Epsilón - *Revista de Educación Matemática* 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 71-76

Golosinas matemáticas. Reflejos dulces y apetitosos

Antonio Israel Mercado Hurtado
IES Sixto Marco, Elche

Resumen: *Paseando por una tienda de golosinas podemos observar gominolas, nubes, bolas de chicle, regaliz, botellas, melones, gajos de naranja, lenguas de pica-pica, patatas fritas, gusanitos,… Suculentos manjares que devoran sin parar nuestros alumnos desde una edad muy temprana.*

Si la mirada deja de ser golosa y se transforma en una mirada matemática podemos observar esferas, elipsoides, cilindros, espirales, círculos, hélices, prismas, pirámides, conos, paraboloides hiperbólicos,… Manjares, en principio, nada suculentos que iremos devorando a la vez que endulzamos nuestro conocimiento matemático.

RECONOCER

Ocho de la mañana. Dos adolescentes entran a clase. Uno de ellos va mascando chicle y el otro lleva una piruleta en la boca…

La importancia de los hábitos alimenticios es, sin lugar a dudas, un tema de actualidad que no puede dejarnos indiferentes.

¿Y si buscamos las matemáticas que aparecen en las golosinas que consumen nuestros alumnos, sin dejar de lado lo imprescindible de una buena alimentación, sobre todo en estas edades?

El reto estaba encima de la mesa: Buscar reflejos matemáticos en las golosinas.

(…unos días más tarde…) Ocho de la mañana. El profesor de matemáticas entra a clase con una bolsa de golosinas. Hoy haremos matemáticas con estas chucherías. De un plumazo hemos despertado a una clase de jóvenes adolescentes. Pero no sólo los hemos despertado físicamente. Sin que ellos lo sepan están a punto de adquirir cierta sensibilidad matemática. Usar las golosinas como reflejo matemático responde a la necesidad de acercar a un grupo de estudiantes de primer ciclo de ESO el hecho indiscutible de que las matemáticas nos rodean. Y no solo nos rodean a los profesores de matemáticas, también rodean a nuestro alumnado.

Este reflejo matemático busca la cercanía con el discente. Es una condición necesaria aunque no suficiente para descargar las matemáticas de su fría formalidad.

Trabajar a partir de golosinas causa sorpresa, pues se trata de una actividad inesperada. Los reflejos matemáticos son así, aparecen en los lugares más insospechados.

Bromeando un alumno dijo a otro: “No te comas ese cilindro de fresa”. En el fondo no era una broma. Era una mirada matemática adolescente.

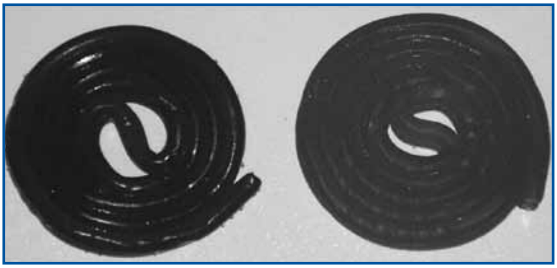
RELATAR Y ANALIZAR

En el mercado existen gran variedad de golosinas. Resulta complicado hacer una clasificación exhaustiva de ellas atendiendo a criterios puramente matemáticos. No obstante una primera clasificación podría versar sobre la forma que tienen las golosinas.

Ciertos caramelos o chicles tienen forma esférica. Es la manera de que al metérnoslos en la boca tengamos una sensación agradable (no tienen picos ni aristas que nos puedan molestar). Además hay un gran número de golosinas con forma esférica que son huecas. La esfera es la mínima superficie que encierra un volumen determinado.

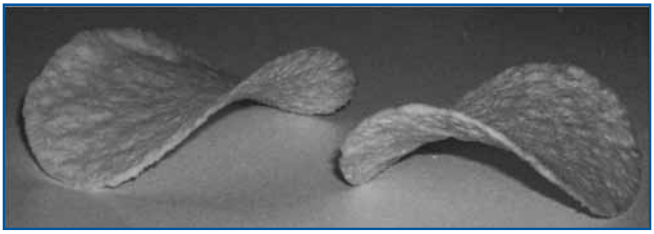
Fotografía 1: Esferas

Una buena forma de ocupar poco espacio es cuidando la presentación matemática de la golosina. En este caso la espiral se lleva el premio.



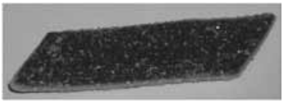
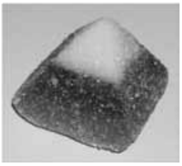
Fotografía 2: Espirales

En las patatas fritas podemos encontrar ejemplos de conceptos matemáticos difíciles de explicar. Es el caso del punto de silla: punto de una superficie que al mismo tiempo es máximo y mínimo.



