La geometría del ángulo desde otro ángulo: Una aproximación metodológica alternativa

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina, Leonor Camargo y Armando Echeverry

Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia

Resumen. *En este artículo reportamos un experimento de enseñanza realizado en un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Se describe la aproximación metodológica propuesta y su implementación para el tema de ángulos. Como resultados del experimento de enseñanza se tiene un conjunto de cinco problemas que propician la generación de un sistema axiomático local y evidencia empírica de que es posible desarrollar en el nivel universitario un curso bajo una aproximación alternativa a la usual presentación axiomática deductiva.*
Palabras clave: *axiomatización, aproximación metodológica alternativa, problemas, actividad demostrativa, aprender como participación*

The angle's geometry from another angle: an alternative methodological approximation

Abstract. *In this paper, we report a teaching experiment in a plane geometry course of a mathematics teacher pre-service program. We describe the methodological approach used and its implementation to develop the topic of angles. The results of the teaching experiment are a set of five problems that favor the generation of an axiomatic system for the theory related to angles and empirical evidence that it is possible to develop, at the university level, a course from an alternative methodological approach than the usual axiomatic deductive presentation.*
Key words: *axiomatization, alternative methodological approach, problems, proving, learning as participation.*

INTRODUCCIÓN

En la literatura de Educación Matemática, sobre asuntos de la reforma curricular y de la formación de profesores, se menciona que la manera habitual de exponer el contenido matemático en los cursos de nivel universitario es la *presentación axiomática deductiva* (e.g., de Villiers, 1986; Hanna, 1990; Alsina, 2001; Mason, 2001; Herbst, 2002). Esta aproximación metodológica se usa para exponer ante los estudiantes temas que no les son familiares. El profesor, siguiendo un libro de texto, presenta los axiomas y definiciones relativos al tema, y procede a enunciar y demostrar otros enunciados que harán parte del sistema axiomático; al estudiante se le deja la demostración de enunciados que no harán parte de éste. Bajo esta aproximación metodológica no hay una etapa de familiarización con los objetos matemáticos relativos al tema que se estudia, previa a la aparición de los enunciados del sistema axiomático. El contenido matemático se presenta al estudiante como prefabricado y acabado, sin dejar espacio para la creación, descubrimiento, conjeturación.

Esta aproximación ha sido criticada por algunos matemáticos y educadores matemáticos. Entre las críticas que al respecto recoge de Villiers (1986) están las siguientes: presenta una idea irreal de lo que es la matemática; propicia una visión distorsionada de lo que es crear matemáticas; no ilustra la naturaleza arbitraria de un sistema axiomático; no motiva el estudio de los temas con preguntas de naturaleza teórica o práctica; niega a los estudiantes la oportunidad de participar en la construcción de un sistema axiomático; disminuye la posibilidad de que los axiomas, definiciones y teoremas sean significativos para los alumnos; promueve el aprendizaje por memorización sin buscar comprensión; y se pierden oportunidades para que los estudiantes realicen acciones necesarias para crear matemáticas como conjeturar, generalizar, abstraer.

En este artículo promovemos la tesis de que es posible adoptar, en el nivel universitario, específicamente en un programa de formación de profesores de matemáticas, una aproximación metodológica diferente a la presentación axiomática deductiva. La evidencia empírica proviene de un experimento de enseñanza realizado en un curso de geometría plana que se desarrolla en la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia), cuya meta es aprender a demostrar mediante la participación en la construcción de un sistema axiomático para el contenido geométrico que se estudia. Después de describir la aproximación que proponemos, presentamos aspectos de la implementación de ésta para el caso de la geometría del ángulo.

MARCO DE REFERENCIA

Entendemos por *construir un sistema axiomático* (axiomatizar) relativo a un tema determinar un conjunto lógicamente estructurado de enunciados que son afirmaciones sobre los objetos involucrados en el tema. El término "enunciado" en relación con un sistema axiomático[1] hace referencia a una sentencia que se formula usando los términos universales y los términos no definidos del sistema (Wilder, 1968). Los enunciados que

1. Wilder (1968) amplía el significado de sistema axiomático al incluir en el conjunto formado por los términos no definidos y los axiomas, los teoremas deducidos de éstos. Ampliamos esto al incluir definiciones.

integran un sistema axiomático se diferencian claramente por su estatus teórico (Duval, 2007); los *axiomas* son afirmaciones básicas acerca del tema, supuestas como verdaderas sin que ello signifique que tienen carácter universal; las *definiciones* caracterizan objetos involucrados en el tema y relaciones entre ellos; los *teoremas* son afirmaciones deducidas de las definiciones, axiomas y otros teoremas del sistema.

La determinación de axiomas y definiciones y la obtención de teoremas son actividades que juegan un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas. De Villiers (1986) distingue dos tipos de axiomatización: la constructiva y la descriptiva. En la *constructiva* se modifica un conjunto dado de axiomas —por exclusión, inclusión o reemplazo— para obtener uno nuevo a partir del cual se obtienen nuevos teoremas deductivamente; las geometrías no euclidianas son producto de una axiomatización constructiva realizada al cambiar el quinto postulado de la geometría de Euclides. En la *descriptiva*, se tiene un conjunto de enunciados que no han sido relacionados lógicamente o lo han sido sólo parcialmente; la construcción del sistema axiomático comienza identificando relaciones lógicas entre los enunciados, luego se seleccionan aquellos que se convertirán en los axiomas, y finalmente, con la demostración, se disponen los demás enunciados según dependencias lógicas ya establecidas. La selección de axiomas no es única; por tanto, es posible obtener diferentes organizaciones deductivas. La geometría de Euclides se puede ver como una axiomatización descriptiva de la geometría que se conocía en esa época.

