Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(3), nº 79, pp. 47-59

LOCALIZA CON AYUDA DE LAS CÓNICAS Y GEOGEBRA

Miguel de la Fuente Martos
I.E.S. El Tablero (Córdoba)

Resumen: *La posibilidad de interacción entre imágenes bitmap (mapas, fotos, etc.) y fórmulas o gráficas en Geogebra, permite aplicar ciertas nociones matemáticas para resolver algunos problemas relacionados con la localización en mapas: Las cónicas nos permiten hallar en un mapa puntos que cumplen determinadas condiciones, ¿dónde estaba el fotógrafo cuando hizo esta fotografía? o ¿dónde estamos perdidos en el campo? son algunos de los problemas que se resuelven con cierta facilidad usando Geogebra y muestran contextos de nuestro entorno dónde las matemáticas son útiles.*

INTRODUCCIÓN

Entre 2005 y 2010 se proyectaron en algunas cadenas de televisión españolas los capítulos de la serie estadounidense **Numb3rs**, que mostraba como las matemáticas podían ayudar a luchar contra la delincuencia. En Estados Unidos tuvo un gran éxito de audiencia durante sus 4 primeras temporadas. Su capítulo piloto consiguió un record de audiencia con unos 25 millones de espectadores.

A partir de la emisión de esta serie la prestigiosa MAA (Mathematical Association of America) está patrocinando el eslogan: “Numb3rs gets the math right” (Numb3rs consigue lo mejor de las Mates)[1] y el Consejo Nacional de Profesores de Mathemáticas (NCTM) creo expresamente el programa educativo “We all use Math every day”[2], es decir “Todos utilizamos las Mates cada día”, que además es también una frase de la introducción de la serie[3]. En este programa matemáticos de todo el país se dedicaban a preparar actividades para que posteriormente pudiesen ser tratadas en los siguientes episodios.

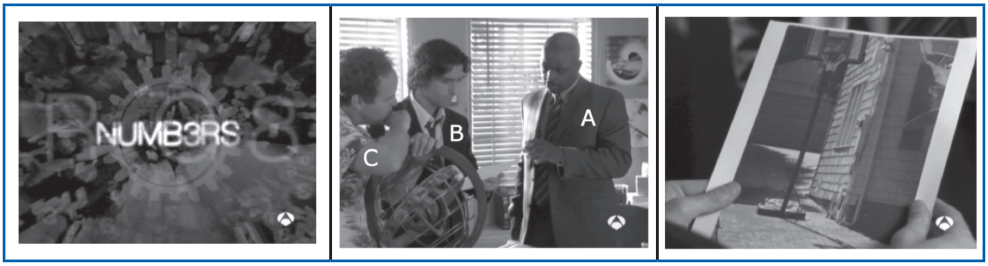
Como puede leerse en alguna de las múltiples páginas Web que surgieron a raíz de la serie, ésta no profundiza en temas matemáticos, sino que los deja “caer”, dando el fundamento científico y utilizando en muchas ocasiones hábiles comparaciones que tratan de que el espectador entienda lo que se hace, buscando siempre el dinamismo de una serie de acción. También es muy común ver al matemático protagonista llenar pizarras... repletas de demostraciones... mientras pasan por la pantalla numerosos gráficos matemáticos, fórmulas, etc., que de manera subliminal tratan de inculcar en el espectador la idea de exactitud y "magia".

Yo he usado en mis clases de Bachillerato fragmentos más o menos largos de algunos capítulos de la serie, observando que una vez pasada la impresión inicial de "la magia de las matemáticas" los alumnos se centraban en la intriga, más que en el uso de las matemáticas (que yo había supuesto entendibles para ellos, y en base a lo cual había seleccionado los fragmentos).

Me propuse entonces usar algún fragmento como motivación y desarrollar alguna actividad paralela "parecida", que estuviese más en consonancia con lo que tratamos en la clase.

A continuación transcribo los diálogos de un par de minutos de un capítulo de la segunda temporada a partir del que surgió la idea de lo que desarrollo posteriormente.

Intervienen tres personajes: A policía y los otros dos matemáticos (B el matemático protagonista):



http://www.maa.org/devlin/devlin_02_05.html

A: Larry, ¿qué tal?, ¿cómo lleváis lo de la foto.

B: El programa ha estado trabajando con la imagen de la videocámara. Esto es lo que tenemos hasta ahora.

A: No es suficiente para una identificación.

B: El proceso continúa.

