NUEVOS ESTUDIOS SOBRE EL RAZONAMIENTO MATEMATICO EN NIÑOS.

Juan Montañés Rodríguez
José Miguel Latorre Postigo

En los años 40, Piaget se interesó por el estudio del desarrollo del razonamiento matemático, provocando sus teorías en los años 50 un enorme impacto sobre la enseñanza de las matemáticas y las ciencias en la escuela (Pulaski, 1975). En nuestros días se observa un renovado interés por estos estudios a partir de la aparición en USA de una nueva corriente de psicología evolutiva cognitiva, que combina las ideas de Piaget y de Vigotsky, recientemente descubiertos por la Psicología Americana a partir de los trabajos de Flavell y Bruner, con las de la teoría del procesamiento de la información, que ha desbancado al Conductismo de su papel hegemónico. Se inicia así la elaboración de nuevas teorías sobre el desarrollo cognitivo basadas en el procesamiento de la información y en investigaciones en las que se compara la actuación del ordenador con la de sujetos humanos en la resolución de problemas, observándose similitudes fantásticas tanto a nivel de *Hadware* como de *Software* (Case, 1989).

Para Rodrigo López (1985) la analogía mente-ordenador es exclusivamente funcional, no estructural, por lo que la similitud habría que establecerla a nivel de *software*, mientras que el *hardware* resultaría irrelevante. Según este autor la metáfora del ordenador tiene una interpretación fuerte y otra débil. La primera, la mantienen los teóricos de la Inteligencia Artificial que pretenden construir programas de ordenador que simulen comportamientos inteligentes. La segunda, la defienden los investigadores de formación psicológica que estudian el comportamiento inteligente utilizando como herramienta el ordenador y el lenguaje informático. Desde este segundo planteamiento se ha iniciado el estudio del desarrollo cognitivo en diferentes frentes, uno de los cuales ha hecho referencia a los avances metodológicos en la investigación del desarrollo de estrategias y procesos cognitivos. Dentro de este campo habría que incluir los modernos estudios sobre el razonamiento matemático, hasta ahora intentos aislados por comprender los procesos cognitivos, más importantes por lo que anuncian que por lo que en realidad han conseguido en el campo teórico.

EL ESTUDIO DEL RAZONAMIENTO MATEMATICO

El estudio del razonamiento matemático se encuadra dentro del marco de referencia del estudio de la inteligencia (Stenberg y Smith, 1988), campo en el que se ha pasado de un "modelo psicométrico", en el que lo importante era la evaluación de los resultados finales, a un modelo de "solución de problemas", que complementa al anterior, donde lo que interesa conocer son los procesos cognitivos implicados en la solución de tareas matemáticas. El conocimiento de estos procesos probablemente contribuirá a establecer bases seguras para una teoría que explique los mecanismos implicados en la resolución de problemas y sus dificultades, al mismo tiempo que permitirá diseñar con éxito programas educativos que incidan sobre cada uno de los momentos del proceso (Mayer, 1986).

A continuación, y dentro de esta línea, vamos a presentar una serie de estudios recientes que, utilizando la metodología propia de la Psicología Cognitiva y la denominada "analogía del ordenador", intentan evaluar los componentes del razonamiento matemático en niños y adolescentes.

LAS HABILIDADES DE CALCULO

Las habilidades de cálculo más características del Ciclo Inicial son la adición y la sustracción. Los momentos característicos de estas tareas y las estrategias de conteo utilizadas por el niño para su solución han sido estudiados por la Psicología Cognitiva para entender los procesos cognitivos implicados en las mismas. Una muestra de lo que ahora se está haciendo en este sentido es la siguiente:

Groen y Parkman (1972) han propuesto tres modelos alternativos para comprender cómo los niños suman pares de números. Estos modelos se basan en la presunción de que los procesos de adición son una serie de operaciones discretas y seriales, basadas en el concepto de "contador". En el caso de una adición simple (4+2), el contador se entiende como un valor numérico inicial que por un proceso iterativo va siendo incrementado hasta alcanzar el valor de la suma de los dos números. Este proceso puede alcanzarse a partir de tres modelos procesuales, que denominamos A, B y C.

