Épsilon - *Revista de Educación Matemática* *2012, Vol. 29(2), nº 81, 9-25, ISSN: 1131-9321*

Análisis matemático y didáctico de situaciones didácticas a partir de un problema

Mercedes Anido
Héctor E. Rubio Scola,
Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
erubio@fceia.unr.edu.ar
anidom@fceia.unr.edu.ar

Resumen: *El problema de investigación didáctica que trata este trabajo está centrado en análisis de las situaciones adidácticas de formulación y validación que, en el marco la teoría de Brousseau, revelan las distintas devoluciones que genera la selección de un problema. La experiencia se realiza en un primer curso de geometría. En una postura ecléctica se analiza la riqueza y creatividad de las distintas propuestas. Se considera que la resolución de problemas planteados tanto en el plano como en el espacio constituyen el respaldo geométrico e intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal.*

Palabras claves: *situaciones adidácticas; dialéctica instrumento-objeto; concepto de distancia; pensamiento visual; aprendizaje por adaptación.*

Mathematical analysis and teaching adidactic situation from a problem

Abstract: *The educational research problem addressed by this work is focused on analyzing situations and making adidactic validation, under the theory of Brousseau, reveal the different returns generated by the selection of a problem. The experiment was performed in a first course in geometry. In an eclectic approach examines the richness and creativity of the different proposals. It is considered that the resolution of problems in both the plane and in space are geometric and intuitive support to then understand the true meaning of the later abstractions of linear algebra.*

Keywords: *adidactic situations; dialectical instrument-object distance concept, visual thinking, learning adaptation.*

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y SU OBJETIVO

El problema de investigación didáctica que trata este trabajo está centrado en análisis de las situaciones adidácticas de formulación y validación que, en el marco la teoría de Brousseau (1996), revelan las distintas devoluciones que genera la selección de un problema. La experiencia se realiza en un primer curso de la llamada Matemática Básica de una Facultad de Ingeniería. En una postura ecléctica se analiza la riqueza y creatividad de las distintas propuestas. Se considera que la resolución de problemas planteados tanto en el plano como en el espacio tridimensional constituyen el respaldo geométrico e intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal e incluso para disponer, por analogía, de una primera referencia visual explicativa de conceptos matemáticos que pueden presentarse en cualquier dimensión. Las representaciones geométricas son la esencia de la matematización horizontal con la Física. Los problemas adecuadamente seleccionados se constituyen en dispositivos didácticos esenciales para el aprendizaje de un conocimiento matemático. Fundamenta esta postura la expresión de distintos autores que tratan la epistemología del problema matemático y su importancia como estrategia metodológica. En el caso en estudio, el eje matemático es un problema de aplicación del Álgebra Lineal a la Geometría Analítica.

Existe un corriente entre los docentes Matemática de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario que considera que si bien es importante que el alumno interprete los métodos y técnicas de resoluciones propuestos por el profesor, en ejercicios y problemas que pueden ser de mera aplicación, debería además prepararse material didáctico y diseñar estrategias que brinden a los alumnos la oportunidad de resolver “verdaderos problemas”; como desafíos que activen su propia capacidad mental, creatividad, confianza en sí mismos y una reflexión crítica sobre sus propios procesos resolutivos que los prepare para resolver otros problemas de la Ciencia y de la Tecnología.

Se debería aspirar a la provisión de herramientas metodológicas para la enseñanza de la matemática en los primeros años de las carreras profesionales que requieran de esa ciencia, bajo la idea fundamental de fomentar la adquisición de estrategias resolutivas de problemas matemáticos a través del planteo de situaciones físicas, geométricas o de otro tipo que de alguna manera puedan ser relacionadas sea con la práctica profesional del futuro ingeniero o con la experiencia cotidiana de quien se está formando para serlo (Miyara, Piraino, & Anido, 2010).

Se considera que la resolución de problemas geométricos planteados tanto en el plano como en el espacio tridimensional constituyen el respaldo intuitivo para poder comprender luego el verdadero sentido de las posteriores abstracciones del Álgebra Lineal e incluso para disponer, por analogía, de una primera referencia visual explicativa de conceptos matemáticos que pueden presentarse en cualquier dimensión.

La Geometría Analítica, especialmente el estudio de los vectores geométricos, como soporte de Álgebra Lineal constituye la base matemática requerida para el estudio de muchas áreas de las ciencias naturales, sociales, los negocios, la computación etc. La modelización matemática de casi todos los problemas propios de la ingeniería requiere la comprensión y manejo total de los conceptos y procedimientos de esa rama de la Matemática. Las representaciones geométricas son la esencia de la matematización horizontal (Freudenthal, 1981) con la Física.

Como respuesta a un cierto cuestionamiento del valor del conocimiento matemático adquirido por visualización, de Guzmán (1996) dice que la visualización en Matemática, es lo que es común, abstraíble, y queda sometido a una elaboración racional, simbólica, que nos permita manejar más claramente la estructura subyacente a tales percepciones. Desarrollar el pensamiento visual y favorecer las habilidades de visualización son dos objetivos claves en la educación geométrica. Precisamente por esta importancia, cabe aclarar bien lo que se entiende por pensamiento visual y visualización, en términos que a menudo confunden en una sinonimia limitante o se relacionan con las simples imágenes que a menudo ilustran el discurso geométrico.

