ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 38-3 (2020), 55-80
Investigaciones didácticas
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2881
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Dificultades en la construcción de los números naturales incluyendo el cero con estudiantes de 6 a 8 años

Difficulties in the construction of natural numbers including zero with 6-8 year-old students

María Leticia Rodríguez González
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN - México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx

Eugenio Filloy Yagüe
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN - México
e.filloy@cinvestav.mx

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España
bernardo.gomez@uv.es

RESUMEN • Nuestro objetivo en esta investigación es identificar las dificultades de aprendizaje que tienen los niños de 1.º a 3.º grado de educación primaria en la construcción de los números naturales. Tales dificultades no proceden de la enseñanza, sino de las propias matemáticas y para poder observar esas dificultades, es necesario reducir el problema a los elementos primitivos. Con los modelos teóricos locales como marco teórico y metodológico, se ha diseñado un modelo de enseñanza traduciendo el componente formal (modelo de J. Von Neumann) a una secuencia de actividades con el uso de material manipulativo. Se analiza la experiencia de enseñanza y en los resultados se destacan y explican las dificultades que tienen los niños con estas actividades.

PALABRAS CLAVE: Modelos teóricos locales; Números naturales en Von Neumann; Modelo de enseñanza; Dificultades de aprendizaje; Educación primaria.

ABSTRACT • The aim of this paper is to identify the learning difficulties that children from 1st to 3rd grade of primary education have in the construction of natural numbers. Such difficulties do not come from teaching, but from mathematics themselves; in order to observe these difficulties, it is necessary to reduce the problem to the basics. Through Local Theoretical Models, as a theoretical and methodological framework, a Teaching Model has been designed by translating the formal component (J. Von Neumann Model) into a sequence of activities, with the use of manipulative material. We analyze the teaching experience and results highlight and explain the children's difficulties in these activities.

KEYWORDS: Local Theory Models; Natural numbers in Von Neumann; Teaching model; Learning's difficulties; Primary education.

Recepción: enero 2019 • Aceptación: mayo 2020 • Publicación: noviembre 2020

Rodríguez González, M. L., Filloy Yagüe, E. y Gómez Alfonso, B. (2020). Dificultades en la construcción de los números naturales incluyendo el cero con estudiantes de 6 a 8 años. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 55-80
https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2881

INTRODUCCIÓN

El uso de los números es común en todas las actividades de la vida cotidiana, por ello es usual que los niños a temprana edad conozcan el conteo desde el contexto del hogar; así, al empezar su educación formal en la escuela ya tienen algunas ideas numéricas. Sin embargo, que puedan expresar conteos orales no significa que tengan nociones aritméticas. Una de las funciones de los sistemas educativos es introducir las nociones de los números naturales para establecer las bases del desarrollo del pensamiento matemático infantil.

En el caso particular del tratamiento escolar de los números naturales en educación primaria en México se pone énfasis en la cardinalidad en detrimento de la ordinalidad, por ello los niños aprenden esos números con desfases o deficiencias conceptuales. Durante las décadas setenta y ochenta, se consideraban ambas componentes; sin embargo, a partir de la adaptación de las ideas de Piaget al diseño del currículum se usó la cardinalidad de conjuntos y aunque los programas curriculares ya no tengan ese referente teórico, en la enseñanza se sigue trabajando de esa manera, predominando además la mecanización, memorización, la ejercitación de la secuencia contadora, los algoritmos de adición y multiplicación.

A partir de ahí, nos preguntamos si es posible avanzar en el tratamiento *paralelo* de la enseñanza de la cardinalidad y ordinalidad de los números naturales, sin que una componente anule a la otra.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En el Plan de Estudios Mexicano (SEP, 2011), la enseñanza de las matemáticas está centrada en la resolución de problemas, que se concreta en una secuencia de actividades llamadas *Desafíos Matemáticos*. En el programa de matemáticas de educación primaria solo aparece un contenido referente a la ordinalidad de los números naturales. En el libro de texto de primer grado hay dos desafíos: *Carrera de autos* (SEP, 2015, p. 39) y *Animales en orden* (SEP, 2015, p. 40); en el primero, los niños tienen que colorear los coches de acuerdo con el orden de llegada (figura 1); y en el segundo, los niños deben conjuntar el juego de cartas ilustrado con imágenes de animales con el juego de cartas ilustrado con números ordinales (figura 2).

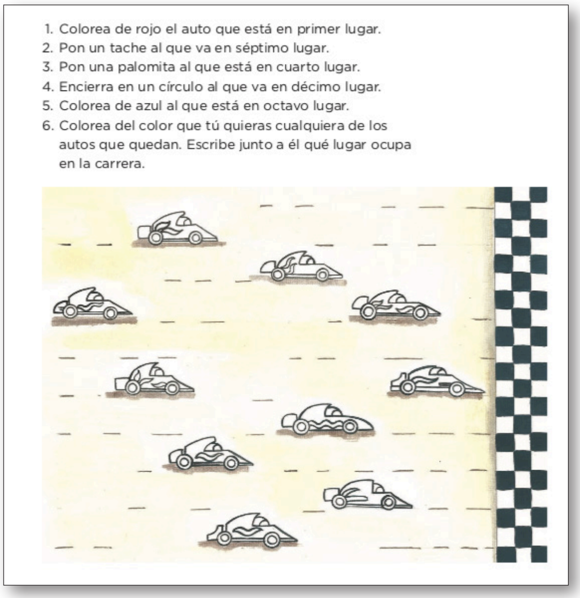
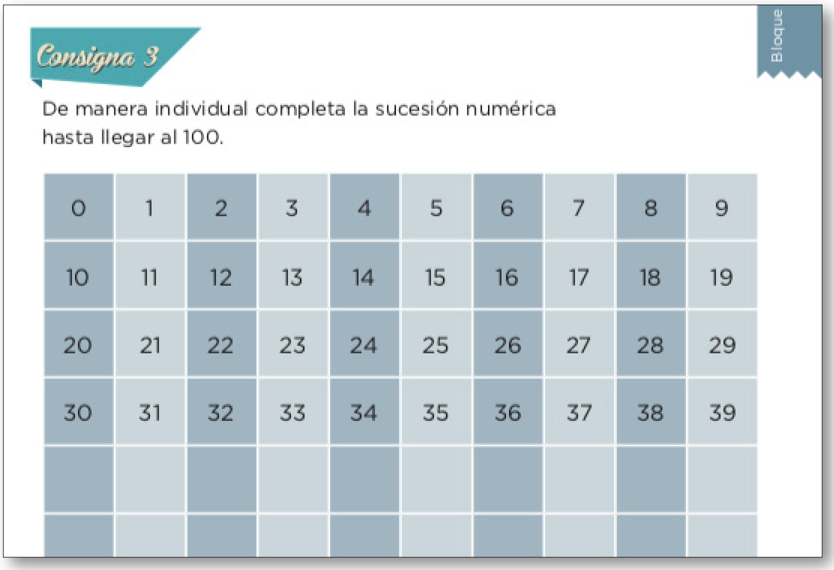


Fig. 1. Carrera de Autos.

Fig. 2. Animales en orden.

En el caso particular del cero, aparece como primer número en una actividad (SEP, 2015, p. 25) donde se pide continuar una serie numérica (figura 3).


Consigna 3

Bloque

De manera individual completa la sucesión numérica hasta llegar al 100.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39

Fig. 3. Completar la serie numérica.

A partir de esta actividad, en las siguientes lecciones se usa el cero como cifra, como se ve en la figura 4 (SEP, 2015, p. 41).

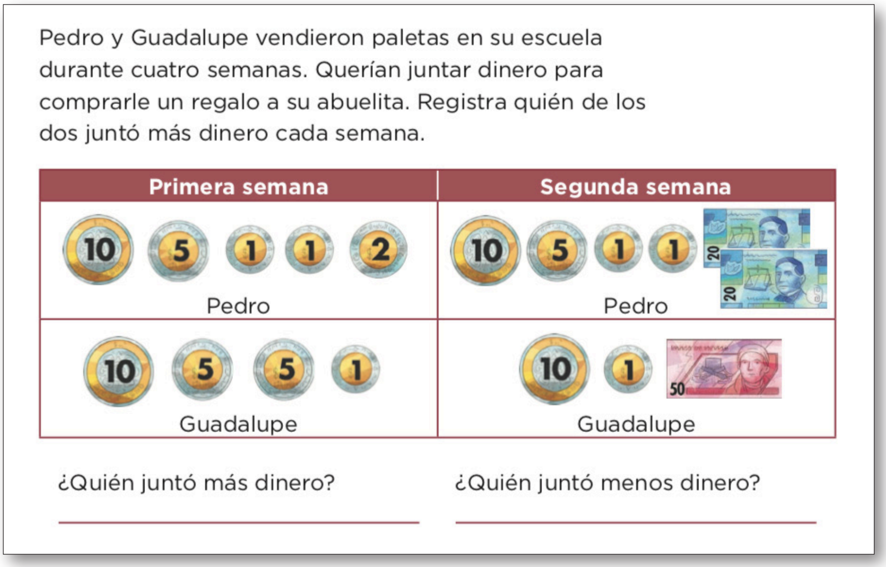


Fig. 4. El cero como cifra.

