Conocimiento del profesor sobre el aprendizaje en probabilidad condicional: un estudio de caso

José Miguel León Banguero, Leticia Sosa Guerrero y José Carrillo Yáñez

Este artículo muestra evidencias del conocimiento de siete profesores sobre las características de aprendizaje de estudiantes en probabilidad condicional. Se trata de un estudio cualitativo de corte interpretativo. Usamos el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge y la perspectiva de análisis Bottom-Up y Top-Down para caracterizar el conocimiento evidenciado en un cuestionario y una entrevista. Los resultados muestran que reconocer sesgo, falacias y confusiones contribuye a identificar, por el profesor, las fortalezas, dificultades e interacción que tienen los estudiantes en probabilidad condicional. Proponemos nuevos indicadores de conocimiento didáctico del contenido que permiten comprender configuraciones cognitivas de estudiantes.

Términos clave: Características de aprendizaje; Conocimiento especializado del profesor de matemáticas; Probabilidad condicional; Sesgo, falacias y confusiones

Teacher's Knowledge about Learning Characteristics on Conditional Probability: A Case Study

This article shows evidence of the knowledge of seven teachers about the conditional probability student learning features. It is a qualitative study of an interpretive nature. We used the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge model and the Bottom-Up and Top-Down analysis perspective to characterize the knowledge evidenced in a questionnaire and an interview. The results show that recognizing bias, fallacies and confusions contributes to the identification, by the teacher, of the strengths, difficulties and interaction that students have in conditional probability. We propose new indicators of pedagogical content knowledge that allow understanding of cognitive configurations of students.

Keywords: Bias, Fallacies and confusions; Conditional probability; Features of learning; Mathematics Teacher's Specialised Knowledge

León, J. M., Sosa, L. y Carrillo, J. (2020). Conocimiento del profesor sobre el aprendizaje en probabilidad: un estudio de caso. *PNA 15*(1), 1-25.

En las últimas tres décadas, se han implementado reformas curriculares en diversos países (por ejemplo, España, Chile y Estados Unidos) que proponen la inclusión de contenidos de probabilidad en nivel primaria y bachillerato (Tishkovskaya y Lancaster, 2012). Más aún, existen interrogantes enmarcados en la didáctica de la probabilidad, entre los cuales se destacan cuestionamientos relacionados con la competencia profesional de profesores de matemáticas, en activo y en formación, para la enseñanza de estos contenidos (Batanero et al., 2005).

Sowder (2007) afirma que el profesor es un agente clave en el cumplimiento de las directrices curriculares. Al respecto, Ball et al. (2008) destacan conocimientos matemáticos y didáctico matemáticos del profesor necesarios para llevar a cabo un proceso de enseñanza efectivo, pues estos conocimientos repercuten en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, algunas investigaciones han dado cuenta de la existencia de limitaciones de conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, específicamente en contenidos de probabilidad (Batanero et al., 2015).

Con respecto a la probabilidad condicional, Heitele (1975) afirma que es un concepto base en el desarrollo del razonamiento probabilístico, debido a que permite incorporar cambios sustanciales a los grados de creencia a medida que se añade nueva información. A pesar de ello, la investigación en educación matemática sobre probabilidad condicional ha permitido identificar diversas dificultades en torno a su enseñanza y aprendizaje (Estrada y Díaz, 2007).

A continuación, procedemos a describir, de manera sucinta, algunos antecedentes que guardan relación con los conocimientos del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional, haciendo especial énfasis en investigaciones que analizan el conocimiento didáctico matemático, el cual es objeto de nuestro estudio.

Con respecto a los conocimientos matemáticos para la enseñanza de la probabilidad, se ha encontrado la presencia de sesgo, falacias y confusiones en el razonamiento probabilístico condicional (Estrada y Díaz, 2007). Estos resultados se relacionan con los reportados por Elbehary (2020), quien identifica, desde una perspectiva psicológica cognitiva, que 62 profesores en formación manifiestan sesgos y falacias al resolver problemas reales que involucran la probabilidad condicional. De igual modo, Contreras (2011) identifica y relaciona estas dificultades para definir la probabilidad condicional con limitaciones de conocimiento matemático asociados a la independencia de sucesos y probabilidad conjunta.

Además de los conocimientos matemáticos, se consideran fundamentales los conocimientos didácticos del contenido para la instrucción, estos son necesarios para que el profesor transforme el conocimiento del contenido a conocimiento enseñable (Shulman, 1986). A pesar de ello, Batanero et al. (2015) afirman que las metodologías utilizadas por los profesores están asociadas a procesos algorítmicos, en las cuales predominan la utilización de actividades que demandan poca actividad cognitiva. Estos resultados se relacionan con los encontrados por Tanujaya et al., (2018), quienes identifican que las actividades que usualmente diseñan y aplican los profesores para el aprendizaje de la probabilidad condicional proveen una comprensión limitada o insuficiente. En consecuencia, investigaciones en didáctica de la probabilidad identifican bajos niveles de conocimiento didáctico del contenido para la enseñanza de la probabilidad y recomiendan llevar a cabo investigaciones que permitan aportar elementos para desarrollar el conocimiento de los profesores (Elbehary, 2020; Estrada et al., 2018).

Batanero et al. (2005) identifican bajos índices de conocimiento didáctico de 132 futuros profesores de bachillerato sobre el diseño e implementación de recursos didácticos para la enseñanza de la probabilidad condicional. Estos resultados se relacionan con los encontrados por Stohl (2005), quien analiza el conocimiento didáctico de 35 profesores de bachillerato en la aplicación de una secuencia de probabilidad condicional y encuentra limitaciones para interpretar aspectos relacionados con la interacción de los estudiantes con un recurso virtual. Ambas investigaciones recomiendan llevar a cabo estudios que busquen avanzar en la caracterización del conocimiento de profesores sobre recursos y estudiantes para la enseñanza de la probabilidad condicional.

Ortiz et al. (2012) encuentran limitaciones en el conocimiento didáctico de 167 profesores de primaria para interpretar las respuestas de estudiantes, específicamente, dificultades para describir las causas que generan errores en las respuestas de estudiantes a situaciones de juegos equitativos. Por su parte, Vásquez y Alsina (2015) identifican limitaciones en el conocimiento de 96 profesores de primaria para interpretar y describir las configuraciones cognitivas presentes en las respuestas de estudiantes en situaciones problema de probabilidad. Por último, Danişman y Tanişli (2017) reconocen, en un estudio de caso con tres profesores de bachillerato, dificultades para interpretar los conflictos de aprendizaje que presentan estudiantes al responder problemas de probabilidad.

La indagación bibliográfica nos permite afirmar dos aspectos: la existencia de limitaciones en el conocimiento del profesor para interpretar las características de aprendizaje de los estudiantes; y que, hasta el momento, hay escasez de investigaciones que estudien el conocimiento especializado del profesor de matemáticas para la enseñanza de la probabilidad condicional. Por lo cual, en este artículo nos proponemos, desde un enfoque cualitativo, caracterizar el conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de los estudiantes en probabilidad condicional.

