UNA EXPERIENCIA HEURÍSTICA EN 1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS

Enrique Hoyos Jiménez
IES Alcaría. La Puebla del Río, Sevilla (jubilado)

Resumen: *Esta experiencia de geometría analítica pretende estimular la capacidad de inventiva en el alumnado de 1º de Bachillerato en Ciencias. En este proyecto los alumnos utilizarán el método de Polya para resolver problemas.*

Palabras clave: *Polya, poligonal, polígono convexo, heurística.*

Summary: *This experience of analytic geometry is designed to develop the inventive capacity in students at 1st Bachelor of Science. In this project the students must use Polya's method to resolving problems.*

Keywords: *Polya, polygonal, convex polygon, heuristics.*

INTRODUCCIÓN

El modelo educativo impuesto legalmente hace difícil desarrollar a altos niveles las capacidades de razonamiento deductivo y formal en la Enseñanza Secundaria. Pese a ello es necesario abordar esta tarea, y una forma de hacerlo es comenzar por desarrollar la capacidad inventiva de los alumnos.

Al comienzo del Bachiller el alumno común aún utiliza más el pensamiento inductivo que el deductivo. Con esta actividad se trata de que los alumnos guíen su pensamiento según el esquema de G. Polya [Polya, G., 1981] para resolver un problema:

1. *Comprender el problema.*
2. *Concebir un plan:*
   - 2.a) *Determinar las relaciones entre datos e incógnitas.*
   - 2.b) *De no encontrarse de inmediato estas relaciones, descomponer el problema en varios, o abordar un problema semejante pero más sencillo.*
   - 2.c) *Elaborar tras ésto un plan de trabajo para la resolución.*
3. *Ejecutar el plan.*
4. *Examinar la solución y verificar si concuerda con el enunciado que formulamos para el problema.*

La actividad se plantea tras haber estudiado la geometría analítica de la recta en el plano, en particular el concepto y cálculo de la pendiente de una recta.

La actividad que se plantea la he efectuado con mis alumnos de 1º de Bachiller de Ciencias, en la clase de Matemáticas, en cursos pasados. Al final de este artículo planteo algunas posibles extensiones para alumnos de este nivel que cursen también Informática.

OBJETIVOS DE LA ACTIVIDAD

La actividad tiene como objetivo genérico desarrollar el pensamiento tanto inductivo como deductivo del alumnado. Para ello hacerles conocer y en lo posible *fijar en su mente* el esquema de Polya. La motivación del alumnado respecto a la matemática es un objetivo transversal, que se consigue en la medida de que el alumno descubre su propia capacidad de pensamiento, *ampliada* por este nuevo esquema de resolver problemas.

ENUNCIADO DE LA ACTIVIDAD

Se fija un recinto rectangular dentro del cual se esparce un número aleatorio de puntos, cada uno con coordenadas elegidas al azar. Se pide:

1. Dibujar un polígono ***convexo*** *que tenga como vértices el mayor número posible de estos puntos.*

2. Enunciar una regla que permita generalizar el resultado, cuando en lugar de tener dibujados los puntos tan sólo se conocen sus coordenadas.

METODOLOGÍA DE LA ACTIVIDAD

La actividad se va a desarrollar siguiendo el esquema de Polya.

1) *Para que los alumnos comprendan bien el problema conviene sugerirles que comiencen por resolverlo con pocos puntos (6 ó 7). Antes de pasar a la fase 2 conviene que resuelvan varias figuras en orden de dificultad creciente.*

2) *Cuando tengan resuelto el problema para 11 ó 12 puntos conviene dar un salto a figuras con 30 ó más puntos, para que perciban la dificultad en un caso general.*

3) *Con o sin ayuda conviene que descompongan el problema en al menos dos fases de resolución. Cada una la formularemos como un Problema (1º y 2º).*

4) *En la ejecución de cada fase se avanzará de forma progresiva (de menos a más puntos como en 1).*

5) *Cuando se llegue a formular una regla general para cada subproblema se* ***verificará*** *la misma en casos de complicación superior a los antes estudiados.* ***Si***

la regla falla se realizará una revisión del trabajo anterior *(retroalimentación o interactividad con el problema)*

6) *No se va a pedir en ningún momento a los alumnos que realicen una demostración formal de los resultados que obtengan, pues ésto supera en mucho el nivel en que se encuentran.*

Por experiencia podemos descartar que el alumno común sea capaz de ***concebir un plan*** cuando se trata de un problema de cierta envergadura, por lo que en esta fase especialmente se les proporcionará ayuda en forma de preguntas y sugerencias adecuadas a cada momento, además de invitarles a la discusión en pequeños grupos y en el grupo general.