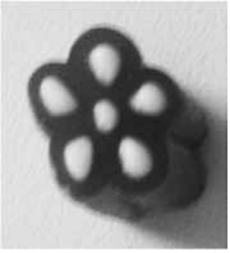
Fotografía 3: Paraboloides hiperbólicos

Algunas son bidimensionales y otras tridimensionales:

			
Fotografía 4: Golosinas cilíndricas	Fotografía 5: Paralelogramo dulce	Fotografía 6: Gominola piramidal	Fotografía 7: Ortoedro de caramelo

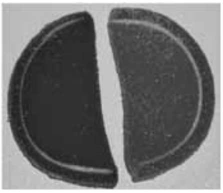
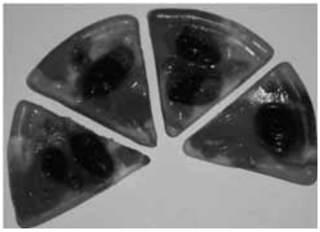
Una segunda clasificación podría ser numérica. Números naturales, racionales e incluso irracionales pueden encontrarse en el diseño de las golosinas:

Uso de los números naturales:

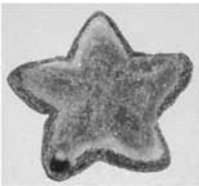


Fotografía 8:
Cinco de fresa

Uso de las fracciones:

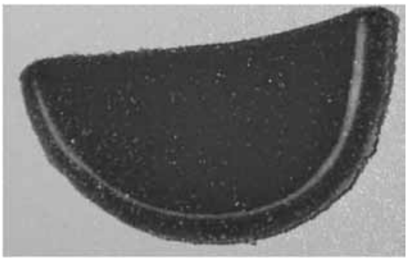
		
Fotografías 9 y 10: Uso de la fracción 1/2 en las golosinas		Fotografía 11: Uso de la fracción 1/6 en las golosinas

Uso de los números irracionales:

	
Fotografía 12: La proporción Áurea azucarada	Fotografía 13: El número π no pica

Una tercera clasificación matemática se puede basar en la utilización del color de las golosinas. Utilizando esta característica tan llamativa se pueden estudiar conceptos topológicos como interior, exterior y frontera de un conjunto.

Es relativamente habitual observar alumnos que confunden el concepto de área y de perímetro cuando en las golosinas ambos conceptos están claramente diferenciados por el color.

	
Fotografía 14: Los colores diferencian claramente el interior, la frontera y el exterior de la golosina.	Fotografía 15: El perímetro es de color verde mientras que el área es roja.

EXPLOTAR DIDÁCTICAMENTE

La primera reflexión que cabe a la hora de explotar didácticamente este reflejo matemático es que puede utilizarse para edades muy variadas: desde niños de primaria hasta adolescentes de secundaria (especialmente los de primer ciclo). Este grupo tan variado tiene algo en común; cuando se hacen matemáticas utilizando golosinas, la motivación está asegurada.

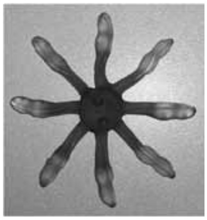
La toma de medidas en distintas golosinas puede dar pie a varias actividades. Resulta bastante interesante el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes. También se puede realizar un estudio sobre la relación entre el radio y el lado de los polígonos regulares utilizando diferentes tipos de gollerías.

Para alumnos de primaria, la introducción al mundo de las fracciones utilizando las golosinas que comen habitualmente puede resultar de gran interés.

Los polígonos regulares y los estrellados están presentes en las formas de bastantes caramelos. Un uso de esta característica es el estudio de los ángulos. Concretamente resulta bastante interesante el cálculo del ángulo interior y el ángulo central de polígonos regulares con este material comestible.

Dentro del tema de movimientos isométricos se puede estudiar el conjunto de movimientos (giros, traslaciones y simetrías) que dejan invariante una golosina. El diseño de estas está plagado de centros, ejes y planos de simetría y de centros de giro.





Fotografías 16-17-18
Actividad: Indica los ejes de simetría, los centros y ángulos de giro y los centros de simetría que dejan invariantes estas golosinas.

En secundaria obligatoria se lleva a cabo el estudio de la recta. En bastantes ocasiones se realiza un estudio analítico y gráfico, pero no se dejan a un lado las aplicaciones a la física o incluso a las propias matemáticas. No debemos olvidar la recta como generadora de curvas (mediante envolventes lineales) o la recta como generadora de superficies (superficies regladas).



Fotografías 19-20-21
Actividad: La recta como generadora de superficies. Construcción de un paraboloide hiperbólico a partir de pliegues rectos en un papel.