En el modelo A, el contador es inicialmente 0 al que se le incrementa el valor del primer sumando y posteriormente el del segundo, siendo el valor final del contador la suma de los dos números. En términos generales, si M es el primer sumando y N el segundo, el contador se incrementará M+N veces. El tiempo de reacción (TR) variará linealmente en función de los valores de M y N.

En el modelo B, el contador es inicializado con el valor del primer sumando, que después se incrementa con el valor del segundo. En este caso, el contador se incrementa N veces, siendo el TR, por tanto, diferente al modelo anterior, ya que si en el A el TR era una función lineal de M+N, en el B lo es simplemente de N.

En el modelo C, el contador es inicializado con el valor más grande de los dos y después incrementado con el valor del otro. En este modelo, el TR es una función lineal de M o de N, según cuál de los dos sea más pequeño.

El modelo A pertenece a una estrategia de conteo aditivo total, denominado "SUM" por Groen y Parkman y de "enumeración completa" por Mayer. Los modelos B y C están incluidos en estrategias de conteo aditivo parcial o "conteo hacia arriba" (Carpenter y Moser, 1982), denominados "MIN" (C) por Groen y Parkman y de "enumeración de continuación" por Mayer (B).

Por otra parte, en las operaciones de sustracción los niños emplean sobre todo "el modelo de incremento" (6-4 supone contar 'dos pasos' desde el 4) y el "modelo de disminución", bien como un "deshacer directo del conteo parcial" (si 2+4 supone contar 'cuatro paso'; 6-4 supone contar 'cuatro pasos' hacia atrás), bien como un "conteo hacia abajo" que reproduzca inversamente el "modelo de enumeración de continuación". Normalmente el niño emplea el que requiere en cada caso menos esfuerzo (Serrano y Denia, 1987).

Groen y Parkman diseñaron una serie de experimentos de resolución de problemas de adición para comparar los efectos de estas tres alternativas en el TR, encontrando que prácticamente todos los niños del primer grado usaban el modelo C, el más sofisticado de los tres. Lo que nos hace ver que los niños desde el principio son capaces de emplear estrategias relativamente avanzadas en la resolución de problemas de adición simple. Estos resultados, sin embargo, tienen su excepción en los casos en los que los dos sumandos son iguales, ya que se resuelven más rápidamente de lo predicho por este modelo, lo que nos sugiere la intervención de la Memoria a Corto Plazo (MCP).

En España, Serrano y Denia (1987) han estudiado las diferentes estrategias de conteo utilizadas por escolares de 1.°, 2.°, 3.° y 4.° de EGB, en la resolución de algoritmos de adición y sustracción destacando los siguientes resultados: 1) El conteo se desarrolla según la siguiente pauta evolutiva: *conteo total-conteo parcial (hacia arriba) –estrategia MIN-conteo parcial (hacia abajo) – estrategias complejas;*

2) Para favorecer las estrategias de adición es conveniente plantear algoritmos de "búsqueda de sumando desconocido" (3+?=5), que faciliten el conteo desde un valor determinado, y actividades que desarrollen la comprensión de la conmutatividad (Estrategia MIN); 3) No parece muy rentable enseñar a restar mediante estrategias de conteo hacia abajo, debido a que son mucho más complejas que las de conteo hacia arriba.