En los modelos de enseñanza desde mediados del siglo XIX hasta los años setenta del siglo XX, se favorecía la construcción de los números naturales como cardinales y ordinales, incluyendo el cero, relacionado con las nociones de «no tener o valer nada» y de representación de «la columna vacía».

Conviene señalar que las raíces de estos modelos se encuentran en la Aritmética para niños de Condorcet (1854), *Moyens d'apprendre a compter* (*Maneras de aprender a contar*), que destaca por su trascendencia e influencia histórica al ser la primera obra elemental para la instrucción pública seleccionada en un concurso público en Francia. Esta obra plantea que los números naturales se construyen agregando un elemento para obtener el siguiente, hasta llegar a 9. La decena se compone con el 1 y 0 y los números subsecuentes: diez y uno, diez y dos, diez y tres ... en vez de once, doce, trece… Para las decenas se hace el mismo procedimiento: agregar una unidad del siguiente orden para tener veinte, treinta, cuarenta... hasta llegar a la centena. Para el cambio de unidad, propone la regla: «… la siguiente unidad se va a escribir con tantos ceros como nueves tenga: 9 – 10, 99 – 100...» (Condorcet, 1854, p. 22).

Un ejemplo de libro para niños que sigue este modelo es la *Aritmética del Párvulo* (1940), en las figuras 5 a 8 se muestran las lecciones I a IV:

La Lección I empieza por el número uno y sigue con la secuencia contadora, mostrando el sentido ordinal y cardinal de los números como signos que representan cantidades.

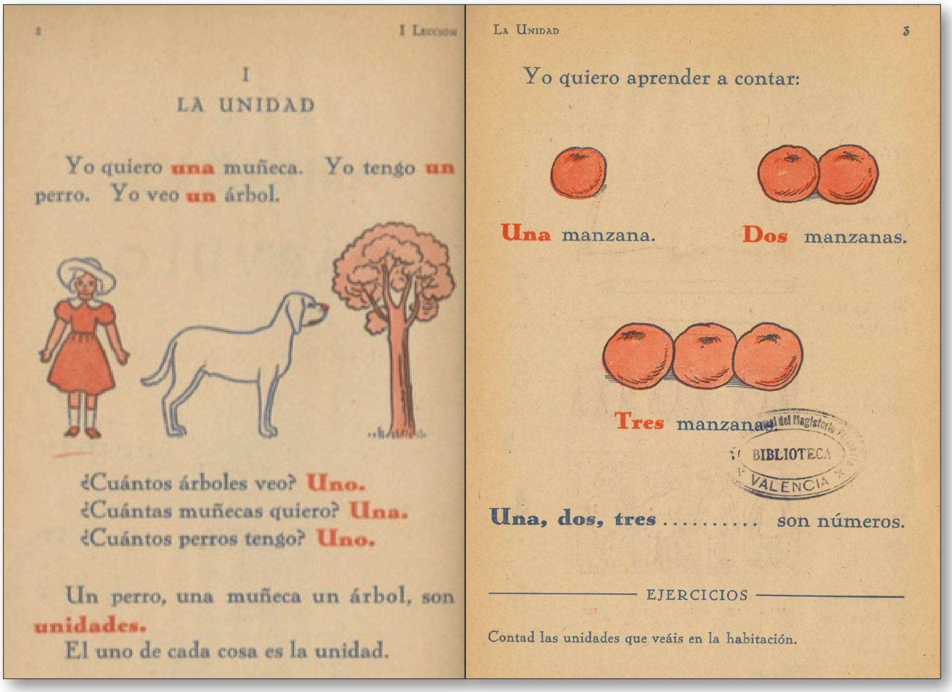
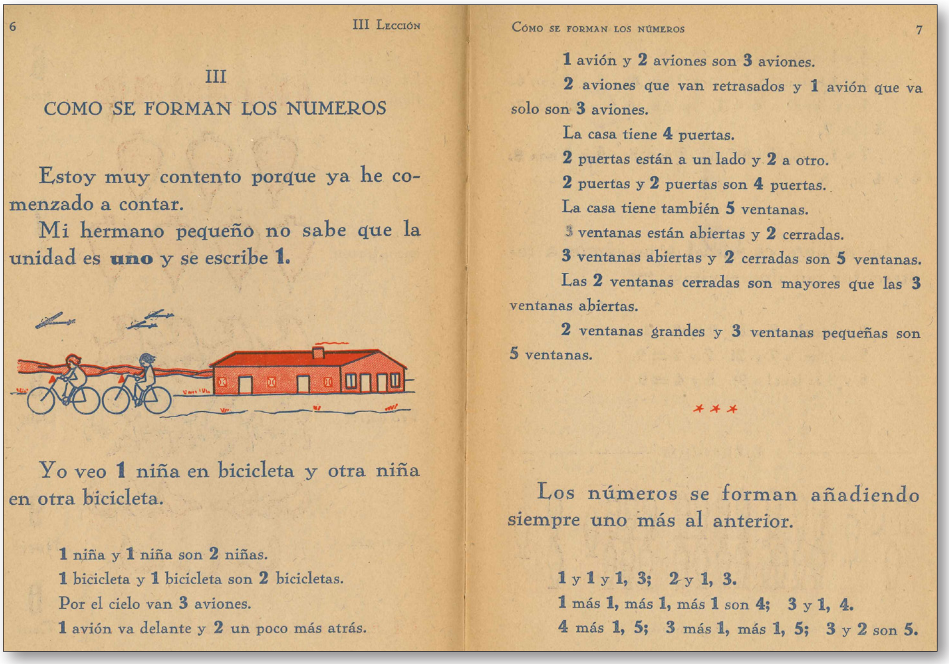


Fig. 5. Lección I *La unidad e inicio de la secuencia contadora.*

En la lección II se introduce el sentido de cardinalidad de los números dígitos y el cero después del nueve.

Fig. 6. Lección II *La cardinalidad de los números y la introducción del cero.*

En la lección III se aborda el sentido ordinal de los números y se explica que se forman añadiendo siempre uno más al anterior, comenzando a partir del uno.


6 III Lección

III

COMO SE FORMAN LOS NUMEROS

Estoy muy contento porque ya he comenzado a contar.

Mi hermano pequeño no sabe que la unidad es **uno** y se escribe **1.**

Yo veo **1** niña en bicicleta y otra niña en otra bicicleta.

1 niña y **1** niña son **2** niñas.
1 bicicleta y **1** bicicleta son **2** bicicletas.
Por el cielo van **3** aviones.
1 avión va delante y **2** un poco más atrás.

Cómo se forman los números 7

1 avión y **2** aviones son **3** aviones.

2 aviones que van retrasados y **1** avión que va solo son **3** aviones.

La casa tiene **4** puertas.

2 puertas están a un lado y **2** a otro.

2 puertas y **2** puertas son **4** puertas.

La casa tiene también **5** ventanas.

3 ventanas están abiertas y **2** cerradas.

3 ventanas abiertas y **2** cerradas son **5** ventanas.

Las **2** ventanas cerradas son mayores que las **3** ventanas abiertas.

2 ventanas grandes y **3** ventanas pequeñas son **5** ventanas.

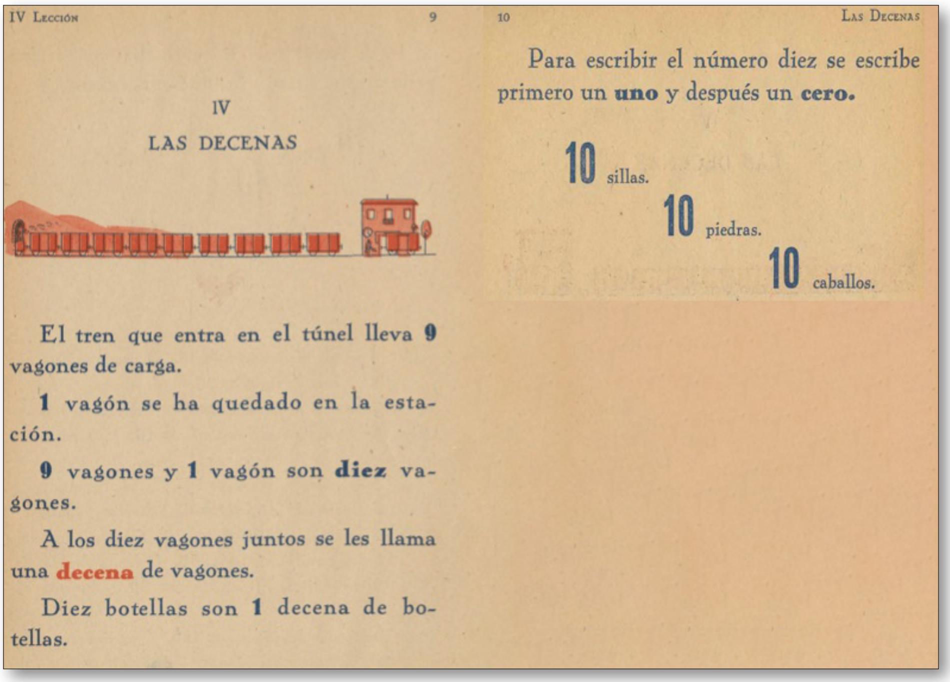
* * *

Los números se forman añadiendo siempre uno más al anterior.