Marco teórico

A partir de los aportes de Shulman (1986), quien reconoce tres tipos de conocimiento del profesor (el conocimiento del contenido, el conocimiento didáctico del contenido y el conocimiento curricular del contenido), diversos investigadores han propuesto importantes modelos de conocimiento del profesor de matemáticas enfocados en conceptualizar y caracterizar el conocimiento necesario del profesor. Entre los modelos destacados se encuentran: *The Knowledge Quartet* de Rowland et al. (2005), *The Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball et al. (2008), el *Conocimiento Didáctico*-Matemático de Godino y Pino-Fan (2013) y el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK) de Carrillo et al. (2018).

Hacemos especial mención al modelo MTSK, desarrollado por el grupo del Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SIDM) de la Universidad de Huelva, y que tomamos como principal referente teórico para esta investigación. Este modelo es una propuesta teórica y una herramienta analítica que permite analizar, desde una perspectiva especializada, distintas prácticas y conocimientos del profesor de matemáticas (Carrillo et al., 2018). El surgimiento de este modelo se da a partir de las experiencias de la aplicación del MKT, en las cuales se identifican la noción de especialización de los conocimientos del profesor y las dificultades en la caracterización y limitación de distintos subdominios de conocimiento.

El MTSK brinda una propuesta de organización de los conocimientos del profesor, en la cual plantea dos dominios: Conocimiento matemático y Conocimiento didáctico del contenido (ver figura 1). A continuación, describimos resumidamente los dominios y subdominios que lo componen, haciendo especial énfasis en el subdominio KFLM por ser el centro de nuestro estudio.

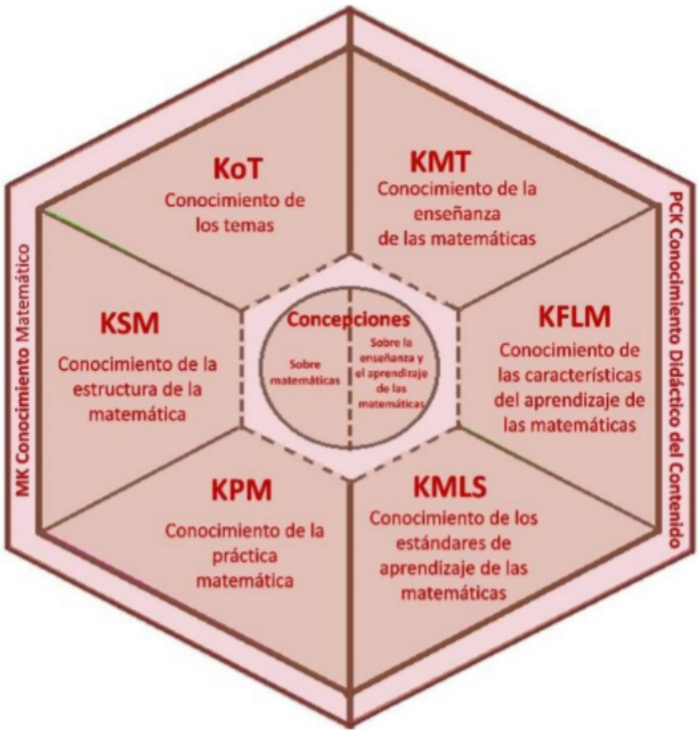

Figura 1. Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018)

Conocimiento Matemático (MK)

Este considera el conocimiento que tiene el profesor de las matemáticas como disciplina científica en un entorno escolar, es decir, el saber qué se enseña. El MK está dividido en tres subdominios.

Conocimiento de los temas (KoT). Es importante que el profesor conozca los temas de manera fundamentada. Esto implica tener un conocimiento profundo sobre aspectos del contenido como la fenomenología, propiedades, fundamentos, procedimientos, definiciones y registros de representación del contenido que va a enseñar (Escudero-Ávila et al., 2015).

Conocimiento de la estructura matemática (KSM). Considera el conocimiento del profesor sobre las conexiones entre los elementos matemáticos que guardan relación con el contenido a enseñar. Estas conexiones permiten al profesor comprender e identificar el contenido en una misma red teórica (Carrillo et al., 2018).

Conocimiento de la práctica matemática (KPM). Se sitúan en este subdominio los conocimientos del profesor sobre las formas de desarrollar, crear o producir en matemáticas, aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba, todos ligados a un tema específico o a la matemática general (Carrillo et al., 2018).

Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

Este dominio abarca los conocimientos del profesor de matemáticas en relación con la didáctica específica del contenido, debido a que reconoce la importancia de los múltiples puntos de vista (enseñanza, aprendizaje y currículo) del profesor que son propios de su labor (Carrillo et al., 2018).

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Este subdominio considera los conocimientos del profesor sobre las teorías (personales e institucionales), recursos y estrategias, técnicas y tareas para la enseñanza de un contenido matemático particular (Escudero-Ávila et al., 2015).

Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS). Sitúa el conocimiento del profesor sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento que debe o puede alcanzar un estudiante en determinados niveles educativos (Carrillo et al., 2018).

Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Este comprende el conocimiento del profesor sobre cómo los estudiantes piensan y construyen conocimientos al abordar actividades y tareas (Sosa et al., 2013). En el KFLM se consideran cuatro categorías:

1. Teorías de aprendizaje asociadas a un contenido matemático. Refiere al conocimiento sobre las características propias de los procesos de aprehensión de distintos contenidos. Incorpora el conocimiento de las teorías (personales o institucionales) y estructuras de desarrollo cognitivo (Escudero-Ávila et al., 2015).

2. Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático. Engloba los conocimientos sobre los errores, obstáculos y dificultades que guardan relación con los procesos del aprendizaje de contenidos específicos. Asimismo, reconoce las potencialidades del contenido que pueden ser aprovechadas para su aprendizaje (Sosa et al., 2013).
3. Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático. Considera el conocimiento del profesor sobre las estrategias y procesos que realizan los estudiantes al abordar tareas o actividades. También abarca los conocimientos sobre las expresiones lingüísticas formales o informales de los estudiantes (Carrillo et al., 2018).
4. Principales intereses y expectativas de los estudiantes al abordar un contenido matemático. Comprende los conocimientos sobre intereses y expectativas, preconcepciones y concepciones de los estudiantes con respecto a la matemática o a un contenido (Sosa et al., 2013).

Es importante mencionar que en esta investigación nos enfocamos en las categorías Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático y Formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático.

De forma alterna al modelo MTSK, este estudio toma como referencia elementos teóricos detectados en investigaciones sobre el aprendizaje de la probabilidad condicional: sesgo, falacias y confusiones:

- Sesgo de equiprobabilidad. Está asociado al grado de creencia, el cual permite, erróneamente, dar igual asignación probabilística a los sucesos aleatorios de una situación (Lecoutre, 1992).
- Falacia de la conjunción. Es la percepción incorrecta de la intersección de dos sucesos, debido a que se concibe el suceso intersección como más probable, en vez de considerar la probabilidad de cada uno de los eventos por separado (Tversky y Kahneman, 1982).
- Falacia de la condicional transpuesta. Es una incorrecta simbolización de los sucesos condicionados y condicionantes, importantes en la asignación de la probabilidad condicional, lo cual produce que los ordene incorrectamente (Falk, 1986).
- Falacia de las tasas base. Sucede cuando el sujeto se deja llevar por ideas preconcebidas e ignora la probabilidad a priori asociada al suceso aleatorio, esto para calcular la probabilidad de un suceso a posteriori (Tversky y Kahneman, 1982).
- Falacia de eje de tiempo. Se asocia únicamente el condicionamiento entre sucesos aleatorios con su orden temporal y no consideran que naturalmente un suceso aleatorio puede estar condicionado a otro, aun cuando este último haya ocurrido con anterioridad (Falk, 1986).