Dado el papel fundamental de axiomatizar en el desarrollo de las matemáticas, ya sea para crear nuevo conocimiento o revisar y reorganizar el conocimiento existente, suponemos que en la formación inicial de los profesores de matemáticas deben existir oportunidades que lleven a comprender qué es axiomatizar, cómo se axiomatiza, qué propósitos tiene la axiomatización, cuál es el papel de un sistema axiomático, etc. No necesariamente por considerar que el ejercicio de su profesión —profesor de secundaria— exija hacer matemáticas en calidad de matemáticos profesionales, sino por considerar que la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel requiere tener conocimiento de contenidos matemáticos, y una visión de la naturaleza de las matemáticas y de las prácticas específicas a través de las cuales se hace matemáticas. Suponemos que el desarrollo gradual de tal visión y comprensión desde el inicio de sus estudios profesionales les ayudará en el aprendizaje mismo del contenido matemático.

Con este supuesto y aceptando que la presentación axiomática deductiva no es la aproximación óptima para estudiantes que están comenzando su formación matemática, el *quid* del asunto es encontrar una aproximación metodológica que satisfaga lo mejor posible los requerimientos para los que se pretende usar.

Una aproximación alternativa a la axiomática deductiva, *participación en axiomatización descriptiva*, nos la da Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986). Con referencia a las matemáticas de la escuela secundaria, el matemático y educador destaca la pertinencia de participar en la práctica de axiomatizar; propone que los estudiantes participen en procesos de axiomatización descriptiva del conocimiento matemático que ya conocen; sugiere que ésta ocurra sólo después de haber introducido y desarrollado el contenido correspondiente. En esta aproximación se distinguen dos fases: una informal en la que se obtienen de manera intuitiva resultados que se verifican; otra que consiste en la organización deductiva de los resultados familiares que fueron aceptados en la primera fase. Freudenthal sugiere axiomatizar primero a nivel local y luego a nivel global. Hull (1973, citado en de Villiers, 1986) también aboga por la axiomatización descriptiva en la enseñanza; precisa que en un comienzo tal aproximación debe dar lugar a la exploración, experimentación, intuición e inferencia informal; afirma que se debe realizar a través de problemas y situaciones particulares que despierten curiosidad. La siguiente etapa consiste en lograr una articulación lógica entre las conjeturas establecidas y, si **fuera necesario**, demostrarlas, haciéndolo gradualmente más riguroso. La organización global crecerá cuando se relacionen unas organizaciones locales con otras, aparecerán definiciones más precisas y conjuntos de axiomas bien delimitados.

Una aproximación metodológica intermedia entre la presentación axiomática deductiva y la participación en axiomatización descriptiva es la *aproximación reconstructiva* propuesta por Human (1978, citado en de Villiers, 1986). En ella, antes de la presentación axiomática deductiva del contenido por parte del profesor, los estudiantes deben familiarizarse con los enunciados recorriendo, al menos parcialmente, el desarrollo histórico del contenido, o un camino mediante el cual el contenido matemático se hubiese descubierto o inventado. Esta aproximación enfatiza el significado del contenido y permite a los estudiantes participar en la construcción y el desarrollo del contenido; sin embargo, esto no implica el aprendizaje por descubrimiento pues podría ser el profesor quien hiciera una explicación reconstructiva.

En las aproximaciones descritas encontramos elementos valiosos para configurar una propuesta alternativa a la presentación axiomática deductiva del contenido matemático, pero hay otros que no se ajustan bien al contexto educativo en el que se ubica nuestra preocupación investigativa. Así que delineamos y ponemos a prueba una aproximación metodológica a la medida de nuestras necesidades. A continuación, describimos nuestra aproximación y presentamos algunos aspectos de su implementación en la enseñanza de un tema específico.

EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Descripción general de nuestra aproximación metodológica

Desde el momento en que se inicia el desarrollo del contenido se involucra a los estudiantes en la resolución de problemas[2] de índole geométrica, medio para lograr que ellos descubran, conjeturen y produzcan inicialmente justificaciones informales. En este punto hay consonancia con la primera fase de la propuesta de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) y la de Hull (1973, citado en de Villiers, 1986). Así, los estudiantes obtienen familiaridad[3] con los objetos geométricos involucrados en los enunciados que harán parte del sistema axiomático que se construya. Los estudiantes trabajan en grupos pequeños, apoyados en el uso de la geometría dinámica. Vista esta actividad de

2. Por *problema* entendemos una tarea para la cual los estudiantes no tienen un patrón de solución. Por lo regular, incluye la solicitud de una conjetura y su justificación.

3. Los estudiantes tienen la familiaridad básica requerida para abordar el problema; sin embargo, la mayoría de enunciados que llegan a ser parte del sistema axiomático que se construye en el curso son desconocidos para ellos o la rigurosidad con la que se enuncian los constituye en enunciados nuevos para ellos.

resolución de problemas a la luz de la aproximación reconstructiva propuesta por Human (1978, citado en de Villiers, 1986), aunque no se recorre el desarrollo histórico de los temas que se tratan en el curso, los estudiantes siguen caminos que permiten construir el contenido matemático; viven un proceso de construcción de conocimiento en el cual se descubren hechos geométricos y descubren elementos teóricos que garantizan la posibilidad de validarlos.