A: Me alegro. Tienes que analizar otra cosa. Es del mismo caso. Verás, no sabemos dónde está ese sitio y necesitamos averiguarlo. La canasta de baloncesto proyecta una sombra. Creo que leí en alguna parte que puedes localizar el sitio basándote en las sombras.

B+C: Astonomía Esférica

A: ¿Qué es eso?

C: Una metodología de observación del cosmos para averiguar la posición de la Tierra.

B: Los marineros la usan cuando se pierden en el mar-

C: Y los cosmólogos cuando estamos perdidos, sin más.

B: Está basada en las mismas operaciones que se usan en los relojes de sol. Agente Sinclair está usted en presencia de dos miembros de la Sociedad Americana de Relojes de Sol.

A: ¡Ah! Menuda juerga.

C: Claro, que para hacerlo vamos a necesitar más de una foto.

A: ¡Ah!. Casualmente tengo más

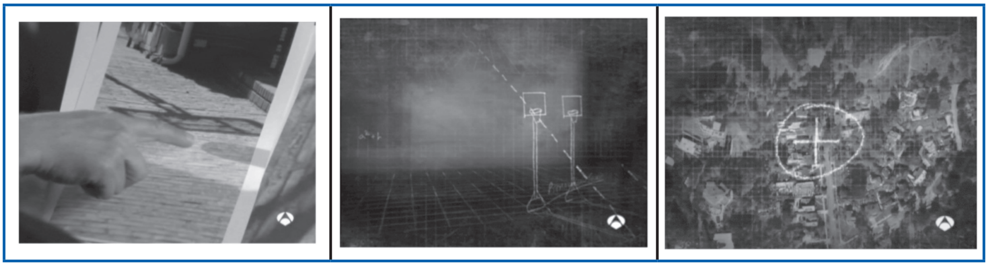
B: ¿La hora que marca es correcta?

A: Creo que sí

B: Tenemos que medir la longitud del poste además de estas sombras.

A: La canasta de baloncesto parece tener la altura estándar.

B: 3 metros



C: Y esos ladrillos son de una acera.

A: ¡Ladrillos!. ¿Eso aporta algo?

B: Son del mismo tamaño, lo que permite medir el movimiento de las sombras. Si medimos la longitud de las sombras sobre los ladrillos e incluimos las horas exactas a las que se tomaron esas dos fotos, la ecuación puede determinar la altitud del sol; y con un análisis más profundo de esas imágenes puedo darte la longitud y latitud con un error de una centésima de grado...

Lo que trataremos aquí, sin usar la trigonometría esférica a que se refieren los personajes anteriores, es resolver dos problemas de localización en un mapa de un punto que cumple unas ciertas relaciones geométricas con otros puntos conocidos. La matemática que usaremos no pasará del nivel de Bachillerato, aunque lo más interesante es la aplicación en contexto de ciertas nociones matemáticas: bastantes cálculos y toda la representación lo dejamos para Geogebra.

¿DÓNDE ESTABA?

Vayamos directamente a las cónicas y a la geometría donde estas juegan un papel fundamental: la geometría proyectiva.

Cuando se hace una fotografía se está proyectando desde un punto (el lugar desde donde está situada la cámara fotográfica) una escena tridimensional. Esta proyección es sobre un plano, el sensor de la cámara; pero podemos imaginar toda la situación vista desde arriba (cenitalmente) y entonces suponer que se ha proyectado una escena desde un punto y sobre una recta.

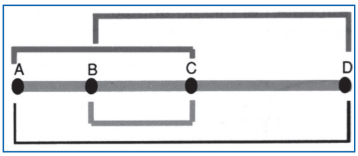
Dada, por ejemplo, una fotografía panorámica de una ciudad, ¿podemos averiguar dónde estaba el fotógrafo en el momento del disparo? La respuesta, afirmativa, nos viene de la mano de la geometría proyectiva y de una aplicación poco usual de las cónicas, que podemos incorporar como otra más en nuestras clases.

Recordando algo de Geometría Proyectiva Básica en el Plano

Aunque algunas ideas ya fueron usadas por los griegos, los orígenes de la geometría proyectiva pueden situarse en el trabajo de los artistas del renacimiento (siglo XV) y quizás en la pregunta que en su obra "Della Pintura" (1435) se hace Leone Battista Alberti (1404-1472): ¿Qué se mantiene en una proyección, si no lo hacen ni los ángulos ni las proporciones simples?. La respuesta vendría de la mano de Desargues (1591-1661) a principios del siglo XVII, quien demostró que en una proyección lo que se mantiene es la razón doble de 4 puntos alineados, teniéndose así el primer invariante proyectivo.