En general, podemos añadir a lo dicho que las estrategias empleadas por los niños en la resolución de problemas de adición están en función de la edad, de la magnitud y ubicación de los sumandos, y de la representación de los mismos (Bermejo y Oliva, 1988). Sólo los preescolares utilizan la estrategia de conteo total, mientras que a partir de 1.º de EGB se elige el modelo B o C, descritos por Groen y Parkman. La magnitud y ubicación de los sumandos afecta sobre todo a los niños pequeños, especialmente cuando el cardinal mayor es el segundo sumando y el niño carece de estrategias para aplicar convenientemente la propiedad conmutativa. El éxito depende claramente del grado de abstracción de los sumandos, sobre todo entre los preescolares, los cuales alcanzan sus mejores resultados cuando los dos son objetos concretos y los peores cuando son guarismos, obteniendo puntuaciones intermedias en las situaciones mixtas; un sumando guarismo y otro objeto concreto. Por lo que la evolución en el aprendizaje de la adición debe seguir este mismo orden. Además, en un estudio reciente con alumnos de 6.º de EGB (Miranda Casas y Fortes del Vallel, 1989), se ha demostrado que los comportamientos estratégicos en la resolución de problemas matemáticos se aprenden, siempre que los niños sean instruidos para ello.

Otra línea de investigación en este campo está relacionada con la predicción de errores en la resolución de problemas de cálculo. Son estudios complementarios a los del tipo anterior, que ayudan a relacionar los factores que intervienen en la rapidez con los implicados en la eficacia para la resolución de problemas aritméticos de cálculo. Dentro de esta línea de investigación se encuentra el programa informático BUGGY, desarrollado por Woods, Resnick y Groen (1975), que analiza las respuestas a los problemas de sustracción, señalando en caso de error el tipo de traba que presumiblemente lo explica. Ejemplos de trabas más comunes son: a) no conocer bien el acarreo negativo; b) no conocer cómo restar de un dígito grande uno pequeño, y c) no conocer cómo restar un dígito de 0.

LAS HABILIDADES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS DE CALCULO MATEMATICO

La resolución de problemas matemáticos se entiende como un proceso con dos momentos básicos: el de representación y el de solución del problema (Brovow, 1968; Hayes, 1981; Mayer, 1983, 1986). En el primero, los problemas son transformados desde series de palabras y números a una representación cognitiva de sus componentes esenciales, lo que requiere un conocimiento lingüístico, semántico y esquemático de los mismos. En el segundo, se ejecutan las operaciones necesarias para encontrar una solución a esa representación, lo que a su vez requiere un conocimiento operativo y estratégico sobre la forma de resolver los problemas. Cada uno de estos momentos es una fuente de diferencias individuales en cuanto a las habilidades en la resolución de problemas matemáticos.

Distintos estudios señalan que la primera fase es la más importante, debido a que la mayoría de errores en los problemas de cálculo tiene su origen en una incorrecta representación de los mismos. Un ejemplo ilustrativo de este hecho nos lo ofrecen Soloway, Lockhead y Clement (1982). Estos autores pedían a un grupo de sujetos que formulasen en términos de ecuaciones matemáticas un problema, mientras que otros debían traducirlo a un pequeño programa en BASIC. Un porcentaje de errores del 55% en los primeros y del 31% en los segundos, nos permite suponer que la utilización de programas informáticos estimula a representar el problema de una manera activa, lo que a su vez puede mejorar la resolución del mismo.

En esta misma línea, Mayer (1982, 1986) estudió la representación de problemas matemáticos en dos aspectos fundamentales: 1) La clase de contenido que los sujetos tienden a olvidar en la representación, y 2) los errores en el recuerdo de las proposiciones, encontrando errores de los dos tipos en la resolución de problemas de álgebra, como el siguiente: "Un barco de vapor recorre 36 millas río abajo, en el mismo tiempo en el que recorre 24 contracorriente. Si la máquina de vapor va a 12 millas más por hora río abajo que río arriba, halla la velocidad de la corriente".