- Confusión entre probabilidad conjunta y condicional. Se interpretan incorrectamente los enunciados en probabilidad condicional y se tiende a representar los sucesos por medio de la probabilidad conjunta o viceversa (Tversky y Kahneman, 1982).
- Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Es la confusión del sujeto al significado del término "independiente" en probabilidad, dado que, en el lenguaje común, este término puede hacer referencia a "separado" (Kelly y Zwiers, 1986).

METODOLOGÍA

Con el propósito de caracterizar los conocimientos del profesor de bachillerato asociados a las características de aprendizaje de estudiantes en probabilidad condicional, consideramos un estudio de caso instrumental (Stake, 1995) desde el enfoque del paradigma interpretativo (Bassey, 2003), debido a la riqueza holística que brindan los estudios cualitativos para analizar al profesor como un objeto de estudio complejo y situado (Bisquerra, 2004).

Los casos

Los casos que se consideraron en esta investigación son Alberto, Edgar, Fabiola, Gabriel, Mario, Ricardo y Sara (pseudónimos), profesores en tres instituciones de educación públicas del nivel bachillerato ubicadas en México. Para esta selección se consideraron dos variables importantes:

- Experiencia. Los casos tienen entre 3 y 14 años consecutivos enseñando la asignatura de Estadística II para el nivel Bachillerato. Esta asignatura considera en su programa de estudios el tema de probabilidad condicional.
- Académico. Los participantes de este estudio poseen el grado de maestría (el 42% en Educación Matemática y el otro 58% en economía, administración o ingeniería) y con frecuencia manifiestan tener un amplio dominio de contenidos de probabilidad en bachillerato.

Recolección de la información

Se utilizaron dos fuentes para recoger datos: un cuestionario abierto y una entrevista semiestructurada, realizada posteriormente a la aplicación del cuestionario. Hernández et al. (2014) mencionan que los cuestionarios abiertos son una alternativa para analizar variables cualitativas, las cuales requieren una reflexión propia del participante.

En ese sentido, diseñamos y validamos un cuestionario para indagar en el conocimiento del profesor sobre las características de aprendizaje de estudiantes en probabilidad condicional. El cuestionario cuenta con cuatro situaciones, divididas en dos partes cada una: en la primera, se presenta un problema de probabilidad condicional y se solicita su resolución; en la segunda, se muestran respuestas de estudiantes hipotéticos al problema anterior y solicita una descripción detallada del razonamiento empleado por cada estudiante. En el diseño de las primeras partes de las situaciones presentadas en el cuestionario se consideraron problemas en probabilidad condicional propuestos por Díaz y De la Fuente (2007) en un cuestionario para evaluar el razonamiento probabilístico de profesores. Para las de las segundas partes, diseñamos respuestas (correctas e incorrectas) de estudiantes hipotéticos (ver tabla 1) que presentan implícitamente sesgo, falacias y confusiones asociadas al razonamiento condicional.

Tabla 1
Sesgo, falacias y confusiones presentes en las respuestas de estudiantes

Situación	Estudiante hipotético	Sesgo, falacias o confusiones
S1	E1	Respuesta Correcta
	E2	Falacia de la Conjunción
	E3	Sesgo de Equiprobabilidad
S2	E1	Respuesta Correcta
	E2	Falacia de la condicional transpuesta
	E3	Sesgo de Equiprobabilidad
S3	E1	Confusión entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes
	E2	Falacia eje de tiempo
	E3	Respuesta Correcta
S4	E1	Falacia de las tasas base
	E2	Falacia de las tasas base
	E3	Confusión probabilidades conjuntas y condicionales
	E4	Respuesta Correcta

Nota. S=Situación; E=Estudiante hipotético

Con respecto a la entrevista, este instrumento se diseñó con el propósito de indagar en el conocimiento del profesor sobre la interacción que tienen los estudiantes con el concepto de probabilidad condicional. En ese sentido, las preguntas giraron en torno a tres tópicos: experiencias previas de los estudiantes en probabilidad condicional, primer acercamiento de los estudiantes al concepto de probabilidad condicional, y el papel del lenguaje en el aprendizaje de la probabilidad condicional.

Análisis de la información

El análisis de los datos tuvo como objetivo establecer, de manera natural y no forzada, nuevos indicadores del conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional. En ese sentido, se consideró pertinente tomar como referencia un enfoque dual de análisis de los datos, denominado *Bottom-Up* y *Top-Down*, el cual permite adoptar una sensibilidad teórica para el tratamiento de la información (Glaser, 1992).

- *Bottom-Up*. Se centra en la organización de un conjunto de observaciones a un fenómeno de investigación (Merriam, 1988). En este sentido, se categorizan los datos del fenómeno a través de la observación y detección de relaciones (análisis concreto). A partir de eso, se crean y establecen categorías teóricas propias del fenómeno, que surgen a partir de los datos y no desde la teoría (Niss, 2006).
- *Top-Down*. Utiliza conceptos teóricos previamente establecidos para identificar situaciones, procesos y objetos inmersos en los datos; los cuales, por lo general, son visibles desde el marco teórico de referencia (Niss, 2006). No obstante, los conceptos teóricos mencionados pueden sufrir desdoblamientos durante el proceso de análisis de los datos (Merriam, 1988).

El referente teórico que utilizamos en esta investigación para el *Top-Down* son los indicadores para el subdominio KFLM propuestos por Sosa et al. (2016) (tabla 2).

Tabla 2
Indicadores del conocimiento de las características de aprendizaje (Sosa et al., 2016)

Categoría de análisis	Indicador
Conocimiento de las fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de un contenido matemático	Conocer las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático
	Conocer las confusiones matemáticas que pudiera tener el estudiante, provocadas por la relación equivocada de un contenido actual con un contenido relativamente anterior
	Conocer las confusiones y los errores matemáticos de los estudiantes, producidos por no proceder ordenadamente o no respetar las convenciones matemáticas
	Conocer las imágenes o ideas matemáticas inadecuadas que los estudiantes pueden poseer o adquirir de un contenido
	Conocer los errores que los estudiantes pueden cometer al hacer determinados cálculos aritméticos provocados por un despiste al hacer operaciones o transformaciones, o por no dominar el nuevo contenido que se está abordando
	Conocer que los estudiantes tienen dificultades en reconocer y aplicar analogías y equivalencias en la resolución de problemas
Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con un contenido matemático	Saber interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje
	Conocer los detalles de la resolución de un problema susceptibles de desviar la atención de los estudiantes para llegar a su solución

Tabla 2
Indicadores del conocimiento de las características de aprendizaje (Sosa et al., 2016)

Categoría de análisis	Indicador
	Conocer los cálculos matemáticos que podrían realizar de forma mecánica los estudiantes sin saber en realidad lo que están haciendo matemáticamente

Para explicitar con mayor precisión el instrumento de análisis de la información, proporcionamos un diagrama (ver figura 2) que muestra los pasos y la convergencia de las perspectivas *Bottom-Up* y *Top-Down* para cumplir el objetivo propuesto.