Recordemos que la razón doble de 4 puntos alineados[4] A, B, C y D se define como el cociente de dos razones simples:

$$RazónDoble\ (A,B,C,D)=\mathrm{r(A,B,C,D)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}:\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}\,.\,\overline{BD}}{\overline{AD}\,.\,\overline{BC}}$$



Cuando proyectamos los puntos A, B, C y D desde P (Figura 5) y cortamos el haz de las cuatro rectas que parten de P hacia ellos con otras rectas secantes al haz, se obtienen cuaternas de puntos alineados que tienen la misma razón doble:

$\mathrm{r}(A_1,B_1,C_1,D_1)= \mathrm{r}(A_2,B_2,C_2,D_2)$.

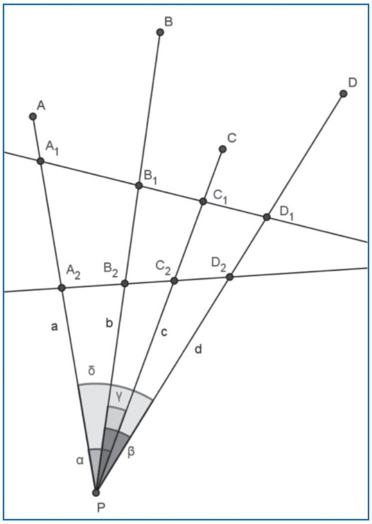


Figura 5. Mantenimiento de la razón doble por proyección desde P.

Usando simplemente las fórmulas trigonométricas de los senos podemos extender este invariante al haz de las 4 semirectas a, b, c y d que parten de P, de modo que:

$$r(A_1,B_1,C_1,D_1)= r(A_2,B_2,C_2,D_2)=$$

$\dfrac{sen(\widehat{APC}).sen(\widehat{BPD})}{sen(\widehat{BPC}).sen(\widehat{APD})} = \dfrac{sen\alpha.sen\beta}{sen\gamma.sen\delta}$ =r(a,b,c,d), por lo que este mismo valor r(a,b,c,d), de la razón doble del haz de 4 semirectas que salen de P hacia A, B, C y D puede servirnos como definición valor de la razón doble de A, B, C y D **vistos desde P**, aunque estos puntos no estén alineados.

Justifiquemos este hecho, que ya quedó probado por Desargues:

En la figura 6 sean $\overline{PA_1} = a; \overline{PB_1} = b; \overline{PC_1} = c$ y $\overline{PD_1} = d$.

Por el teorema de los senos, tenemos que

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{sen\alpha} = \frac{c}{sen\varepsilon}; \quad \frac{\overline{B_1D_1}}{sen\beta} = \frac{d}{sen\theta};$$

$$\frac{\overline{A_1D_1}}{sen\delta} = \frac{d}{sen\varepsilon} \text{ y } \frac{\overline{B_1C_1}}{sen\gamma} = \frac{c}{sen\theta}$$

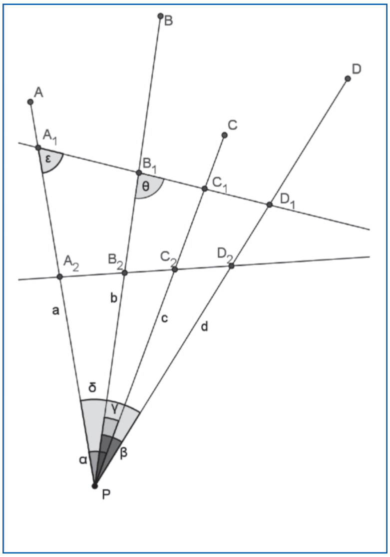


Figura 6

Entonces

$$r(A_1,B_1,C_1,D_1)=\frac{\overline{A_1C_1}.\overline{B_1D_1}}{\overline{A_1D_1}.\overline{B_1C_1}}=\frac{\dfrac{csen\alpha}{sen\varepsilon}.\dfrac{dsen\beta}{sen\theta}}{\dfrac{dsen\delta}{sen\varepsilon}.\dfrac{csen\gamma}{sen\theta}}=\frac{sen\alpha.sen\beta}{sen\delta.sen\gamma}=$$

$$=\frac{sen(\widehat{APC}).sen(\widehat{BPD})}{sen(\widehat{APD})\cdot sen(\widehat{BPC}).}=r(A_2,B_2,C_2,D_2)=r(a,b,c,d)$$

Uno de los resultados más conocidos del francés Michel Chasles (1793-1880) se refiere a la invarianza de la razón doble sobre las cónicas, esto es:

En cualquier cónica la razón doble de los haces de 4 rectas que parten de un punto P de ella hacia otros cuatro puntos fijos A, B, C y D de la misma, es constante e independiente de P.

