

# La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas

María Fernanda Vargas, Universidad de Costa Rica (Costa Rica)

José Antonio Fernández-Plaza, Universidad de Granada (España)

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Universidad de Granada (España)

---

## La derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato: Un análisis a las tareas propuestas

### Resumen

*Dentro de una investigación en la que se estudia el significado que el profesorado de matemáticas atribuye al concepto de derivada, el presente artículo se enfoca en describir el significado que se manifiesta en los libros de texto mediante el análisis de las tareas que proponen. Para ello se analizan las tareas para el tema de derivadas por cinco libros de texto utilizados en España para 1º de Bachillerato. Usando un método del análisis de contenido y un sistema de categorías basado en el análisis didáctico, observamos un claro predominio de tareas algorítmicas, en las que se da más importancia a las reglas de derivación que al propio concepto y su significado.*

**Palabras clave.** Libro de textos; derivada; análisis didáctico; tareas escolares.

## The derivative in the textbooks of non-compulsory secondary education: An analysis of the proposed tasks

### Abstract

*Within a research that studies the meaning that mathematics teachers attribute to the concept of derivative, this article focuses on describing the meaning that is manifested in textbooks through the proposed tasks. To do this, the tasks for the topic of derivative of five textbooks used in Spain for the 1st year of non-compulsory secondary education ('bachillerato') are analysed. By using the method of content analysis and a system of categories based on didactic analysis, we observed a clear dominance of algorithmic tasks, in which more importance is given to the derivation rules than to the concept itself and its meaning.*

**Keywords.** Textbooks; derivative; didactic analysis; school tasks.

## 1. Introducción

Los libros de texto han ocupado un lugar importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática debido a su uso como material de consulta, registro de actividades de alumnos, propuesta de ejercicios y problemas, así como por ser un organizador de los contenidos (González y Sierra, 2004). La mayoría de los docentes emplean estos libros como herramienta para planear sus clases, convirtiéndose así en una fuente tanto de contenido como de estilo pedagógico (Pepin y Haggarty, 2001). Desde la investigación en educación matemática, el análisis de libros de texto es una línea incipiente que ha cobrado fuerza en los últimos años para comprender la práctica docente y el aprendizaje de los alumnos. Este auge generó que en el X Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-10) hubiera por primera vez un grupo de discusión sobre libros de texto, además de otras actividades (Fan, 2013).

Según Fan, Zhu y Miao (2013), los trabajos sobre libros de texto pueden agruparse en tres categorías: (a) los centrados en el análisis de distintos libros; (b) los que

consisten en una comparación de libros y; (c) los interesados en el uso que estudiantes o profesores hacen de ellos. En las dos primeras se centran la mayoría de las investigaciones, que consisten fundamentalmente en estudios descriptivos (Fan, 2013).

Para contenidos sobre la derivada, González y Sierra (2002) analizaron la evolución de los conceptos de análisis matemático en los libros de texto españoles desde que fue implantada su enseñanza en el plan de 1934. Su análisis permitió establecer el perfil que caracteriza a cada libro considerado. Balcaza, Contreras y Font (2017) analizaron cómo se desarrolla la noción de optimización en tres libros de bachillerato con el fin de detectar significados que se pretenden abordar en el aula y dificultades. Conejo, Arce y Ortega (2014) analizaron la justificación dada a las reglas de derivación en libros de cuatro editoriales desde distintas legislaciones. Finalmente, en Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017) se comparó el concepto de derivada y contenidos de cálculo diferencial en dos textos universitarios.

Para los profesores, de los libros de texto importa la calidad y diferenciación de sus ejercicios (Pepin y Haggarty, 2001). Estos ejercicios determinan no solo la esencia de lo que los estudiantes aprenden, sino la forma en la que piensan, desarrollan, usan y dan sentido al contenido matemático (Kessler, Stein y Schunn, 2015); por ello, interesa su análisis. En Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2018) nos centramos en las tareas propuestas por tres libros de texto para el tema de derivada. La intención de este artículo es ampliar y profundizar el análisis ahí desarrollado. Abordamos una investigación de tipo cualitativa y descriptiva a fin de analizar el significado de derivada en los libros de texto de 1º de bachillerato a través de las tareas que proponen. Para ello planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Estudiar aspectos sintácticos o de forma de las tareas escolares propuestas por los libros de texto de 1º bachillerato para el tema de derivada.
- Estudiar algunos aspectos semánticos de derivada puestos de manifiesto en los libros de bachillerato mediante las tareas propuestas.
- Analizar algunos de los aspectos cognitivos de las tareas escolares propuestas por los libros de texto de 1º bachillerato para el tema de derivada.

## **2. Marco teórico**

Dado que la línea de investigación basada en libros de texto es relativamente reciente, aún no se dispone de un marco teórico unificado que especifique las herramientas disponibles (Fan, 2013). No obstante, la revisión de trabajos en esta línea permite identificar marcos que se han utilizado para el análisis de tareas. En algunos trabajos se encuentran los modelos genuino y superficial de Verschaffel, Greer y De Corte (2000) o el uso de taxonomías (Brändström, 2005). En nuestro caso, el marco teórico para el análisis e interpretación de los datos será el del análisis didáctico, desarrollado en Rico, Lupiáñez y Molina (2013) y en Rico y Moreno (2016). El análisis didáctico se estructura según cuatro tipos de análisis, cada uno con objeto de estudio distinto, según las dimensiones del currículo de matemáticas (Figura 1).

El primer método de análisis tiene como objeto el significado de los contenidos matemáticos escolares. El segundo contempla los aspectos cognitivos o de aprendizaje de las matemáticas escolares. El tercero se centra en cuestiones relacionadas con la instrucción, y así de lo referido al proceso de enseñanza y aprendizaje incluida la planificación, expectativas de aprendizaje, selección de actividades y estrategias de enseñanza. El cuarto análisis examina aprendizajes logrados y evaluación (Rico y

Moreno, 2016). En nuestro caso empleamos dos análisis específicos: a) análisis de *instrucción* (para el estudio y diseño de tareas, indagando en sus variables, funciones y tipos); b) análisis de *significado* (para aproximarnos al significado de derivada en los libros de texto mediante las tareas propuestas).