El pensamiento visual incluye la habilidad de visualizar, pero va más allá, al poder incluir aspectos tales como el reconocimiento rápido de determinantes formas o categorías, la manipulación automática de determinados códigos, etc. Explorar, seleccionar, simplificar, abstraer, analizar, comparar, completar, resolver, combinar…, son verbos que caracterizan parcelas del pensamiento visual (Alsina, 1997). “El pensamiento visual, afirma Marjorie Senechal citada por Alsina, Burges, Fortuny (1988), si se explota convenientemente, puede revolucionar la forma de hacer Geometría y de enseñarla”.

¿Cuál es el tema elegido bajo estos enfoques? En el contexto de un curso de un primer año de Álgebra y Geometría en distintas carreras universitarias es importante y básico el concepto de distancia. Este se plantea a través de distintas situaciones: distancia entre dos puntos tanto en el plano como en el espacio, distancia de un punto a una recta en el plano, distancia de un punto a un plano en el espacio, distancia de un punto a una recta en el espacio y distancia entre recta alabeadas. En todos estos casos el concepto geométrico de distancia es esencial en la modelización matemática de problemas en distintas dimensiones, principalmente de problemas de optimización en distintas aplicaciones tanto en las áreas de ingeniería como de la economía.

En este trabajo nos centraremos en el concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio, pensada como longitud, sin convenciones sobre signo. Los problemas de distancia mencionados y en particular el problema de obtención de la distancia de un punto a una recta en el espacio, con las falencias de formación en geometría del espacio propias de la escuela media y no contempladas en las propuestas curriculares, presentan aristas delicadas.

Geométricamente ¿a qué definición recurrir? ¿cómo imagina el alumno esa distancia? ¿intuye un único y mínimo recorrido? ¿qué auxilios didácticos utilizar? Y… aunque se intuya la existencia de esa distancia como única… ¿cómo se construye? ¿cómo medirla cuando se trata de materializarla en el espacio físico en el que nos ubicamos ? ¿qué proceso constructivo geométrico seguir para obtenerla? ¿Se puede prescindir de su visualización? ¿Es necesario modelizar algebraicamente ese procedimiento o basta el conocimiento que ya posee de las operaciones del álgebra vectorial?

¿Cuáles son las concepciones de los alumnos y cuales son los obstáculos que las determinan y dificultan ese proceso vectorial? ¿Puede el alumno con sus conocimientos previos elaborar un procedimiento resolutivo o deducir una fórmula? ¿Qué rol juega en ese proceso la conjetura, la argumentación y la demostración? ¿El tiempo dedicado a esa libre elaboración es suficientemente productivo respecto a los objetivos y al desarrollo del curriculum de la asignatura? ¿Brinda este problema, abierto a las iniciativas de los alumnos, una oportunidad que no presentan otros temas, para facilitar la creación de contextos en los que el alumno a prenda a validar sus propias construcciones? ¿Es importante hacerlo? Precisamente partiendo, como hipótesis, de una respuesta afirmativa a esta última cuestión planteamos una investigación centrada en la construcción geométrica del concepto de distancia y en la comprensión por el alumno de la necesidad de una traducción analítica o vectorial para su obtención numérica.

Este punto del curriculum tradicionalmente se ha considerado, en el desarrollo de la materia, como un tema en el que el profesor debe presentar una fórmula, como aplicación inmediata del producto vectorial, perdiéndose la enorme riqueza de situaciones adidácticas a la que el análisis geométrico del problema, por los mismos alumnos, puede proveer.

El objetivo inmediato del trabajo que se presenta es el análisis de las situaciones adidácticas que, en el sentido de Brousseau (1996), dispara y genera el problema, en un "juego" de propuestas de soluciones, algunas de ellas imprevistas, por el propio docente.

Se muestra como un simple problema es fuente de aprendizaje y provoca un desequilibrio que aparece ante la falta de correspondencia entre los sistemas de conocimientos del alumno y los requisitos que se plantean ante una nueva situación.

Por otra parte, los conceptos matemáticos pueden ser considerados desde dos puntos de vista complementarios:

- su carácter de instrumento al estudiar su funcionamiento en los diversos problemas que permiten resolver;
- su carácter de objetos, en tanto que objetos culturales que tienen un lugar reconocido en el edificio del saber matemático.

Esta dialéctica instrumento-objeto, destacada por (Douady, 1995), tiene un papel muy importante en la construcción de situaciones de aprendizaje: un concepto desempeña seguido el papel de instrumento implícito en la resolución de un problema antes, de devenir un objeto de saber constituido. Los conceptos, además, pueden en general ser movilizados en diferentes dominios (geométrico, numérico o gráfico), lo que permitirá al maestro provocar desequilibrios cognitivos en los alumnos.

El valor del problema elegido, en nuestro caso, va mas allá de un conocimiento acotado; es un ejemplo movilizador de los diferentes dominios que señala Douady. Se pretende, así, que el alumno realice tareas que los hagan pensar, explorar formular hipótesis ,verificar resultados tratando en lo posible que el alumno reproduzca a nivel de aula el trabajo científico del matemático, para generar de este modo, un saber que sea utilizable en otras situaciones y que sea transformado en un saber cultural.