Después de resolver el problema, los estudiantes presentan sus diversas producciones ante la comunidad de la clase con el fin de revisarlas y concretarlas en enunciados que se convierten en su material de trabajo para formar el sistema axiomático. En *conversación instruccional*[4] del profesor con uno o varios estudiantes, a partir de las producciones presentadas, se pueden llevar a cabo acciones como responder preguntas que ayudan a comprender los objetos geométricos involucrados, aceptar o rechazar las conjeturas formuladas, presentar contraejemplos, comparar enunciados de conjeturas para determinar si se refieren o no al mismo hecho geométrico, establecer la definición de un término que servirá de núcleo para el sistema axiomático local, etc. Los estudiantes juegan un papel activo e importante en el análisis pero el papel del profesor como conductor del intercambio es fundamental. Por ejemplo, el profesor decide el orden en que se presentan las conjeturas para su revisión; esta decisión obedece razones didácticas que buscan resaltar las diferencias entre las conjeturas y aprovechar su revisión para cubrir una amplia gama de consideraciones.

Teniendo ya elementos se comienza la construcción del sistema axiomático local a través de acciones como identificar qué elementos teóricos (definiciones, postulados y teoremas) que deberían hacer parte del sistema para que el enunciado tenga sentido en éste y poder construir la demostración; si hubiera varios enunciados para demostrar, decidir en qué secuencia se intentará hacer sus demostraciones y producirlas. La construcción del sistema axiomático está fundamentada en dos prácticas matemáticas: demostrar y definir, las cuales tienen lugar a través de conversación instruccional y de *conversación matemática*[5] en la que el profesor es un miembro más de la comunidad y por ello, su papel es diferente al que tiene en la conversación instruccional; la responsabilidad de culminar exitosamente la tarea recae sobre la comunidad.

En cuanto a la actividad misma de organizar los enunciados que harán parte del sistema, entrevemos una diferencia entre nuestra aproximación y las de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) y Hull (1973, citado en de Villiers, 1986). En nuestro caso, la organización se realiza en el acto mismo de demostrar un enunciado mientras que la participación descrita en la axiomatización descriptiva parece ser un ejercicio previo a una posible demostración, en el que se establecen relaciones lógicas entre los enunciados en cuestión.

4. Entendemos esta expresión como discursos de la clase, entre profesor y estudiantes, que permiten la construcción conjunta de significado (Tharp y Gallimore,1988, citados en Forman, 1996). Los miembros más experimentados de una cultura, instruyen a los menos experimentados, a través del diálogo.

5 Por conversación matemática entendemos un diálogo, sobre algún tema matemático, en el que los estudiantes comunican sus ideas, hacen comentarios ya sea dirigiéndose al profesor o entre ellos.

Escenario del experimento de enseñanza

El experimento de enseñanza, cuyo objeto de investigación fue la implementación de nuestra aproximación metodológica, se realizó en el primer semestre de 2007. Su escenario fue un curso de geometría plana de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. En el curso se inscribieron veintiún estudiantes con edades entre dieciocho y veintiún años. La profesora del curso, uno de los coautores de este artículo, ha tenido a su cargo el curso durante varios semestres.

Los temas incluidos oficialmente en el programa del curso son: relaciones entre puntos, rectas, planos, ángulos, propiedades de triángulos y de cuadriláteros, y relaciones de congruencia. Por la aproximación metodológica no se alcanzan a cubrir los temas de circunferencia y de semejanza de triángulos, ya que, como lo menciona de Villiers (1986), el tiempo didáctico transcurre más lentamente que si se les presentara a los estudiantes el sistema axiomático ya hecho y ellos sólo tuvieran que realizar algunas demostraciones. El experimento de enseñanza se enfocó en el tema de ángulos.

Los estudiantes no siguen libro alguno, pero el sistema axiomático global que se construye durante el curso sigue de cerca el propuesto en el libro *Geometría Moderna* de E. Moise y F. Downs (1986), es decir, las tareas que se asignan a los estudiantes están diseñadas teniendo en cuenta ese sistema y la profesora gestiona el contenido procurando una organización acorde con dicho sistema.

Para ayudar a entender la viabilidad de nuestra aproximación cabe resaltar el papel importante de las normas que rigen la participación de los estudiantes en la actividad matemática desarrollada (*escuchar a los compañeros*, *respetar el uso de la palabra*, *toda contribución es importante, la participación es esencial para generar ideas útiles aunque sean erróneas)* y la validación del conocimiento matemático que circula en la clase (*dar el porqué de toda afirmación que se haga, usar en las demostraciones sólo aquellas afirmaciones que se han validado dentro del sistema).* En un contexto de tal naturaleza, el profesor y los estudiantes contribuyen a la constitución interactiva de situaciones que invitan a demostrar y se enfrentan a ellas como eventos de carácter social e individual (Goos, 2004; Graven, 2004; Martin y McCrone, 2005; Mariotti, 2000).

Algunos resultados de la implementación de nuestra aproximación metodológica en la axiomatización del ángulo

Una característica de nuestra aproximación es el planteamiento de problemas geométricos que permitan a los estudiantes producir enunciados que son insumo para la construcción de sistemas axiomáticos locales. Presentamos los enunciados de cinco problemas que se plantean de manera gradual a los estudiantes, para construir con ellos un sistema axiomático para el tema ángulos. Tal sistema se configura articulando cuatro sistemas axiomáticos locales, cada uno de los cuales tiene un *núcleo* que corresponde a un objeto o relación geométrica, a partir del cual se organizan los enunciados que intervienen.

Para cada problema precisamos: la intención que nos movió a plantearlo, previsiones con respecto al contenido geométrico que saldría a relucir, detalles relativos a la implementación de la aproximación respecto a la gestión de dicho contenido, y mostramos en un esquema el sistema axiomático local construido por la comunidad de la clase, cuyos elementos surgieron previamente o en el momento, para dar solución al problema.