Y recíprocamente:

El lugar geométrico de los puntos desde los que se ven cuatro puntos bajo la misma razón doble es una cónica.

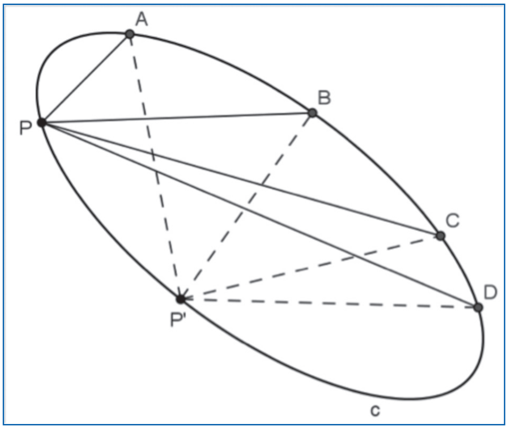
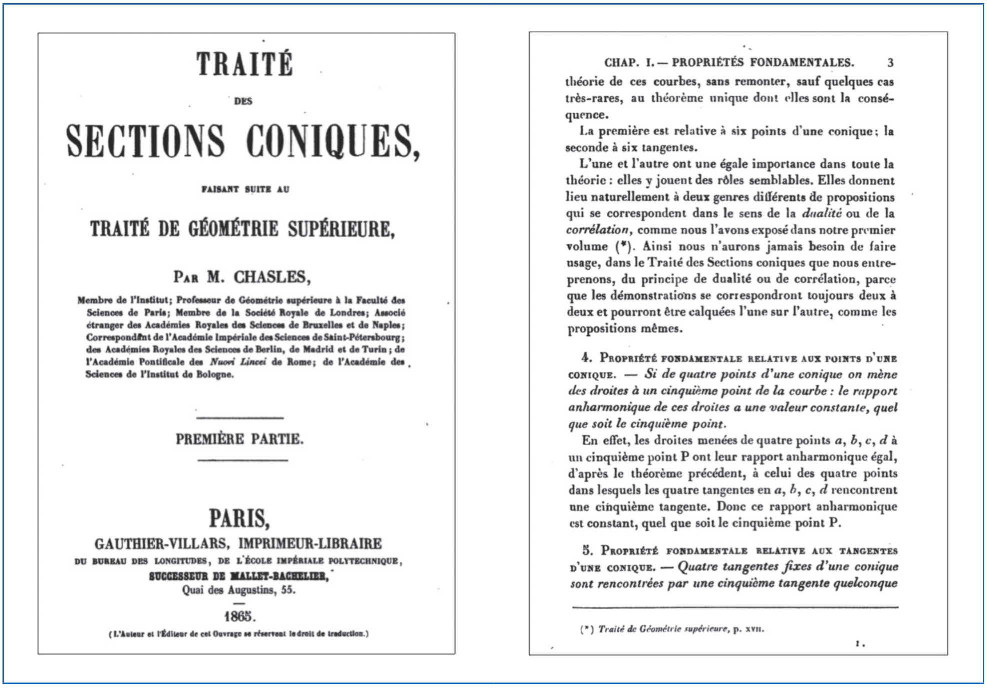


Figura 7. Los haces de semirectas que parten de P y P' tienen la misma razón doble



TRAITÉ

DES

SECTIONS CONIQUES,

FAISANT SUITE AU

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE,

PAR M. CHASLES,

Membre de l'Institut; Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris; Membre de la Société Royale de Londres; Associé étranger des Académies Royales des Sciences de Bruxelles et de Naples; Correspondant de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg; des Académies Royales des Sciences de Berlin, de Madrid et de Turin; de l'Académie Pontificale des *Nuovi Lincei* de Rome; de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne.

PREMIÈRE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1865.

(L'Auteur et l'Éditeur de cet Ouvrage se réservent le droit de traduction.)

CHAP. I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES. 3

théorie de ces courbes, sans remonter, sauf quelques cas très-rares, au théorème unique dont elles sont la conséquence.