1 y **1** y **1**, **3**; **2** y **1**, **3**.
1 más **1**, más **1** son **4**; **3** y **1**, **4**.
4 más **1**, **5**; **3** más **1**, más **1**, **5**; **3** y **2** son **5**.

Fig. 7. Lección III *Cómo se forman los números*.

En la lección IV se introduce el concepto de decena a partir del diez, que es uno más que el nueve, como denominación de diez ítems juntos.


IV Lección 9

IV

LAS DECENAS

El tren que entra en el túnel lleva **9** vagones de carga.

1 vagón se ha quedado en la estación.

9 vagones y **1** vagón son **diez** vagones.

A los diez vagones juntos se les llama una **decena** de vagones.

Diez botellas son **1** decena de botellas.

10 Las Decenas

Para escribir el número diez se escribe primero un **uno** y después un **cero.**

10 sillas.

10 piedras.

10 caballos.

Fig. 8. Lección IV *La decena*.

Desde el punto de vista de la epistemología de los números naturales, en este trabajo no hemos considerado la discusión Cantor-Peano. Para Cantor (Mosterín, 2000, pp. 15-17), el número se asocia a la cardinalidad de un conjunto y el conteo a la correspondencia biunívoca entre conjuntos equipotentes; los números se construyen separados unos de otros; el orden se da a partir de la relación de inclusión entre conjuntos. Para Peano, los números se construyen desde una perspectiva ordinal, asociada a la axiomatización a partir de la idea del sucesor, pero no hay conjuntos.

El modelo matemático de J. Von Neumann (Mosterín, 2000, pp. 186-188) propone una lógica de construcción que precisa de un sistema matemático de signos (SMS) que involucra simultáneamente ordinalidad y cardinalidad, a partir de la construcción del cero como número y como conjunto vacío. Este modelo encapsula en la iteración el principio de inducción finita de los axiomas de Peano, donde todo número es construido a partir de un número finito de iteraciones, empezando por el cero. Usa los conjuntos para la construcción de los números a partir del principio de ordinalidad, según el cual todo número contiene el conjunto de sus anteriores. Y usa el resultado del conteo, a través de la correspondencia entre el intervalo $[1,n]$ y A, para establecer la cardinalidad como el número de elementos de un conjunto.

Con base en lo anterior y en la idea de que la problemática del aprendizaje de las matemáticas no está en la enseñanza sino en las propias matemáticas, se considera, de acuerdo con Filloy, Rojano y Puig (2008), que es el análisis formal de la problemática lo que permite observar su origen al reducirla a sus elementos primarios. En el caso de la construcción de los números naturales, estos elementos primarios están, según el modelo formal de Von Neumann (Hamilton y Landin, 1961), en la iteración como operación más básica y como base del proceso recursivo.

PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general de esta investigación es estudiar el efecto de un modelo de enseñanza con base al modelo formal de Von Neumann para trabajar simultáneamente los principios de *ordinalidad* y de *cardinalidad* en la construcción de los números naturales.

A tal fin, se plantean las siguientes preguntas:

- ¿Qué elementos se deben considerar para diseñar un modelo de enseñanza que permita trasladar el modelo formal de Von Neumann a actividades concretas dirigidas a niños de 1.º a 3.º de educación primaria?
- ¿Cuáles son las dificultades de aprendizaje que se observan cuando los niños construyen los números naturales con base en el modelo formal de Von Neumann?

Para dar respuesta a estas preguntas, se proponen los siguientes objetivos particulares:

- Diseñar e implementar un modelo de enseñanza que traslade el modelo formal de Von Neumann a secuencias de actividades concretas.
- Identificar y explicar el origen de las dificultades que tienen los niños de los tres primeros grados de educación primaria en la construcción de los números naturales cuando trabajan con un modelo de enseñanza con base en el modelo de Von Neumann.

MARCO TEÓRICO

Los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, Rojano y Puig, 2008) son un marco teórico y metodológico para la investigación en matemática educativa que toma en cuenta las dificultades que se producen en las aulas, cuando se aplican diferentes tipos de actividades de enseñanza. El sentido de lo *local* es porque profundiza en el análisis de un fenómeno específico analizado a la luz de cuatro componentes:

a) La *competencia formal* es el referente matemático abstracto y sus aplicaciones.
b) La *competencia cognitiva* atiende a los procesos cognitivos que se ponen en acción para desarrollar pensamiento matemático y de comunicación.
c) La *competencia de comunicación* se fundamenta en la semiótica para identificar y entender cómo son los procesos de producción de sentido y significado que se generan en el aula, en la interacción de los sujetos con diferentes grados de competencia de los SMS y los códigos que generan para crear los textos matemáticos.
d) *Competencia de enseñanza* es la traducción del modelo formal matemático a una secuencia de actividades que permite la producción de una sucesión de textos matemáticos, como «… resultado de procesos de lectura/transformación hecho sobre un espacio textual…» (Filloy, 1999, p. 64). Estos textos son también llamados intertextos matemáticos que modelan situaciones matemáticas, con lenguajes que van de lo concreto a lo abstracto, con códigos intermedios y el uso de los SMS para desarrollar gradualmente las habilidades matemáticas y los conocimientos pragmáticos, sintácticos y semánticos que la experiencia escolar y cognitiva aporta a los niños (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pp. 124-125).

Diseño de un MTL para la construcción de los números naturales

Competencia formal

En esta componente se considera el modelo de Von Neumann porque usa la iteración y la recursividad. Esta comienza con la construcción del cero como el primer número y a partir de él se construyen los *sucesores*, es decir, el n+1 se obtiene directamente del paso n.

Aquí recurrimos a la adaptación que hace Hamilton y Landin (1961) del modelo formal de J. Von Neumann de los números naturales. Dado que su conceptualización es un proceso complicado y no basta nombrar los números o establecer una correspondencia uno-uno, estos autores consideran que es necesario construirlos ordinalmente.

Con el símbolo (P_i) se señalan las ideas fundamentales del modelo matemático que se van a traducir a actividades concretas en el modelo de enseñanza.

P_1. La construcción recursiva se inicia con la definición de cero: «Cero es el vacío; i. e., 0 = Ø», enseguida se plantea la definición del uno: «$1 = \{0\} = 0 \bigcup \{0\}$ » continuando así se sigue que:

P_2.

0 = Ø
1 = {Ø}
2 = {Ø, {Ø}}
3 = {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}

y así sucesivamente.

P_3. A partir de ese momento, se introduce la noción del conjunto sucesor:

> El conjunto $x \bigcup \{x\}$ es el sucesor del conjunto x. Si y es un conjunto y si hay un conjunto x tal que y es el sucesor de x entonces y es un *sucesor*. Para cada conjunto x, el sucesor de x se denota x'.
> Por lo tanto, 1 = 0', 2 = 1', 3 = 2', etc. (op. cit., 1961, p. 77).

(La notación $x \bigcup \{x\}$ da cuenta del proceso de construcción bajo la denominación del sucesor, lo denota como x').

Cada uno de estos conjuntos es $\in -$ *ordenado*. Que un conjunto *A* sea $\in -$ *ordenado* significa que, para todo *x* y para todo *y* en *A*, se cumple solo una de estas condiciones:

$$x \in y,\ x = y,\ o\ \ y \in x$$

P_4. Un número natural es un conjunto *n* tal que:

a) *n* es $\in -$ *ordenado*,
b) Cada subconjunto no vacío de *n* posee un elemento principal (el primer elemento),
c) Si $x \in n$, entonces, $x \subset n$
d) Si *n* no está vacío, entonces *n* es un sucesor,
e) Si $x \in n$, y *x* no está vacío entonces *x* es un sucesor (op. cit., 1961, p. 81).

P_5. Posteriormente se introduce la noción de intervalo:

«Si $a,\ b \in N$, $[a,b] = \{x \mid x \in N\ \text{ y }\ a \leq x\ \text{ y }\ x \leq b\}$» (op. cit., p. 97) para definir el *conteo.* Esta definición se apoya en los intervalos de la forma $[1,n]$ de la siguiente manera: «Contar un conjunto *A* es una correspondencia uno-uno $\varphi : [1,n] \rightarrow A$ entre $[1,n]$ y *A*, donde $n \in N$» (op. cit., p. 99).

Una vez definido el conteo, se define la cardinalidad como el resultado del conteo:

Si *n* es el resultado de un conteo de *A*, entonces *A* tiene *n* elementos, o el número de elementos en *A* es *n,* o la cardinalidad de *A* es *n.* Esto también lo denotamos como la cardinalidad de *A* por *#(A)* (op. cit., p. 101).

P_6. En la *adición*, si *A* y *B* son dos conjuntos disjuntos donde *m* y *n* son los cardinales de *A* y *B* respectivamente, entonces $A \cup B$ es $m + n$.

La suma se obtiene de manera natural como una cadena de sucesores, $n' = n + 1$, donde el 10 es el sucesor del 9: $9' = 9 + 1 = 10$. Una vez que se precisan las propiedades de la adición (conmutativa, asociativa), se construye la tabla de la adición (figura 9), donde el número de cada celda es el sucesor del número de la celda anterior; los números mayores de 10 se representan como 10 + *a*, siendo *a* un dígito.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2
3	3	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3
4	4	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4
5	5	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5
6	6	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6
7	7	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7
8	8	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7	10 + 8
9	9	10	10 + 1	10 + 2	10 + 3	10 + 4	10 + 5	10 + 6	10 + 7	10 + 8	10 + 9

Fig. 9. Tabla de Suma (Hamilton y Landin, 1961, p. 109).

