura 12), se requiere formar 36 fracciones considerando los números que quedan hacia arriba al lanzar un par de dados. Posteriormente se deben identificar las fracciones mayores, menores o iguales que 1 y las fracciones reducibles e irreducibles.

52. DADOS Y FRACCIONES

Lanzamos dos dados cúbicos de distinto color al aire, escribimos los números que aparecen y formamos con ellos una fracción.

a) ¿Cuántas fracciones saldrán mayores que 1? ¿Y menores que 1? ¿E iguales a 1?

b) Vamos a fijarnos en las fracciones menores que 1; éstas pueden ser reducibles o irreducibles. Mat apuesta por una fracción reducible y Tica por una irreducible. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

c) ¿Y si apuestan con las fracciones mayores que 1?

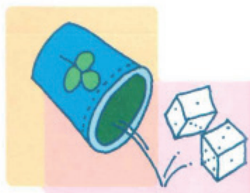

Figura 12. Caracterización a través del texto del todo y las partes (Ibid).

Debido a que las preguntas de los incisos b y c hacen referencia a la probabilidad de un suceso, el aspecto de la fracción es de relación razón.

En el apartado 54 (ver Figura 13), el todo continuo –un polígono– discretizado a través de la partición en 23 partes iguales está caracterizado por la imagen. La relación entre la parte y el todo se caracteriza a través de las expresiones "relación" y "probabilidad".

Para responder la primera pregunta se debe comparar el número de hexágonos de color rojo con respecto al número de hexágonos de color blanco mediante una relación razón, lo cual se asocia a la fracción como comparador.

Al referirse a la probabilidad de que una abeja esté en la zona roja en la segunda pregunta, la fracción puede describir una relación entre la parte y el todo o una relación razón de tal forma que emerge la fracción como fracturador o comparador.

54. LA ABEJA EN EL PANAL

a) ¿Qué "relación" hay entre la parte roja y la parte blanca del panal?

b) Una abeja se encuentra en este panal. ¿Qué probabilidad hay de que esté en la zona roja?

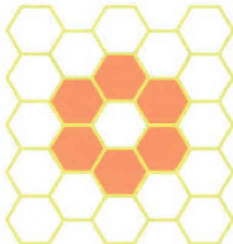

Figura 13. Caracterización del todo y la parte a través del texto y la información gráfica (Marfil, 2007, pág. 57).

El apartado 55 contiene tres actividades: El lenguaje de las fracciones, 55.1 Deportes y 55.2 La excursión; se incluye el análisis de dos de ellas.

En la primera actividad el todo discreto y las partes están caracterizados mediante los textos: número de alumnos, la mitad, la cuarta parte, la sexta parte y hay dos mujeres, ver Figura 14.

55. EL LENGUAJE DE LAS FRACCIONES

Hay una leyenda que afirma que al preguntar a Pitágoras sobre el número de sus alumnos, respondió: "La mitad estudia Matemáticas, la cuarta parte la naturaleza, la sexta parte medita en silencio; además hay dos mujeres"

Si te preguntamos por el número de sus alumnos, ¿Qué estrategia seguirías?

Es fácil que no hayas sabido resolver este problema, pero, ¿y con estos otros?

Figura 14. Caracterización textual del todo y las partes (Ibid).

Para determinar el número de alumnos se pueden sumar las fracciones 1/2+1/4+1/6=11/12 e identificar que la parte que falta es la fracción unitaria 1/12, la cual está formada por dos mujeres. Para reconstruir el todo se puede calcular 2 x 12 = 24. A diferencia de la actividad 44.3 El tren, la reconstrucción del todo no implica iterar la fracción unitaria.

Considerando que esta actividad implica la sumatoria de partes de un todo discreto y su reconstrucción, el aspecto de la fracción es de fracturador.

En la actividad 55.2 (ver Figura 15), el todo discreto se caracteriza con las expresiones "… los 200 alumnos" y la parte con "… los 3/8".