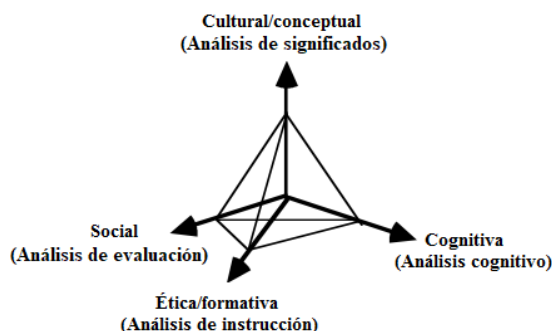


Figura 1. Relación del Análisis Didáctico con dimensiones del currículo

### 2.1. Análisis de tareas escolares

Por tarea matemática escolar entendemos “una propuesta que solicita la actividad del alumno en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje” (Moreno y Ramírez, 2016, p. 244). Para su análisis, organizamos las categorías de Moreno y Ramírez (2016) y de Gómez y Romero (2015) en tres bloques:

- Aspectos sintácticos (forma): consideramos la estructura y formulación de la tarea, además de los materiales y recursos necesarios para su resolución.
- Aspectos semánticos (significado): consideramos el análisis de contenido en Rico (2013, 2016), con atención a contenido, sistemas de representación, contexto, situación y tipo de función involucrada en la derivada.
- Aspectos de aprendizaje o cognitivos: consideramos la demanda y capacidad de la tarea, además del manejo de sistemas de representación que se solicita.

Las dos primeras categorías también se estudiaron en Vargas, Fernández-Plaza y Ruiz-Hidalgo (2018). Ahora incluimos las tres categorías y ampliamos la muestra de libros. En el siguiente apartado describimos el detalle del sistema de categorías.

### 3. Marco metodológico

Para este trabajo se consideraron los libros de texto de 1º de bachillerato de las editoriales Anaya (Colera, Oliveira, García y Santaella, 2008), Bruño (Arias y Maza, 2015), Edelvives (Cardona y Rey, 2015b, 2015a), Santillana (Antonio et al., 2015) y SM (Vizmanos, Hernández, Alcaide, Moreno y Serrano, 2008). La elección se basa en una consulta a centros educativos de Granada sobre los libros de texto utilizados, resultando ser estos los de mayor frecuencia y de más fácil acceso. Son libros que se caracterizan por estar organizados en capítulos que abordan distintos contenidos. Se presentan definiciones, propiedades y ejemplos de forma organizada, por lo que sirven de guía para el estudio de estos contenidos. Es llamativa la cantidad de tareas.

Hemos tomado el primer capítulo que cada libro dedica al tópico de derivadas. Aunque el conjunto de libros tiene particularidades y hay diferencias entre ellos, abordan básicamente los mismos contenidos. Una diferencia es que en el libro de Anaya se define la derivada mediante su interpretación geométrica, Edelvives y Bruño lo hacen como la tasa de variación instantánea, mientras que SM y Santillana primero

definen la derivada como un límite y luego hablan de su interpretación geométrica. Solo los libros de SM y Bruño incluían la relación entre derivada y continuidad. Anaya y Santillana abordaban en ese primer capítulo la representación de funciones; y Bruño, además de extremos relativos y monotonía de una función, define puntos de inflexión y curvatura de una función. Analizamos las tareas propuestas dentro del texto y las incluidas en el apartado de ejercicios. La Tabla 1 muestra el número de tareas propuestas por libro, y entre paréntesis la cantidad de ítems por tarea.

Tabla 1. Número de tareas e ítems por libro de texto

Posición de la tarea	Cantidad de tareas propuestas por libro de texto*				
	SM	Anaya	Edelvives	Bruño	Santillana
En el desarrollo del contenido	31 (67)	33 (45)	-	38 (84)	33 (58)
En un apartado de ejercicios	72 (148)	106 (205)	73 (200)	113 (217)	94 (225)
Total	102 (215)	139 (250)	73 (200)	151 (301)	127 (283)

\*Número de ítems entre paréntesis

Entendemos por ítem cada uno de los apartados de la tarea, generalmente numerados o enlistados utilizando letras a), b), c), por ejemplo. La Figura 2 muestra una tarea compuesta por 3 ítems. En total se analizaron 592 tareas equivalentes a 1249 ítems. Para su respectivo análisis se empleó el análisis de contenido. Así destacamos características relevantes de un mensaje, lo cual a su vez facilita la descripción y análisis de datos. Las unidades de información son cada uno de los ítems de la tarea.

Una partícula se mueve sobre un eje según la siguiente ecuación de movimiento:

$$s(t) = 4t^2 - 8t - 3,$$

donde  $t$  indica el tiempo en segundos, y  $s(t)$ , la distancia orientada, en metros, al origen.

a) ¿Dónde está situada la partícula en el momento de empezar a moverse?

b) Estudia la posición de la partícula en los instantes  $t = 1$  y  $t = 5$ .

c) ¿En qué instante la partícula se detiene y cambia de sentido su movimiento?

Figura 1. Tarea 75 del libro SM

### 3.1. Sistema de categorías para el análisis

Nuestro marco teórico brinda categorías y subcategorías iniciales de análisis; no obstante, mediante el análisis de contenido pudimos definir subcategorías de manera inductiva. En total hemos contemplado las 11 variables de la Tabla 2.