Para la multiplicación se parte del producto cartesiano: «Si $m,\ n \in N$, el número $\#([1,m] \times [1,n])$ es el producto $m \cdot n$ $(o\ \ mn)$. Entonces $[1,m] \times [1,n]$ es finito» (op. cit., p. 110). Define las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación de números naturales y construye la tabla de multiplicar mediante la descomposición del multiplicador n en *(n-1)+1* para obtener los productos con base en el producto inmediato anterior ya conocido, los escribe como $a \cdot 10 + b$, donde a y b son dígitos (figura 10). A continuación, se presenta un ejemplo para el número 7 para ilustrar el proceso:

$$
\begin{aligned}
&0 \cdot 7 = 0; \\
&1 \cdot 7 = 7 \\
&2 \cdot 7 = (1+1) \cdot 7 = 1 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 7 + 7 = 10 + 4, \\
&3 \cdot 7 = (2+1) \cdot 7 = 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = (10+4) + 7 \\
&= 10 + (4+7) = 10 + (10+1) = (10+10) + 1 = 2 \cdot 10 + 1
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	$10+2$	$10+4$	$10+6$	$10+8$
3	0	3	6	9	$10+2$	$10+5$	$10+8$	$2\cdot10+1$	$2\cdot10+4$	$2\cdot10+7$
4	0	4	8	$10+2$	$10+6$	$2\cdot10$	$2\cdot10+4$	$2\cdot10+8$	$3\cdot10+2$	$3\cdot10+6$
5	0	5	10	$10+5$	$2\cdot10$	$2\cdot10+5$	$3\cdot10$	$3\cdot10+5$	$4\cdot10$	$4\cdot10+5$
6	0	6	$10+2$	$10+8$	$2\cdot10+4$	$3\cdot10$	$3\cdot10+6$	$4\cdot10+2$	$4\cdot10+8$	$5\cdot10+4$
7	0	7	$10+4$	$2\cdot10+1$	$2\cdot10+8$	$3\cdot10+5$	$4\cdot10+2$	$4\cdot10+9$	$5\cdot10+6$	$6\cdot10+3$
8	0	8	$10+6$	$2\cdot10+4$	$3\cdot10+2$	$4\cdot10$	$4\cdot10+8$	$5\cdot10+6$	$6\cdot10+4$	$7\cdot10+2$
9	0	9	$10+8$	$2\cdot10+7$	$3\cdot10+6$	$4\cdot10+5$	$5\cdot10+4$	$6\cdot10+3$	$7\cdot10+2$	$8\cdot10+1$

Fig. 10. Tabla de multiplicación (op. cit., p. 111).

Componente de cognición

El sustento teórico de esta componente son las aportaciones de Talizina (2000 y 2001) para entender el tránsito de la *acción* a la *operación* y consolidar la *abstracción matemática.* La acción es el acto de la actividad del sujeto y es la unidad de análisis del aprendizaje (Talizina, 2000, p. 14). «Las acciones de comparación, deducción de consecuencias, clasificación, […] son articuladas y organizadas a través de la asimilación, para poder establecer semejanzas, diferencias, clases y subclases entre los objetos matemáticos» (Talizina, 2001, p. 34) para construir gradualmente los conceptos matemáticos (Talizina, 2001, p. 37).

Esta autora señala que la enseñanza deberá proponer actividades para que los niños ejerciten diversas acciones, desarrollen el uso de las operaciones cognitivas para sustituir, codificar, decodificar, esquematizar y modelar situaciones problemáticas o conceptos matemáticos (Talizina, 2000, p. 44) y se familiaricen con el uso de símbolos y signos matemáticos.

Sin embargo, las experiencias adquiridas en el contexto familiar, escolar, cultural y social pueden generar obstructores cognitivos que dificulten el paso de las acciones a las operaciones (cognitivas).

Con las actividades de construcción de los números naturales, propuestas en el modelo de enseñanza que se diseña para este fin, se busca identificar los obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras como los niños han aprendido las nociones numéricas que les generan dificultades semánticas, sintácticas y pragmáticas.

Componente de comunicación

El referente teórico de esta componente es la semiótica «… como teoría de la referencia y una teoría de la significación» (Peirce, 1987, p. 9) y centra la atención en las relaciones significantes, los procesos de significación y la lógica de uso de los SMS.

Esta componente tiene la finalidad de explicitar cómo los niños comunican las dificultades que tienen en la construcción de los números naturales (procesos de comunicación).

Relaciones significantes

Las relaciones significantes son interrelaciones activas, continuas y complejas entre la *sintaxis*, la *semántica* y la *pragmática*, de acuerdo con los códigos establecidos en un contexto a través de los procesos de significación que se generan a partir de la producción de sentido en relación con el signo (Barthes, 1993, pp. 22-23). Desde esta perspectiva, el número como *signo* forma parte del proceso de significación y adquiere sentido para quien lo interpreta. La *significación* es el acto de producción de sentido, en el que el interpretante puede nombrar y reconocer el objeto, así como dotarlo de significado para convertirlo en signo. «El *sentido* es un mecanismo de abstracción…» (Peirce, 1987, p. 82) que utiliza la atención, memoria y percepción en una interrelación texto-contexto para destacar información, trasladando la vivencia a la experiencia y para poder interpretarla.

Las relaciones significantes son clave para identificar las dificultades de acuerdo con el uso sintáctico, semántico y pragmático de los números naturales que los niños hacen en las actividades que se les proponen.

Argumentos como procesos de significación

La *inducción*, *deducción* y *abducción* (Peirce, 1987, pp. 258-260) son los argumentos que aportan la base de la reflexión y abstracción para desarrollar los procesos de significación. La *inducción* es el razonamiento de lo particular a lo general, de tal modo que los sujetos pueden validar experimentalmente una predicción general. Por ejemplo, generalizar la idea de sucesor a la vista de las primeras construcciones de los primeros números. La *deducción* es la habilidad para razonar de lo general a lo particular reconociendo las partes de un todo aunque no estén explícitas, para establecer relaciones mentales entre ellas; por ejemplo, reconocer que todos los números son sucesores, excepto el cero. La *abducción* es la capacidad para desarrollar inferencias hipotéticas y puede discriminar premisas verdaderas o falsas para formular conjeturas explicativas. A través de la abducción, se transita de una hipótesis inicial a otra más abstracta. Por ejemplo, cuando reconocen que un sucesor contiene a todos los anteriores, a excepción del cero, que es el único número que está vacío, por lo tanto no es un sucesor.

Identificar los argumentos que los niños emplean permitirá entender los procesos de significación y el uso de la lógica de los SMS implicados en la construcción de los números naturales.

Lógica de uso de los SMS

Para Peirce (1987, p. 8) la lógica se refiere a la semiótica, en tanto que es la referencia teórica de los MTL, se parte de que lo *matemático* está en los *sistemas de signos* y no solamente en los signos, por lo que los SMS son «… una herramienta de análisis de los textos que producen los alumnos cuando se les está enseñando matemáticas en los sistemas escolares…» (Filloy, 1999, p. 64). En esos textos, los niños producen sistemas de signos o estratos de sistemas de signos para dar sentido a las actividades que se les proponen en el modelo de enseñanza (Filloy, Rojano y Puig, 2008, p. 7).

De esta componente, interesa identificar la dotación de sentidos intermedios con el uso de códigos personales, como parte del proceso de transición de lo concreto a lo abstracto; para nombrar y reconocer al objeto con el empleo de códigos convencionales de los SMS involucrados en la construcción de los números naturales.

Modelo de enseñanza

Para el diseño de este modelo, se traducen los principios (P_i) matemáticos del modelo formal de Von Neumann relacionados con la construcción de los números naturales a una secuencia de actividades concretas con el uso de material manipulable.

A partir del marco teórico, se diseñan las categorías de análisis para observar la experimentación que se hace con el modelo de enseñanza.

Diseño de categorías de análisis

La base teórica de las categorías se sustenta en las aportaciones de la componente formal, de cognición y comunicación, descritas en el apartado del marco teórico.

De la componente de cognición interesa identificar obstructores (OB):

1. Obstructores provenientes de los conocimientos previos y de las maneras como los niños han aprendido las nociones numéricas que les generan dificultades semánticas y sintácticas en la construcción de los números naturales.
2. Obstructores provenientes de los procesos cognitivos, que les generan dificultades para establecer las relaciones de reversibilidad, para usar la iteración en la construcción del sucesor.

De la componente de comunicación, se retoman las aportaciones de la semiótica para identificar las dificultades que los niños tienen en el uso de indicadores de las relaciones significantes en la producción de sentido y desarrollar procesos de significación con el uso de la lógica de los SMS.