También en las otras fases se recurrirá a estas ayudas. En cualquier caso cada alumno comenzará por trabajar individualmente.

PROBLEMA 1º.

Se fija un recinto rectangular y dentro de él se «esparcen» puntos aleatoriamente. El número de puntos esparcidos es también aleatorio. Se trata de:

1) *Dibujar un polígono que tenga a todos estos puntos como vértices (sin que dos lados se intersequen, salvo en los vértices).*

2) *Enunciar una regla general para resolver este problema.*

Según la capacidad del alumnado se les da normas de construcción de unas «plantillas» o se les facilitan las mismas ya confeccionadas. (Figura 1)

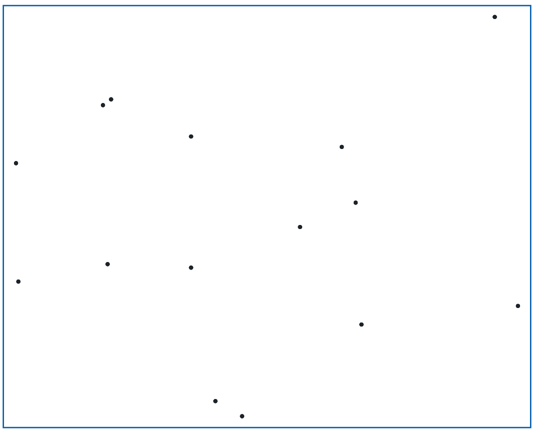

Figura 1.

El número de puntos de la plantilla que se proponga inicialmente no debe ser ni muy bajo (lo que hace irrelevante el problema) ni muy alto (lo que lo hace muy intrincado y repelerá a la mayoría). Quince me ha parecido un número adecuado para presentar el problema en todos los cursos.

Para que alumnos más «avispados» no obvien la dificultad del problema, se puede presentar la figura resultante de unir los puntos en el orden en que se van «esparciendo» sobre el rectángulo. (Figura 2)

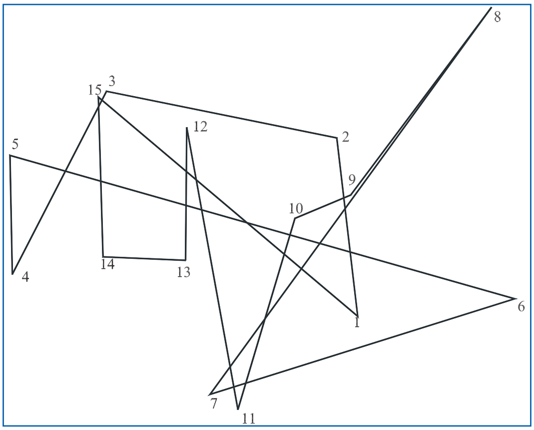

Figura 2.

Respuestas dadas por los alumnos

He tabulado los resultados obtenidos por los alumnos en siete años de experimentación. En total han sido 309 alumnos de los que me encargué (nueve grupos).

Las primeras reacciones de los alumnos pueden dividirse en dos clases:

1) Quienes se centran en la Figura 2 e intentan «deshacer la madeja». Aproximadamente un 65%.

2) Quienes comienzan a trabajar directamente sobre la Figura 1. (35% del total), que a su vez se divide en dos subclases:

- **2.1)** Alumnos que tratan directamente con los quince puntos. (20% del total)
- **2.2)** Alumnos que por iniciativa propia comienzan con menos puntos (por lo común cinco o seis puntos)

En la primera hora de clase tan sólo un alumno (en los siete años) resolvió el problema sobre la Figura 2.

De los que trabajaron directamente en la Figura 1 sobre los quince puntos el 3% consiguió un resultado válido.