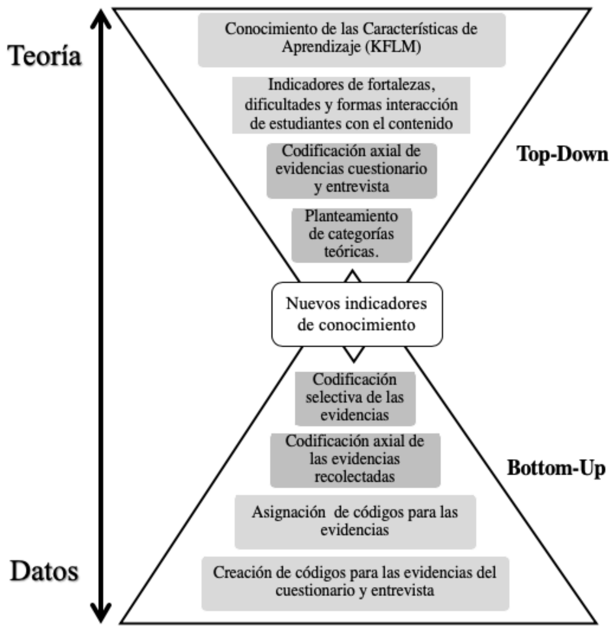

Figura 2. Nuestras perspectivas Bottom-Up y Top-Down (Elaboración propia)

RESULTADOS

Los instrumentos de análisis permitieron identificar y analizar episodios claves que dan cuenta del conocimiento matemático y didáctico matemático de los participantes en probabilidad condicional. A consecuencia de ello, se plantean indicadores de conocimiento asociados al KFLM. Las situaciones completas con las respectivas respuestas de Estudiantes hipotéticos están en los anexos (los E*i*S*j* corresponden al estudiante hipotético *i* y situación *j*).

Para plantear el primer indicador, presentamos evidencias del cuestionario que guardan relación con conocimientos de profesores para el reconocimiento de sesgo, falacias y confusiones asociadas a probabilidad condicional. Comenzamos con la interpretación de Fabiola a la respuesta E3S2: “Tengo la misma confianza en ambas predicciones, puesto que el resultado positivo del examen diagnóstico es lo mismo que decir que una persona tiene cáncer".

> *Fabiola:* Basó E3 su análisis en diferentes factores, como dije anteriormente en la situación 1, ésta va acompañada de una certeza. Si la situación 2 afirma que hubo un resultado positivo y el paciente tiene cáncer, por lo que llegó E3 al resultado que confía igual en ambas predicciones.

En la interpretación a la respuesta de E3 a la S2, Fabiola menciona "llegó al resultado que confía igual en ambas predicciones", con esto inferimos que utiliza su conocimiento para identificar el sesgo de equiprobabilidad presente en la respuesta del estudiante. Interpretamos que reconoce la igual asignación probabilística que le da E3 a cada uno de los eventos aleatorios, es decir, identifica que considera P(E/R) = P(R/E), tal que E es estar enfermo de cáncer y R es resultar positivo en la prueba diagnóstica. Se resalta que la mayoría de los participantes presentan evidencias de su KFLM para reconocer este sesgo.

Gabriel interpretó la respuesta E1S1, "Es más probable que la Selección de México pierda el primer partido, dado que es un suceso que puede ocurrir con mayor probabilidad", del siguiente modo:

> *Gabriel:* La probabilidad de ganar ya estando en la final es 1/2 (aquí no existe el empate) pero antes debía de cumplir el evento perder el primer partido y haber ganado cinco partidos siguientes, lo que hace que al ser condicional la probabilidad sea menor.

En este episodio, inferimos que Gabriel utiliza su MK para justificar, por medio de un contrargumento, la respuesta de E1 a la situación 1. El caso hace uso de la definición de evento simple y compuesto para comparar las probabilidades de los dos eventos P(I) y P(C/I), tal que I es ganar el primer partido y C es ganar el campeonato; y afirma que el evento simple es más probable que el evento condicionado. Así pues, inferimos que el profesor toma como única referencia su propia respuesta a la situación 1 para interpretar la respuesta de E1 y con ello no detecta la falacia de la conjunción. Encontramos que ninguno de los casos presentó evidencias en su KFLM para el reconocimiento de esta falacia.

Edgar interpretó como sigue la respuesta E2S2, "Es más probable diagnosticar el cáncer en una persona que haya dado positivo en la prueba".

> *Edgar:* El alumno cree que la prueba influye en la aparición del cáncer, es decir, el resultado de la prueba "afecta" la aparición del cáncer.

En este fragmento, evidenciamos que Edgar utiliza su conocimiento para identificar la falacia de la condicional transpuesta presente en el razonamiento de E2 a la S2. El caso menciona que "el alumno cree que la prueba influye en la aparición del cáncer", lo cual nos permite inferir que el caso reconoce correctamente que E2 confunde el evento condicionado y el evento condicionante al simbolizar las probabilidades conjuntas. A pesar de esta evidencia, encontramos que la mayoría de los participantes no poseen conocimientos para identificar esta falacia.

Por su parte, Mario interpretó la respuesta E1S4, "La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 80%, puesto que, si se da por hecho que el testigo lo vio, esa es la probabilidad con que identifica correctamente los colores del auto", de la siguiente manera:

Mario: El alumno le da validez al testimonio, dejando de lado que la probabilidad de accidente depende del número de taxis circulando de dicha compañía.

Este episodio muestra cómo Mario emplea su conocimiento para identificar la falacia de las tasas base presente en la respuesta de E1 a la S4. Inferimos que el caso reconoce correctamente el razonamiento empleado por el estudiante, debido a que afirma que éste considera en su respuesta únicamente los eventos en donde el testigo identifica el auto y no toma en cuenta los eventos asociados a la compañía de taxis. Destacamos que la mayoría de los casos muestran evidencias en su conocimiento para identificar esta falacia.

Fabiola interpretó así la respuesta E2S3, "Solo serán independientes si después de sacar la carta de la baraja y ver si es rey, se devuelve a la baraja y posteriormente se procede a sacar una segunda carta, para ver si es de corazones":

Fabiola: El razonamiento también es válido; la situación no especifica si el ejercicio es con remplazo para lo que podría considerarse ambas situaciones tal como lo plantea el estudiante dos. Pero el ejercicio menciona que se saca una carta.