La espiral de Arquímedes se puede utilizar para resolver (no con regla y compás) el problema de la trisección del ángulo. En la fotografía 2 aparece un ejemplo de espiral de Arquímedes que puede servir como aliciente para estudiar problemas clásicos de la matemática de forma gráfica, introduciendo curvas que desgraciadamente quedan fuera de los currículos establecidos en la Educación Secundaria Obligatoria.

CONCLUSIONES

La búsqueda de reflejos matemáticos significativos para nuestro alumnado ha de ser una tarea constante que llene de sentido nuestra labor docente.

Trabajar las matemáticas que aparecen en las golosinas resulta una tarea entretenida, motivadora y formativa. Al mismo tiempo, dada la importancia que requieren los temas relacionados con la alimentación, incluso puede tratarse de una actividad que plantee nexos de unión con el área de Biología.

El tipo de actividad que puede plantearse a partir del uso de las golosinas es muy variado. El mercado está lleno de infinidad de modelos que van cambiando continuamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (2005). *Geometría cotidiana*. Barcelona. Rubes Editorial S.L.

Corbalán, F. (1998). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona. Biblioteca de aula. Editorial Grao.

Fundación La Caixa (2003). *Y después fue la ¡la forma!* Barcelona: La Caixa.

Epsilón - Revista de Educación Matemática 2011, Vol. 28(2), nº 78, pp. 77-88

Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones

Nora Gatica y Oscar Ares
Facultad de Ingeniería y Ciencias Económico Sociales
Universidad Nacional de San Luis, Argentina

Resumen: *En este trabajo presentamos una propuesta didáctica para la enseñanza del tema Integral definida para alumnos de primer año de las carreras de Ingeniería en la asignatura Análisis Matemático I. En esta secuencia utilizamos la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface).*

El concepto de integral definida es utilizado, para determinar el valor del área limitada por curvas y rectas. Tradicionalmente, para comenzar a explicar este concepto, el profesor, dibuja en el pizarrón la zona a determinar su área, subdividiendo los intervalos y encontrando el área buscada, para lo cual introduce el concepto de integral definida. En la secuencia que presentamos, es el alumno, utilizando la computadora, quien va subdividiendo el intervalo, visualizando el área buscada.

Palabras Claves: *Alumnos de Ingeniería, integral definida, nuevas tecnologías, sucesiones.*

INTRODUCCIÓN

En la enseñanza de la asignatura Análisis Matemático I, el acercamiento didáctico que se sigue en los programas de estudio y en los libros de texto es en esencia "tradicional". Es decir, básicamente se exponen los métodos de resolución de los distintos conceptos mediante un procedimiento algorítmico y se continúa con ejercicios cuya complejidad crece en forma gradual. De acuerdo con Contreras (2000), al desarrollar un tema de Análisis, un profesor se enfrenta a conceptos que por su propia naturaleza, son problemáticos en sí mismos, lo que hace desplazarse hacia posturas algorítmicas más fáciles de gestionar y evaluar, dejando de lado los problemas característicos de dicha asignatura.

En efecto, en la enseñanza elemental del Análisis Matemático se otorga gran importancia a los tratamientos tipo cálculo: la composición de dos o más funciones, el cálculo de derivadas, el cálculo de integrales, etc. También se ha comprobado que la enseñanza tradicional tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica y a evaluar sobre las competencias adquiridas en este dominio (Artigue, 1995).

Esta situación, si bien en principio es aceptable, genera una serie de problemas en asignaturas de la especialidad, en donde el uso que se le da a los conceptos cumplen con objetivos muy diferentes. Diversas investigaciones han detectado importantes dificultades en los estudiantes en el campo conceptual del Análisis. Tal como asegura Hitt (1998), los alumnos de una carrera de Ingeniería, después de llevar un curso de Cálculo, no logran resolver problemas no rutinarios. Este autor sugiere que los métodos tradicionales de enseñanza del cálculo son insuficientes en la preparación de buenos estudiantes para aplicar el cálculo de manera creativa. Además, complementa esta afirmación estableciendo que el fracaso de estos estudiantes se debe a la carencia de articulación entre representaciones provocando, tal como él expresa: "*que el alumno camine a ciegas*" en el sistema algebraico desarrollando algoritmos sin una idea clara del objetivo final perseguido.

En cuanto al concepto de integral definida, desde su origen, esta noción ha respondido a la necesidad de mejorar los métodos de medición de áreas subtendidas bajo líneas y superficies curvas. La técnica de integración se desarrolló sobre todo a partir del siglo XVII, paralelamente a los avances que tuvieron lugar en las teorías sobre derivadas y en el cálculo diferencial.