En los esquemas, mediante flechas que vinculan parejas de elementos teóricos indicamos que para definir, postular o demostrar un elemento (origen de la flecha) se requiere el segundo (al cual apunta la flecha). Se señalan con una sombra las cajas correspondientes a los elementos que hacían ya parte del sistema; los otros elementos surgieron como necesidades teóricas durante la actividad. Así por ejemplo, resolver el Problema 1 puso en juego ocho elementos teóricos de los cuales previamente se tenían sólo tres (el Postulado correspondencia puntos- número, la definición de interestancia y el Primer teorema de interestancia[6]); por tanto, fue necesario introducir los restantes (Esquema 1).

Problema 1: Dados $\angle ABC$ y $\angle ACB$. Describa: $\angle ABC \cap \angle ACB$.

Con este problema se pretende motivar una conversación instruccional sobre qué es un ángulo, que debe concluir con el establecimiento e inclusión al sistema de la definición de ángulo. Este problema pone en juego la noción que los estudiantes tienen de ángulo, la que no necesariamente coincide con la que adoptamos en el curso, dada por Hilbert en 1899: *la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y están contenidos en rectas diferentes*. En sus soluciones algunos estudiantes usan una noción de ángulo relacionada con la definición dada por Arnauld, alrededor del año 1667: *parte de un plano comprendida entre dos semirrectas que tienen origen común* o con la de Euclides (siglo IV a.C.): *la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta*. Las diversas respuestas de los estudiantes hacen explícitas las definiciones usuales en el ámbito escolar, y ponen de manifiesto cuán disímiles son los objetos a los que hacen referencia: inclinación refiere a una relación, parte de un plano refiere a una región, y unión de dos rayos refiere a una figura geométrica. Para promover la conversación sobre ángulo preferimos un problema que ponga en juego la noción en vez de pedir directamente una definición pues sería posible que un estudiante recitara de memoria un enunciado correcto sin la suficiente comprensión, o no contara con el respectivo vocabulario para comunicar su idea aunque tuviera una comprensión adecuada.

En el experimento que aquí reportamos surgieron efectivamente diversas definiciones.
Un ángulo es la región delimitada por dos rayos. (Orlando)
Es la abertura que se da entre dos rayos que comparten su punto inicial. (Gonzalo)
Son dos rayos que comparten un punto en común y la región entre ellos. (Leopoldo)
Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ cuyo punto de origen es A el ángulo está constituido por los dos rayos. (Efraín)

Una vez acordada la definición de ángulo se comenzó un proceso de ir hacia atrás, para revisar significados y precisar definiciones y propiedades de los objetos geométricos sobre los que se basa, directa o indirectamente, la definición adoptada. Así, puesto que la definición de ángulo involucra rayos, se requirió definir rayo; a su vez, para definir

6. La lista de postulados, definiciones y teoremas que se mencionan se encuentra en el Apéndice.

rayo se necesitó definir segmento y para definir segmento, definir la relación de interestancia entre puntos. En la conversación instruccional sobre el problema se plantearon preguntas cuya intención era hacer aflorar las imágenes conceptuales y de cuestionarlas o reforzarlas, y, desde la teoría, hacerlas válidas. Algunas preguntas fueron: *¿qué quiere decir que un punto esté entre otros dos puntos?*, *¿tiene un segmento más de dos puntos?*, *¿un rayo es diferente a un segmento?* A partir de la conversación se introdujeron el Segundo y Tercer teoremas de interestancia que se pueden demostrar con el Primer teorema de interestancia y el Postulado correspondencia puntos-números.

Ángulo es el *núcleo del sistema axiomático local* conformado por cuatro definiciones, tres teoremas de interestancia y el Postulado correspondencia puntos-número (Esquema 1). Cabe anotar una aclaración relativa al Esquema 1: el vínculo entre la Definición de rayo y el Tercer teorema de interestancia al igual que el vínculo entre la Definición de segmento y el Segundo teorema de interestancia, indicados por una flecha más gruesa y punteada, pretenden expresar un requerimiento de tipo didáctico que busca la correspondencia entre las definiciones formuladas y las imágenes conceptuales de los respectivos objetos geométricos.

ESQUEMA 1: ELEMENTOS DEL SISTEMA AXIOMÁTICO GENERADO AL ABORDAR EL PROBLEMA 1

Problema 2: Dado un ángulo *A* en Cabri[7] construya un ángulo congruente al dado, usando herramientas validadas a partir de la teoría. ¿Qué le permite garantizar que son congruentes?

Hacemos dos aclaraciones con respecto al uso de la geometría dinámica. Por una parte, la norma de usar herramientas validadas a partir de la teoría —norma que debe regular las producciones de los estudiantes para todos los problemas que se asignan en el curso— tiene que ver con la naturaleza axiomática-deductiva del sistema teórico que se está construyendo. Con tal regla se pretende favorecer una de las características de nuestra aproximación metodológica: ir introduciendo nuevas definiciones y teoremas como respuesta a las necesidades teóricas que surgen. Atendiendo a esta norma, las únicas herramientas que se pueden usar de manera lícita en la solución del problema son: punto, segmento, recta, rayo y medida de ángulos. Por otra parte, el uso de la geometría dinámica para resolver diferentes tipos de problemas suele jugar papeles diferentes. Reconocemos que para el caso de los Problemas 2 y 3, la geometría dinámica no tiene un papel imprescindible; bien podrían lograrse desde el punto de vista didáctico resultados similares si se trabajara en un contexto de papel y lápiz. Aun así, exigimos el uso de la geometría dinámica porque es una oportunidad para contribuir al desarrollo de la habilidad para usar de manera eficiente el programa, condición sin la cual el potencial del uso de la geometría dinámica para solucionar otro tipo de problemas tendría restricciones. El *uso eficiente* del programa de geometría dinámica incluye saber manejar el programa, conocer las distintas herramientas y funciones que ofrece, saber cuándo hacer una construcción