La première est relative à six points d'une conique; la seconde à six tangentes.

L'une et l'autre ont une égale importance dans toute la théorie : elles y jouent des rôles semblables. Elles donnent lieu naturellement à deux genres différents de propositions qui se correspondent dans le sens de la *dualité* ou de la *corrélation*, comme nous l'avons exposé dans notre premier volume (*). Ainsi nous n'aurons jamais besoin de faire usage, dans le Traité des Sections coniques que nous entreprenons, du principe de dualité ou de corrélation, parce que les démonstrations se correspondront toujours deux à deux et pourront être calquées l'une sur l'autre, comme les propositions mêmes.

4. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE RELATIVE AUX POINTS D'UNE CONIQUE. — *Si de quatre points d'une conique on mène des droites à un cinquième point de la courbe : le rapport anharmonique de ces droites a une valeur constante, quel que soit le cinquième point.*

En effet, les droites menées de quatre points *a*, *b*, *c*, *d* à un cinquième point P ont leur rapport anharmonique égal, d'après le théorème précédent, à celui des quatre points dans lesquels les quatre tangentes en *a*, *b*, *c*, *d* rencontrent une cinquième tangente. Donc ce rapport anharmonique est constant, quel que soit le cinquième point P.

5. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE RELATIVE AUX TANGENTES D'UNE CONIQUE. — *Quatre tangentes fixes d'une conique sont rencontrées par une cinquième tangente quelconque*

(*) *Traité de Géométrie supérieure*, p. XVII.

1.

Figura 8. Dos páginas de un libro de M. Chasles en el que se trata la propiedad de las cónicas y la razón doble.

Ya tenemos entonces la solución a nuestro problema: En la fotografía debemos localizar 4 puntos claves A, B, C, D y determinar su razón doble, luego los localizamos en un mapa de la ciudad y con la razón doble y las coordenadas de los 4 puntos determinamos la cónica correspondiente. Ahora bien, así no precisamos el punto P desde donde se tiró la foto, pero si trabajamos con otro quinto punto E de la fotografía podremos determinar más de una razón doble y más de una cónica, por lo que el la intersección de ellas estará la solución.

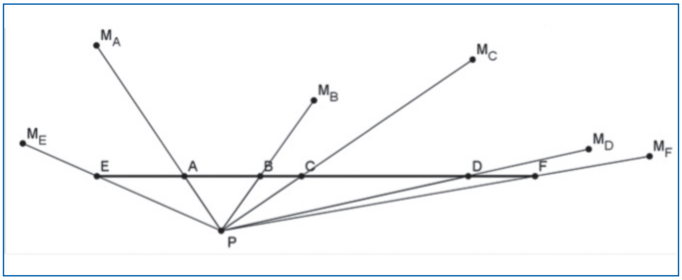


Figura 9

Supongamos una situación de partida como la que se va en la figura 9, donde se representa una posible imagen cenital de la misma. En la fotografía EF se recoge una zona que va desde el extremo M_E del mapa hasta el otro extremo M_F.

P no tiene por qué estar en la mediatriz del segmento EF, ya que la fotografía podría haberse recortado lateralmente. Nos fijamos en los puntos reconocidos A, B, C y D de la foto que corresponden a los puntos M_A, M_B, M_C, y M_D, en el plano de la ciudad (que desde ahora también llamaremos A, B, C y D, mientras no haya confusión).

Como suponemos una vista cenital (proyección ortogonal de los puntos reales sobre en el plano de la ciudad), hemos de tomar la razón doble de las proyecciones de los puntos de la fotografía sobre el borde inferior de la misma (que supondremos será el eje X o una paralela al mismo).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CON GEOGEBRA

- Tomamos la fotografía panorámica digitalizada y la insertamos y fijamos en la ventana gráfica de Geogebra de forma que su borde inferior quede paralelo al eje X (Figura 10).
- Marcamos en la foto 5 puntos claves A, B, C, D y E que posteriormente sean fácilmente localizables en el plano de la ciudad.
- Determinamos la razón doble de dos cuaternas de puntos, elegidas entre el conjunto de los 5 puntos, por ejemplo r_1= r(A,B,C,D) y r_2=r(B,C,D,E)[5].
- Insertamos, en una nueva ventana o capa de Geogebra, un plano de la ciudad donde puedan localizarse los puntos A, B, C, D y E de la fotografía y marcamos sobre ellos los puntos A, B, C, D y E. (Figura 11)
- A partir de las coordenadas de 4 de los puntos A=(x(A),y(A)), B=(x(B),y(B)), C=(x(C),y(C)) y D=(x(D),y(D)) y la razón doble r_1 hallada antes, tenemos

que determinar la cónica correspondiente[6]. Igualmente con las coordenadas de B, C, D, E y la razón doble r_2 determinamos una segunda cónica. En la intersección de ambas, que no es ni B ni C ni D (puntos comunes en ambas cuaternas elegidas) estaba el fotógrafo.