Argumentos como procesos de significación (APS):

1. Inducción: Habilidad para generalizar el uso de la iteración en la construcción de cada número sucesor, comprobando sus hipótesis con el uso de procesos recursivos.
2. Deducción: Habilidad de razonamiento con la posibilidad de llegar a conclusiones, proponer argumentos que ofrecen criterios de verdad, por ejemplo: cualquier sucesor contiene a todos los anteriores.
3. Abducción: Razonamiento que permite transitar de una hipótesis a otra más abstracta. Desarrollar inferencias hipotéticas y un uso correcto de la lógica de los SMS con sus códigos y reglas, para discriminar supuestos verdaderos o falsos. Por ejemplo, en la construcción de los números naturales, el cero es el único número que no es un sucesor y es el único que está contenido en cualquier número. Si un número no está vacío entonces es un sucesor.

Dotación de Sentido (DS) de los SMS (Filloy, Rojano y Puig, 2008, pp. 163-166).

1. Dotación de sentidos intermedios: utilización de códigos personales para dotar de sentido a acciones concretas, lo que puede constituir el tránsito de lo concreto a lo abstracto.
2. Dotación de sentidos a las redes de acciones cada vez más abstractas hasta convertirlas en operaciones.

METODOLOGÍA

Elementos para el diseño e implementación de este modelo de enseñanza

Los (P_i) de la estructura Formal de Von Neumann se han traducido a secuencias de actividades con el uso de material manipulable, como se muestra:

P_1 El número cero es la bolsa vacía.
P_2 Para la representación de conjuntos, las llaves { } se sustituyen con bolsas.
P_3 El sucesor es *el siguiente*, es coger otra bolsa que contiene a todas las bolsas anteriores. Así, el cero es la bolsa vacía; el uno es la bolsa que contiene dentro la bolsa del cero; el dos es la bolsa que contiene dos bolsas: la cero y la del uno; el tres es la bolsa que contiene tres bolsas: la del cero, la del uno y la del dos… (figura 11).

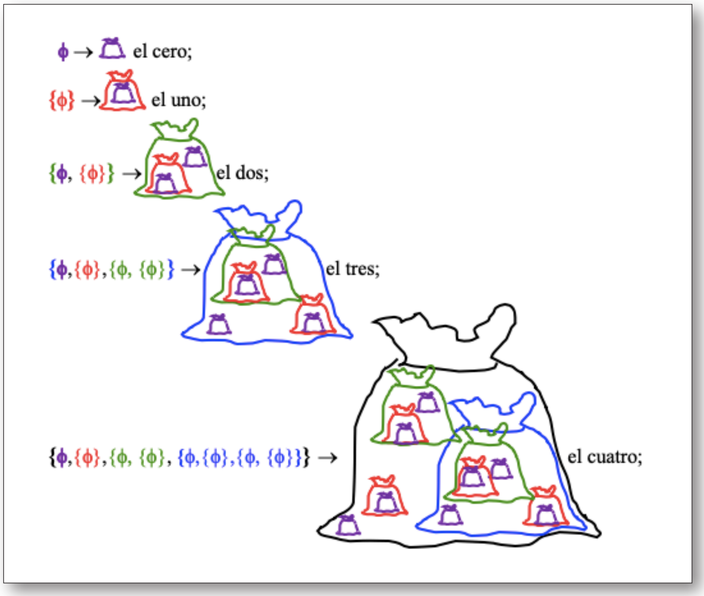


Fig. 11. Proceso recursivo de construcción.

P_4 Para la definición de números naturales se usan bolsas para mostrar que todo conjunto de bolsas está ordenado por la manera de construirlo. En toda bolsa siempre hay un primer elemento que es la bolsa del cero. Para toda bolsa el sucesor se construye metiendo en otra bolsa esa y todas las anteriores. La bolsa del cero es la única que no es un sucesor.
P_5 El conteo es establecer ordenadamente la correspondencia uno-uno con los intervalos de la forma $[1, n]$. Para este principio no se consideró presentar una secuencia de actividades, dado que los niños están habituados al conteo.
P_6 Se completan las tablas de doble de entrada de suma y multiplicación con el uso de ($a \cdot 10 + b$) cuando los resultados o productos son mayores a diez.

Aunque no está en la estructura de Von Neumann ni en Hamilton y Landin (1961), se ha introducido el uso de una semirrecta para representar los números sobre ella y así trabajar la correspondencia entre linealidad y orden.

Para aplicar este modelo de enseñanza, se ha diseñado una secuencia de actividades (tabla 1) incluida parcialmente por cuestión de espacio. Solo se presenta una selección conformada por cuatro secuencias de actividades, los P_i son los principios matemáticos del modelo formal que han sido traducidos a actividades y en la tercera columna se enumeran los materiales manipulables que se usaron.

Tabla 1.
Secuencia de actividades

P_i	*Actividades*	*Material manipulable*
P_1	1. *Adivina quién soy* La tarea consiste en identificar al número cero como el conjunto vacío. - Se invita a los niños a que observen una bolsa de plástico transparente vacía y comenten sobre el contenido. (Posibles respuestas: nada y vacío). - Una vez que aparezca la palabra vacío, se les pide sugerencias para nombrarla. - Cuando expresen que se pueden nombrar con números, se les pide que elijan una de las pegatinas con números que coincida con el color de la pegatina amarilla que tiene la bolsa vacía que se usó. - Se les pregunta si conocen el número y dónde lo han usado. - Se les pide pegar la etiqueta del número cero sobre la bolsa vacía. - Se les pide pegar la bolsa sobre la semirrecta que se ha dibujado en la pizarra.	Bolsas de plástico transparente, números en plástico flexible de distintos colores, recta dibujada en la pizarra.
P_2P_3	2. *¿Podemos construir el siguiente número?* - A partir de la construcción del número cero como conjunto vacío, se les pregunta a los niños si se puede construir el *siguiente*. (El *siguiente* es el número/bolsa que contiene al elemento cero). Se introduce la bolsa del cero en la nueva bolsa. Esta otra bolsa se nombra como uno. - Se les pide que peguen la etiqueta del número uno a la nueva bolsa y lo coloquen en la semirrecta (se espera que la coloquen a la derecha de la bolsa/número cero). - Con esta lógica se construyen los sucesores y se pone énfasis que cada sucesor contiene a todos sus anteriores.	 Fig 12. Pizarra, bolsas de plástico, etiquetas de números, semirrecta dibujada en la pizarra.
P_4	3. *¿Cómo soy?* En la construcción de cada sucesor, se pregunta a los niños para guiar su reflexión sobre la noción de ordinalidad y la definición de los números naturales. - Se les pregunta, teniendo como referencia la representación en la semirrecta: *a*) ¿Cuál es la relación de cualquier sucesor con el cero? *b*) ¿Quién está antes de…, después de…? *c*) ¿Quiénes son los antecesores de…? *d*) ¿Quién no tiene antecesor?	
P_6	4. *Construimos las tablas de suma y multiplicación* - Se les presenta una tabla de suma con los números del 0 al 9 colocados en la primer columna y fila, para que los niños la completen. En la celda donde se cruzan una fila y una columna se pone el resultado de operar los números que las encabezan, tanto para la suma como para la multiplicación. - Se les invita a usar la forma para representar los números mayores de 10. - Complementariamente, se usa una semirrecta para representar los resultados obtenidos.	 Fig. 13. Dos tablas. Una para la suma y otra para la multiplicación, en las celdas de la primera fila y columna se anotan los números del 0 al 9 y las demás celdas vacías, para que los alumnos las completen.

Esta secuencia de actividades, de la 1 a la 4, se aplicó a un grupo de clase de 1.er, 2.o y 3.er grados de educación primaria, en escuelas públicas ubicadas al norte de la Ciudad de México.

Los niños de 1.er grado ya saben contar y algunos mencionan el número cero, pero no hay evidencia de que tengan la noción de los números naturales. Los niños de 2.º grado saben contar y sumar, pero no saben multiplicar y no han trabajado el cero como número. Los niños de 3.er grado tampoco han trabajado el cero como número. El común denominador de los tres grupos es que no han experimentado con un modelo de enseñanza centrado en el tratamiento simultáneo de los números en su sentido ordinal y cardinal, ni con las operaciones de suma y multiplicación en la forma como se propone.

Identificación y análisis de las dificultades que surgen con la implementación del modelo de enseñanza

Una vez que se ha implementado este modelo de enseñanza, el análisis comienza con la identificación de las dificultades con base en los indicadores de las relaciones significantes: *pragmático*, *semántico* y *sintáctico* de los números naturales, ligadas a los principios del modelo formal.

El siguiente paso es intentar explicar estas dificultades con base en el diseño de las categorías de análisis.

Dificultades observadas

A. *Uso de conocimientos pragmáticos y espontáneos de los números en diversas situaciones*.
   A1. Identificar el cero como número (P_1).
   A2. Identificar al sucesor y antecesor de cualquier número (P_3).
B. *Uso semántico de los números en acciones de representación y conteo*.
   B1. Número cero como conjunto vacío (P_1).
   B2. Reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor (P_2).
   B3. Reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores (P_3).
   B4. Identificar el número cero como el punto origen en la recta.
C. *Uso sintáctico en las operaciones*.
   C.1 Usar la forma para representar a los sucesores (P_6).

ANÁLISIS DE LAS DIFICULTADES OBSERVADAS

El análisis se realiza con las tres categorías señaladas: obstructores, argumentos y dotación de sentido.