7. En nuestro curso de geometría privilegiamos el uso de Cabri instalado en calculadoras graficadoras pues no sólo favorece la generación de ideas, sino que permiten su socialización y discusión a partir de la proyección en la pared de las imágenes de las producciones individuales.

blanda o una robusta (Healy, 2000) y aprender a interpretar los resultados que se obtienen dinámicamente para reportarlos como un resultado de la geometría euclidiana estática.

Con el Problema 2 se introducen nuevos postulados, definiciones y teoremas que se conectan con uno o más elementos del sistema axiomático cuyo núcleo es el objeto ángulo. Es probable que los estudiantes propongan construir un ángulo congruente al dado, mencionen ángulos opuestos por el vértice, o construyan ángulos rectos adyacentes.

Efectivamente, en nuestro experimento de enseñanza, algunos estudiantes propusieron medir el ángulo *A* y construir un ángulo con la misma medida. Esta sugerencia llevó a Germán a preguntar cómo iban a definir congruencia y qué significaba la medida de un ángulo. La profesora, en el siguiente diálogo, estableció entonces la asociación entre congruencia e igualdad de medidas tal como se había hecho con la congruencia de segmentos.

- **Germán:** Profe, es que lo primero que tenemos que pensar es que… se me viene a mí a la cabeza… es que no hemos definido un criterio de congruencia. […] Tampoco hemos creado un sistema para… para… determinar la medida de un ángulo.
- **Profesora:** Entonces, ¿qué es eso de la medida del ángulo? Entra entonces la necesidad de poder comunicarnos… porque… ¿qué quiere decir congruente? Para segmentos, decíamos que [son aquellos que] tienen la misma medida. Entonces para ángulos sospechamos que es algo parecido. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. […] Entonces vamos a introducir el Postulado medida de ángulos, que dice: a cada ángulo le corresponde un número entre cero y ciento ochenta.

Se introdujeron al sistema axiomático el Postulado medida de ángulos para sustentar la medida de ángulos y el Postulado construcción de ángulos para sustentar la construcción del ángulo congruente. Como Cabri no tiene herramienta específica para construir ángulos con una medida dada, se usó la herramienta ‘Rotación’ para cumplir esa función, es decir, se usó en calidad de transportador, aprovechando que el postulado ofrece el sustento teórico para ello.

Orlando sugirió un par de ángulos opuestos por el vértice y Luz propuso la construcción de ángulos alternos internos generados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Sólo la primera propuesta era aceptable, pues la otra requiere introducir el paralelismo cuestión que no se quería hacer en ese momento. La primera propuesta fue suficientemente rica para extender el sistema pues nos permitió abordar el significado de cuatro objetos geométricos: ángulos congruentes, rayos opuestos, ángulos que forman par lineal, y ángulos suplementarios. El núcleo del sistema axiomático local en este caso es el objeto **ángulos congruentes**. Presentamos los elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2 (Esquema 2).

ESQUEMA 2: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 2

Problema 3: Construya dos ángulos adyacentes congruentes.

Con este problema se motiva la introducción de otras cuatro definiciones al sistema axiomático local en construcción: ángulos adyacentes, ángulo recto, rectas perpendiculares y bisectriz de ángulo, así como el Postulado adición de ángulos y algunos teoremas relacionados con ángulos rectos, rectas perpendiculares y bisectriz de un ángulo.

La necesidad de precisar la definición de ángulos adyacentes surgió tan pronto los estudiantes se involucraron en la interpretación del enunciado del problema. En el experimento hubo dos propuestas de solución. La primera fue construir un ángulo, llamémoslo *A*, y luego construir otro ángulo, de igual medida al ángulo *A*, con un lado común, usando la herramienta Rotación; como se puede evidenciar en el siguiente diálogo, un lado del ángulo *A* resultaba ser la bisectriz del ángulo conformado por los lados no comunes de los dos ángulos.

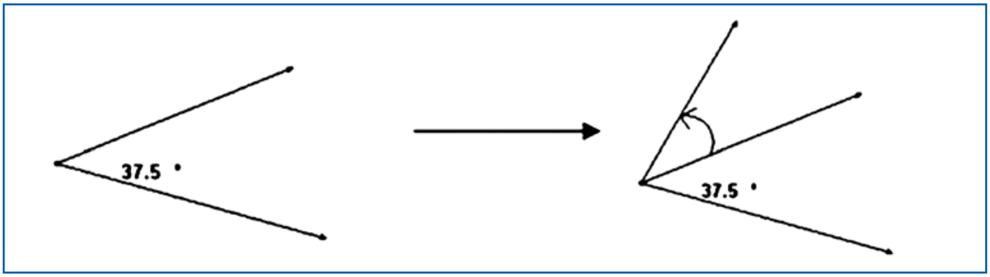

Figura 1

- **Darío:** Lo primero que teníamos que hacer era crear un ángulo, ¿sí? Entonces lo creamos y le calculamos la medida. … Luego… donde estaba la semirrecta creamos otra semirrecta; entonces después lo que hicimos fue girar la semirrecta con esta medida.