Quienes comenzaron por el problema reducido (15% del total) todos lograron resultados válidos desde seis puntos hasta diez, en la primera hora, si bien el porcentaje de alumnos que consiguió el decágono se redujo al 9% del total. (Se dieron por válidas tan sólo plantillas con puntos «rodeados» por otros)

Pedí a los alumnos que continuasen con el problema en casa y trajesen nuevos resultados el día siguiente.

En la 2ª hora el 9% de alumnos (en mayoría los que habían resuelto el decágono) traían una «regla general» coincidente en esencia:

1) *Se comienza por el punto de menor ordenada.*

2) *Se traza la vertical que pasa por este punto. Esta recta divide el recinto en dos partes.*

3) *Procediendo en «sentido antihorario»*[1] *se van uniendo los puntos de la parte derecha de menor a mayor ordenada («hacia arriba»). Figura 3.*

4) *Una vez alcanzado el vértice de mayor ordenada se siguen uniendo los puntos de la parte izquierda, pero ahora de mayor a menor ordenada, hasta volver al punto de partida. Figura 4.*

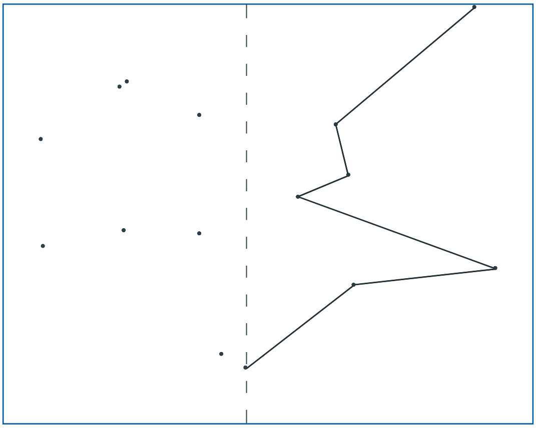

Figura 3.

Naturalmente se presentan las variantes de comenzar por el punto más alto ó por el más a la derecha ó el más a la izquierda, además de proceder en «sentido horario» en cualquiera de estas posibilidades.

Tras una breve discusión se llega al acuerdo de que las variantes son «equivalentes»[2], pues van a conducir al mismo resultado, y se decide aplicar la regla tal como está enunciada.

La llamaré en lo sucesivo ***Regla P1.***

Expuesto este método en la pizarra, por alguno de los alumnos que lo han ideado, invito a los demás a que lo verifiquen con plantillas de quince a veinte puntos.

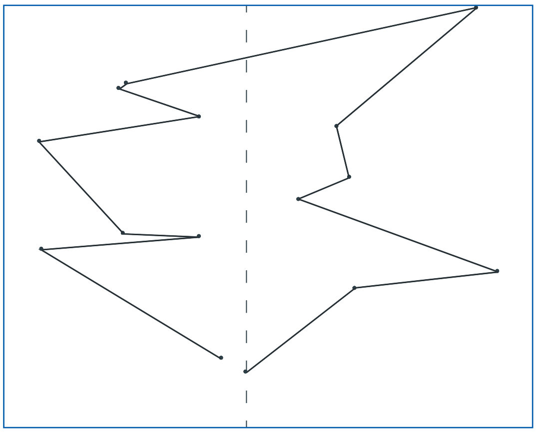

Figura 4.

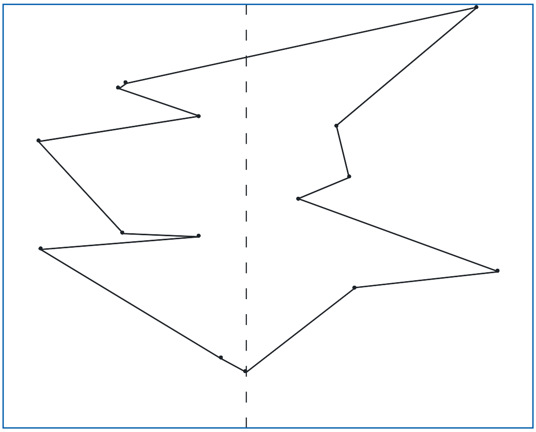
Figura 5.