En lo mediato, se trata de hacer un aporte a una Didáctica de la Matemática Operativa que eduque en la formación de un "pensamiento visual" en el que las manipulaciones con los objetos de la representación visual puedan traducirse, con mayor o menor esfuerzo, en las relaciones matemáticas abstractas que representan, (Guzmán, 1996) y a la vez , mostrar la importancia del enfoque geométrico de una teoría matemática lógicamente completa y especialmente apta para proponer, como problemas, propiedades que gradualmente motiven y entusiasmen a los alumnos en los procedimientos matemáticos de descubrimiento y validación, esenciales en la formación profesional. Más que el valor de un conocimiento matemático o método de investigación en si mismos, se trata de promover la búsqueda de problemas que despierten el gozo por el trabajo matemático.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Se ha buscado detectar situaciones adidácticas de "acción", "formulación" e "validación", en el sentido de Brousseau, que surjan de la relación de los alumnos con los contenidos y el medio. Estas situaciones serían, en nuestro criterio de "observación dirigida", los indicadores de un aprendizaje significativo caracterizado por Ausubel como "aprendizaje por descubrimiento" e ilustrado por él mismo en un ejemplo sobre la generalización de una propiedad de los triángulos (Ausubel y Robinson, 1969).

Brusseau (1998) llama "situación adidáctica a una situación matemática específica de un conocimiento concreto que, por sí misma, sin apelar a razones didácticas y en ausencia de toda indicación intencional, permite o provoca un cambio de estrategia por el alumno".

La situación adidáctica es únicamente una parte de la situación más amplia, que Brousseau denomina "situación didáctica", y comprende las relaciones establecidas explícita o implícitamente entre los alumnos, un cierto medio (que incluye instrumentos y objetos) y el profesor, con el objetivo de que los alumnos aprendan el conocimiento matemático. Se trata de una serie de intervenciones del profesor sobre el par alumno-medio destinadas a hacer funcionar las situaciones adidácticas y los aprendizajes que ellas provocan. La evolución de una situación didáctica requiere, por tanto, "la intervención constante, la acción mantenida y la vigilancia del profesor." (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

Situaciones adidácticas de acción

Una buena situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción y ajustar esta acción, sin la intervención del profesor, gracias a la retroacción por parte del medio de la situación. Las informaciones que le devuelve la situación son percibidas por el alumno como sanciones o refuerzos de su acción.

En una situación de acción se produce un "diálogo" entre el alumno y la situación. Esta dialéctica de la acción le permite mejor el modelo implícito, es decir, tener reacciones que no puede todavía formular, probar ni, mucho menos, organizar en una teoría. En todo caso la situación adidáctica provoca un aprendizaje por adaptación (de acuerdo con la teoría de Piaget) (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

Situaciones adidácticas de formulación

Para que el alumno pueda explicitar su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda utilizar dicha formulación para obtener él mismo o hacer obtener a alguien un resultado. En una situaciones adidácticas de formulación el alumno intercambia información con una o varias personas. Comunica lo que ha encontrado a un interlocutor o a un grupo de alumnos que le devuelve la información. (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

Situaciones adidácticas de validación

En la dialéctica de la validación los alumnos debe demostrar porqué el modelo que ha creado es válido. Pero para que el alumno construya una demostración y esta tenga sentido para él es necesario que la construya en una situación, llamada de validación, en la que debe convencer a alguna otra persona. Una situaciones adidáctica de validación es la ocasión de someter el mensaje matemático (modelo explícito de la situación) como una aseveración a un interlocutor (oponente). El oponente puede pedir explicaciones suplementarias, rechazar las que no comprende o aquellas con las que no está de acuerdo (justificando su desacuerdo) (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997).

En lo metodológico, esta experiencia, se trata como un estudio de casos realizado con la metodología de investigación de la Ingeniería Didáctica (Artigue, Douday, Moreno, & Gómez, 1995) (Perkins, 2004) en un contexto de un primer curso normal (60 alumnos) de Álgebra y Geometría (primer cuatrimestre de primer año)

Se ha elegido a la Ingeniería Didáctica como marco metodológico, tanto a nivel didáctico como a nivel investigativo para el soporte y andamiaje de la construcción didáctica, por considerar que en el contexto de un paradigma cualitativo de investigación el "saber a enseñar " y "el caso a investigar" son susceptibles de ser tratados a través de la Ingeniería Didáctica.

> Como metodología de investigación, la Ingeniería Didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las "relaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

Dice Brousseau (1996; p. 125): "La Ingeniería Didáctica es la proposición y elección de condiciones que permiten desarrollar los conocimientos matemáticos del alumno. La legitimación de la elección de problemas y de sus variables se ha de recostar en la teoría didáctica., la producción de un objeto de enseñanza no es suficiente, sino se debe considerar el efecto que tendrá la manera como se ha de elaborar, describir y justificar la utilidad de un nuevo artefacto didáctico. La diferencia entre la didáctica espontánea y la Ingeniería Didáctica es que sobre la materia de un problema la ingeniería distingue entre el problema y las propiedades del problema y como se han de considerar las razones por las cuales se habría de ensayar tal o cual cosa o de que manera se relacionan ciertos conocimientos didácticos".