La segunda consistió en construir un ángulo y su bisectriz utilizando las herramientas `Medida de ángulo' y 'Calculadora', como se expone en el siguiente diálogo. Esta construcción permitió introducir el Postulado de la adición de medidas de ángulos y a definir bisectriz.

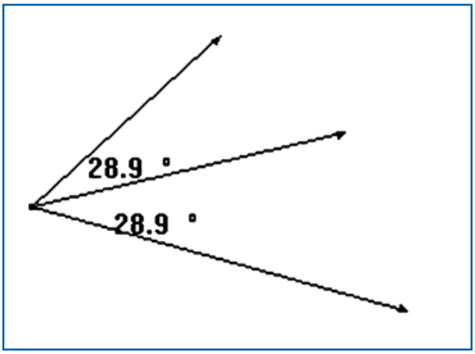

Figura 2

- **Iván:** Tomamos un ángulo y sabemos que tiene una medida, entonces la dividimos
- **Profesora:** Y encontrar la mitad de su medida, y Rotar […] ¿Y qué sucede? Se supone que tendría dos ángulos. ¿Cómo mostrar que realmente este ángulo [que se forma] tiene la medida correspondiente a la mitad… a la medida del ángulo que giramos? […] ¿Y qué voy a usar ahí? El Postulado medida de ángulos. Éste lo usé para tomar la medida. Después usé el postulado construcción de ángulos. Pero, ¿cómo podría mostrar que éste si mide la mitad? Postulado de la adición de medidas. […].Pero este rayo es especial, realmente es uno muy especial. Y ya algunos lo mencionaron: bisectriz de ángulo.

Con base en las construcciones anteriores, la profesora sugirió arrastrar los lados libres de los ángulos para identificar propiedades especiales. Daniel mencionó que en cierto momento hay rayos opuestos y Efraín dijo que en ese caso la medida de los ángulos es de noventa. Esta exploración permitió precisar las definiciones de ángulo recto y de rectas perpendiculares. Aquí el núcleo del sistema local generado es el objeto **ángulos adyacentes congruentes (**Esquema 3).

ESQUEMA 3: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 3

Problema 4: Sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{AD}$ otro rayo. ¿Es posible determinar un punto E, en el mismo semiplano en el cual está D, para que el $\angle BAD$ sea complementario con el $\angle CAE$?

Este problema presenta una oportunidad para revisar el significado y establecer las definiciones de los objetos geométricos involucrados en la situación tales como rayo, rayos opuestos, semiplano, ángulos complementarios, ángulos agudo y obtuso. Su solución juega un papel importante en la ampliación del sistema axiomático. Sin embargo, la intención que tenemos al proponer el problema va más allá de lo mencionado: queremos propiciar que los estudiantes se involucren en una actividad demostrativa que vaya desde la exploración de la situación problema, pase por la formulación de una conjetura y concluya con la demostración del hecho geométrico que subyace en la situación problema. La respuesta al problema exige un análisis detallado pues el estudiante debe darse cuenta de que cualquier punto de la semirrecta AE construida es un punto solución. La geometría dinámica juega un papel protagónico (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007), pues permite a los estudiantes identificar el lugar geométrico que es solución al problema. Si el problema anterior no hubiera suscitado la necesidad de establecer la existencia de rectas perpendiculares, la solución al Problema 4 hace surgir una discusión al respecto ya que al arrastrar un punto E libre, descubren que se debe construir un rayo perpendicular al $\overrightarrow{AD}$ en el punto A para obtener el ángulo pedido (Figura 3).

Al investigar la situación, algunos estudiantes descubrieron la restricción que tiene el punto D para que exista el complemento del $\angle BAD$ éste debe ser agudo, término que se define al igual que el de ángulo obtuso. Usando las herramientas 'Medida de ángulo', 'Calculadora', y el arrastre para obtener una construcción blanda que satisficiera la condición exigida, los estudiantes visualizaron en la figura uno de los puntos E que buscaban. Aquí el núcleo del sistema axiomático local es el objeto **ángulos complementarios** (Esquema 4).

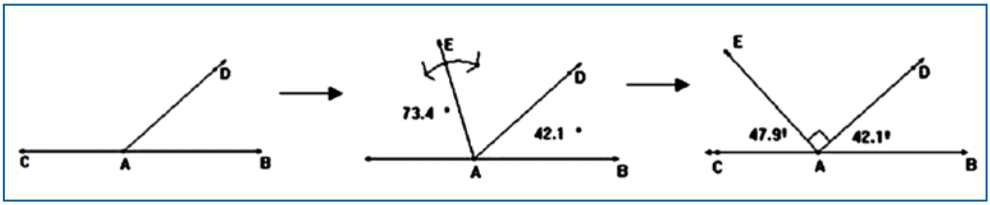

Figura 3

ESQUEMA 4: Elementos del sistema axiomático generado al abordar el Problema 4

Problema 5: Sean $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ rayos opuestos y $\overrightarrow{BK}$ otro rayo. Sean $\overrightarrow{BG}$ y $\overrightarrow{BD}$ las bisectrices del $\angle ABK$ y $\angle KBE$, respectivamente. ¿Cuál debe ser la posición del $\overrightarrow{BK}$ para que la medida del $\angle GBD$ sea máxima? Justifique su respuesta.