En este episodio, identificamos limitaciones en el conocimiento de Fabiola para reconocer la falacia de eje de tiempo, presente en la respuesta de E2 a la S3. Específicamente, inferimos la presencia de esta falacia en el razonamiento probabilístico del caso, debido a que la interpretación que brinda a la respuesta de E2 no considera el concepto de independencia de eventos en situaciones sincrónicas. También, suponemos que esta limitación en su conocimiento matemático influye directamente en su conocimiento didáctico del contenido para identificar esta dificultad en el razonamiento del estudiante. Encontramos que la mayoría de los casos estudiados mostraron limitaciones en su conocimiento para identificar esta falacia.

Ricardo interpretó como sigue la respuesta a la situación E3S4, "La probabilidad que el taxi implicado sea azul es del 12%, por el principio de la multiplicación, se hace el producto de la probabilidad que sea azul con la probabilidad que el testigo haya visto correctamente el color del auto, $\frac{15}{100} \times \frac{80}{100} = \frac{12}{100}$".

Ricardo: Solo considera la posibilidad de la unión de dos eventos que pueden suceder (probabilidad conjunta).

En este episodio, Ricardo utiliza su conocimiento para identificar la confusión entre la probabilidad conjunta y condicional presente en la respuesta de E3 a la S4. Inferimos que el caso identifica el razonamiento empleado por E3 al afirmar que únicamente considera la probabilidad conjunta asociada a la situación, es decir, reconoce, a secas, el cumplimiento de ambos eventos en un mismo espacio de tiempo. Los hallazgos dan cuenta de que la mayoría de los casos evidencian elementos de su KFLM para identificar esta confusión.

Por último, la interpretación de Edgar a la respuesta E1S3, “No son independientes porque en la baraja hay un rey de corazones, es decir, tiene ambas características y eso relaciona los sucesos, por ello son dependientes” es:

Edgar: No analiza E1 las características de cada evento y no entiende E1 el concepto de la independencia.

En este episodio, Edgar utiliza su conocimiento para identificar limitaciones en el razonamiento probabilístico de E1 a la S3. Inferimos que el caso reconoce las dificultades del estudiante hipotético en el reconocimiento de las características de los eventos aleatorios y la comprensión de la independencia de eventos. Sin embargo, consideramos que la interpretación del caso no reconoce implícita o explícitamente que el estudiante hipotético confunde los eventos independientes y los mutuamente excluyentes. Por esta razón, afirmamos que Edgar identifica parcialmente la confusión entre eventos independientes y mutuamente excluyentes. Encontramos que ninguno de los casos evidenció elementos de su KFLM para identificar esta confusión.

A partir estas evidencias, planteamos el indicador:

KFLM1. Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgo, falacias y confusiones.

Para el segundo indicador, presentamos evidencias recolectadas en el cuestionario que guardan relación con dificultades para interpretar el lenguaje y razonamiento probabilístico de los estudiantes hipotéticos y las dificultades en la asignación de las probabilidades simples, compuestas, condicionales y teorema de Bayes. Se recogen a continuación las interpretaciones de Ricardo y Sara a la respuesta E1S2, “Es más probable la primera predicción. Puesto que, al realizar estudios, es más probable encontrar resultados positivos en una persona con cáncer”.

Ricardo: Considero que el estudiante cree que el resultado positivo en el test es un indicativo final de poseer cáncer.

Sara: Si una persona tiene cáncer y el resultado de la prueba diagnóstica es positivo, se cumplen las dos condiciones.

En este fragmento, Ricardo y Sara evidencian limitaciones de conocimiento para interpretar el lenguaje de E1 a la S2. Con respecto a Ricardo, inferimos que hace una incorrecta interpretación del lenguaje utilizado por el E1, debido a que menciona, erróneamente, que el estudiante hipotético toma en consideración los eventos como simples y no como condicionales. Con respecto a Sara, encontramos la misma dificultad, con la diferencia de que afirma, erróneamente, que el estudiante toma en cuenta los eventos como compuestos. Destacamos que la mayoría de los casos presentan dificultades para interpretar el lenguaje utilizado por los estudiantes en la simbolización y asignación de probabilidades.

Fabiola interpreta del siguiente modo la respuesta E4S4, "La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 41%, porque aplicando el teorema de Bayes, dividimos la probabilidad de que el carro sea azul y el testigo lo vio".

Fabiola: Porque ya se cumplieron los dos eventos, lo vio y el carro es azul. Por tanto, sólo aplica casos favorables entre casos totales.

En este episodio, Fabiola evidencia limitaciones en su conocimiento para interpretar la respuesta de E4 a la S4. Con respecto al MK, inferimos que el caso presenta limitaciones para definir la probabilidad condicional y conjunta, debido a que menciona que el teorema de Bayes es aplicar "casos favorables entre casos totales". Con base en estas limitaciones, el caso emplea su conocimiento para interpretar incorrectamente el razonamiento y lenguaje empleado por el estudiante, afirmando que E4 toma en consideración los eventos asociados a la situación como conjuntos. Es preciso notar que la mayoría de los casos poseen limitaciones en su KFLM para interpretar el razonamiento utilizado por los estudiantes en la aplicación de la probabilidad simple, compuesta, condicional y teorema de Bayes.

Esta misma profesora interpreta así la respuesta E3S3, "Sí son independientes. Esto se debe a que la probabilidad de obtener un rey dado que se ha extraído una carta de corazón es 1/13 y es igual a la probabilidad de obtener un rey "a secas" es 4/52 = 1/13. Por ello, ser una carta de corazones "no afecta" la probabilidad de obtener un rey".

Fabiola: Por definición, se puede considerar que los eventos son independientes y al mencionar la situación que se saca una carta de la baraja los eventos son independientes.

En este episodio, consideramos que Fabiola evidencia limitaciones en su conocimiento para interpretar la respuesta de E3 a la S3. Destacamos el fragmento donde afirma "al mencionar la situación que se saca una carta de la baraja los eventos son independientes". Esta respuesta nos permite inferir que el caso posee limitaciones para definir la independencia de eventos. Con base en esta limitación, emplea su PCK para interpretar (erróneamente) el razonamiento de E3, al mencionar que éste considera los eventos aleatorios como independientes porque la situación afirma que se realiza un único experimento. Destacamos dificultades en todos los participantes para interpretar el razonamiento de estudiantes hipotéticos en relación con el concepto de independencia de eventos.

Con base en estas evidencias, planteamos el indicador:

KFLM2. Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes e independencia de eventos).

Para proponer el tercer indicador, se presentan evidencias recolectadas en la entrevista que guardan relación con limitaciones de conocimiento didáctico matemático en la identificación de la diferencia epistemológica entre eventos aleatorios y deterministas y su influencia en el aprendizaje de la probabilidad.

Entrevistador: Teniendo en cuenta la naturaleza aleatoria de conceptos en probabilidad, ¿considera usted que este factor incide en el aprendizaje de estos conceptos? ¿Por qué?

Mario: Cuando te hablan de matemáticas, normalmente el estudiante espera que todo tiene un resultado preciso. La percepción de la aleatoriedad genera un conflicto en estudiantes y profesores.