En el marco de la metodología que describe Artigue (1995) delimitamos nuestro proceso investigativo en cuatro fases: 1°Análisis Preliminar. 2° Concepción y Análisis a Priori de las situaciones didácticas de la ingeniería. 3°Experimentación. 4° Análisis a Posteriori y Evaluación.

En la confrontación de los dos análisis el a priori y a posteriori, se fundamenta en esencia la validación de las hipótesis formuladas en la investigación.

ANÁLISIS PREVIOS: FUNDAMENTO TEÓRICO

En el marco de la Ingeniería Didáctica a la que dan lugar el aprendizaje de problemas de este tipo, interesa en la fase correspondiente a los "análisis previos", determinar y profundizar en que concepción de la comprensión de problemas geométricos trabajaremos.

Se considera que a esos estudios preliminares se pueden integrar algunos elementos teóricos de análisis de la propuesta denominada "Enseñanza para la Comprensión" como herramientas útiles para el enfoque de la actividad didáctica que genera el problema.

Esta propuesta se originó en la Escuela de Graduados de Educación de Harvard y tiene como representantes principales a Howard Gardner, David Perkins y Vito Perrone. En ella, como su nombre lo indica, el papel central se encuentra en la comprensión, es decir la habilidad de pensar crítica y constructivamente para actuar con flexibilidad a partir de lo que se ha aprendido.

Es conveniente desarrollar la idea de la comprensión, pues ésta constituye el núcleo central de la propuesta desde una perspectiva pedagógica.

En la propuesta de la Enseñanza para la Comprensión se la entiende como la habilidad de pensar y actuar flexiblemente con lo que uno conoce. Es decir, que no se reduce únicamente al saber como sinónimo de conocimiento, sino que además implica la idea de poder hacer uso de él de manera variada.

Si un estudiante no puede ir más allá de un pensamiento y acción memorísticos, rutinarios, significa que hay falta de comprensión.

Para apreciar la comprensión de una persona hay que: 1) solicitarle que haga algo para usar o poner en práctica la comprensión: explicar, resolver un problema, construir un argumento, armar un producto, 2) lo que los estudiantes hacen no sólo muestra su comprensión actual, sino que también es probable que logren mayores avances al usar su comprensión como respuesta a un reto en particular y llegar a comprender mejor lo que se suponía comprendido.

En consecuencia, existe una identificación entre lo que es la comprensión y lo que Perkins (2004) llama desempeño flexible. “Comprender un tópico quiere decir ni más ni menos que ser capaz de desempeñarse flexiblemente en relación con el tópico: explicar, justificar, extrapolar, vincular y aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria. Comprender es cuestión de ser capaz de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe. La capacidad de desempeño flexible es la comprensión”.

Pensamos que a las “situaciones adidácticas” (Brousseau, 1996), que se busca genere el propio alumno ante un problema, se sume una indagación sobre las capacidades de vinculación y extrapolación desde otras formas de resolución y esa es la flexibilidad que nos interesa.

De esa capacidad de vinculación y extrapolación, con conocimientos ya adquiridos surge otro tema a tener en cuenta en los análisis previos, constituido por las competencias de los estudiantes para abordar el tema. En este caso los alumnos participantes de la experiencia son alumnos ingresantes a la universidad que ya en un segundo mes de clase han elaborado los conceptos básicos de la Geometría Lineal del plano y el espacio con un enfoque vectorial (Anido, Katz, Guzman, 2007) o sea conocen los espacios vectoriales de los segmentos orientados en un eje, en el plano y en el espacio y su correspondencia con los espacios vectoriales, que la consideración de las respectivas bases, generan en R^1, R^2, R^3. En relación a la temática propia de la Geometría Analítica, conocen las ecuaciones de la recta en el plano, la recta en el espacio y el plano en el espacio.

LA CONCEPCIÓN Y EL ANÁLISIS A PRIORI

Se presenta como selección del profesor el siguiente problema para ser resuelto en forma grupal con un espacio previsto a posteriori para el análisis y discusión de las distintas propuestas de solución.

PROBLEMA: Dada la recta de ecuación

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 6t \\ z = 4 + 3t \quad t \in \Re \end{cases}$$

y el punto P_1 (4, 5, 7) hallar la distancia del punto a recta.

Los alumnos ya han deducido y aplicado las fórmulas de distancia de un punto a una recta en el plano y distancia de un punto a un plano en el espacio. En ambos casos la construcción geométrica intuitiva ha sido fácil y la obtención de dos formulas análogas, a partir de los datos, implica; en el marco del concepto de generalización de Polya (1981), una generalización en la segunda de los procesos que llevaron a la obtención de la primera, Su obtención se basa en la proyección de un vector que une el punto dado (según el caso en el plano o espacio) con un punto cualquiera de la recta o plano, realizada sobre el vector normal a la recta o al plano. Estrategia que permite obtener analíticamente las fórmulas de inmediata aplicación.

Precisamente en este análisis a priori, sobre el impacto del problema, se prevén como obstáculos epistemológicos los conceptos de: distancia de un punto a una recta en el plano y de distancia de un punto a un plano en el espacio. Los procedimientos conocidos que llevan a las respectivas fórmulas constituyen obstáculos en el sentido de que el alumno puede tratar de hacer erróneas generalizaciones.