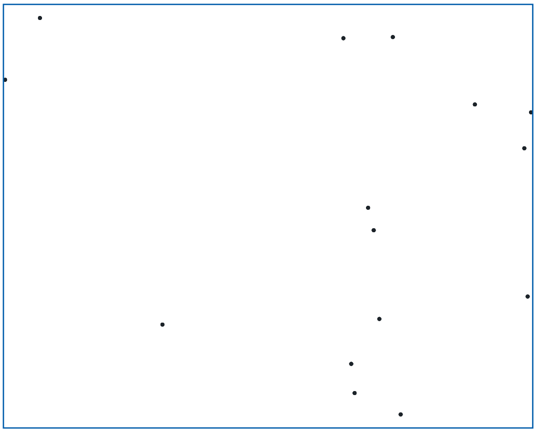
Figura 6a.

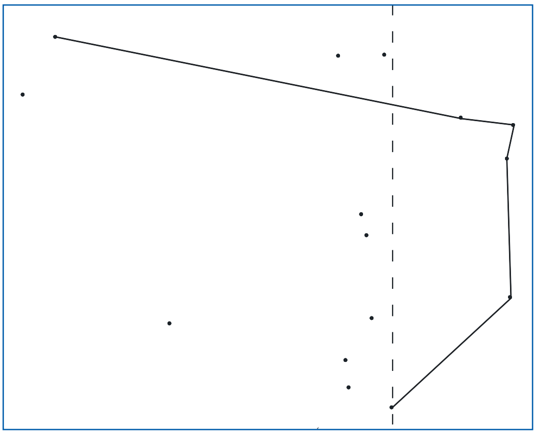
Figura 6b.

Tan sólo cuatro alumnos de los 309 formularon objeciones válidas en ese momento. (En dos años distintos)

En cualquier caso propuse la aplicación «literal» de la *Regla P1* a la plantilla de la Figura 6a.

Casi de inmediato la mayoría de alumnos caen en la cuenta del error en la *Regla P1*.

Conforme muestran las Figuras 6b y 6c, siempre que el punto más alto esté a la izquierda de la vertical trazada por el punto más bajo, cabe la posibilidad, al trazar los segmentos «hacia abajo», de que uno de ellos corte a otro ya trazado, con lo que no se obtiene un polígono.

Animo a los alumnos a perfeccionar la *Regla P1* para que sea aplicable también en estos casos. En casi todos los grupos se desarrolló una actividad febril en este momento.

Antes de finalizar la hora un 24% de alumnos había encontrado la solución:

Regla P2.

1) Trazar la recta que une el vértice de menor ordenada con el de mayor ordenada. Esta recta divide el recinto en dos partes.

2) A partir del punto de menor ordenada se van uniendo los puntos situados por encima de la recta, de menor a mayor ordenada, hasta alcanzar el punto de ordenada máxima.

3) A partir de este último se continúa uniendo puntos en sentido descendente, hasta cerrar el polígono.

Las Figuras 7a y 7b ilustran el proceso.

Invito entonces a los alumnos a la verificación con veinte puntos o más en el recinto.

Les recuerdo el enunciado original de la actividad y, tras algo de reflexión colectiva, aún con bastante intervención de mi parte, formulamos el siguiente problema:

PROBLEMA 2º.

Se fija un recinto rectangular dentro del cual se esparce un número aleatorio de puntos, cada uno con coordenadas elegidas al azar. Se pide:

1) *Dibujar un polígono* ***convexo*** *que circunscriba al polígono formado por estos puntos.*

2) *Enunciar una regla que permita generalizar el resultado, cuando en lugar de tener dibujados los puntos tan sólo se conocen sus coordenadas.*

Sobra a estas alturas presentar alguna «plantilla» al alumnado. No obstante tuve que aclarar para una parte de alumnos los conceptos de polígono convexo y polígono circunscrito de otro.

Les hice reflexionar sobre el resultado obtenido en el Problema 1º, en particular el hecho de tener que comparar ordenadas para determinar qué vértice sigue a otro, y habría que buscar algo semejante para resolver este nuevo problema. El problema quedaba, en casi todos los cursos, pospuesto para comenzar en casa y traer alguna solución al día siguiente.