En este episodio, identificamos que Mario evidencia su conocimiento didáctico matemático para reconocer la influencia que tiene la naturaleza aleatoria de los eventos en el aprendizaje de la probabilidad. El participante afirma que "hay un choque, la percepción de la aleatoriedad genera un conflicto en estudiantes y profesores". Con base en esta afirmación, inferimos que el participante reconoce las dificultades que tienen los estudiantes al abordar, por primera vez, el concepto de probabilidad. Encontramos que la mayoría de los casos presentan limitaciones en su KFLM para identificar diferencias epistemológicas de los eventos aleatorios y deterministas y su influencia en el aprendizaje.

A partir estas evidencias proponemos el indicador:

KFLM3. Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los resultados por parte de los estudiantes.

Para el cuarto y quinto indicador, presentamos evidencias recolectadas en la entrevista que guardan relación con dificultades de los casos en la identificación del papel que tienen las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad.

Entrevistador: ¿Cómo inciden las experiencias previas en el aprendizaje de conceptos probabilísticos?

Ricardo: Yo creo que es positivo. En ocasiones, cuando se habla con estudiantes acerca de fenómenos aleatorios, los estudiantes empiezan a visualizar y analizar los conceptos aleatorios y a relacionarlos con experiencias previas. Esto les ayuda a tener de una perspectiva distinta lo que pueda o no suceder y así tomar decisiones.

En este episodio, Ricardo posee elementos de conocimiento para identificar el papel que tienen las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios y su influencia en el aprendizaje de la probabilidad. Explícitamente, Ricardo menciona que "los estudiantes empiezan a visualizar y analizar los conceptos aleatorios y relacionarlos con experiencias previas". Con esta evidencia, inferimos que el caso reconoce la influencia positiva que tienen las experiencias previas en el aprendizaje de la probabilidad, dado que permite reconocer, desde una perspectiva aplicada, los conceptos probabilísticos. Encontramos que la mayoría de los participantes estudiados evidenciaron elementos en su conocimiento para identificar la influencia positiva de las experiencias aleatorias en la interacción de los estudiantes con contenidos probabilísticos.

Con base en esta evidencia, proponemos el indicador:

KFLM4. Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.

Entrevistador: ¿Cómo inciden las experiencias previas en el aprendizaje de conceptos probabilísticos?

Fabiola: Influyen positivamente, porque ellos [estudiantes] traen un conocimiento empírico, pero no se ponen a analizar cómo es el funcionamiento de los juegos de azar. Este conocimiento que han adquirido [los estudiantes], influye en cómo desarrollan su aprendizaje, porque aquellos que no traen este conocimiento presentan confusiones y dificultades posteriormente.

En este episodio, se identifican elementos del conocimiento de Fabiola para reconocer la influencia positiva que tienen las experiencias ante fenómenos aleatorios en el aprendizaje de la probabilidad. Sin embargo, quisiéramos profundizar en otro aspecto importante. En el fragmento, Fabiola menciona que "aquellos [estudiantes] que no traen este conocimiento [experiencias previas ante fenómenos aleatorios] presentan confusiones y dificultades". Con base en esta afirmación, reconocemos que el caso afirma que poseer este tipo de experiencias es razón suficiente para no presentar dificultades durante el aprendizaje de la probabilidad. Esto permite inferir que el conocimiento didáctico matemático del caso no reconoce que el sesgo, las falacias y las confusiones pueden estar relacionadas con las experiencias previas. Destacamos que ninguno de los casos estudiados evidenció elementos en su conocimiento para identificar las posibles dificultades en el aprendizaje relacionadas con las experiencias previas ante fenómenos aleatorios.

A partir de la evidencia anterior, proponemos el indicador:

KFLM5. Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar sesgo, falacias y concusiones en su razonamiento probabilístico.

Discusión de los resultados

Los resultados de esta investigación nos permitieron encontrar nuevas categorías teóricas asociadas al conocimiento didáctico del contenido del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional. Es importante mencionar que, en consonancia con Sosa et al. (2016), denominamos estas nuevas categorías teóricas como indicadores de conocimiento.

Así pues, en la tabla 3 resumimos los indicadores que se hallaron para las categorías de análisis del KFLM.

Tabla 3
Indicadores de conocimiento propuestos para el KFLM

KFLM1	Conocer que el razonamiento probabilístico de estudiantes, en situaciones que involucren el concepto de probabilidad condicional, puede contener sesgo, falacias y confusiones.
KFLM2	Conocer que los estudiantes emplean expresiones lingüísticas inadecuadas para referirse a conceptos probabilísticos (probabilidad simple, compuesta y condicional; teorema de Bayes; independencia de eventos).
KFLM3	Saber que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad podría generar dificultades en la interpretación de los enunciados por parte de los estudiantes.
KFLM4	Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios contribuyen a la introducción de conceptos probabilísticos.
KFLM5	Conocer que las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios pueden propiciar sesgo, falacias y confusiones en su razonamiento probabilístico.

Los resultados de este estudio evidencian bajos índices de conocimiento de las características de aprendizaje para identificar fortalezas y dificultades de estudiantes en probabilidad condicional. Se encuentran limitaciones en el conocimiento del profesor para reconocer sesgo, falacias y confusiones presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos a problemas que involucran el concepto de probabilidad condicional. Los participantes han utilizado estrategias erróneas para interpretar y describir el razonamiento empleado por los estudiantes, entre las cuales destacamos: uso de variables externas a la situación, paráfrasis de las respuestas de los estudiantes, y justificación de la respuesta del estudiante con base en la respuesta del caso a la situación. A partir de ello, proponemos el indicador KFLM1.

En relación con estos resultados, Vásquez y Alsina (2015) encuentra que profesores en formación poseen limitaciones de conocimiento para interpretar y describir las configuraciones cognitivas presentes en las respuestas de estudiantes a problemas en probabilidad. De igual modo, Ortiz et al. (2012) identifican dificultades en profesores para reconocer el origen de errores en las respuestas de estudiantes. Los resultados de nuestra investigación permiten detallar y matizar el conocimiento del profesor con respecto a la identificación de sesgo, falacias y confusiones presentes en el razonamiento probabilístico condicional de estudiantes de bachillerato.

Otro de los resultados que destacamos son las limitaciones de conocimiento de los profesores para reconocer las expresiones lingüísticas que utilizan los estudiantes cuando se refieren a conceptos probabilísticos. Específicamente, evidenciamos dificultades en la interpretación de las referencias lingüísticas de los estudiantes a conceptos como probabilidad simple, compuesta, condicional, teorema de Bayes e independencia de eventos. En consecuencia, los casos estudiados interpretan incorrectamente las respuestas de los estudiantes hipotéticos, debido a que confunden las asignaciones que estos realizan a cada uno de los eventos aleatorios simples, compuestos y condicionales. Con base en esto, proponemos el indicador KFLM2.