Se considera, no obstante, que superadas las dificultades que emanan de estos obstáculos y, precisamente porque la confrontación con esas dificultades implica repasar y afianzar el manejo de la operatoria vectorial los alumnos, pueden llegar a procesos resolutivos propios y esa es la riqueza conceptual, capacidad de vinculación y flexibilidad que se espera a partir del problema planteado.

DESAROLLO Y ANÁLISIS A POSTERIORI: LAS PROPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Los alumnos trabajaron en grupos espontáneamente constituidos. Las primeras experiencias infructuosas de intentos de aplicación de las fórmulas conocidas sobre distancia de un punta a una recta en el plano o de distancia de un punto a una recta en el espacio, mostraron que los obstáculo epistemológicos previstos eran acertados: querían extender un procedimiento a una situación problemática que no le proporcionaba los datos para hacerlo (no existe una única ecuación de la recta en el espacio que generalice la forma general de la ecuación de la recta en el plano).

La idea de proyectar un vector determinado por el punto dado y un punto cualquiera de la recta sobre un vector normal, idea clave en la obtención de la distancia de un punto a una recta en el plano o de un punto a un plano en el espacio, tropezó con un obstáculo mucho mayor ¿sobre qué dirección de vector normal proyectar cuando hay infinitas direcciones de vectores normales a una recta en el espacio?

Ante los caminos rutinarios cerrados, comenzaron algunos grupos a hurgar en el bagaje de otros conocimientos y a buscar otras vinculaciones, analogías, extrapolaciones.

A pesar de estas primeras dificultades no se amilanaron. Se observaron en algunos grupos dibujos como figuras de análisis, en otros grupos materializaciones de los elementos geométricos dados como datos: la recta como extensión de reglas o filo de la puerta o aristas del salón, la fijación de un punto en el espacio (punta de un dedo) y el trazado en el aire del segmento representativo de la distancia que buscaban obtener.

¿Cuál sería, en ese proceso, el aporte al aprendizaje y al pensamiento matemático? Promover, un aprendizaje de la Matemática en el sentido de Polya: "Las matemáticas son consideradas como una ciencia demostrativa, éste es sólo uno de sus aspectos. Hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez. El resultado de la labor demostrativa del matemático, es el razonamiento demostrativo, la prueba; pero ésta a su vez, es construida mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición. Si el aprendizaje de las matemáticas refleja en algún grado la invención de esta ciencia, debe hacer en él un lugar para la intuición, para la inferencia plausible.”

A esas primeras etapas de discusión intergrupos, siguió la elaboración de distintas propuestas presentadas como trabajo grupal.

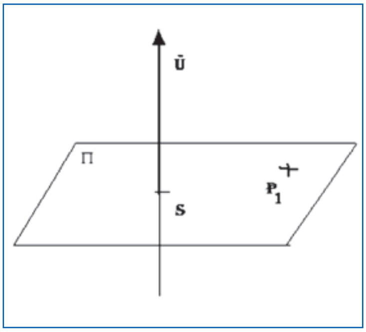
Entendiendo como devolución al “acto por el cual el profesor hace que el alumno acepte la responsabilidad de una situación de aprendizaje (adidáctica) o de un problema, y acepta él mismo las consecuencias de esta transferencia.” (Brousseau, en Douady; 1995: 67), distintas devoluciones fueron observadas y registradas.

Se transcriben seis casos que documentan el trabajo de los alumnos realizado en esa misma clase en el espacio de tiempo previsto (una hora de clase)

CASO 1

Consideramos el vector dirección de la recta dada, y vamos a determinar el plano π perpendicular a la recta que contenga a P_1. Encontraremos la intersección S de la recta dada con el plano y el modulo del vector $\overline{SP_1}$ es la distancia pedida.

$\bar{u} = (2,6,3) \rightarrow \pi)\ 2x + 6y + 3z + d = 0$



Como queremos que contenga al punto

$P_1(4, 5, 7)$ reemplazamos

$2.\ 4 + 6.\ 5 + 3.\ 7 + d = 0 \rightarrow d = -59$

La ecuación del plano que contenga a (4, 5, 7) será $\rightarrow 2x + 6y + 3z - 50 = 0$

Buscamos ahora la intersección entre la recta y el plano , resolviendo un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ 2x + 6y + 3z - 59 & (4) \end{cases}$$

Remplazando (1), (2) y (3) en (4) obtenemos: $2(3+2t) + 6(2+6t) + 3(4+3t) - 50 = 0$

Despejamos el parámetro “t”: $t = \dfrac{29}{49}$

Y reemplazando ahora t en (1), (2) y (3) obtenemos el punto S

$$\begin{cases} x = 3 + 2\dfrac{29}{49} = \dfrac{205}{49} \\ y = 2 + 6\dfrac{29}{49} = \dfrac{272}{49} \\ z = 4 + 3\dfrac{29}{49} = \dfrac{283}{49} \end{cases} \qquad \textit{Luego } S \cap \pi = \left(\frac{205}{49}, \frac{272}{49}, \frac{283}{49}\right)$$