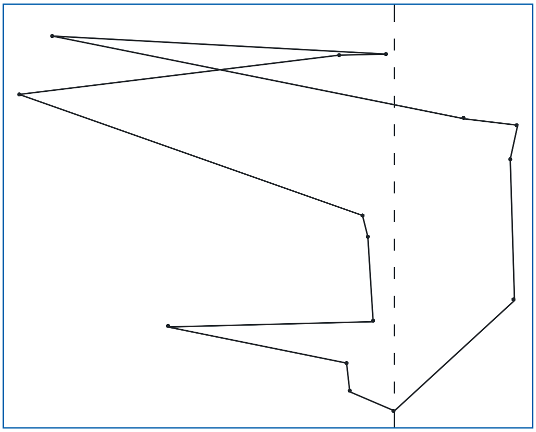

Figura 6c.

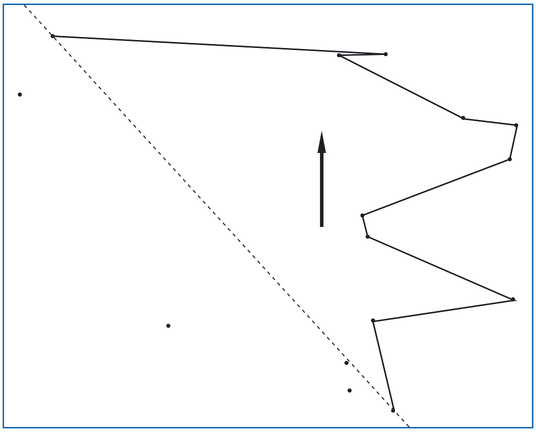

Figura 7a.

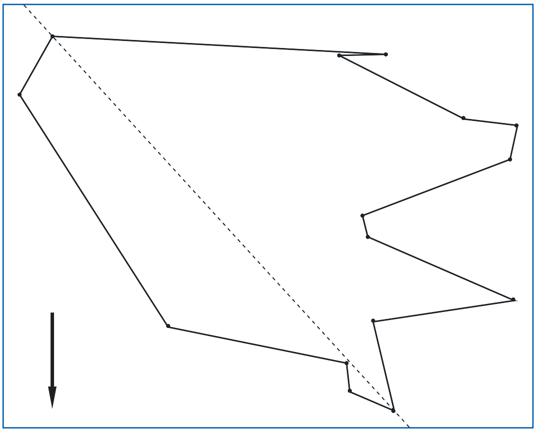

Figura 7b.

Al principio de la 3ª hora un 72% de alumnos me traía soluciones dibujadas válidas, pero tan sólo un 21% traía una propuesta de regla. Tras discusión para formalizarla se fija así:

Regla C1

1) *Comenzar trazando el polígono solución del Problema 1.*

2) *Siguiendo el sentido «antihorario», partir del vértice con menor ordenada y unir éste con el siguiente vértice.*

3) *Calcular la pendiente de este lado del polígono y compararla con la pendiente del siguiente lado.*

4) *Si la pendiente del lado siguiente es mayor o igual que la pendiente del primer lado, tomar este lado como lado del polígono convexo.*

5) *En caso contrario se desecha ese lado y se une el último vértice tomado para el polígono convexo con el siguiente vértice del polígono inicial, repitiendo el paso 3.*

6) *Se continúa del modo anterior hasta volver al punto inicial.*

Tan sólo un alumno (en los siete años) propuso una regla más elaborada, que veremos más adelante.

La *Regla C1* se comprueba es válida en algunos casos particulares sencillos (ejemplos que los alumnos se auto-plantearon), como se puede ver en la Figura 8a.

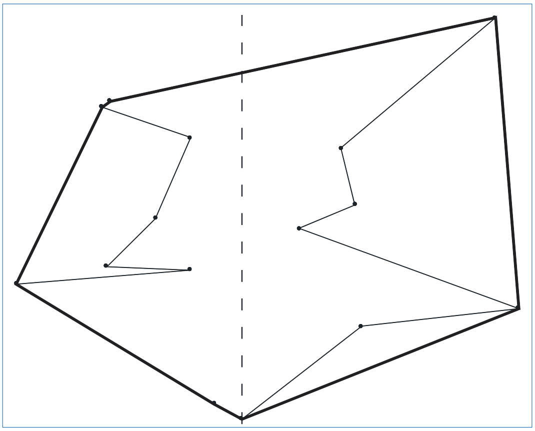

Figura 8a.