Tabla 2. Sistema de categorías en el análisis

Categoría	Subcategoría
Sintáctica	<p><i>Estructura (abierto/cerrado)</i>: Ponte (2004) considera que una tarea cerrada es aquella en la que se expresa con claridad lo que se da y lo que se pide, mientras que una abierta es la que involucra cierto grado de indeterminación en lo que se da, lo que se pide, o en ambas cosas. Señala, además, que las tareas abiertas se pueden clasificar en proyectos o investigaciones. Este tipo de tareas demandan que el estudiante indague sobre la temática para abordar el problema pues no basta con diseñar o emplear algún método de resolución.</p> <hr/> <p><i>Planteamiento (directo/inverso)</i>: para Groetsch (2001), en una tarea directa se dispone de unos datos, cierto procedimiento y se solicita un resultado, el cual es único. En las tareas inversas, se desconocen los datos o el procedimiento que producen cierto resultado; estas tareas pueden tener múltiples soluciones o ser insolubles. Un ejemplo de tarea inversa es cuando se pide hallar una función</p>

Tabla 2. Sistema de categorías en el análisis

Categoría	Subcategoría
	cuya derivada sea tal, o cuando se dan condiciones y se pide graficar.
	<i>Materiales:</i> analizamos también el material o recurso didáctico necesario o propuesto para resolver el ítem.
Significado	<i>Contenido:</i> identificamos el contenido matemático en cada uno de los ítems.
	<i>Sistemas de representación:</i> prestamos atención a los distintos sistemas de representación que aparecen en la formulación de la tarea. Estos pueden ser: verbales, gráficos, numéricos, simbólicos y/o tabulares.
	<i>Situación:</i> agruparemos los ítems según en la situación PISA en que se presentan (OECD, 2016): personales, sociales, laborales o científicas.
	<i>Contexto de la derivada*:</i> tomamos los distintos contextos matemáticos, funciones o necesidades a las que la derivada atiende en cada uno de los ítems.
	<i>Tipo de función involucrada:</i> el tipo de función influye en la complejidad de la tarea. Para su análisis consideramos los siguientes rasgos (Jiménez, 2017): polinómico, potencia de exponente negativo, radical, función algebraica, exponencial, logarítmica, trigonométrica, trigonométrica inversa, producto, cociente, composición de funciones, función a trozos y valor absoluto. Entendemos por función simple a la que tiene solo uno de los siguientes rasgos: polinomio, trigonométrico, trigonométrica inversa, logarítmico, exponencial o radical. De lo contrario es no simple con n rasgos y conlleva mayor dificultad.
Cognitiva*	<i>Demanda cognitiva de la tarea:</i> Su descripción se detalla en la Tabla 3.
	<i>Capacidad matemática fomentada:</i> adoptamos las capacidades de los marcos PISA (OECD, 2016) sobre comunicación; matematización; representación; razonamiento y argumentación; diseño de estrategias para resolver problemas; uso de operaciones y lengua simbólica formal; y de herramientas matemáticas.
	<i>Manejo del sistema de representación:</i> analizamos si la tarea engloba transformaciones dentro de un sistema de representación (procesamiento) o requiere de traducciones de un sistema a otro (conversión) (Duval, 1999). Una tarea de procesamiento sería calcular la derivada en un punto dado el criterio de la función (trabajo dentro del sistema simbólico); una de conversión sería calcular la derivada en un punto dada la gráfica de la función (tomar datos gráficos para luego trabajarlos en sistema simbólico o numérico).

\*Categorías no considerados en el trabajo previo

Para analizar la demanda cognitiva de la tarea utilizamos en primer lugar la taxonomía de Stein, Grover y Henningsen (1996), en la cual se consideran cuatro tipos de tareas, según nivel de demanda. La Tabla 3 recoge esta caracterización.

Tabla 3. Taxonomía propuesta por Stein y otros (1996)

Tipo de demanda	Descripción
Memorización	Son aquellas tareas que piden al estudiante recordar hechos, reglas o definiciones. La respuesta implica una reproducción exacta y memorizada. No se emplea ningún tipo de procedimiento.
Procedimiento sin conexión	El fin de la tarea es aplicar un algoritmo para resolver un problema, por delante de comprender. No se requieren explicaciones y no hay ambigüedad sobre lo que hay que hacer y cómo hacerlo.
Procedimiento con conexión	Tareas con un procedimiento para ser resueltas pero cuya intención va más allá del proceso mismo, intentando desarrollar niveles más profundos de comprensión acerca de conceptos e ideas matemáticas. No se resuelven solo conociendo el algoritmo, requieren esfuerzo.

---

Hacer matemática	Estas son las tareas de mayor demanda cognitiva, ya que requieren un pensamiento no algorítmico, pues el camino de resolución no está predeterminado. Requieren una verdadera comprensión de los conceptos, procesos, propiedades y así establecer relaciones entre estos
------------------	---

---

Consideramos pertinente concretar estas categorías para el tópico específico de derivadas, por lo que creamos una clasificación complementaria a la anterior:

*Procedimiento sin conexión:*

- Cálculo directo: estos ítems se caracterizan por su demanda explícita. Por ejemplo, calcular la derivada de una función, determinar el valor de la derivada en un punto, hallar la tasa de variación media o determinar alguna imagen.
- Cálculo indirecto: estas tareas demandan recordar el procedimiento para resolver lo solicitado. Incluimos tareas del tipo “determine la ecuación de la recta tangente...”, “halle extremos relativos...”, que como las anteriores, son bastantes algorítmicas pero el procedimiento de resolución no se menciona.

*Procedimiento con conexión:*

- Representación gráfica: con un nivel de representación conociendo el criterio y otro nivel de representación gráfica de función que cumple ciertas condiciones. La primera es más algorítmica y la segunda requiere de más interpretación.
- Identificación: son ítems cuya demanda es identificar en una gráfica o situación algún punto o intervalo que cumpla cierta condición. El proceso no siempre está definido y es más una aplicación interpretativa de los resultados.