Figura 10. Determinación de la razón doble de 2 cuaternas de puntos sobre la fotografía

Figura 11. Trazado de las cónicas correspondientes. En el punto de intersección, señalado por la flecha blanca inferior, estaba el fotógrafo.

Ahora bien; la determinación de las ecuaciones de las cónicas supone un proceso algebraico más tedioso que la determinación de otro punto de las mismas. Como Geogebra traza las cónicas que pasan por cinco puntos dados, nos dispondremos entonces a calcular las coordenadas de un quinto punto y en particular, por comodidad, las de otro punto que esté sobre alguno de los ejes de coordenadas[7].

Veamos el proceso a seguir para determinar, por ejemplo, los posibles cortes de nuestra cónica con el eje X:

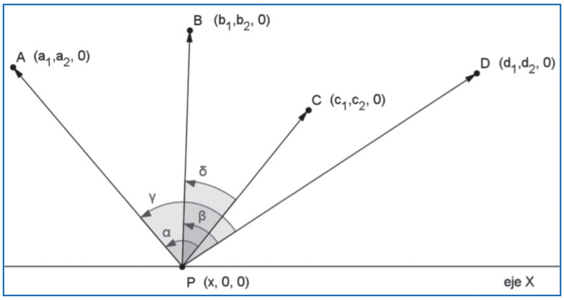


Figura 12

Trabajemos en el espacio tridimensional sobre el plano z=0 y así podremos usar el producto vectorial (x) de vectores para hallar el seno de los correspondientes ángulos implicados en la razón doble (Figura 12).

Sean $\overrightarrow{PA}=\vec{a}=(a_1-x,\, a_2,0\,)$

$\overrightarrow{PB}=\vec{b}=(b_1-x,\, b_2,0\,)$

$\overrightarrow{PC}=\vec{c}=(c_1-x,\, c_2,0\,)$

$\overrightarrow{PD}=\vec{d}=(d_1-x,\, d_2,\, 0)$

$$\mathrm{r}\left(\mathrm{A,B,C,D}\right)=\mathrm{r}=\frac{sen\alpha.sen\beta}{sen\delta.sen\gamma}=\frac{\dfrac{\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}\cdot\dfrac{\left|\vec{d}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}}{\dfrac{\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\cdot\dfrac{\left|\vec{d}\times\vec{a}\right|}{\left|\vec{d}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}}=\frac{\left|\vec{c}\times\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{d}\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{d}\times\vec{a}\right|}=$$

$$=\frac{\left[a_2(c_1-x)-c_2(a_1-x)\right]\cdot\left[b_2(d_1-x)-d_2(b_1-x)\right]}{\left[b_2(c_1-x)-c_2(b_1-x)\right]\cdot\left[a_2(d_1-x)-d_2(a_1-x)\right]}=\frac{x^2T_1+xT_2+T_3}{x^2U_1+xU_2+U_3}$$

$$T_1 = a_2b_2 + c_2d_2 - c_2b_2 - a_2d_2$$
$$T_2 = c_2b_2a_1 + c_2b_2d_1 + a_2d_2b_1 + a_2d_2c_1 - a_2b_2c_1 - a_2b_2d_1 - c_2d_2a_1 - c_2d_2b_1$$
$$T_3 = a_2b_2c_1d_1 + c_2d_2a_1b_1 - c_2b_2a_1d_1 - a_2d_2c_1b_1$$
$$U_1 = b_2a_2 + c_2d_2 - b_2d_2 - c_2a_2$$
$$U_2 = b_2d_2c_1 + b_2d_2a_1 + c_2a_2b_1 + c_2a_2d_1 - b_2a_2c_1 - b_2a_2d_1 - c_2d_2b_1 - c_2d_2a_1$$
$$U_3 = b_2a_2c_1d_1 + c_2d_2b_1a_1 - b_2d_2c_1a_1 - c_2a_2b_1d_1$$

Así los posibles valores de x para el punto buscado P=(x,0,0) se obtienen de la resolución de la ecuación de segundo grado $(rU_1\text{-}T_1)x_2+(rU_2\text{-}T_2)x+(rU_3\text{-}T_3)=0$.