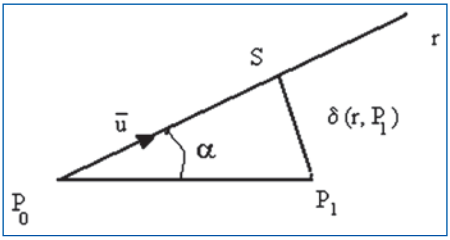
El modulo del vector con origen en el punto intersección de (al que llamamos S) y extremo en el punto P_1 nos dará la distancia buscada

$$\delta(rP_1) = \left|\overline{SP_1}\right| = \sqrt{\left(4 - \frac{205}{49}\right)^2 + \left(5 - \frac{272}{49}\right)^2 \left(7 - \frac{283}{49}\right)^2} \cong 1{,}355..$$

ANÁLISIS

Esta propuesta se ciñe a la definición y construcción teórica geométrica del concepto de distancia de un punto a una recta en el espacio. Es un camino conceptualmente rico porque además ya en el terreno de la geometría analítica exige la interpretación geométrica de los coeficientes de la ecuación de un plano y la comprensión del significado de ecuación de un lugar geométrico, en este caso un plano, en cuanto a que la pertenencia de un punto significa la satisfacción de su ecuación.

CASO 2



Consideramos un triángulo rectángulo formado por P_1, un punto cualquiera P_0 de la recta y el pie S de recta perpendicular por $P_{1.}$

La distancia pedida es la longitud del cateto $\overline{P_1S}$

Para obtenerlo podemos, primero, calcular con los datos dados, el módulo de $\overline{P_0P_1}$ *y el módulo del vector* $\mathrm{Pr}\,oy_{\bar{u}}\,\overline{P_0P_1}$ *y aplicar luego el Teorema de Pitágoras para la obtención de un cateto conocida la hipotenusa y el otro cateto.*

$$\overline{P_0P_1} = (4,-3,5,-2,7,-4) = (1,3,3) \Rightarrow \left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\mathrm{Pr}\,oy_{\bar{u}}\,\overline{P_0P_1}\right| = \frac{1}{\left|\bar{u}\right|}.\left|\overline{P_0P_1}x\bar{u}\right| = \frac{1}{\sqrt{4+36+9}}\left|(2,6,3)x(1,3,3)\right| =$$

$$\left|\mathrm{Pr}\,oy_{\bar{u}}\,\overline{P_0P_1}\right| = \frac{1}{|7|}29 = \frac{29}{7}$$

Planteando el triangulo rectángulo tendremos: $\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 = \left|\overline{SP_1}\right|^2 + \left|\Pr oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}\right|^2$

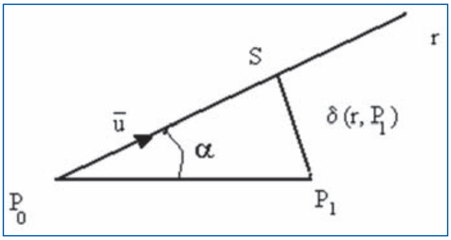
$$\left|\overline{S\ P_1}\right| = \delta(rP_1) = \sqrt{\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 - \left|\Pr oy_{\bar{u}}\overline{P_0P_1}\right|^2}$$

$$\delta(rP_1) = \sqrt{19 - \frac{29}{7}} \cong 1.355...$$

ANÁLISIS

La propuesta segunda, exige un buen manejo de la operatoria del álgebra vectorial y una buena comprensión del concepto de proyección de un vector sobre otro y muestra una concepción totalmente vectorial de la Geometría Analítica.

CASO 3



Teniendo en cuenta la figura observamos que

$$\cos\alpha = \frac{\overline{P_0P_1}x\bar{u}}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\bar{u}\right|}$$

$\overline{P_0P_1} = (1,3,3)$ $\rightarrow$

$$\left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2+3^2+3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\bar{u}\right| = \sqrt{2^2+6^2+3^3} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1}x\bar{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\bar{u}\right|} = \frac{(1,3,3)x(2,6,3)}{\sqrt{19}\quad 7} = \frac{2+18+9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{\sqrt{19}} = 0.9504$$

$$\left|\overline{P_0S}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\cos\alpha = \sqrt{19}\,\frac{29}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{7}$$

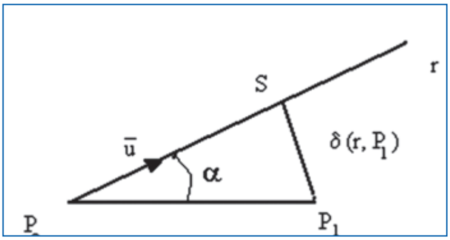
Aplicando Pitágoras $\left|\overline{P_1S}\right| = \sqrt{\left|\overline{P_0P_1}\right|^2 - \left|\overline{P_0S}\right|^2} = \sqrt{19-\left(\frac{29}{7}\right)^2} \cong 1{,}355$

ANÁLISIS

Esta propuesta tercera, es análoga a la segunda pero muestra un menor grado de conocimiento de las definiciones y propiedades vectoriales: los alumnos prescinden del concepto de vector proyección. Hacen todo el desarrollo con conceptos trigonométricos que los llevan implícitamente , a la deducción del módulo de la proyección de un vector sobre otro, concepto que se supone ya poseían