*Hacer matemática:*

- Justificación y argumentación: una última categoría agrupa ítems en los que para su solución el estudiante debe aplicar y enlazar resultados. Se incorporan ítems como “justifique...”, “crees que puede existir...” y se busca argumentar por delante de aplicar directamente un proceso o resultado (aunque se incluya).
- Resolución de problemas y optimización: aunque no siempre, la resolución de problemas requiere un nivel de demanda distinto ya que el estudiante debe formular una función que modele el caso, ejecutar procesos matemáticos, para interpretar esos datos en un contexto posiblemente extra-matemático.

## 4. Resultados

Esta sección describe los resultados obtenidos tras analizar cada uno de los aspectos antes descritos. Para ello, complementamos la taxonomía de Stein y otros (1996) con la clasificación propia que hemos presentado.

### 4.1. Aspectos sintácticos (forma)

En cuanto a la *estructura* de la tarea son pocos los ítems abiertos encontrados. El libro de SM propone, al final del capítulo, un proyecto en el que se pide analizar ciertos datos y funciones respecto al sida. Aquí el alumno debe buscar datos en Internet además de hacer uso de otras herramientas gráficas para su solución. Este tipo de tareas no son usuales. También consideramos como abiertas dos ítems propuestos por Santillana, dos de Anaya y uno de Edelvives, en las cuales se planteaban cuestiones como “¿Pueden existir dos funciones que tengan la misma derivada?”

Nótese aquí que la pregunta es bastante general y abierta para un estudiante, en la que no se le especifica tipo de función, por ejemplo, lo que implica que de primera instancia el estudiante deberá tomar su tiempo para analizar la afirmación en distintos tipos de funciones, podría discutirlo con compañeros, entre otros.

Cabe distinguir entre tareas de estructura o planteamiento abierto y tareas de respuesta “abierta”. Se hallaron tareas que, aunque eran cerradas, su resolución da la posibilidad de distintas respuestas. Por ejemplo, en la figura 3 se aprecia que los datos y lo que se solicita está claro, sin embargo, no hay una única respuesta correcta.

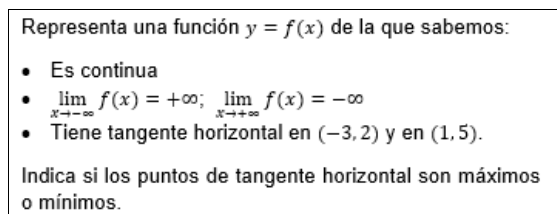


Figura 3. Tarea 55 del libro Anaya

Respecto al *planteamiento inverso/directo*, hay un predominio de tareas directas. En los casos de Anaya y Santillana, solo 19 ítems se plantean de forma inversa, en SM son 12, en Edelvives son 11 y en Bruño solo 2. Las tareas inversas halladas son en su mayoría como la de la Figura 3. Son tareas interesantes, pues no se trata de aplicar un procedimiento, sino de entenderlo, aunque no son usuales. La mayoría de tareas son directas, lo que sugiere el objetivo de aprender y aplicar procedimientos establecidos.

En cuanto a los *materiales*, la mayoría de los ítems son propuestos para ser resueltos empleando solo papel y lápiz; sin embargo, en 16 ítems del libro SM se da la indicación de usar calculadora. Aunque en muchos casos no se explicita el uso de la calculadora, dado los valores numéricos de trabajo, es probable que se requiera.

Destaca el libro de Bruño, ya que al final del capítulo se explica “paso a paso” como utilizar *Wiris* para resolver ejercicios, planteando luego 22 ítems para poner en práctica dicho programa. El libro de Edelvives también dedica un par de páginas a explicar el uso tanto de *GeoGebra* como de *Wiris*; no obstante, no propone tareas para utilizar tales programas, aunque en cada ítem de cálculo de función derivada plantea la sugerencia de comprobar los resultados empleando alguno de los programas. Se observa así una intención por parte de los libros de texto de implementar herramientas tecnológicas en la resolución de tareas matemáticas. Pese a ello, estos recursos no son explotados, pues básicamente son una herramienta para comprobar resultados.

## 4.2. Aspectos semánticos (significado)

*Contenido.* Tal como indicábamos en la metodología, los cinco libros abordaban en su primer capítulo básicamente los mismos contenidos, a diferencia de la representación de funciones que no lo incluían todos los libros. La Tabla 4 muestra la distribución de ítems de acuerdo con el contenido de la derivada abordado. La categoría “otros” incluye ítems que no trataban específicamente un contenido de la derivada, por ejemplo, “halle la imagen de 3” o “halle los cortes con los ejes”.

En los casos de Santillana y Bruño, planteaban 4 y 15 ítems respectivamente, sobre el cálculo de derivadas de orden superior, que contabilizamos en el contenido de reglas de derivación. En Bruño, aunque se contabilizaron dentro del contenido de extremos relativos, en realidad 33 de ellos se redactan en términos de puntos críticos o de inflexión; del mismo modo, 23 ítems que piden determinar la curvatura de la

función se contabilizaron en el contexto de intervalos de monotonía. Cabe notar que Edelvives es el único libro que plantea 10 ítems de cálculo de función derivada que requiere de derivación logarítmica. En general, el contenido más abordado en los cinco libros es el de reglas de derivación, seguido por el de extremos relativos.