Este problema motiva al uso de todo el potencial dinámico que ofrece un programa de geometría dinámica e induce a la actividad demostrativa en toda su dimensión. Usualmente los estudiantes piensan que el $\overrightarrow{BK}$ debe ser perpendicular a los rayos BA y BE. El problema induce a la exploración; el arrastre permite estudiar la variación. Los estudiantes mueven el $\overrightarrow{BK}$ buscando la posición en la que la medida del ángulo sea máxima; suelen estudiar casos extremos de la posición del $\overrightarrow{BK}$, formando un $\angle BAK$ muy agudo o muy obtuso, o haciendo que éste sea recto (Figura 4). La visualización matemática de la figura permite percibir la propiedad invariante bajo el arrastre: el $\angle GBD$ es recto en cualquier posición del $\overrightarrow{BK}$. Los estudiantes deben formular una conjetura, desprovista de toda alusión a la variación, lo que exige captar la esencia del hecho geométrico: el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto. El resultado obtenido, sorprendente para la mayoría de los estudiantes, los motiva a buscar una justificación. La exploración los llevan a identificar dos pares de ángulos congruentes cuya suma de sus medidas es 180 grados, encontrando la vía para hacer la demostración con los elementos teóricos disponibles en el sistema axiomático.

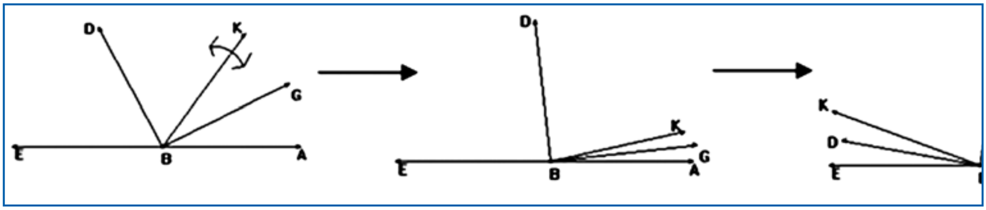

Figura 4

Con este problema, se cierra el proceso de construcción del sistema axiomático relacionado con la geometría de ángulos, logrando así una organización deductiva para los conceptos, postulados y teoremas correspondientes. Faltaría por establecer otro teorema asociado a rectas perpendiculares: la existencia de una recta perpendicular a otra desde un punto externo a ella. No se incluye en esta propuesta porque el problema que hemos diseñado para introducir este hecho requiere el uso de otro objeto geométrico: el triángulo. Ello da lugar a otra propuesta didáctica con otros núcleos para el sistema axiomático.

REFLEXIONES FINALES

En este artículo hemos descrito de manera general una aproximación metodológica alternativa a la presentación axiomática deductiva que suele usarse en cursos de matemáticas del nivel universitario y que probablemente para muchos profesores es la única manera posible de hacer un curso "serio" de matemáticas. La razón que justifica nuestro interés por hacer innovación metodológica tiene que ver con la convicción de que aprender matemáticas —y particularmente aprender a demostrar en geometría— se logra mediante la participación en prácticas matemáticas, y hay indicios de tal aprendizaje cuando el estudiante puede participar de manera más *genuina* (i.e., con una motivación interna, conscientes de su papel en la consecución de la empresa que se propone el curso), *autónoma* (i.e., con razones propias para fundamentar lo que se dice y lo que se hace, independiente de los otros como autoridad), y *relevante* (i.e., con aportes que vienen al caso y que son valiosos aun si son incorrectos). (Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007)

Esa convicción se refleja en las características de la aproximación propuesta. Así, a los estudiantes se les debe involucrar en la resolución de problemas cuya solución les exija participar en verdaderas prácticas matemáticas y haga posible la generación del contenido geométrico que de otra manera tendría que ser presentado por el profesor o por el autor del libro de texto. Por tanto, contar con problemas que permitan lo mencionado es fundamental. Hemos ilustrado la aproximación que proponemos en lo concerniente al tipo de problemas que pueden servir para generar el contenido que se quiere tratar. Mostramos cómo un conjunto de cinco problemas favoreció la generación de un sistema axiomático local para el tema de ángulos, conformado por diecisiete definiciones, cuatro postulados y nueve teoremas. Esto, creemos, apoya la tesis de que es posible adoptar una aproximación metodológica distinta a la tradicional para desarrollar un curso de geometría en el nivel universitario.

Otra característica de la aproximación que proponemos es el tipo de interacción que se lleva a cabo en el aula entre profesor y estudiantes y entre los estudiantes mismos. Aunque en el artículo no dedicamos tiempo a ilustrar este asunto, creemos que sí se entrevé el papel especial que cumple el profesor. El profesor definitivamente no es el encargado de exponer a los estudiantes la teoría que ellos no conocen; en realidad nadie está encargado de ello pues no se requiere. El uso de la geometría dinámica como recurso de mediación instrumental, los problemas propuestos a los estudiantes, las reglas claras para validar las conjeturas que van obteniendo, y el uso del sistema axiomático como fuente para las justificaciones son cuatro pilares que de alguna manera suplen el papel del profesor como proveedor de conocimiento. En cambio, se requiere un gran esfuerzo del profesor por escuchar a sus estudiantes, confiar en que sus ideas son provechosas, atender sus inquietudes, extractar de sus propuestas aquellos elementos útiles para la producción de enunciados y ajustar la organización del sistema axiomático a los resultados obtenidos.