En relación con estos resultados, Huerta (2018) afirma que, desde la lingüística, el concepto de probabilidad condicional es difícil de identificar en situaciones en contexto, debido a que posee similitudes semánticas para cada uno de los eventos que contiene. Por su parte, Vásquez y Alsina (2015) destacan la importancia de reconocer elementos lingüísticos en el aprendizaje de la probabilidad, dado que las expresiones verbales comunes que utiliza la mayoría de los estudiantes provienen de significados intuitivos en probabilidad. Nuestros resultados permiten esclarecer, desde un punto de vista específico de la probabilidad condicional, el valor de considerar elementos lingüísticos en el conocimiento del profesor para comprender las características de aprendizaje, específicamente en la interpretación de las producciones de estudiantes.

Por otra parte, se ha identificado que la mayoría de participantes posee conocimientos para identificar la influencia epistemológica que tienen los eventos aleatorios en el desarrollo del razonamiento probabilístico de estudiantes, dado que afirman que la naturaleza aleatoria de los eventos genera dificultades en los estudiantes en la interpretación de enunciados de situaciones problema en probabilidad. Consecuentemente, proponemos el indicador KFLM3.

En relación con estos resultados, Contreras (2011) afirma que los profesores de matemáticas poseen limitaciones en su conocimiento para identificar contenidos y variables didácticas que dificultan la resolución de problemas en probabilidad. Asimismo, Huerta (2018) menciona que el conocimiento de profesores sobre la resolución de problemas es muy limitado, debido a que estos no reconocen la influencia que tiene la naturaleza aleatoria de la probabilidad en la construcción de conocimiento en los estudiantes. Nuestros resultados concuerdan con estos hallazgos y permiten esclarecer y particularizar, en relación con el conocimiento del profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional, que la naturaleza aleatoria de los eventos en probabilidad influye negativamente en la resolución de problemas.

Finalmente, nuestros resultados dan cuenta de limitaciones del conocimiento del profesor para identificar fortalezas y dificultades de los estudiantes con el concepto de probabilidad condicional. Encontramos que los casos reconocen las posibles fortalezas que trae, para el aprendizaje de la probabilidad, tomar en consideración las experiencias previas de los estudiantes ante fenómenos aleatorios porque contribuyen a los procesos de significación en el aula. Sin embargo, encontramos limitaciones en el conocimiento para reconocer las posibles dificultades que podrían causar las experiencias previas durante el proceso de aprendizaje de la probabilidad condicional. Así, proponemos los indicadores KFLM4 y KFLM5.

Con respecto a estos resultados, Díaz et al. (2012) mencionan que los profesores presentan en su razonamiento probabilístico la presencia de falacias, sesgo y confusiones asociadas a la probabilidad condicional. Por su parte, Elbehary (2020) expresa que el nivel de desarrollo cognitivo de profesores para la resolución de situaciones que involucran la probabilidad condicional es muy bajo. Mientras que Vásquez y Alsina (2015) mencionan que los profesores poseen limitaciones en su conocimiento para interpretar y describir las configuraciones cognitivas presentes en las respuestas de estudiantes en problemas de probabilidad. Los resultados de esta investigación guardan relación con los hallazgos anteriores y permiten avanzar, desde un punto de vista específico, en la distinción de las limitaciones cognitivas del conocimiento didáctico del profesor para interpretar sesgos, confusiones y falacias presentes en las respuestas de estudiantes hipotéticos a problemas que involucran la probabilidad condicional.

En el modelo MTSK, Sosa et al. (2016) proponen, para las categorías de análisis del KFLM, indicadores de conocimiento, permitiendo así, especificar y matizar el conocimiento que debería tener el profesor con respecto al aprendizaje de los estudiantes. Los resultados de nuestra investigación permiten refinar/proponer nuevos indicadores de conocimiento para las categorías Conocimiento de las fortalezas y dificultades de los estudiantes con un contenido matemático (KFLM1, KFLM3 y KFLM5) y Conocimiento de las formas de interacción de los estudiantes con el contenido matemático (KFLM2 y KFLM4).

Conclusiones

Borovcnik y Kapadia (2010) mencionan que no es adecuado considerar únicamente la faceta matemática para comprender la forma en que los estudiantes razonan ante una situación de probabilidad condicional. Con respecto a ello, Elbehary (2020) afirma que existe una evidente falta de investigación en torno a los procesos cognitivos que involucra los profesores para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad condicional. En este sentido, este estudio permitió identificar numerosas limitaciones del conocimiento didáctico del profesor para reconocer sesgo, falacias y confusiones en las respuestas de estudiantes. Con esto, se espera avanzar en la propuesta de niveles de conocimiento didáctico de profesores para interpretar las producciones de estudiantes.

Es necesario que el profesor sea consciente de cómo los estudiantes piensan y construyen conocimientos al abordar actividades y tareas en matemáticas (Sosa et al., 2016). La utilización del modelo de conocimiento del profesor nos ha permitido identificar aportes teóricos y metodológicos que contribuyen a la consolidación del modelo MTSK para analizar la práctica profesional del profesor de matemáticas. Con respecto a los aportes teóricos, la investigación aporta nuevos indicadores de conocimiento del profesor; con ello, se espera avanzar en la delimitación del subdominio KFLM, específicamente en las categorías Fortalezas y dificultades asociadas al contenido matemático e Interacción de los estudiantes con el contenido matemático. En cuanto a los aportes metodológicos, proponemos un cuestionario de conocimientos para analizar el KFLM que posee un profesor para la enseñanza de la probabilidad condicional. Destacamos que, hasta el momento, ninguna investigación enmarcada en el MTSK había utilizado esta técnica.

Finalmente, queremos rescatar que estudios como el nuestro contribuyen a la vinculación investigación-práctica y permiten conceptualizar teóricamente elementos subyacentes a la práctica del profesor. Sin embargo, consideramos que faltan estudios que permitan comprender el conocimiento especializado del profesor para la enseñanza de la probabilidad, otros que indaguen en el impacto que tienen estos conocimientos en su propia práctica y otros que establezcan los niveles de conocimiento didáctico del profesor para identificar el razonamiento empleado por los estudiantes. Consideramos que esta nueva propuesta de indicadores puede ser el primer paso para estudiar una nueva corriente especializada de conocimientos para la enseñanza de la probabilidad. Más aún, ponemos en manifiesto la necesidad de reforzar los procesos de formación inicial y continuo de profesores que estén enfocados en fortalecer los conocimientos para la enseñanza de la probabilidad.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.

Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. En J. Adler (Ed.), *Proceedings of the First ICMI African Regional Conference* (pp. 13-23). ICMI.

Batanero, C., Gómez, E., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratorio. *Práxis Educativa*, *10*(1), 11-34. https://doi.org/10.5212/PraxEduc.v.10i1.0001

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 16-42). Springer.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. La Muralla.

Borovcnik, M. y Kapadia, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. En M. Joubert y P. Andrews (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education, Volume 30(1)* (Part 1, Research Report 6). BSRLM.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Danişman, S. y Tanişli, D. (2017). Examination of mathematics teachers' pedagogical content knowledge of probability. *Malaysian Online Journal of Educational Sciences, 5*(2), 16-34.

Díaz, C., Contreras, J. M., Batanero, C. y Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de Educación Secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *26*(44), 1207-1225. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000400006

Díaz, C. y De la Fuente, I. (2007). Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional. *Revista Electrónica de Metodología Aplicada*, *12*(1), 1-15.