En la docencia, la integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas.

Para la enseñanza de este concepto, hace tiempo que se viene constatando que los aspectos teóricos relacionados con esta noción, tal como aparecen por ejemplo en la mayoría de textos resultan demasiados complejos para muchos de nuestros alumnos, la mayoría de los cuales no entiende el porque del enorme esfuerzo deductivo al que, de pronto se les somete. Por otro lado, fuera de las aplicaciones directas del cálculo de áreas y volúmenes, no aprenden a reconocer cuándo el cálculo de una magnitud requiere de una integración.

Llorens y Santoja (1997) analizan los errores de los alumnos las que encuadran en tres categorías:

1. Los estudiantes identifican "integral" con "primitiva".
2. Las integrales definidas se identifican con la regla de Barrow, incluso cuando esta no se puede aplicar.
3. No se integra el concepto de área con el de integral.

Diversas investigaciones (Llorens y Santoja, 1997; Contreras, 2000) muestran que los estudiantes no realizan una unión adecuada entre el concepto de área y el de integral definida. En ellos persiste una interpretación algebraica de la integral, por lo que la regla de Barrow se les presenta como una interpretación geométrica de la integral como si fuera igual que el caso de la tangente como interpretación geométrica de la derivada. Posiblemente este hecho se deba a que en los libros de texto se abusa del formalismo cuando se refiere al concepto de integral.

Como uno de los aspectos más importantes en las investigaciones en didáctica de la matemática es el análisis de las deficiencias que detectamos como profesores universitarios en los estudiantes, el presente trabajo se refiere a este aspecto a tener en cuenta, en los distintos registros de representación semiótica (Duval, 1998), al momento de elaborar propuestas didácticas que contribuyan a superarlos.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El desarrollo de este trabajo tiene que ver con el interés por comprender y ayudar a resolver los problemas de formación matemática que presentan los estudiantes en cálculo diferencial e integral. En este contexto, las dificultades en la comprensión del concepto de integración como límite de una sucesión de sumas parciales son particularmente notables.

MARCO TEORICO

Durante el desarrollo de las ciencias matemáticas se han formalizado los conceptos matemáticos en definiciones rigurosas sin tener en cuenta las representaciones gráficas o las definiciones informales, en la mayoría de los casos.

Sin embargo, de acuerdo a Duval (1998), para favorecer el aprendizaje, los profesores deben proponer actividades de conversiones entre diferentes registros de representación semiótica.

Diversas investigaciones (Hitt, 1998a, 1998b; Duval, 1998; Fabra y Deulofeu, 2000; Gatica,Tauber y Ruíz, 2002; Villalobos y Farfan, 2001; etc.) han comprobado la importancia de la articulación entre diferentes registros de representación. Pero también estos estudios manifiestan que los alumnos, tanto de escuela secundaria como universitaria, no son capaces de lograr estas relaciones entre varios registros de representación.

Esta situación se agudiza en los alumnos de Ingeniería, ya que en las materias de la especialidad, el uso que se le da a los conceptos como modelos matemáticos, cumplen con objetivos muy diferentes; por un lado, en los procesos de resolución, se requiere de implementar métodos numéricos y gráficos y por otro, cuando se tiene una solución algebraica el principal interés reside en estudiar el comportamiento (por ejemplo de funciones) por medio de su representación gráfica identificando los parámetros involucrados en la misma.

En la mayoría de los casos, estas actividades resultan ser difíciles para los alumnos, ya que para poder realizar estas articulaciones, los estudiantes necesitan recurrir a la visualización. La visualización no puede ser entendida como el simple acto de ver, sino como "*la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende*" (Cantoral y Montiel, 2001, p.24).

En la visualización se utilizan matemáticas relacionadas con el campo de lo numérico, gráfico, algebraico, verbal y también de lo gestual. De esta manera, la visualización opera con el funcionamiento de las estructuras cognitivas, las relaciones entre las diversas representaciones de un objeto matemático y además intervienen en una determinada cultura.

La visualización no es más que un medio con el que cuenta el alumno para poder realizar un mejor entendimiento. Cuando nos referimos a visualizar un concepto, estamos hablando de comprender un concepto a través de una imagen visual.

Los profesores debemos ser conscientes de esta problemática por lo que en la organización de las clases, deberíamos priorizar actividades en los que los alumnos deban realizar conversiones entre registros (principalmente entre el gráfico y simbólico).

Pero muchas veces, necesitamos de herramientas que ayuden a la visualización de los conceptos, como es el caso del uso de la computadora para aprovechar el dinamismo que ofrece y favorecer actividades de manipulación.