A continuación se presentan seis episodios parciales de las cuatro actividades del modelo de enseñanza donde aparecen esas dificultades (tabla 2). Los tres primeros episodios corresponden al grupo de 1.er grado, el cuarto episodio al grupo de 2.º grado y los dos últimos al grupo de 3.er grado.

Tabla 2.
Selección de los episodios

Grupo	*Episodio (E_i) parcial de la actividad*	*Siglas*
1.er grado	E_1 Adivina quién soy E_2 ¿Podemos construir el siguiente? E_3 Como soy,	M – Maestra N_s – Niños todos Ne – Nicole N_1, N_2,… cuando es un niño cualquiera. Letra inicial del nombre cuando es un niño particular.
2.º grado	E_4 ¿Podemos construir el siguiente?	
3.er grado	E_5 ¿Podemos construir el siguiente? E_6 Construir las tablas de	

Para el análisis de estos episodios se presenta un extracto seleccionado que muestra las dificultades observadas. A continuación, se hace el análisis con el apoyo de las categorías señaladas antes.

E_1 *Adivina quién soy*

1. *M: ¿Qué tengo aquí?*
2. *Ns: Una bolsa.*
3. *M: ¿Qué tiene la bolsa?*
4. *N1: Nada* [La maestra introduce algunos objetos a la bolsa y luego la vacía frente a ellos]
5. *M: ¿Cómo quedó la bolsa?*
6. *N2: Vacía.*
7. *M: ¿Cómo podemos saber que mi bolsa está vacía?*
8. *A: Porque no tiene nada.*
9. *F: Porque si no metes algo, no tienes nada.*
10. *E: Si está vacío, no está pesado.*
11. *Ne: Si le metes algo, ya está lleno.*
12. *E: O por números.*
13. *M: ¿Cómo dijiste?*
14. *Ns: Por números.*
15. *M: ¿Y cuál creen que sea el número que debe de estar aquí?*
16. *Ns: El uno, el dos, el tres, …*
    […]
17. *N3: Un cero.*
18. *M: ¿Quién es ese número?*
19. *Ns: Nada.*
20. *M: ¿Nada?*
21. *Ns: Cero.*
22. *M: ¿En dónde lo coloco? [la maestra se refiere a la bolsa que representa el número cero, para colocarla en la semirrecta pintada en la pizarra].*
23. *F: Hasta el final* [señala al extremo izquierdo de la semirrecta].
24. *M: ¿Hasta el final? ¿fue lo último que hicieron?*
25. *F: ¡Ah! ¡En el primero!* [corrige y cambia final por primero].

En el episodio se observan las dificultades B1 y B4, los niños tienen dificultades para identificar *el número cero como conjunto vacío*. Esto se puede entender que es debido a un obstructor cognitivo proveniente de su conocimiento previo (OB 1) del cero como cifra, lo que también les dificulta identificar al *número cero como primer* número (A1), pues han aprendido que el primer elemento de la secuencia contadora es el uno, como lo expresan N_s (16) al empezar por el uno. Sin embargo, la respuesta de N_3

(17) indica que reconoce que cero va antes que el número uno, lo que es recapitulado por los demás niños N_s (19 – 21).

La dotación de sentidos aparece en las primeras líneas (1 – 7), al relacionar las palabras *nada* y *vacío*: N_1 (4); y N_2 (6). El alumno A (8) hace un razonamiento inductivo (APS 1) al usar la palabra *nada* para justificar el *vacío*, con lo cual dota de sentido intermedio (DS 1) a la ausencia de elementos, dando la pauta a otros sentidos intermedios expresados como *no metes algo, no tiene nada, no está pesado y lo que no es lleno* (líneas 9-11), N_e (11) verbaliza su deducci*ón* (APS 2) con la acción de no introducir elementos y la relaci*ón de* dos nociones distintas (masa y peso).

De las líneas 12 a 16, se observa un razonamiento abductivo (APS 3), cuando E (12), hace una inferencia hipotética al proponer el uso de números para referirse al vacío; pero para otros niños N_s (16) tienen la dificultad para nombrar al vacío. N_3 (17) deduce que el número que se busca es el cero, lo que es reafirmado por sus demás compañeros N_s (19-21).

En la línea 22, se observa la dificultad B4, cuando se les pregunta en qué punto de la recta van a colocar la bolsa del número cero. Para unos niños es indiferente si el principio del segmento es a la izquierda o a la derecha porque aún no han establecido que el orden es de izquierda a derecha F (23). Esta es una dificultad para *identificar que el cero es un punto origen de la recta*. Esto es una ausencia en el modelo de Von Neumann, dado que no hay referencias que den cuenta de la linealidad y direccionalidad del orden. El alumno F (25) manifiesta una dotación de sentido intermedio (DS 1) cuando verbaliza y exclama ¡Ah! ¡En el primero! corrigiendo su hipótesis inicial, precisando además los puntos de referencia en la recta: principio y final.

E_2 *¿Podemos construir el siguiente número?*

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *N_s: El uno.*
3. *M: ¿Cómo le haremos para construir el que sigue?*
4. *Ne: Tomar otra bolsa y ponerle el uno.*
5. *M: ¿Qué tenemos aquí?* [mostrando la bolsa vacía].
6. *N_s: Vacía.*
7. *M: Vacío, pero necesito…*
8. *N_s: El uno.*
9. *M: ¿Cómo le haremos, porque esta bolsa está vacía?*
10. *N_s: ¡Póngale el uno!*
11. *M:* [introduce la bolsa del cero que se construyó previamente y les pregunta].
12. *M: ¿Cuántas bolsas hay adentro?*
    […]
13. *N_s: Una.*
    […]
14. *M: ¿Qué número se formó aquí?*
15. *N_s: Un uno.*
16. *M: ¿Por qué es uno, Emiliano?*
17. *E: Porque el uno es primero.*
18. *M: Nicole...*
19. *Ne: Porque el uno va después que el cero.*
20. *M: ¿Dónde lo coloco?*
21. *N_s: En el primero.*
22. *M: ¿En el primero? ¿Quién está en el primero?* [señala al cero que está colocado en la recta].
24. *N_s: Un número cero.*
25. *E: Lo pasas para el segundo* [se refiere a la derecha del cero, en la recta].

En este episodio se observa la dificultad B3 y B2. Se puede apreciar que una vez situado el número cero en la recta en el episodio anterior en las líneas (1-3), los niños saben que su sucesor es el uno, dando un sentido intermedio (DS 1) a la expresión *el que sigue*. Sin embargo, cuando Ne (4) dice: *tomar otra bolsa y ponerle el uno*, se observa la dificultad para identificar que *todo el sucesor de cero contiene a la bolsa del cero*, porque los niños consideran que basta con etiquetar con el número *uno* otra bolsa vacía; pero entonces no es el uno, sigue siendo la bolsa del cero. Esta dificultad persiste en (6-10), puesto que no identifican que el número uno ha de contener el elemento cero. Se puede decir que esta dificultad se debe a un obstructor cognitivo (OB 1) que proviene de cómo los niños han aprendido que la secuencia contadora comienza por el número uno.

La acción que realiza la maestra (11, 12 y 14) frente a todo el grupo, al introducir la bolsa del número cero dentro de la bolsa del uno, permitió que los niños N_s (15) observaran que ese *número es el uno* y contiene al elemento cero (ver P_2). Pero para otros niños (líneas 17 y 21) sigue siendo un obstructor (OBS 1) el seguir la lógica de construcción y usar la reversibilidad para identificar que *el cero es el antecesor del uno*. Es hasta después del argumento deductivo (APS 2) de Ne (19) cuando dice *el uno va después del cero*, lo que lleva a E (24) a corregir su respuesta, con el argumento inductivo (APS 1) de que este número va a la derecha del cero.

E_3 «*Como soy*»

1. *M: ¿Quién va primero?*
2. *Ns: El uno.*
3. *M: ¿El uno va primero?*
4. *Ns: El cero, el cero…*
   […]
5. *M: ¿Quién sigue después del cero?*
6. *Ns: El dos.*
7. *M: Escuchen. ¿Quién sigue después del cero?*
8. *Ns: El uno.*
9. *M: ¿Quién está antes del uno?*
11. *Ns: El dos.*
12. *M: ¿Quién?*
13. *A: El dos.*
14. *Ns: ¡El cero!*
15. *M: Axel dice que el dos. ¿El dos está antes del uno?*
16. *Ns: ¡Nooo!*
17. *M: ¿Quién está antes del uno?*
18. *Ns Cero.*
19. *M: ¿Quién está antes del cero?*
20. *Ns: Nadie.*
21. *M: ¿Quién es el primer número que aparece?*
22. *Ns: Cero, el cero.*

En este episodio la dificultad que se observa es A2. En el episodio anterior dotaron de sentido (DS 1) al proceso de construcción de los números cero y uno, pero se sigue observando en las líneas (1-12) que los niños tienen dificultades para *identificar el sucesor y antecesor del número uno*. Esto podría ser debido a una manifestación del obstructor cognitivo (OB 1), que una vez más está ligado a la manera en que los niños han aprendido los números, no están acostumbrados a reflexionar los procesos de construcción, lo que se puede interpretar como una respuesta sin pensar cuando dicen «dos» (líneas 6 y 12), por lo que la maestra vuelve a centrarlos haciendo determinadas preguntas M (3, 5, 7, 9, 11), dificultad que persiste en las respuestas de N_s (10) y A (12). En las líneas (16 a 21) los niños expresan la dotación de sentidos intermedios (DS 1), dando cuenta de la relación de antecesor y sucesor entre el cero y el uno como producto de la construcción.