Ahora hay que meter todas las fórmulas en Geogebra usando su notación:

T_1=y(A)*y(B)+y(C)*y(D)-y(C)*y(B)-y(A)*y(D), etc.

Luego tenemos que despejar x en la ecuación de segundo grado anterior para introducir las dos posibles soluciones x1, x2 y definir los dos posibles puntos de la cónica sobre el eje X, P_1=(x_1,0) y P_2=(x_2,0), que aparecerán, o no, según la existencia de las soluciones.

Igualmente podríamos calcular las coordenadas de los posibles puntos de la cónica con el eje Y.

Ya podremos diseñar la nueva herramienta para Geogebra que representa la cónica dados 4 puntos y la razón doble.

Por último tenemos que indicar que, como la solución es muy sensible a ligeras variaciones, la colocación de los puntos sobre la fotografía y el plano de la ciudad ha de ser lo más precisa posible y además, si las dos cónicas trazadas precisan poco el punto de corte, porque el ángulo de intersección es pequeño, puede optarse por elegir otras cuaternas de puntos diferentes que definan el punto de corte con mayor precisión.

UN CASO PARTICULAR: EL ARCO CAPAZ

La propiedad del arco capaz como lugar de los puntos bajo los que se ven otros dos fijos con un ángulo constante, supone una situación particular para los resultados de Chasles, en el caso en que se mantiene la razón doble porque se mantienen todos los ángulos o sus senos. O visto de otro modo: si consideramos la propiedad del arco capaz sobre los puntos de una circunferencia y proyectamos la situación, los resultados de Chasles resultan previsibles, ya que la proyección de una circunferencia es una cónica y las razones dobles también se mantienen aunque se desequilibren los senos de los ángulos.

Particularicemos también nuestro problema de búsqueda, lo que nos permitirá abordarlo en el segundo ciclo de la ESO:

¿Donde Estoy?

Me encuentro en el campo algo perdido, con una brújula, un pobre mapa topográfico en el que tengo señalados tres lugares puntuales A , B y C, que observo a lo lejos y algunos instrumentos de dibujo rudimentarios: una pequeña regla, un cuaderno en cuya portada puedo apoyarme para trazar perpendiculares y una cuerda que me permitiría trazar circunferencias. El GPS que llevo no me es útil porque mi mapa no tiene coordenadas geográficas, solo aparece la escala y curvas de nivel. Parece que el punto B está más cerca. ¿Puedo saber donde estoy y así calcular la distancia hasta B?. Ya me acuerdo, si mido ángulos puedo usar algo del arco capaz.

Simulemos este problema con Geogebra (Figura 13):