No obstante se descubren los fallos a poco que variemos la forma del polígono como se observa en las Figuras 8b y 8c.

Se impone sugerirles un cambio de perspectiva: «mirar la figura de izquierda a derecha en lugar de abajo hacia arriba».

El 26% de alumnos formularon entonces una regla que, salvo un refinamiento que les mostré posteriormente, se convirtió en la regla final. Muestro esta última por no alargar el artículo:

Regla C2

1) *Formar el polígono uniendo los puntos según la Regla P2.*

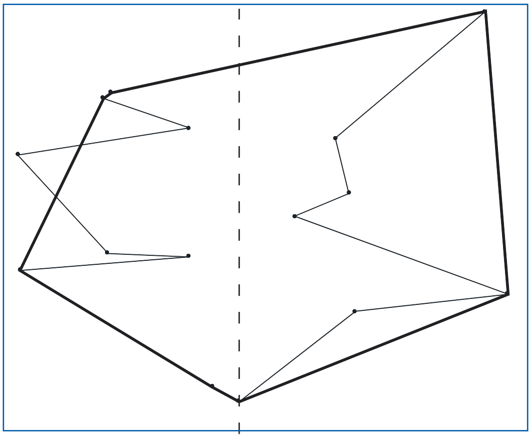

Figura 8b.

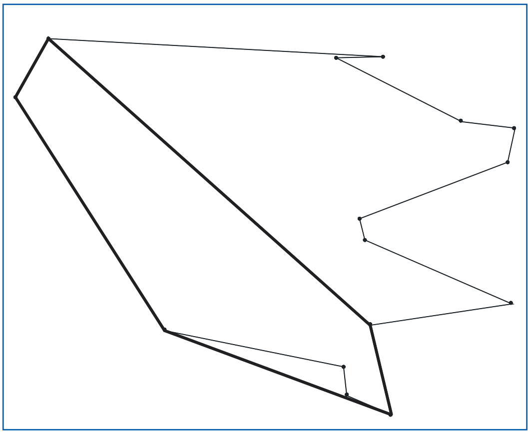

Figura 8c.

2) *Trazar la diagonal que une el vértice de menor abscisa con el vértice de mayor abscisa, y prolongarla hasta los lados del rectángulo. La llamaremos «diametral» por distinguirla de otras diagonales del polígono.*

Esta diametral divide el recinto en dos partes que llamaremos S, I, siendo S la parte formada por los puntos del recinto que tienen ordenada mayor que los de igual abscisa de la diametral. I es el complemento de S dentro del recinto.

Los extremos de la diametral se consideran que están tanto en S como en I.

3) *A partir del punto de mayor abscisa se trazan todos los segmentos que lo unen con los vértices en S. De éstos se calcula la pendiente y se elige el de menor pendiente (teniendo en cuenta el signo). Este segmento es un lado del polígono convexo.*

4) *Partiendo del 2º extremo del nuevo lado se repite el paso 3, hasta alcanzar el punto de menor abscisa.*

5) *A partir del punto de menor abscisa se repite el procedimiento anterior, eligiendo lados consecutivos según el criterio del paso 3, pero uniendo puntos de I.*

6) *Continuando se cerrará el polígono convexo al alcanzar el vértice de mayor abscisa.*

Las Figuras 9a a 9e ilustran el procedimiento.

EVALUACIÓN

Pasados dos o tres meses les pasaba a los alumnos un test sorpresa sobre este estudio. El test consistía en dibujar sobre una plantilla de quince puntos el polígono completo y el convexo envolvente del 1º.