Spicer (2000) define Manipulables **Virtuales** como representaciones digitales de la realidad posibilitadas por los computadores, y que el estudiante puede también manipular con el mismo objetivo de los primeros. *Los manipulables virtuales tienen además la capacidad de hacer visible lo que es difícil de ver e imposible de imaginar*" (Spicer, 2000, p.7). Estas herramientas ayudan al estudiante a construir su propio conocimiento y a la vez posibilita la conversión entre registros (simbólico y gráfico).

Desde otra perspectiva la noción de concep-image, inicialmente introducida por Tall y Vinner (1981), establece que el estudiante decide sobre la base de la imagen conceptual que ha construida y que es la estructura cognitiva total que es asociada con el concepto, el cual incluye todas las imágenes mentales y propiedades y procesos asociados.

Desde la distinción entre la imagen del concepto y la definición del concepto de Tall y Vinner (1981), Tall (1991) considera que la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica, el cual justifica sobradamente la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos.

Ahora bien, la práctica educativa nos dice que es posible que la estructura subyacente en un esquema no siempre sea coherente y, por el contrario, coexistan, inconsciente o conscientemente, ideas inconsistentes (considerar compatible una proposición y su negación), incoherentes (respuestas en diferentes sistemas de representación contradictorias entre sí), pobres y conflictivas. Esto conduce a esquemas tematizados que no siempre funcionan de la mejor manera posible. Por ejemplo, Tall y Vinner (1981), proponen las nociones de "*concept image*" y "*concept definition*" para referirse y explicar los conflictos que existen entre los conceptos matemáticos definidos formalmente y los procesos cognitivos individuales utilizados para concebirlos. Y para ensanchar los límites de competencia de los estudiantes, la estructura subyacente de un esquema deben ser detectada, corregida y enriquecida. Así pues, el esquema tiene que ser desequilibrado y reconstruido.

OBJETIVOS

El análisis del presente estudio se focaliza más en los fenómenos ligados al aprendizaje. Nos centramos específicamente en mostrar una propuesta didáctica de este tema, utilizando manipulables virtuales, donde los alumnos puedan visualizar la conversión entre dos sistemas de representación, el gráfico y el algebraico.

De acuerdo a Duval (1998) consideramos que es fundamental para la comprensión de los objetos matemáticos distinguir un objeto matemático y su representación. Desde esta perspectiva, la comprensión de un concepto se logra si se utilizan diferentes registros de representación.

Se recurre a un nuevo registro, un *registro gráfico con animación* que permita comprender el concepto de integral definida y sumarle interactividad, puesto que el alumno ingresará una función de una variable y un intervalo [a, b] arbitrario y observa, con animación gráfica, la aplicación algorítmica y la comprensión del concepto de integral definida como límite de una sucesión de sumas parciales.

En la implementación de la secuencia didáctica, nos proponemos el cumplimiento de los siguientes objetivos:

Comprender el concepto de integral como limite de una sucesión de sumas parciales. Tratar que adherir el concepto de integral a un conjunto de imágenes conceptuales.

Relacionar el teorema fundamental de sucesiones, como uno de los ejes de la fundamentación teórica de la definición de integral. Construir el concept-image de una sucesión monótona y acotada que por lo tanto converge.

Validar empíricamente una aproximación didáctica para la enseñanza del concepto de integral, apoyada en la visualización, que facilite al alumno adquirir una comprensión básica de integración.

Visualizar la sucesión $(S_n - s_n)$ que tiende a cero sii la función es integrable.

Para cumplir estos objetivos, utilizando la interfase gráfica de MATLAB, GUI (graphical user interface), diseñamos una secuencia para los alumnos de primer año que cursan Análisis Matemático I en las carreras de Ingeniería.

Presentamos las pantallas que se presentan cuando comenzamos con la secuencia:

PANTALLA PARA INTRODUCIR LOS DATOS

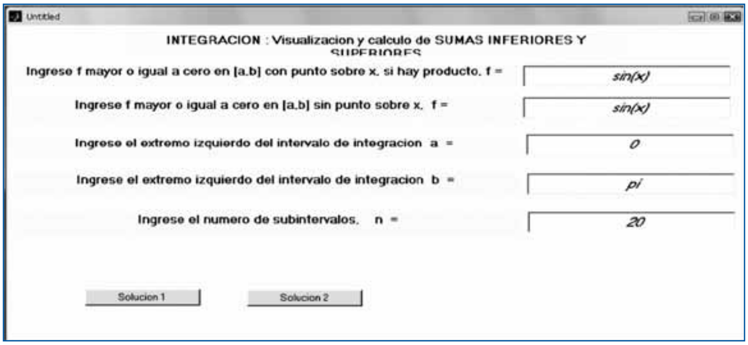


Figura 1
Pantalla de ingreso de datos

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 7 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi].