Tabla 4. Contenido según el ítem

Contenido	Porcentaje (%) de ítems según el contenido				
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301
Teorema del Valor Medio/del Valor Intermedio	7,9	6	4,5	4,5	4,6
Definición de derivada	9,4	9,6	2,5	10,9	9,3
Reglas de derivación	40	38	53,5	42	31,2
Extremos relativos	15,3	10,8	11	10,6	21,2
Monotonía	3,7	6	5	3,5	20,5
Recta tangente y normal	9,7	9,2	7,5	8,8	7,9
Representación de funciones	-	17,6	-	8,4	-
Resultados y propiedades	7	0,8	9	8,4	2,9
Otros	7	2	7	3,3	2,4

*Sistema de representación.* En los cinco libros destaca el sistema simbólico, seguido del verbal. La Figura 4 recoge la frecuencia de cada sistema. Cada ítem podía utilizar más de un sistema de representación. El análisis permitió detectar que las tareas con menos presencia que empleaban el sistema tabular o gráfico eran tareas bastante enriquecedoras y demandaban mayor comprensión del concepto de derivada.

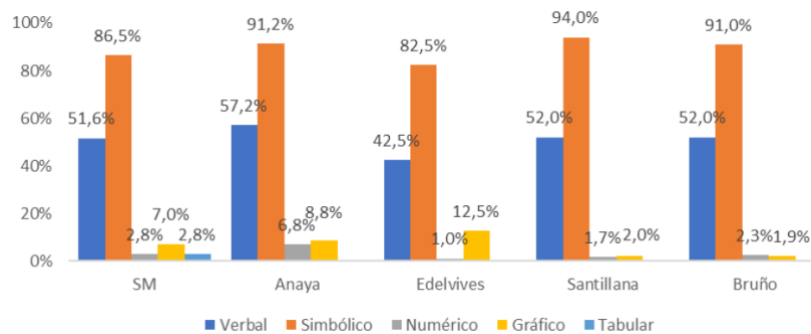


Figura 4. Sistemas de representación en la redacción de los ítems

Aunque todos los ítems se plantean de forma verbal, consideramos su uso solo cuando este alude a aspectos matemáticos o bien si se trata de la redacción de problemas. Es decir, cuando el sistema verbal solo se emplea en las instrucciones no se contabiliza.

Un artista ha adquirido un listón de 6 m de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja, y el otro lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; y la otra será verde y debe tener forma de cuadrado.

¿Qué dimensiones deben tener las telas para que si superficie sea la mínima posible?

Figura 5. Tarea 85 del libro SM

La Figura 5 muestra una tarea en la que se emplea el sistema verbal; representarlo de esta forma tiene cierta intención en la tarea: deben traducirse los datos a simbología matemática y luego resolver el problema. En la Figura 6 hemos considerado que el sistema de representación es el simbólico, pues la parte verbal es solo instrucción.



Estudia y representa las siguientes funciones:	
a) $y = \frac{4-2x^2}{x}$	b) $y = \frac{x^3}{3(x+1)}$
c) $y = \frac{4+2x-x^3}{x^2}$	d) $y = \frac{x^4-2x^2}{x^2-1}$

Figura 6. Tarea 95 del libro Anaya

*Situación.* Las diversas situaciones en las que tiene aplicabilidad la derivada confirman la relevancia y utilidad de este concepto. No obstante, los libros de texto analizados presentan a la derivada como un concepto cuya aplicabilidad está dentro de la propia matemática, desligándola de su uso en la vida real (Tabla 5).

Tabla 5. Situación en la que se presentan los ítems

Situación	Porcentaje (%) de ítems en cada situación				
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301
Personal	-	-	3,5	0,3	0,3
Laboral	2,7	2	5	2,1	-
Social	1,4	0,4	2	1	-
Científica-Matemática	90,6	97,6	85,5	95,4	99,1
Científica-Física	5,3	-	2	1,2	0,3
Científica-Biología	-	-	2	-	0,3

Tal como se observa en la Tabla 5, los cinco libros de texto plantean ítems en distintas situaciones; sin embargo, hay predominio de la situación matemática. Anaya y Bruño, los que plantean más ítems, son los que menos diversidad de situaciones presentan.

*Contexto.* Al igual que la situación en la que se presenta una tarea, el contexto permite ahondar en el significado de los libros respecto al concepto de derivada. Tras el análisis se detectó que los ítems propuestos podían agruparse en tres contextos:

- Algebraico-Numérico: ítems planteados en un contexto meramente algebraico como el cálculo de la función derivada, ampliándolo al numérico.
- Geométrico: ítems alusivos al componente geométrico de la derivada tales como extremos, recta tangente, monotonía, representación; así como ítems sobre propiedades o resultados a ser analizados o interpretados desde la gráfica.
- Aplicado: ítem donde la noción de derivada se aplica a resolver problemas.

La Tabla 6 recoge cada uno y su frecuencia. Destaca los escasos ítems en contexto aplicado y el dominio del contexto algebraico en los libros SM, Edelvives y Santillana.

Tabla 6. Contextos de los ítems

Contexto	Porcentaje (%) de ítems en cada contexto				
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301
Algebraico-Numérico	53,5	50,4	62,5	62,8	46,5
Geométrico	32,6	48,4	24,5	30,7	53,5
Aplicado	13,9	1,2	13	6,5	-

*Tipo de función.* Encontramos todos los tipos de rasgos descritos en la metodología; aunque con algunas diferencias entre un libro y otro. Sin embargo, el rasgo que destaca es el polinómico, tal como se aprecia en la Tabla 7. Aclaramos que un mismo ítem podía involucrar más de un rasgo.