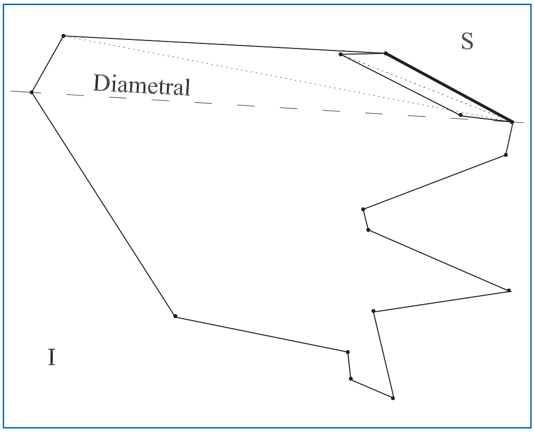

Figura 9a.

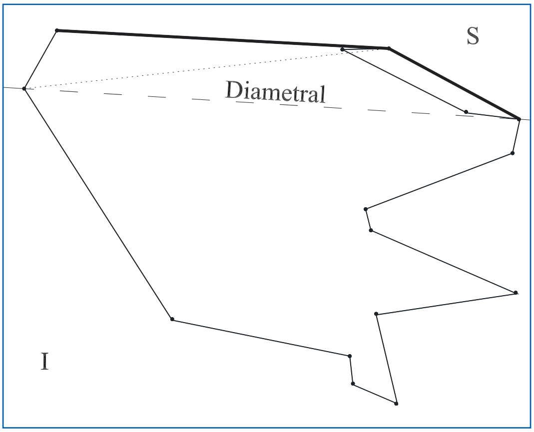

Figura 9b.

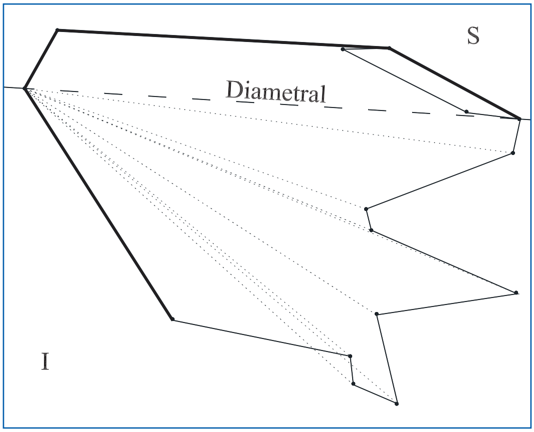

Figura 9c.

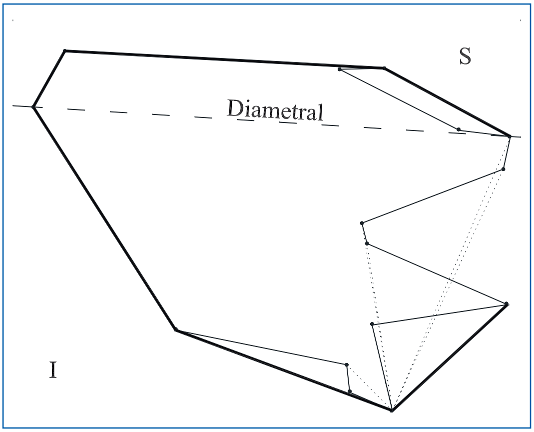

Figura 9d.

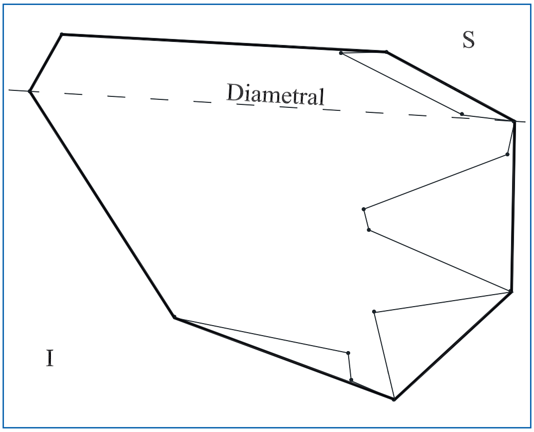

Figura 9e.

La plantilla era enrevesada, para impedirles lograr resultados válidos por mera intuición fortuita.

Los resultados del test están en la Tabla 1. La Tabla 2 resume los resultados durante el desarrollo de la actividad (del total de 309 alumnos 25 faltaron el respectivo día del test) .