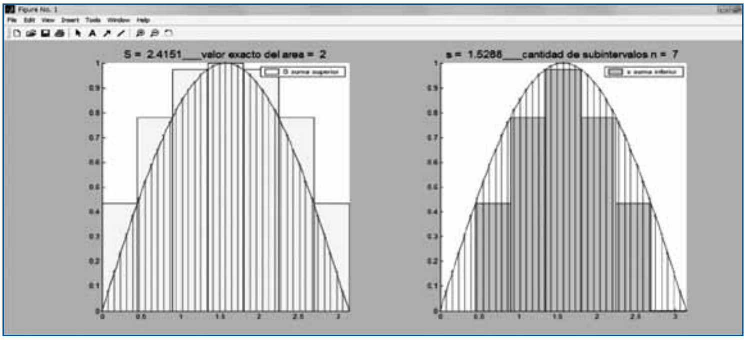


Figura 2
Áreas dadas por sumas superiores y
sumas inferiores con la función sin (x) con n=7

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores correspondiente a 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi].

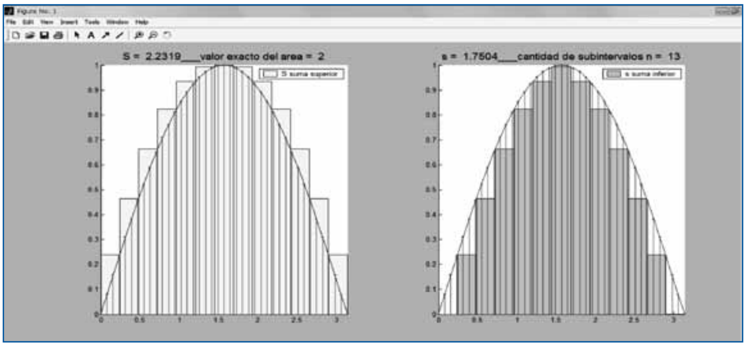


Figura 3
Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con mayor número de intervalos

Al cambiar el número de intervalos, los alumnos pueden observar en las pantallas en la parte de arriba, las sumas superiores, inferiores y el valor exacto de la integral. De esta manera pueden concluir sobre el acercamiento de estas áreas al valor 2.

En la siguiente pantalla se han cambiado las funciones y el número de intervalos.

Pantalla que ilustra la Suma Superior y la Suma inferior de la función exp(-x) con n=5, n=13 subintervalos en el intervalo [0 4].

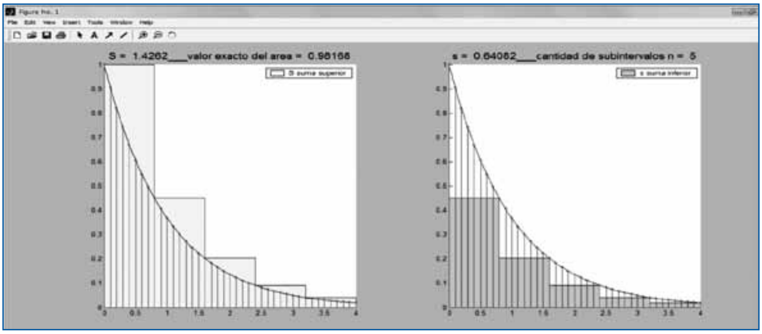


Figura 4
Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con la función exp(-x) con n = 5

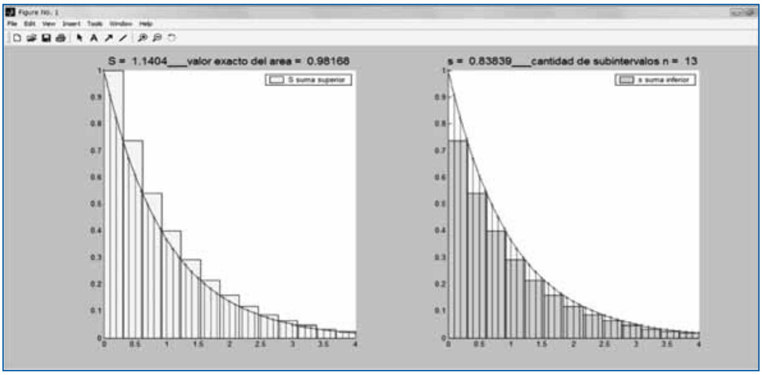


Figura 5
Áreas dadas por sumas superiores e inferiores con la función exp(-x) con n = 13

Pantallas de una secuencia de imágenes de la sucesión de sumas superiores e inferiores y la diferencia (Sn – sn) correspondiente a 7 y 13 subintervalos de la función sin(x) en el intervalo [0 pi]. Idem para la función exp(-x) para 5 y 13 subintervalos.