Tabla 7. Rasgo de función empleado en los ítems

Rasgo	Porcentaje (%) de ítems según el rasgo				
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301
Polinómica	55,3	54,8	59	53,7	66,4
Trigonométrica	0,9	3,2	24,5	13,4	13,9
Trigonométrica inversa	-	2,4	6	2,8	-
Logarítmica	-	6	17,5	12	5,6
Exponencial	1,8	6,4	13	9,8	7,6
Exponente negativo	0,9	-	-	0,3	-
Radical	15,3	8,8	13	9,8	6,9
A tozos	-	-	1	2,1	0,3
Valor absoluto	0,4	-	-	0,7	-
Algebraica	13,4	24,4	9	21,9	20,5
Cociente	3,2	3,6	5	3,5	1,6
Producto	5,1	4,8	9	9,5	2,3
Composición	19	19,6	40,5	23,3	16,6

Hay poca presencia de las funciones trigonométricas inversas, y llama la atención la casi ausencia de funciones importantes en la construcción del concepto de continuidad como son el valor absoluto y las funciones definidas a trozos. Además de cuantificar los rasgos de funciones involucradas, también clasificamos la forma en la que estas se relacionaban, distinguiéndolas entre simples o no simples de n rasgos. Por ejemplo, en la figura 7, la función del ítem c involucra rasgos trigonométricos, polinómicos y la composición, por tanto, es considerada una función no simple de 3 rasgos.

Halla la derivada de las siguientes funciones. Después, comprueba con Wiris o GeoGebra los resultados que has obtenido.

a)  $y = [\tan(\pi^2 + 3e)]^5$   
 b)  $y = \tan(x + \pi)$   
 c)  $y = 5 \sin^4(2x + 3)$   
 d)  $y = \sin(\cos x)$   
 e)  $y = \sin[\cos(2x^4)]$   
 f)  $y = \sqrt[3]{\cos x}$   
 g)  $y = \sqrt[3]{\cos^2 x}$   
 h)  $y = \sqrt[3]{\cos^2(3x + 1)}$   
 i)  $y = \sqrt[3]{(\sqrt{x} + \cos^2 x)^2}$

Figura 7. Tarea 15 del libro Edelvives

Cuantos más rasgos se involucran, mayor complejidad supone el trabajo. No es igual derivar la función del ítem b) de la Figura 7, que la del ítem i) en cuanto a rasgos. En los libros las funciones más involucradas son las simples. En la Figura 8, se aprecia la frecuencia de cada tipo de función. Hemos agregado la función desconocida, para comparar además el número de ítems en los que no se plantea una función en concreto, donde el estudiante debe formularla o bien se da de forma gráfica.

Se observa el recargo de funciones simples en los libros de Bruño, Anaya y SM, aunque destacamos de este último la gran cantidad de ítems en los que no se plantea una función específica. Esto está relacionado con el hecho de que es el libro que más ítems presenta en los contextos de resolución de problemas y geométrico, en los que no siempre se da de forma explícita el rasgo de la función que se trabaja. Santillana y Edelvives están un poco más equilibrados entre funciones simples y no simples.

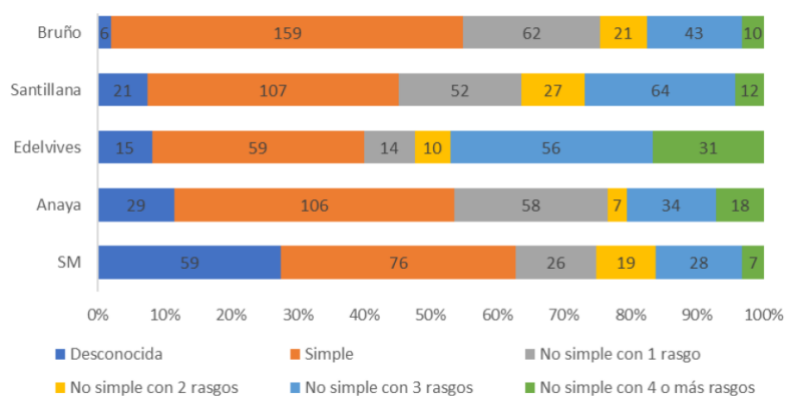


Figura 8. Tipo de función involucrada en cada ítem

### 4.3. Aspectos cognitivos

*Demanda.* En los cinco libros, la principal demanda fue un procedimiento sin conexión; específicamente la de cálculo directo, sobresaliendo el cálculo de función derivada haciendo uso de reglas de derivación. Esto es un aspecto bastante interesante pues manifiesta la clara importancia dada al algoritmo más que a la propia definición y sus propiedades. La Tabla 8 muestra la frecuencia de cada demanda cognitiva.

Tabla 8. Demanda de cada ítem

Demanda	Porcentaje (%) de ítems por demanda					
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301	
Procedimiento sin conexión	Cálculo directo	46,9	39,6	51	57,9	47,5
	Cálculo indirecto	22,4	33,6	30,5	20,8	42,8
	Resolución de problemas	-	2	-	2,1	-
Procedimiento con conexión	Representación (criterio)	2,3	15,2	1	8,4	6,9
	Representación (condiciones)	3,8	2	-	1,4	-
	Identificación	6	5,2	3,5	6	2,3
	Resolución de problemas	9,3	0,5	8	-	-
Hacer matemática	Justificación	9,3	1,9	6	3,4	0,5

La segunda demanda más frecuente es el cálculo indirecto, es decir, tareas de cálculo de extremos relativos, o de la ecuación de la recta tangente, entre otros. Nuevamente se trata de una propuesta de aprendizaje de procedimientos y algoritmos sin conexión. En ambos casos no se requiere de mayor interpretación, sino de una ejecución.

En cuanto a la representación gráfica de funciones dado su criterio, tal como se había señalado anteriormente, solo Anaya y Santillana lo incluyen en el capítulo analizado como aplicación de la derivada, las otras tres editoriales lo hacen en el capítulo siguiente el cual no consideramos en este análisis. Es decir, SM, Edelvives y Bruño demandan la representación gráfica, pero de funciones polinómicas conocidas, generalmente con la intención de que grafiquen también la recta tangente; es más un apoyo visual que propiamente una aplicación de la derivada.

En general para los cinco libros, formulación, interpretación, análisis y argumentación no son procesos muy demandados. Se observa que el libro de Bruño, el que más ítems plantea, solo incluye un ítem de justificación y argumentación.