CASO 4

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1} x \overline{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|}$$



$$\overline{P_0P_1} = (1,3,3) \qquad \rightarrow$$

$$\left|\overline{P_0P_1}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{19}$$

$$\left|\overline{u}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^3} = \sqrt{49} = 7$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overline{P_0P_1} x \overline{u}\right|}{\left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right|} = \frac{(1,3,3)x(2,6,3)}{\sqrt{19} \quad 7} =$$

$$\frac{2+18+9}{7\sqrt{19}} = \frac{29}{\sqrt{19}} = 0.9504$$

Partiendo del coseno del ángulo α obtengo el seno y determino el valor del segmento $\left|\overline{P_1S}\right| = \delta(rP_1)$

$$sen\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{29}{7\sqrt{19}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{841}{931}} = \sqrt{\frac{90}{931}}$$

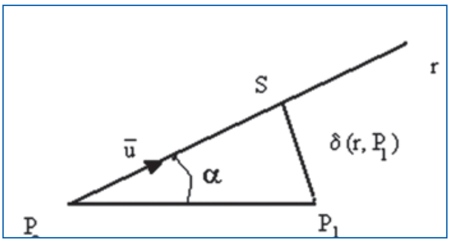
$$\left|\overline{P_0S}\right| = \delta(rP_1) = \left|\overline{P_0S}\right| sen\alpha = \sqrt{19}\sqrt{\frac{90}{931}} = \sqrt{\frac{1710}{931}} \cong 1{,}355..(*)$$

ANÁLISIS

En esta propuesta los alumnos utilizan métodos trigonométricos que podrían haber inducido una aplicación natural del módulo del producto vectorial ya conocido.

CASO 5

Este caso fue trabajado con los mismos alumnos de la propuesta 4 pero a requerimiento del docente por medio de una pregunta guía. (Intervención del profesor)



El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema.

Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó la fórmula del módulo del producto vectorial

$$\left|\overline{P_0P_1} \wedge \overline{u}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\overline{u}\right| sen\alpha$$

El docente plantea al grupo que trabajó la propuesta 4 el siguiente problema. Con los datos vectoriales del problema inicial ¿Es posible calcular el seno de alfa directamente sin conocer el coseno?

Un alumno recordó a la fórmula del módulo del producto vectorial

$\left|\overline{P_0P_1} \wedge \bar{u}\right| = \left|\overline{P_0P_1}\right|\left|\bar{u}\right| sen\alpha$, y de allí reemplazan en (*): $\left|\overline{P_0S}\right| = \delta(rP_1) = \left|\overline{P_0S}\right| sen\alpha = \dfrac{\left|\overline{P_0P_1} \wedge \bar{u}\right|}{\left|\bar{u}\right|}$

de donde se obtiene la fórmula que pide el programa de la asignatura

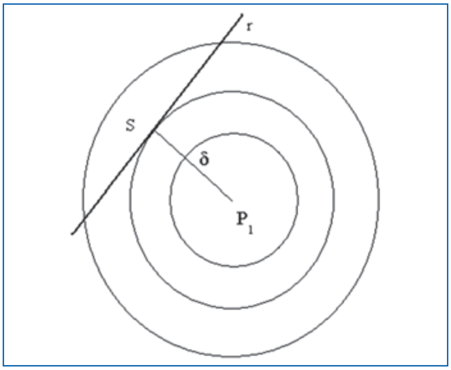
$$\boxed{\delta(rP_1) = \frac{\left|P_0P_1 x\bar{u}\right|}{\left|\bar{u}\right|}}$$

$$\overline{P_0P_1} \wedge \bar{u} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -9i + 3j + 0k = (-9,3,0)$$

$$\left|\bar{u}\right| = \sqrt{4+35+9} = \sqrt{49} = 7 \quad \left|\overline{P_0P_1} \wedge \bar{u}\right| = \sqrt{(-9)^2 + 3^2} = \sqrt{90}$$

$$\delta(rP_1) = \frac{\left|P_0P \wedge \bar{u}\right|}{\left|\bar{u}\right|} = \frac{\sqrt{90}}{7} \cong 1{,}355$$

CASO 6



Imaginamos una esfera con centro en el punto dado y tratamos de buscar condiciones para que la recta dada la toque tangencialmente y en consecuencia el radio sea la distancia del centro a la recta buscada.

Sea $(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + = d^2$ la ecuación de esa esfera.

Para buscar la intersección con la recta dada plantemos el sistema

$$\begin{cases} x = 3 + 2t & (1) \\ y = 2 + 6t & (2) \\ z = 4 + 3t & (3) \\ (x-4)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 + = d^2 & (4) \end{cases} \qquad P = (4,5,7)$$

Lo resolvemos por sustitución reemplazando (1), (2), (3), en (4) y obtenemos una ecuación de segundo grado en t

$$(3+2t-4)^2 + (2+6t-5)^2 + (4+3t-7)^2 + = d^2$$

$$(-1+2t)^2 + (-3+6t)^2 + (-3+3t)^2 + = d^2$$

$$49t^2 - 58t + 19 = d^2$$

Para que tenga solución única (pueden ser 0 o 1 o 2 soluciones), o sea que la recta sea tangente a la esfera, el discriminante de la ecuación de segundo grado debe ser igual a cero.

$$\Delta = b^2 + ac = 0 \Rightarrow 3364 - 4{,}49(19 - d^2) = 0 \Rightarrow 3364 - 3724 + 196d^2 = 0$$

$$-360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow -360 + 196d^2 = 0 \Rightarrow 196d^2 = 360 \Rightarrow d^2 = \frac{360}{196}$$

Tomando el valor positivo obtenemos $d = \sqrt{\frac{90}{49}} = \frac{\sqrt{90}}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{7}$

ANÁLISIS

Esta solución sorprendente implica un pensamiento algebraico geométrico no habitual en alumnos con la formación previa dada.