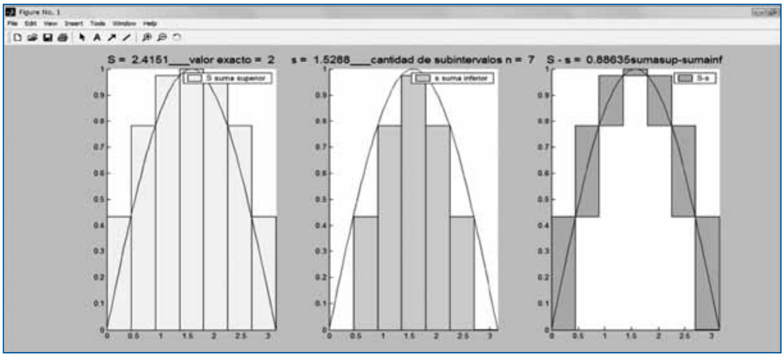


Figura 6
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=7 de la función sin(x)

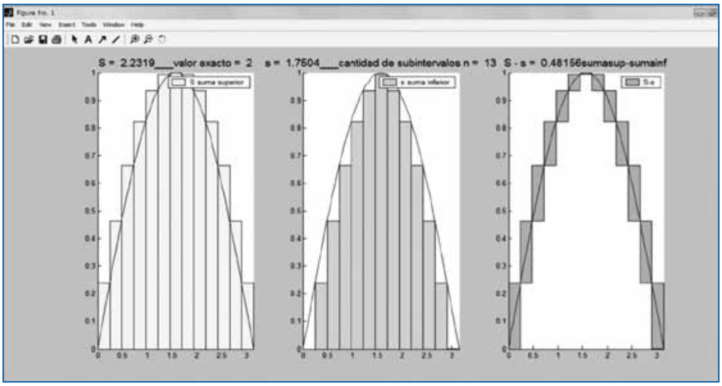


Figura 7.
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=13 de la función sin(x)

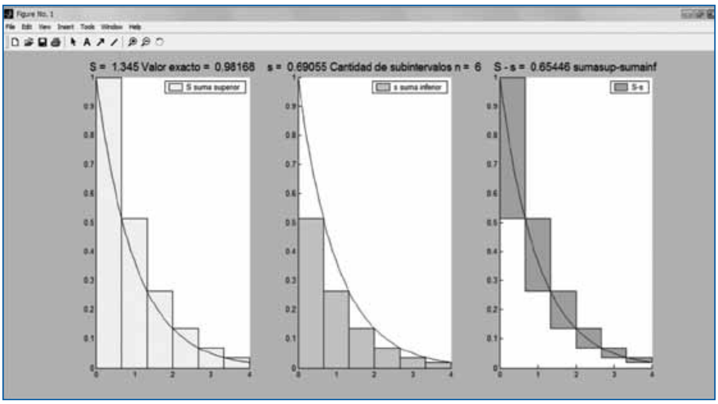


Figura 8
Sumas superiores e inferiores y la diferencia ($S_n - s_n$)
con n=7 de la función exp(-x)

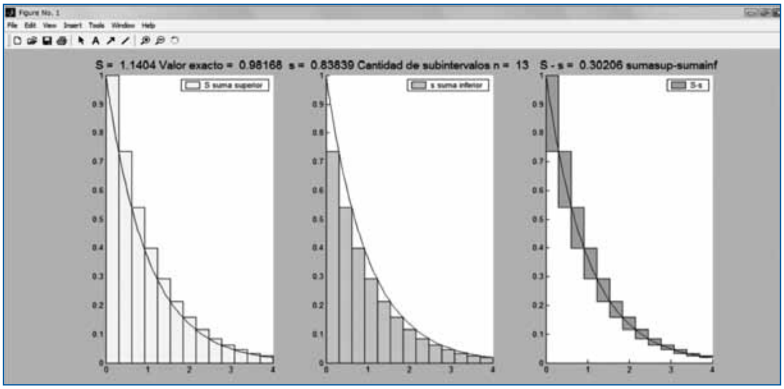


Figura 9
Sumas superiores e inferiores y la diferencia $(S_n - s_n)$
con n=13 de la función exp(-x)

ACTIVIDADES

La hoja de actividades que deben realizar es la que se transcribe a continuación:

A partir de la proyección de la interface gráfica de MATLAB, referida al <u>tema integración</u>, se solicita al alumno ingresar datos a la interface grafica y responder al siguiente cuestionario, que persigue como finalidad construir una **imagen conceptual:**

a) Ingresar la función $f(x) = e^{-x}$.

b) Ingresar el intervalo de integración [a, b] = [0, 4].

c) Ingrese la cantidad de subintervalos n=10. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

d) Ingrese la cantidad de subintervalos n=20. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

e) Ingrese la cantidad de subintervalos n=30. Inicie el proceso y registre los valores de la suma superior y suma inferior.

f) Ingresar la función f(x) = sin(x) y observar las sucesivas pantallas sin registrar los datos.