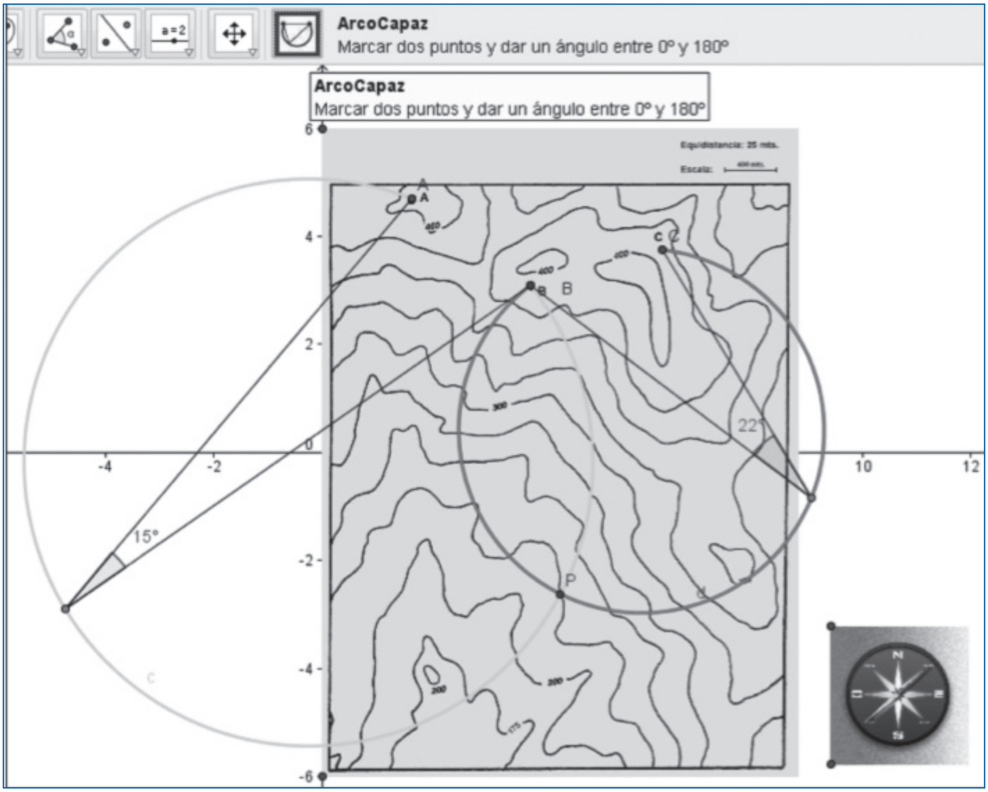


Figura 13. Determinación del punto P a partir de tres puntos y dos ángulos.

Para poder repetir cómodamente arcos capaces, creamos una nueva herramienta en Geogebra que me permite construirlos dados dos puntos y el ángulo bajo el que se ven.

Con mi brújula he medido los ángulos bajo los que veo A y B (unos 15º) así como B y C (unos 22º).

Inserto el mapa y lo fijo, coloco tres puntos A, B y C sobre los correspondientes del mapa y trazo ambos arcos capaces. En la intersección (P) estoy. Ahora se, por la escala del mapa, que me encuentro a unos 2’5 Kms. de B en línea recta.

La noción de arco capaz como lugar geométrico suele usarse las matemáticas de secundaria de forma restringida cuando decimos que desde cualquier punto de una semicircunferencia vemos el diámetro bajo un ángulo recto, pero no suele usarse en su versión general. Este problema, a veces llamado en topografía “problema de los cuatro puntos”, muestra uno de sus usos.

Piense el lector cómo se resolvería este problema en la Enseñanza Secundaria sin apelar a la noción de arco capaz.

Desde 3º de ESO el alumnado puede familiarizarse con esta idea particular de arco de una circunferencia como lugar geométrico en relación con los ángulos. Con Geogebra es fácil explorar que si en una circunferencia coloco un punto P y trazo una cuerda AB, el ángulo APB es fijo cuando P se mantiene a un lado de la cuerda y también es fijo (pero suplementario con el anterior) cuando P está al otro lado de la cuerda.

REFERENCIAS

Coxeter, H. S. M. (1984). Fundamentos de geometría. Ed. Limusa. México.

Del Río, J. (2004). Homo Mathematicus. SIGMA nº 24 (pp. 161 a 168). Departamento de Educación del Gobierno Vasco.

Hohenwarter, M. y Hohenwarter, J. (2009). Manual de Geogebra 3.2. http://www.geogebra.org/help/docues.pdf

Stewart, I (1990). Juegos Matemáticos. Investigación y Ciencia, Mayo (pp. 93 a 98). Prensa Científica. Barcelona.

De La Fuente, M. (2012) ¿Dónde está?, ¿dónde estoy?, ¿dónde estaba?: Tres problemas de relaciones de las matemáticas y los mapas resueltos con Geogebra. Actas del XIII CEAM Thales (pp. 149 a 165). S.A.E.M. THALES

NOTES

1. http://www.maa.org/devlin/devlin_02_05.html.
2. http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=706.
3. “Todos usamos los números y las matemáticas a diario, para predecir el tiempo, manejar el dinero,… Las Matemáticas son algo más que fórmulas y ecuaciones. Son lógica. Es utilizar la mente para resolver los mayores misterios que conocemos”.
4. La noción de razón doble ya había sido usada por Pappus y Menelao, pero no en contextos de proyecciones o secciones.
5. Como el comando RazónDoble[A,B,C,D] incorporado en Geogebra sólo funciona si los puntos está alineados se ha de calcular la razón doble de sus proyecciones sobre el eje X. (Se puede desarrollar una nueva herramienta de Geogebra para que realice este proceso).
6. Este trazado de la cónica a partir de las coordenadas de 4 puntos y la razón doble también se puede incorporar como nueva herramienta a Geogebra.
7. Si la cónica resultante no los tuviese bastaría reposicionar el mapa respecto de los ejes para que apareciesen.