*Capacidad matemática.* La Tabla 9 presenta la frecuencia con la que cada una de las capacidades matemáticas es fomentada por los diferentes ítems de las tareas, en cada uno de los libros de texto. La capacidad de comunicación, entendida como la destreza de leer, descodificar e interpretar enunciados (OECD, 2016), consideramos está presente siempre que se resuelven tareas, por lo que no la contabilizamos.

Tabla 9. Capacidad fomentada en los distintos ítems

Capacidad	Porcentaje (%) de ítems por capacidad				
	SM N=215	Anaya N=250	Edelvives N=200	Santillana N=283	Bruño N=301
Matematización	9,3	-	-	0,7	-
Representación	6	17,2	1	9,8	6,9
Razonar y argumentar	23,7	25,2	18,5	6,7	5,6
Diseño de estrategias	12,5	4	7,5	8,8	3,9
Operaciones y lenguaje simbólico	81,6	93,6	85,5	97,1	86
Herramientas matemáticas	7,4	-	-	-	7,3

La información aquí mostrada confirma que el aspecto más reforzado por los libros de es el manejo de algoritmos y procedimientos matemáticos. Mientras que el diseño de estrategias es una capacidad poco fomentada. Vemos que la matematización y el uso de herramientas matemáticas tampoco se promueven. El caso de la matematización resulta lógico ya que la Tabla 8 indica el escaso trabajo de la resolución de problemas.

*Conversión/procesamiento.* Al analizar los aspectos cognitivos, destacamos el manejo de distintos sistemas de representación. La Figura 9 muestra la cantidad de ítems que involucran en su resolución el paso de un sistema a otro (conversión) o bien si solo se requiere manipular el sistema de representación dado (procesamiento).

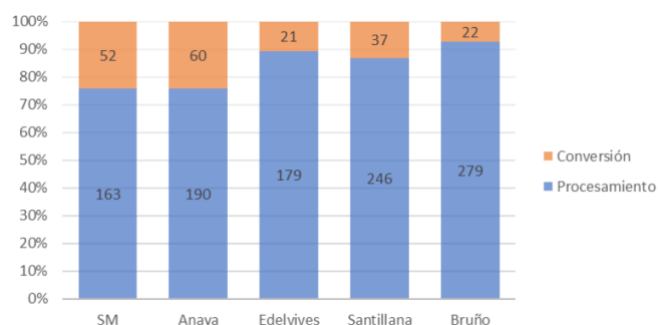


Figura 9. Manejo de los sistemas de representación en los libros

Se observa una tendencia clara por el procesamiento, principalmente el manejo de símbolos. Esto resulta interesante, pues sin duda para comprender la derivada se requiere de más aspectos que solo el manejo de su álgebra.

## 5. Discusión

Tras concluir el análisis, se aprecia que los cinco libros siguen una tendencia bastante similar. Respecto a los elementos sintácticos, notamos tareas cerradas, directas y planteadas para resolverse haciendo uso de papel y lápiz; esto último llama

la atención pues el uso de distintos recursos como las tecnologías no es muy fomentado y estudios destacan que esto favorece el desarrollo de habilidades cognitivas (Bartau, Azpillaga y Joaristi, 2017).

En relación con los elementos semánticos, los libros de texto transmiten una idea de derivada simbólica, donde el aspecto más destacado es su componente algebraica, dando la idea que la derivada consiste principalmente en el cálculo de la función derivada, y su utilidad pareciera darse solo dentro de la matemática. No se promueve la visión de la matemática como una herramienta útil en el abordaje de situaciones reales, colocándola más bien como un conjunto de procesos mecánicos que se deben aprender. En esta línea, en cuanto al ámbito cognitivo, predominan las tareas de cálculo en las que la capacidad que se fomenta es el uso de las operaciones y el lenguaje simbólico. Queda evidenciado que el principal objetivo es el aprendizaje de algoritmos, solicitándose más una ejecución que interpretación o análisis.

El análisis desarrollado resulta interesante ya que las tareas forman la base para el aprendizaje del estudiante, pero sin embargo son mayormente de memorización y de reproducción de algoritmos. Smith y Stein (1998) estudiaron que los estudiantes aprenden mejor y obtienen mayor rendimiento académico, cuando se les involucra con tareas que demandan altos niveles de pensamiento y razonamiento. Por otra parte, el análisis desarrollado sirve a modo de reflexión de la práctica docente, ya que destaca características de las tareas escolares a tomar en cuenta al elegir un libro de texto para trabajar en clase. Además, amplía la perspectiva docente sobre qué aspectos del contenido se enfatizan al trabajar con uno u otro libro, permitiendo ampliar la riqueza de los significados de un solo libro y así mejorar enseñanza y aprendizaje.

Aún son necesarios libros de texto que incorporen más tareas que permitan al alumnado apreciar la utilidad e importancia del concepto de derivada, y que exploren otros recursos de estudio del significado de la derivada mediante diversos sistemas de representación. Estas consideraciones se ajustan a nuestra visión de aprendizaje como construcción de significado, en la que una comprensión de la derivada no solo es algebraica. Aunque en cada libro hay tareas de valor para el proceso de enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, estas deberían tener mayor presencia.

Finalmente, destacamos las potencialidades de nuestro sistema de categorías, que permite un análisis profundo de las tareas propuestas en los libros. Si bien es cierto estas categorías se ajustan y responden al objetivo que perseguíamos de identificar el significado de derivada que se manifiesta en los libros a través de sus tareas, la variedad de aspectos considerados (sintácticos, semánticos y cognitivos) resulta ser una estructura exhaustiva como herramienta metodológica de investigación de tareas escolares. Pese a centrarnos en el contenido de derivadas, el sistema de categorías es generalizable, con las adaptaciones necesarias atendiendo a contenido y nivel escolar.

### **Agradecimientos**

PCG2018-095765-B-100, Gobierno de España; Grupo FQM-193, III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). Beca de la Universidad de Costa Rica a M. F. Vargas.