55.2. La excursión
Se ha organizado una excursión. De los 200 alumnos y alumnas de 1º de ESO, sólo se han apuntado los 3/8. ¿Cuántas personas piensan ir de excursión? ¿Cuántos se van a quedar? ¿Qué fracción del total suponen?

Figura 15. Caracterización textual y simbólica del todo y las partes (Ibid).

Para responder la primera pregunta se puede considerar que la fracción 3/8 representa una relación parte-todo y que ésta se puede reinterpretar como un operador razón convirtiendo una cantidad en otra 3/8 x 200 = 75, de tal forma que subyacen los aspectos de la fracción como fracturador y operador razón. Para responder la segunda pregunta se puede calcular 200 - 75 = 125. En el caso de la tercera pregunta se puede responder calculando 1 - 1/3 = 5/8 o representando la relación entre el número de personas que se quedan y el número de personas en total a través de una fracción, lo cual en ambos casos se asocia con la fracción como fracturador.

En la actividad 55.3 (ver Figura 16), el todo continuo está caracterizado a través de las palabras "tarta" y "otra igual", las partes mediante las fracciones 3/5 y 13/20.

55.3. El goloso
Mat comió en el cumpleaños de Tica los 3/5 de su tarta y Tica se comió en el de Mat los 13/20 de otra igual. ¿Quién de los dos comió más?

Figura 16. Caracterización simbólica de las partes (Ibid).

Para comparar las fracciones y determinar cuál es la mayor, se puede convertir la fracción 3/5 en una fracción equivalente. En esta actividad subyace la fracción como comparador.

CONCLUSIONES

En la primera sección 5 de 9 actividades incluyen "todos" discretos; en dos de estás, mientras que la información de la imagen puede hacer referencia al todo continuo, las formas textuales y las preguntas centran la atención en el discreto. En la segunda sección 8 de 16 actividades incluyen todos discretos. Por lo tanto, se puede decir que se observa una tendencia al uso de todos discretos.

Con respecto a los aspectos de la fracción, se identificaron los de fracturador, relación razón y operador razón. En las actividades en las que se identificaron dos aspectos distintos, algunas incluyen la fracción como fracturador y como relación razón, y otras la fracción como fracturador y como operador razón.

En relación al modelo de enseñanza tanto la caracterización del todo, la parte y la relación parte-todo, como las preguntas se pueden asociar a diferentes aspectos de la fracción. Las preguntas de las actividades en las que están presentes dos aspectos de la fracción pueden favorecer uno de ellos. Las maneras de resolver las actividades o de responder las preguntas pueden implicar la interpretación de diferentes aspectos de la fracción señalados en el párrafo anterior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Berh, M., Lesh R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Botella, L. M., Millán, L. M., Pérez, P. y Cantó, J. (2007). *Matemáticas. 1er. Curso de Educación Secundaria Obligatoria* (pp. 50-61). Valencia: Marfil.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de Aprendizaje en dos Modelos de Enseñanza de los Racionales.* Tesis de Doctorado. DME - Cinvestav, México.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1980). The rational number construct - Its elements and mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-150). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers - Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E. (1980). Rational Number Ideas and the Role of Representational Systems. En R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 50-59). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Novillis, C. (1976). An analysis of the fraction concept into a hierarchy of selected subconcepts and the testing of the hierarchical dependencies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7, 131-144.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE/Horsori.

Rappaport, D. (1962). The meanings of fractions. *School Science and Mathematics*, 62, 241-244.

Riess, A. (1964). A new approach to the teaching of fractions in the intermediate grades. *School Science and Mathematics*, 54, 111-119.

Usiskin, Z. (1979). The future of fractions. *Arithmetic Teacher*, 26, 18-20.

Yang, D., Reys, R. y Wu, L. (2010). Comparing the Development of Fractions in the Fifth- and Sixth- Graders' Textbooks of Singapore, Taiwan, and the USA. *School Science and Mathematics,* 110 (3), 118-127.