Después del experimento de enseñanza reportado en este artículo, la misma aproximación para el desarrollo del mismo tema ha sido implementada por tres de los coautores de este texto quienes han tenido a su cargo otros grupos de estudiantes. Ha habido algunas diferencias en las producciones de los estudiantes, que han generado cambios menores en la organización deductiva resultante del trabajo con cada problema, pero los cinco problemas diseñados permiten hacer un tratamiento de la teoría de los ángulos completo. Es posible que en ocasiones haya que sacrificar rigor y formalismo en aras de una construcción colectiva, pero ello vale la pena si logramos una participación genuina de los estudiantes en la construcción de conocimiento. La siguiente cita de Freudenthal (1973, citado en de Villiers, 1986) expresa lo que nos impulsa a realizar el esfuerzo antes descrito:

No sólo se hará una mejor enseñanza de las matemáticas sino también y, quizá principalmente, se enseñarán mejores matemáticas.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher?: Towards a new paradigm of teaching mathematics at university level. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 3-12). The Netherlands: Kluwer Academia Publishers.

de Villiers, M. (1986). *The role of axiomatisation in mathematics and mathematics teaching*. Stellenbosch: RUMEUS, University of Stellenbosch. Consulta hecha en diciembre de 2008 en: mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proof.pdf

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). The Netherlands: Sense Publishers.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, 4, 258-291.

Graven, M. (2004). Investigating mathematics teacher learning within an in-service community of practice: The centrality of confidence. *Educational Studies in Mathematics, 57*(2), 177-211.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. En T. Nakahara y M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 103-117). Hiroshima, Giapponi.

Herbst, P. (2002). Engaging students in proving: a double bind on the teacher. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(3), 176 - 203.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Martin, T., McCrone, S., Bower, M. y Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 95-124.

Mason, J. (2001). Mathematical teaching practices at tertiary level: Working Group report. En D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 71-86). The Netherlands: Kluwer Academia Publishers.

Moise, E. y Downs, F. (1986). *Geometría Moderna*. Wilmington, DE: Addinson-Wesley Iberoamericana.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2007). Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores. En *XVII Simposio Iberoamericano de Enseñanza Matemática "Innovando la Enseñanza de las Matemáticas*. México.

Wilder, R. (1968). El método axiomático. En J. Newman (Ed.), *Sigma. El mundo de las matemáticas* (vol. 5, pp. 35-56). Barcelona: Ediciones Grijalbo, S.A. (décima edición).

APÉNDICE

Elementos teóricos del sistema axiomático local construido a través de la propuesta reportada.

Postulados	
Correspondencia puntos- número	Existe una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales tal que: i) a cada punto le corresponde exactamente un número real; ii) a cada número real le corresponde exactamente un punto.
Medida de ángulos	A cada $\angle BAC$ le corresponde un número real entre 0 y 180, llamado su medida.
Construcción de ángulos	Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista de un semiplano H en un plano β. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un $\overrightarrow{AP}$ con P en H, tal que $m\angle PAB = r$.
Par lineal	Si dos ángulos forman par lineal entonces son suplementarios.
Adición de medida de ángulos	Si D está en el interior del ángulo $\angle BAC$ entonces $m\angle BAC = m\angle BAD + m\angle DAC$.
Definiciones	
Interestancia	*B está entre A* y C si A, B y C son puntos colineales distintos y $AB + BC = AC$. Notación: $A - B - C$.
Segmento	Dados dos puntos A y B, el *segmento AB* ($\overline{AB}$) es $\{A, B\} \cup \{X \mid A - X - B\}$.
Rayo	Dados dos puntos A y B, el *rayo AB* ($\overrightarrow{AB}$) es $\overline{AB} \cup \{X \mid A - B - X\}$.
Ángulo	*Ángulo* es la unión de dos rayos que tienen el mismo origen y que no están en la misma recta.

Ángulos congruentes	Dos ángulos son *congruentes* si tienen igual medida.
Rayos opuestos	El *rayo opuesto* a $\overrightarrow{AB}$ es un $\overrightarrow{AC}$ tal que A está entre B y C.
Ángulos opuestos por el vértice	Dos ángulos son *opuestos por el vértice* si sus lados determinan dos pares de rayos opuestos.
Par lineal	Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos y $C \notin \overrightarrow{AB}$ entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un *par lineal*.
Ángulos suplementarios	Dos ángulos son *suplementarios* si la suma de las medidas de es 180.
Ángulos adyacentes	Dos ángulos son *adyacentes* si son coplanares, comparten el vértice, tienen un lado común y no tienen puntos interiores en común.
Bisectriz de un ángulo	Si D está en el interior del $\angle BAC$, y $\angle BAD \cong \angle DAC$, entonces AD es la *bisectriz* del $\angle BAC$.
Angulo recto	Un *ángulo recto* si su medida es 90.
Rectas perpendiculares	Dos rectas son *perpendiculares* si determinan un ángulo recto.
Ángulos agudo y obtuso	Un ángulo es *agudo* u *obtuso* si su medida es menor o mayor de 90, respectivamente.
Ángulos complementarios	Si la suma de las medidas de dos ángulos es 90, se llaman *complementarios*.
Teoremas	
Primer teorema de interestancia	Sean A, B y C tres puntos de una recta, con coordenadas x, y y z, respectivamente. Si $x < y < z$ entonces $A - B - C$.
Segundo teorema de interestancia	Dados dos puntos, existe un punto entre ellos.
Tercer teorema de interestancia	Dados dos puntos A y B, existe un punto C tal que $A - B - C$.
Ángulos opuestos por el vértice	Ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Ángulos suplementarios	Suplementos de ángulos congruentes, son congruentes
Existencia de la bisectriz	Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.
Primer teorema de ángulos rectos	Los ángulos rectos son congruentes.
Segundo teorema de ángulos rectos	Un ángulo es recto si existe otro ángulo tal que son par lineal y congruentes.
Tercer teorema de ángulos rectos	Si dos rectas determinan un ángulo recto, entonces determinan cuatro ángulos rectos.
Existencia de perpendicular por punto en recta	Por un punto de una recta contenida en un plano, existe una sola recta, en dicho plano, perpendicular a la recta dada.