Elbehary, S. (2020). Discussing the conditional probability from a cognitive psychological perspective. *American Journal of Educational Research, 8*(7), 491-501. DOI: 10.12691/education-8-7-7

Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-77.

Estrada, A., Batanero, C. y Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 313-332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18

Estrada, A. y Díaz, C. (2007). Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO, 44*, 48-58.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). International Statistical Institute.

Glaser, B. G. (1992). *Basics of grounded theory analysis*. Sociology Press.

Godino, J. D. y Pino-Fan, L. (2013). The mathematical knowledge for teaching. A view from onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. En B. Ubuz, C. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3325-3326). CERME.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, *6*(1), 187-205.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw Hill.

Huerta, P. M. (2018). Preparing teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 293-311). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_17

Kelly, I. y Zwiers, F (1986). Mutually exclusive and Independence: Unravelling basic misconceptions in probability theory. En Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Congress on Teaching Statistics* (pp. 96-100). International Statistical Institute.
Lecoutre, M. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 557-568. https://doi.org/10.1007/BF00540060
Merriam, S. (1988). *Case study research in Education: A qualitative approach*. Jossey-Bass Publishers.
Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. En C. Bergsten, B. Grevholm, H. Måsøval y F. Rønning (Eds.), *Relating Practice and Research in Mathematics Education. Proceedings of Norma* (pp. 97-110). IMFUFA.
Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(1), 63-91.
Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(3), 255-281. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5
Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.
Sosa, L., Aguayo, L. y Huitrado, J. (2013). KFLM: Un entorno de aprendizaje para el profesor al analizar los errores de los estudiantes. En C. Dolores, M. García, J. Hernández y L. Sosa (Eds.), *Matemática Educativa: la formación de profesores* (pp. 279-298). Díaz de Santos.
Sosa, L., Flores-Medrano, E. y Carrillo, J. (2016). Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas del profesor cuando ejemplifica y ayuda en clase de álgebra lineal. *Educación Matemática*, *28*(2), 151-174.
Sowder, J. (2007). The mathematical education and development of teachers. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157-223). NCTM.
Stake, R. (1995). *The art of case study*. SAGE.
Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. A. Jones (Eds.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). Springer.
Tanujaya, B., Prahmana, R.C.I. y Mumu, J. (2018). Designing learning activities on conditional probability. *Journal of Physics: Conference Series*, *1088*(1), 012087. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012087
Tishkovskaya, S. y Lancaster, G. A. (2012). Statistical education in the 21st century: A review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, *20*(2), 1-24. https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889641

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). On the psychology of prediction. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 69-83). Cambridge University Press.

Vásquez, C. y Alsina, A. (2015). El conocimiento del profesorado para enseñar probabilidad: Un análisis global desde el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *7*(1), 27-48.

José Miguel León Banguero
Universidad Autónoma de Zacatecas, México
josemigleon@gmail.com

Leticia Sosa Guerrero
Universidad Autónoma de Zacatecas, México
lsosa@uaz.edu.mx

José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva, España
carrillo@ddcc.uhu.es

Recibido: Junio de 2020. Aceptado: Octubre de 2020
doi: 10.30827/pna.v15i1.15458
ISSN: 1887-3987

ANEXO

Situación 1: La selección mexicana

Parte 1

Problema: Supón que la Selección Mexicana de futbol alcanza la final de la Copa de Oro en 2019. Para ganar la copa, hay que ganar cinco partidos. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

- México pierde el primer partido.
- México gana la Copa de Oro, pero pierde el primer partido.

Parte 2

De acuerdo con las respuestas al Problema 1, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1. Es más probable que la Selección de México pierda el primer partido, dado que es un suceso que puede ocurrir con mayor probabilidad.

E2. Es más probable que México gane la Copa de Oro, aun perdiendo el primer partido, dado que México es el máximo ganador histórico de la Copa de Oro. Por ello, es más probable que vuelva a ser campeón.
E3. Ambos sucesos son igual de probables.

Situación 2: Una prueba diagnóstica y un paciente

Parte 1
Problema: Una prueba de diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿En cuál de las siguientes predicciones tienes más confianza?

- ♦ Una persona que tiene cáncer ha dado positivo en la prueba de diagnóstico.
- ♦ Una persona que ha dado positivo en la prueba de diagnóstico realmente tiene cáncer.

Parte 2:
De acuerdo con las respuestas al Problema 2, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.
E1. Es más probable la primera predicción, puesto que al realizar los estudios es más probable encontrar resultados positivos en una persona con cáncer.
E2. Es más probable la segunda predicción, puesto es más probable diagnosticar el cáncer en una persona que haya dado positivo en la prueba.
E3. Tengo la misma confianza en ambas predicciones.

Situación 3: Y ahora ¿qué pasará?

Parte 1
Problema: Se extrae una carta al azar de una baraja de 52 cartas, en las cuales hay 4 tipos (diamantes, corazones, picas y tréboles), cada tipo tiene 13 cartas (números del 1 al 10, príncipe, reina y rey). Sea A el suceso “se extrae una carta de corazones” y B el suceso “se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

Parte 2
De acuerdo con las respuestas al Problema 3, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.
E1. No son independientes porque en la baraja hay un rey de corazones, es decir, tiene ambas características y eso relaciona los sucesos, por ello son dependientes.

E2. Solo serán independientes si después de sacar la carta de la baraja y ver si es rey, se devuelve a la baraja y posteriormente se procede a sacar una segunda carta, para ver si es de corazones.

E3. Si son independientes. Esto se debe a que la probabilidad de obtener un rey dado que se ha extraído una carta de corazón es 1/13 y es igual a la probabilidad de obtener un rey "a secas" es 4/52 = 1/13. Por ello, ser una carta de corazones "no afecta" la probabilidad de obtener un rey.

Situación 4: ¡Alerta! Se estrelló un taxi

Parte 1

Problema: Un taxi se ve implicado en un accidente nocturno. Hay dos compañías de taxis en Zacatecas, el Rojo y el Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Rojos y el 15% Azules. Un testigo identificó al taxi como Azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo en las mismas circunstancias de la noche del accidente y concluyó que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

Parte 2

De acuerdo con las respuestas a la situación 4, realizadas por los estudiantes hipotéticos que se muestran a continuación, describa el razonamiento empleado por cada estudiante, enfatizando en las posibles estrategias, percepciones y causas que lo llevaron a responder de la forma en que lo hizo.

E1. La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 80%, puesto que, si se da por hecho que el testigo lo vio, esa es la probabilidad con que identifica correctamente los colores del auto.

E2. La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 15%, dado que ese es el porcentaje de taxis de ese color en la ciudad.

E3. La probabilidad que el taxi implicado sea azul es del 12%, por el principio de la multiplicación, se hace el producto de la probabilidad que sea azul con la probabilidad que el testigo haya visto correctamente el color del auto, 15% * 80% = 12%.

E4. La probabilidad de que el taxi implicado sea azul es del 41%, porque aplicando el teorema de Bayes, dividimos la probabilidad de que el carro sea azul y el testigo lo vio.