### **Referencias**

- Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Malana, A., Del Rio, J., Santos, D. y De Vicente, M. (2015). *Matemáticas I. 1 Bachillerato*. Granada: Santillana.
- Arias, J. M. y Maza, I. (2015). *Matemáticas I Bachillerato*. Madrid: Bruño.

- Balcaza, T., Contreras, A. y Font, V. (2017). Análisis de libros de texto sobre la optimización en el Bachillerato. *Bolema*, 31(59), 1061-1081.
- Bartau, I., Azpillaga, V. y Joaristi, L. M. (2017). Metodología de enseñanza en centros eficaces de la Comunidad Autónoma del País Vasco. *Revista de Investigación Educativa*, 35(1), 93-112.
- Brändström, A. (2005). *Differentiated tasks in mathematics textbooks: An analysis of the levels of difficulty*. Trabajo de Licenciatura. Lulea University of Technology.
- Cardona, S. y Rey, J. (2015a). *Bachillerato 1. Matemáticas. Práctica*. Zaragoza: Edelvives.
- Cardona, S. y Rey, J. (2015b). *Bachillerato 1. Matemáticas. Teoría*. Zaragoza: Edelvives.
- Colera, J., Oliveira, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Bachillerato 1. Matemáticas I*. Madrid: Anaya.
- Conejo, L., Arce, M. y Ortega, T. (2014). Justificación de las reglas de derivación en libros de texto de cuatro editoriales desde LGE hasta LOE. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 257-266). Salamanca: SEIEM.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: Towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, 45, 765-777.
- Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45, 633-646.
- Gómez, P. y Romero, L. (2015). Enseñar matemáticas escolares. In P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 61-88). Madrid: Pirámide.
- González, M. T. y Sierra, M. (2002). Enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la Educación*, 21, 177-198.
- González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemática. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de Las Ciencias*, 22(3), 389-408.
- Groetsch, C. W. (2001). Teaching inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematica*, 24(1), 89-94.
- Herrera, M., Velasco, M. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: El caso de la derivada. *PNA*, 11(4), 280-306.
- Jiménez, A. (2017). *Significados de la derivada en las pruebas de evaluación de bachillerato para el acceso a la universidad*. Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada.
- Kessler, A. M., Stein, M. K. y Schunn, C. D. (2015). Cognitive demand of model tracing tutor tasks: Conceptualizing and predicting how deeply students engage. *Technology, Knowledge and Learning*, doi.org/10.1007/s10758-015-9248-6

- Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. In L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-257). Madrid: Pirámide.
- OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy*. París, Francia: OECD.
- Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: A way to understand teaching and learning cultures. *ZDM*, 33(5), 158-175.
- Ponte, J. P. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos y J. P. Ponte (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.
- Rico, L. (2013). El método del análisis didáctico. *UNIÓN*, 33, 11-27.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Pirámide.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.
- Rico, L. y Moreno, A. (Eds.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Madrid: Pirámide.
- Sánchez, M. R. y Vicente, S. (2015). Modelos y procesos de resolución de problemas aritméticos verbales propuestos por los libros de texto de matemáticas españoles. *Cultura y Educación*, 27(4), 695-725.
- Smith, M. y Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3, 344-350.
- Stein, M. K., Grover, B. W. y Henningsen, M. (1996). Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms. *American Educational Research Journal*, 33(2), 255-288.
- Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Tareas propuestas por los libros de texto de 1º de bachillerato para el tema de la derivada. En L. J. Rodríguez-Muñiz y otros (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 594-603). Gijón: SEIEM.
- Verschaffel, L., Greer, B. y De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Holanda: Swets & Zeitlinger.
- Vizmanos, J., Hernández, J., Alcaide, F., Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas. 1 Bachillerato. Ciencias y tecnología*. Madrid: Ediciones SM.

### Referencias de los autores

María Fernanda Vargas, Universidad de Costa Rica (Costa Rica).  
mariafernanda.vargas@ucr.ac.cr

José Antonio Fernández-Plaza, Universidad de Granada (España).  
joseanfplaza@ugr.es

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Universidad de Granada (España). jfruiz@ugr.es

## **The derivative in the textbooks of non-compulsory secondary Education: An analysis of the proposed tasks**

María Fernanda Vargas, Universidad de Costa Rica

José Antonio Fernández-Plaza, Universidad de Granada

Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Universidad de Granada

Textbooks have occupied and still occupy an important place in mathematics teaching and learning; these are used as a record of student work, content organizer and guide of tasks and activities to be performed. The tasks included in the textbooks generally determine what students should learn, and the way in which they should think, develop, use and make sense of the mathematical content. Within a broader investigation in which the meaning that the mathematics teacher attributes to the concept of derivative is studied, this article focuses on describing the meanings of derivative manifested throughout a set of textbooks across the tasks proposed. The source materials are five textbooks commonly used in Spain in the first year of the non-compulsory secondary education level called 'bachillerato'. By using the method of content analysis and a system of categories based on the didactic analysis theoretical perspective, we adopt three categories in relation to the tasks and their characteristics: formal aspects, meaning aspects specific for the notion of derivative, and cognitive aspects; out of these categories, a total of 11 variables are considered. The analysis allows us to point out the dominance of closed, direct and paper and pencil tasks. Also, we identify the communication of a highly symbolic image related to the derivative. Derivative rules are given more importance than the concept itself and its mathematical meanings are rather procedural, being in this way stressed the idea that the derivative mainly consists of the calculation of the derivative function; as a consequence, the usefulness of the notion is relegated to the scientific context. Regarding the cognitive aspect, the tasks whose demand is to apply a procedure without the need to establish connections with the concept meaning are frequent; herein, operations and symbolic language are mainly encouraged. Overall, the tasks that demand more rigorous ways of thinking represent a minority in quantitative terms.