E_4 *¿Podemos construir el siguiente?*

En este episodio los niños de este grupo (7-8 años) ya han construido el cero y el uno.

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *Ns: Sigue el dos [organizados en equipos de tres o cuatro niños construyen los antecesores del número 2].*
3. *M: Vamos a revisar los números que han hecho… En este equipo tienen una bolsa del 2, veamos que hay adentro, ¿está el…?* [la maestra toma la bolsa etiquetada con el número dos que hicieron los niños de uno de los equipos (ver figura 14)].

Fig. 14. Bolsa construida por los niños.

4. *Ns: El uno* [la maestra extrae la bolsa/número uno, mostrando a todo el grupo que la bolsa/número uno contiene a la bolsa/número cero (ver figura 15)].

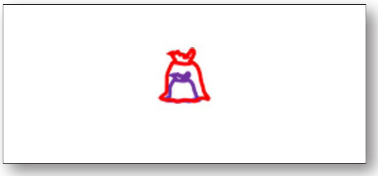


Fig. 15. Bolsa/número uno.

5. *M: ¿Está completo?* [la bolsa/número uno contiene a la bolsa/número cero].
6. *Ns: Sí, dentro del uno está el cero.*
7. *M: ¿Es correcto para tener el dos?* [pero para completar la bolsa/número dos falta otra bolsa, la del cero que es la bolsa vacía (ver figura 16)].

Fig. 16. Así debió quedar la bolsa/número dos.

8. *Ns: ¡Sí!, ¡Nooo!…*
9. *M: ¿Qué le falta?*
10. *J: Otro elemento.*
11. *Z: El cero* [Zoe entrega su bolsa del cero].
12. *M: ¿Qué tenemos que hacer?*
13. *Ns: Meterla dentro de la bolsa del dos.*

14. *M: Entonces ahora, ¿cuántos elementos tiene?*
15. *Ns: El uno y el cero.*
16. *M: ¿Está correcta?* [en este otro equipo la bolsa del número 2 tiene dentro dos bolsas vacías etiquetadas una con cero y otra con el uno (véase figura 17)].

Fig. 17. A la bolsa/número uno le falta la bolsa/número cero.

17. *Ns: ¡Nooo!*
18. *M: ¿Qué le falta?*
19. *Ns: La bolsa del cero adentro.*
20. *M: ¿Adentro de quién?*
21. *N1: Del uno* [otro niño del equipo entrega una bolsa vacía con la etiqueta del cero para meterla en la bolsa de uno].
22. *M: Ya tenemos las dos, ahora ¿qué sigue?*
23. *Ns: Meterlas a la bolsa del dos.*
    […]

Fragmento del episodio de la construcción del número nueve

23. *M: ¿Hubieran imaginado que dentro del número nueve hay todos estos números?*
23. *Ns: ¡Nooo! ¡Está bien gordo!*
23. *N2: Y va ser más gordo que nunca, ¿imagínate el diez?*
23. *N3: ¡Se tendría que tener una bolsa de la basura para el cien!*

En este episodio se observa la dificultad B3 y B2. La tarea consistió en construir la bolsa del número dos, trabajando en equipos. En las líneas 1-9, los niños de un equipo tuvieron la dificultad para *reconocer que todo sucesor contiene a todos los anteriores*, pues dentro de la bolsa etiquetada con el número dos, solo contenía la bolsa del número uno, faltando la bolsa vacía etiquetada con el número cero. Esto se esquematiza en la figura 18:

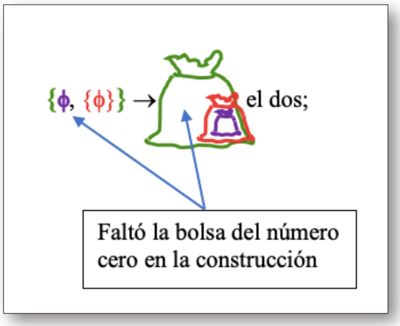


Fig. 18. Construcción incompleta del número dos.

Para algunos niños, como N_s (7) la dificultad ha sido superada, pero el resto del grupo N_s (9) no ha encontrado sentido a la construcción ordinal de cada número, al contestar «¡Sí!, ¡Nooo…!» a la pregunta de M (8). Hasta que J (11) expresa que falta otro elemento, dotando de sentido la acción de iterar (DS 1), acción que le sigue Z(12) (DS 1) cuando entrega una bolsa vacía como número cero, por lo que los N_s (14) siguen la lógica de construcción (DS 1) e indican que se deben introducir estos dos elementos en la bolsa del número dos.

En otro equipo, los niños tienen dificultad para *reconocer que el cero es el único número que pertenece a cualquier sucesor*, pues en su bolsa que han construido etiquetada con el número dos, tienen dos bolsas vacías, una etiquetada con el cero y la otra con el número uno, les falta la bolsa vacía del número cero dentro de la siguiente bolsa (la del uno). La figura 19 ilustra lo que construyeron.

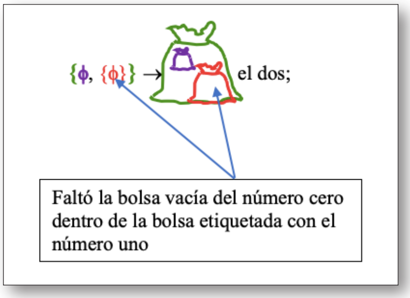


Fig. 19. La bolsa etiquetada con el número uno está vacía.

Después de la revisión con el equipo anterior, en este equipo los N_s (18 y 20) ya explican que la bolsa del número dos no está completa, lo que da evidencia de dotación de sentido intermedio (DS 1). Este proceso permite que N_1 (22) indique que el cero está en el uno, acto seguido N_s (24) exclaman que deben meter las dos bolsas (cero y uno) a la bolsa del dos, dando sentido de ordinalidad a la construcción.

Con el uso de un proceso recursivo en la construcción de cada número, los niños logran dotar de sentido (DS 1), superando el obstructor (OB 1) en la construcción del número nueve. N_2 (27) usa un argumento inductivo (APS 1) para verbalizar la imagen mental que se hace del tamaño de la bolsa del número diez N_3 (28) hace un razonamiento inductivo (APS 3) al exclamar en voz alta el tamaño de la bolsa del número cien. Esta inferencia les ha permitido desarrollar procesos de generalización, pues intuitivamente le han dado sentido a que el número siguiente va a necesitar una bolsa de mayor volumen.

E_5 ¿Podemos construir el siguiente?

Los alumnos de tercer grado construyen el número uno.

1. *M: ¿Podemos construir el siguiente?*
2. *C: Sí.*
3. *M: ¿Cómo lo haremos?*
4. *C: Sumándole.*
5. *M: ¿A quién tenía anteriormente?*
6. *G: Al cero.*
7. *M: Entonces esta otra bolsita, ¿cómo está?* [se refiere a la bolsa del número uno].
8. *Ns: Vacía.*
9. *M: Pero si meto adentro de esta bolsa vacía la bolsa del cero, ahora ¿cuántos elementos tiene?*
10. *G: Uno.*
11. *M: ¿Qué número le voy a dar a esta nueva bolsa?*
12. *V: Uno.*
13. *M: Entonces para que pueda ser el uno es hasta que…*
14. *G: ¡Hasta que entre el pasajero!*

Aunque en este episodio no se observan dificultades, es importante mostrar c*ó*mo los niños usan sus conocimientos previos para dotar de sentido (DS 1) a la construcción del sucesor. C (4) usa la suma en su significado de *añadir*. G (14) usa la palabra *pasajero* para nombrar la bolsa que contiene al elemento cero. Obs*é*rvese que en el primer caso se usa un código convencional, mientras que en el segundo se usa un código personal.

E_6 *Construimos la tabla de multiplicar*

(Construyendo el sucesor de $6 \cdot 3$).

1. *M: ¿Quién sigue?* [la maestra se refiere a qué producto sigue] *¿Cómo lo vamos a leer?*
2. *Ns: Siete veces tres.*
3. *M: ¿Quién era el anterior?*
4. *G: Seis* [señalando con su mano en la pizarra el $6 \cdot 3$].
5. *M: ¿Cuántas veces lo vuelves a iterar?*
6. *G: Una vez más* [Valeria usa la semirrecta para representar la iteración de 3 en 3, a partir del 10 + 8].
7. *M: ¿A qué número llegaste?*
8. *V: Al 21.*
9. *M: ¿Cómo lo vamos a representar?* [Valeria escribe en la pizarra 10 + 1].
10. *M: ¿Qué le falta? ¿Qué tiene que hacer?*
11. *O: Tiene que poner otro uno* [el niño escribe en la pizarra: 10 + 11].
12. *M: ¿Es correcto?*
13. *Ns: ¡Nooo!*
14. *M: ¿Cuántas fichas rojas tiene?*
15. *Ns: Dos.*
16. *M: Entonces…*
17. *Ns: Dos veces 10.*
18. *M: ¿Cómo será?*
19. *Ns: Dos veces diez.*
20. [Valeria escribe: 10 + 2].
21. *M: ¿Está bien?*
22. *Ns: No ahí es 12.*
23. *M: Acuérdate como lo hemos hecho* [Valeria escribe $2 \cdot 10$].
24. *M: ¿Qué le falta?*
25. *Ns: El uno.*
26. *M: ¿Cómo le hacemos?*
27. *G: Más uno.*
28. *M: ¿Cómo lo escribimos?*
29. *G: Dos veces 10 más uno.*

En este episodio se observa la dificultad C1. En las primeras líneas (1-9) se presenta la dotación de sentido (DS 1) para identificar que el producto que sigue a $6 \cdot 3$ es siete veces tres N_s (2). Es importante señalar que no hay manifestación del obstructor (OB 2) para identificar que el producto $6 \cdot 3$ está antes del producto $7 \cdot 3$. G (6) logra argumentar inductivamente (APS 2) que se necesita iterar una vez más la unidad.