Nº alumnos	% redondeado	Clasificación por etapas
66	23%	Construyen el polígono por la Regla P1 (con errores)
193	68%	Construyen el polígono por la Regla P2
25	9%	No utilizan bien las *Reglas P1 o P2*. Resultados erróneos
284	100%	Total 1ª Parte
14	5%	Se quedan estancados en la 1ª parte
73	26%	Construyen el polígono convexo por la Regla C1 (con errores)
182	64%	Construyen el polígono convexo por la Regla C2
15	5%	No utilizan bien las *Reglas C1 o C2*. Resultados erróneos
284	100%	Total 2ª Parte

Tabla 1. Test de construcción de un polígono y su envolvente convexo (Total de alumnos 284)

Nº alumnos	% redondeado	Clasificación por etapas
201	65%	Quienes se centran en la Figura 2 e intentan «deshacer la madeja»
62	20%	Tratan directamente con los quince puntos
46	15%	Por iniciativa propia comienzan con menos puntos
1	0,32%	Resolvió el problema sobre la Figura 2.
9	3%	Trabajaron directamente en la Figura 1 sobre los quince puntos, consiguiendo un resultado válido
28	9%	Consiguieron el decágono
28	9%	Trajeron una «regla general» (P1) al principio de la 2ª hora
74	24%	Antes de finalizar la hora habían encontrado la Regla P2
222	72%	Al principio de la 3ª hora traían soluciones dibujadas válidas
65	21%	Al principio de la 3ª hora traían Regla C1
81	26%	Formularon regla C2

Tabla 2 Resultados de la experiencia sobre polígonos convexos
(Total de alumnos 309)

A la vista de estas tablas se observa:

1) El porcentaje de alumnos que había asimilado la *Regla P2* pasó de ser un 24% quienes la «descubrieron» a un 68% .

2) Respecto a la *Regla C2*, de un 26% que la formuló, pasó al 64% quienes la asimilaron.

3) Marginalmente, entre aquellos que no resuelven el problema a la perfección, un 23% había asimilado la *Regla P1* (que da resultados en casos sencillos) y un 26% asimiló la *Regla C1* (válida también en algunos casos).

4) Sólo el 10% de alumnos no obtuvo resultados positivos de este estudio.

CONCLUSIONES

Esta forma de plantear actividades supone cambiar el rol del alumnado dentro del aula de matemáticas: de ser receptores de métodos y fórmulas para después aplicarlos pasan a ser «inventores» de procedimientos matemáticos.

La fijación de conceptos a largo plazo es superior con esta metodología a la que se consigue cuando el alumno tiene un rol pasivo.

El protagonismo adquirido por el alumnado ha hecho que (en los varios cursos con estas experiencias) aumentase la participación en clase, la discusión sobre métodos de resolución de problemas y la asimilación de conceptos.

La adquisición por el alumnado de las pautas de Polya les dota de un instrumento potente para el estudio de las matemáticas y otras ciencias.

EXTENSIONES DE LA ACTIVIDAD

Durante cinco de estos años aproveché la oportunidad de ser profesor de Informática de parte de estos alumnos para continuar con el desarrollo de algoritmos de ordenador para obtener el polígono convexo con mayor número de vértices. También para obtener el mayor número de cuadriláteros sin intersección con vértices aleatorios. Extendimos el estudio a la construcción de un autómata (algoritmo) capaz de identificar una forma poligonal convexa y hacer recorridos por su interior evitando choques.

BIBLIOGRAFÍA

Polya, G. (1981) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Editorial Trillas..

Mialaret, G. (1977) *Las Matemáticas: cómo se enseñan cómo se aprenden*. Madrid: Pablo del Río, Editor..

Morris Kline (1978) *El fracaso de la Matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI editores..

Piaget, J., Choquet G., Dieudonné J., Thom, R. y otros (1978) *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza Editorial S.A:.

REFERENCIA EN INTERNET

En mi página en Internet:

https://sites.google.com/site/enriquehoyosjimenez/home/archivos

Se puede encontrar el listado de una aplicación para la creación de un autómata capaz de reconocer recintos convexos (Automata_A.pdf).

NOTAS

1. Lo que no es cierto mas que en el decir de los alumnos.
2. No es cierto en todos los casos