A partir de las actividades que deben realizar los alumnos, se les solicitará que respondan al siguiente cuestionario:

CUESTIONARIO

1. La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma superior, esta dado por, el valor máximo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor mínimo?.

2. La altura de cada rectángulo correspondiente a una suma inferior, esta dado por, el valor mínimo (dentro del subintervalo) de f(x), por el valor medio o por el valor máximo?.

3. Sea f(x) continua y positiva en [a,b]. A medida que el numero de subintervalos aumenta los valores numéricos correspondiente a la sucesión de sumas superiores, aumenta,isminuye, permanece constante u oscila? ¿Se aproxima al algún valor?.Ídem para las sumas superiores.

4. La sucesión numérica de sumas superiores es una sucesión monótona ....

5. La sucesión numérica de sumas inferiores es una sucesión monótona................................

6. La sucesión numérica de sumas superiores esta ACOTADA, ver la GUI, no desciende debajo de cierto valor o desciende indefinidamente?. ¿por ejemplo, debajo de que valor no desciende?.

7. La sucesión numérica de sumas inferiores esta ACOTADA, ver la GUI, no supera cierto valor o asciende indefinidamente?. ¿por ejemplo, que valor menor que no sobrepasa?.

8. EL TEOREMA FUNDAMENTAL DE SUCESIONES dice, toda sucesión monótona creciente (o decreciente) y acotada converge.

Si este es el caso en estudio, ¿estamos en presencia de un límite?. ¿Cómo se llama este limite?

Obtenga la diferencia entre la suma superior y la suma inferior, esto es, $S_n - s_n$.

Hacia donde tiende esta diferencia, para valores crecientes de n.?

9. Del último ítem, y a partir de la imágenes de la visualización interactiva ¿Cómo se formaliza el límite cuando n tiende a infinito?

CONCLUSIONES

Con la secuencia que presentamos, consideramos que los alumnos pueden visualizar de una manera sencilla, el acercamiento de las áreas calculadas al área real.

Creemos que el poder someter a la verificación interactiva los resultados predichos por la teoría, permiten afianzar la comprensión y fijar el concepto.

La explicación a estos resultados, hipotéticamente, es que el conocimiento definitivamente se aprehende cuando ha sido puesto en juego.

La poca frecuencia con que se recurre al registro gráfico en las actividades áulicas impide que, a menudo, los alumnos no puedan visualizar ni interpretar los resultados, lo que dificulta ser consciente de algunos resultados a los que se arribe. Los estudiantes se apoyan en el registro algebraico en los que confían plenamente sin llegar a saber que representación gráfica tienen los resultados obtenidos.

Es primordial que los profesores, aunque ya sea en un nivel universitario avanzado, utilicemos estas herramientas para ayudar a los alumnos a visualizar los conceptos y a comprobar los resultados obtenidos en la realización de sus trabajos prácticos. El uso reflexivo y creativo de las nuevas tecnologías permite dar un significado concreto a las nociones matemáticas por lo que el diseño de nuevos materiales utilizando esta nueva metodología, donde muestren el uso efectivo en el aula, es sumamente importante.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.). *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático.* México: Prentice Hall & Pearson Educación.

Contreras, A. (2000). La enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato y primer curso de Universidad. Una perspectiva desde la teoría de los obstáculos epistemológicos y los actos de comprensión. *Actas del IV Simposio de la SEIEM.* Huelva: SEIEM

Duval, R. (1998). Registros de Representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav.

Fabra M. y Deulofeu J. (2000): *Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3(*2), 207-230.

Gatica N., Tauber L. y Ruiz F. (2002). Registros de representación puestos en juego en el concepto de función: un estudio en estudiantes ingresantes a la carrera de ingeniería. En M. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls (Eds.). *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales* (pp.417-430). Universidad de Alicante (España).

Hitt, F. (1998a). Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. En F. Hitt (Ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp.245-264). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998b). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación Matemática*, 10(2), 23-45.

Llorens, J. L., Santonja, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1/2), 61-76.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151 – 169.

Spicer, J. (2000). Virtual Manipulatives: A New Tool for Hands-on Math. ENC Focus. Recuperable en http://www.eduteka.org/Manipulables.php. 7(4),14.

Villalobos A. y Farfan R. (2001): *Identificación de obstáculos en la construcción de gráfica de funciones.* Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, vol. 14, 396-399.