Caso contrario en V (8) que, apoyándose en la semirrecta, itera correctamente el número *tres*, después del producto anterior $6 \cdot 3$ pero tiene dificultad con el *uso sintáctico de* $2 \cdot 10 + 1$. para representar el producto de $7 \cdot 3$. Esta dificultad es recurrente en otros alumnos, como O (11) que escribe en la pizarra $10 + 11$, lo que se puede entender como un obstructor cognitivo (OB 1), dado que no han tenido experiencia de usar los números de esta forma. Después en las líneas (12-19) hacen una serie de reflexiones y ensayos sin lograr escribirlo correctamente, V (20) escribe solo un diez, tal y como lo hicieron en la suma, pero no da cuenta de la iteración del 10, dificultad que proviene del obstructor cognitivo (OB 2) para usar la relación de reversibilidad. La aclaración de N_s (22) para corregir lo que V(20) escribió en la pizarra ($10+2$), en realidad es doce y no dos veces diez, es un argumento inductivo (APS 1); lo que permite a Valeria modificar su respuesta V (24), pero solo itera dos veces la unidad: $2 \cdot 10$. No se ha dado cuenta de que en la semirrecta avanzó un lugar más del segundo 10, por lo que intervienen N_s (25) y dicen que falta un uno, argumento que es retroalimentado por G (27) al deducir (APS 2) y afirmar que falta uno más y verbalizando «dos veces diez más uno».

CONCLUSIONES Y CONTINUIDAD DE LA INVESTIGACIÓN

Para cerrar este espacio de discusión, se insiste en que el objetivo de este trabajo es averiguar las dificultades de aprendizaje que los niños enfrentan cuando se les enseña con un modelo fundamentado en la estructura formal de Von Neumann, centrado en el principio de la ordinalidad a partir de la construcción del número cero e identificando que cualquier sucesor contienen a todos los anteriores.

Conforme se repetía el proceso de construcción de cada número (usando la iteración como principio de construcción) y la edad de los niños aumentaba, se remontaban las dificultades. La interacción que se dio en la construcción de los intertextos facilitó la dotación de sentidos intermedios, posibilitó la producción de procesos de significación y propició una ruptura de los conocimientos numéricos adquiridos en la familia y la escuela, facilitando un pensamiento tendiente a la abstracción.

Los niños de 1.er grado lograron superar las dificultades utilizando los argumentos de inducción, deducción y abducción para significar las acciones dirigidas a la construcción del conjunto vacío como número cero.

Los niños de 2.º grado superaron rápidamente las dificultades en la construcción de los primeros cinco números, realizaron procesos de lectura/transformación en sus primeros acercamientos a la noción de cero como conjunto vacío y cómo el único número que es el antecesor de todos los sucesores. Dotaron de sentido la construcción del sucesor al completar las celdas en la tabla de suma, usando la forma 10 + *a*, pero tuvieron dificultad al usar la forma $a \cdot 10 + b$, para representar al producto en cada celda de la tabla de multiplicación.

Los niños de 3.er grado no presentaron dificultades en la construcción de los primeros números, incluyendo el cero. Dotaron de sentido intermedio la noción de sucesor al introducir la palabra «pasajeros» que hizo un estudiante de este grupo, permitiendo usar pragmáticamente el principio de ordinalidad. Se observó la dificultad al usar la forma , para representar el producto en cada celda en la tabla de multiplicación.

Durante el diseño del modelo de enseñanza se encontró que, en el modelo de Von Neumann y Hamilton y Landin (1961), hay una ausencia para representar la linealidad y el orden en la construcción de los números naturales, por lo que se introdujo el uso de una semirrecta como un recurso didáctico para este fin. Este recurso permitió que los niños establecieran la linealidad del orden de los números, colocando la bolsa del cero como el primer elemento de la construcción. Los niños pudieron usar la forma que se les propuso para los números mayores que diez y para los números mayores de usaron la forma .

REFERENCIAS

Aguado, A. (1940). *Aritmética del párvulo. Método por imágenes*. Madrid: Editorial Autor.

Barthes, R. (1985). *La aventura semiológica*. Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.
Condorcet, N. (1854). *Moyens d'apprendre a compter*. París: Imprimeur libraire.
Filloy, Y. E. (1999). *Aspectos teóricos del* álgebra educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Filloy, E. Rojano T. y Puig L. (2008). *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach*. EE. UU.: Springer.
Hamilton, N. y Landin, N. (1961). *Set Theory and The Structure of Arithmetic*. Boston: Allyn and Bacon, Inc.
Mosterín, J. (2000). *Los lógicos*. Madrid: Espasa Calpe.
Peirce, Ch. (1987). *Obra lógico semiótica*. Madrid: Taurus.
SEP (2011). *Plan de estudios*. México: Secretaría de Educación Pública.
SEP (2015). *Desafíos matemáticos*. Libro para el alumno, primer grado. México: Secretaría de Educación Pública.
Talizina, N. (2000). *Manual de Psicología Pedagógica*. San Luis Potosí, México: Universidad Autónoma de SLP.
Talizina, N. Comp. (2001). *La formación de las habilidades del pensamiento matemático*. San Luis Potosí, México: Universidad Autónoma de SLP.

Difficulties in the construction of natural numbers including zero with 6-8 year-old students

María Leticia Rodríguez González
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN - México
leticia.rodriguez@cinvestav.mx

Eugenio Filloy Yagüe
Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN - México
e.filloy@cinvestav.mx

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valencia. España
bernardo.gomez@uv.es

The general aim of this piece of research is to study the learning difficulties that children from 1st to 3rd grades of primary have in the construction of natural numbers, including zero, by means of a sequence of activities that follows the formal model of Von Neumann to simultaneously work with the principles of ordinality and cardinality.

The theoretical support draws on the idea by Filloy, Rojano and Puig (2008, pp. 41 y 42), which is the formal analysis of the problem that allows us to see its origin and cause by reducing it to its primary elements. In the case of the construction of natural numbers, these primary elements are, according to the formal model of Von Neumann (Hamilton and Landin, 1961), in iteration as the most basic operation and as the basis of the recursive process. This model proposes a logic construction that requires a Mathematical Sign System (SMS) based on the construction of zero as a number and as an empty set.

The questions that guide the research are:

– What elements should be considered to design a teaching model that allows the Formal Model of Von Neumann to be translated into concrete activities aimed at primary school children?
– What are the learning difficulties that are observed when children construct natural numbers based on the formal model of Von Neumann?

The methodological support with which the research is organized is made up with the local theoretical models (MTL) and its components. The formal component is the theoretical basis for the design of the teaching component, as well as the cognitive and communication components. They are the basis for interpreting the actions of students in teaching activities.

For this particular case, this MTL has been designed:

– Formal component: it is based on Von Neumann's Model, because it uses iteration and recursion encapsulated within axioms of the formal model and in the finite induction principle, for the construction of the successor.
– Teaching component: it is the sequence of activities articulated as a collection of concrete texts supported by the use of manipulative material, the product of a translation of the formal model so that students understand this formal model and can convert it into increasingly abstract texts with a conventional mathematical meaning.
– Cognitive component: it is based on the theory of activity (Talizina, 2001) and it seeks to identify the obstructions that generate difficulties in the transition from action to operation through assimilation, along with the development of reversibility actions to consolidate the generalization and abstraction of thought.
– Communication component: it is based on the semiotics of Peirce (1987), the attention is focused on the significant relationships (between syntax, semantics and pragmatics), on the processes of meaning and the logic of use of SMS, to identify and understand the difficulties that students have when producing meaning and constructing meaning of the activities proposed with the teaching model.

Once the experimentation of the teaching model with children had been carried out, the class sessions were analyzed with the contributions of the formal, cognition and communication components in three moments:

1. Recurring difficulties that students have with the use of numbers. These difficulties were classified into three axes:
   a) Pragmatic and spontaneous knowledge.
   b) Semantic use.
   c) Syntactic use of operations.
2. The analysis categories were designed, which are the product of the contributions of each component, organizing them into three blocks: Obstructions from processes and cognitive knowledge; arguments of induction, deduction and abduction as processes of significance; and provision of sense of SMS.
3. The difficulties were explained in light of the categories.

The results were highlighted and explained the difficulties that students had with the activities of the teaching sequence. School experience and age can influence, but they don't determine learning, so this opens up new horizons of possibilities to develop abstract math thinking.