En el grupo que la presentó uno de los integrantes ha sido un alumno que en otras oportunidades descolló con propuestas totalmente creativas

CONCLUSIONES

La confrontación entre los análisis a priori y a posteriori ha superado las expectativas en cuanto a la variedad y riqueza conceptual de las devoluciones de los alumnos.

En el marco teórico propuesto nos encontramos con generalizadas situaciones adidácticas de acción, incluso de una acción que podríamos categorizar hasta de “acción física” de los alumnos, al tratar de “materializar la recta” en la línea que une los goznes de una puerta del salón de clase, fijar un punto y trazar con movimientos de un brazo la orientación de un plano perpendicular a la recta que pase por el punto…o acciones similares con los elementos de los pupitres ya descriptas. Las acciones adidácticas de formulación se multiplicaron en las propuestas que entre sí han hecho los integrantes de cada grupo espontáneo de trabajo.

En cuanto a las situaciones de validación, además de las creadas al argumentar la validez del procedimiento en el propio grupo, se expuso y defendió cada propuesta frente a toda la clase y allí los mismos alumnos realizaron algunas de las reflexiones comparativas que hemos recuadrado en el análisis de cada propuesta.

Respecto al marco teórico referencial de la enseñanza para la comprensión 1) El problema planteado promovió la explicación, resolución, construcción de argumentos y armado de un producto, 2) lo que los estudiantes hicieron no sólo muestra su comprensión actual, sino que llegaron a discutir sobre lo que se suponía comprendido por ejemplo la equivalencia de algunos procedimientos y las supuestas ventajas de unos sobre otros.

Lo que mas vale ser destacado como positivo de esta experiencia es precisamente el grado de implicación, interés y motivación de los estudiantes que legitima el espacio dedicado a trabajos de esta tipo y le otorga lo que Godino llama "idoneidad emocional", además de la "idoneidad cognitiva" que surge de la riqueza de las situaciones adidácticas planteadas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007).

La metodología de trabajo que transforma el aula en un taller de conocimiento promueve, la perseverancia, responsabilidad y la autoestima que surge de la puesta en juego de su potencialidad en la resolución de problemas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

En cuanto a la interacción docente alumno: Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión. La interacción entre alumnos se favorece por el diálogo y comunicación entre los estudiantes que disparan las respuestas a veces no esperadas. Se favorece la inclusión en grupos y el trabajo colaborativo.

Respecto a autonomía se han contemplado momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio. (Exploración, formulación y validación de la propuesta realizada). Los alumnos han realizado a nivel de aula el trabajo científico del matemático, para generar de este modo, un saber que sea utilizable en otras situaciones y que es demandado en el desarrollo curricular.

REFERENCIAS

Alsina, C., Fortuni, J. y Pérez, R. (. (1997). ¿Por qué Geometría? Madrid: Sínteis.

Alsina, C., Burges, C. y Fortuny, J. (1988). Invitación a la didáctica de la geometría. Madrid: Síntesis.

Artigue, M., Douday, R., Moreno, I. y Gómez, P. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericano.

Ausubel, D. y Robinson, F. G. (1969). School Learning. An introduction in Educational Psychology. Londres: Holt, Rinehart & Winston.

Brousseau, G. (1996). La Didáctique des Mathématiques en la formació del professorat. Butlletí de la Societat Catalana de Matemátiques, 11(1), 1-12.

Brousseau, G. (1998). Theorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: ICE Universidad Autónoma y Ed. Horsori.

de Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra – Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Madrid, España: Ediciones Pirámide.

Douady, R. (1995). La ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento. En M. D. Artigue, Ingeniería Didáctica (págs. 34-56, 61-97). Bogotá: Grupo editorial Iberoamericano.

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, vol 12. 133-150. Educational Studies in Mathematics , 12, 133-150.

Godino, J. D. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. Paradigma, XXVII (2), 221-252.

Guzmán, M. D. y de Guzmán, M. (1996). El Rincón de la Pizarra – Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Madrid: Ediciones Pirámide.

Miyara, A., Piraino, M. y Anido, M. (2010). Del texto a la ecuación: reflexiones y propuestas para una enseñanza de la matemática basada en modelos. Rosario, Argentina: UNR Editora.

Perkins, D. (2004). Teaching for Meaning - Knowledge Alive - To create, communicate, organize, and act on knowledge -- These four skills encompass a neglected curriculum. Educational Leadership. Journal of the Department of Supervision and Curriculum Department of Supervision and Curriculum Development, N.E.A., 62 (1), 14.