En sus investigaciones Mayer dividió los contenidos en tres clases: a) *Asignaciones* de valores a un variable, por ejemplo, "Un vapor viaja 36 millas río abajo". b) *Relaciones* cuantitativas entre dos variables, por ejemplo, "Las máquinas de vapor viajan 12 millas más rápido río abajo que río arriba". c) *Cuestiones* que interrogan sobre una solución al problema, por ejemplo, "Hallar la velocidad de la corriente". Encontró que los sujetos cometían un 29% de errores en el recuerdo de las "relaciones" y sólo un 9% en el de las "asignaciones". Resultados que confirman los obtenidos por Soloway et al (1982) acerca de las dificultades que se tienen para representar las relaciones relevantes en los problemas matemáticos.

Con respecto a las proposiciones, encontró tres clases de errores en el recuerdo de las mismas: a) *Errores de omisión.* Una proposición no es recordada. b) *Errores de especificación.* Una variable original es cambiada por otra en el recuerdo ("Un barco de vapor recorre 36 millas río abajo" se recuerda como "Un barco de vapor viaja a 36 millas por hora río abajo". c) *Errores de conversión*. Una proposición de "asignación" se cambia por otra de "relación" o viceversa (La relación "La máquina de vapor viaja 12 millas más por hora río abajo que río arriba" se cambia por la asignación "La máquina de vapor viaja río abajo a 12 millas por hora".

En sus investigaciones detectó la mayor cantidad de errores en la clase "omisiones". Al respecto, conviene también destacar que en los errores de "conversión" detectados, de los 21 casos estudiados, 20 eran de "relación" a "asignación", y sólo uno al contrario.

Abundando en este tipo de estudios acerca de los procesos involucrados en la representación y resolución de problemas matemáticos, algunos investigadores han intentado simular con ordenador los procesos de resolución de problemas matemáticos. Así Greeno (1978) diseñó el programa PERDIX, que simula los procesos de estudiantes de BUP en la resolución de problemas geométricos. En este programa cabe destacar el uso de estrategias de *Generación-Evaluación* y de *Sub-Objetivos*. Estrategias que se usan cuando se conoce la clase de información relevante del problema, pero hay que ir confirmándola paso a paso. Así, en las demostraciones de los Teoremas de Geometría Plana los sujetos encuentran más dificultades si sólo utilizan un objetivo, que si establecen una serie de Sub-Objetivos que encajan en los pasos a seguir para llegar a una solución final. Más recientemente, Siegler y otros (1984, 1986) ha propuesto un modelo comprensivo para operaciones de multiplicación, adición y sustracción, que se basa en la distribución de las asociaciones y las posibles respuestas en función de un criterio de confianza subjetivo.

CONCLUSION

En este trabajo hemos pretendido recapitular distintos acercamientos al estudio de los procesos implicados en el razonamiento matemático. Son todavía un conjunto de trabajos puntuales, que en los últimos años han ido apareciendo, desde los que no se pueden alcanzar conclusiones espectaculares, pero no por ello dejan de tener interés, porque probablemente se estén poniendo con ellos las bases de una futura formulación teórica del Razonamiento Matemático.

La aplicación directa de estos estudios no es todavía posible, pero si se continua en esta línea, posiblemente lleguemos a conocer y comprender los procesos cognitivos implicados en cada uno de los momentos de las tareas de Razonamientos Matemáticos, y entonces estaremos en disposición de diseñar estrategias de intervención educativa que nos permitan prevenirlos, modificarlos y optimizarlos.

BIBLIOGRAFIA

BERMEJO, U. y OLIVA LAGO, M. (1988). Representación y magnitud de los sumandos en la resolución de problemas activos. *Infancia y Aprendizaje 44*, 109-121.

BROVOW (1968) Natural Language input for a Computer problem solving system. En M. Minsky (Ed.) *Semantic Information Processing*. Cambridge. MA: MIT Press.

CARPENTER, T., y MOSER, J. (1982) The development of addition and substraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.) *Addition an subtration: developmental perspective*. N.J.: L.E.A.

CASE, R. (1989) *El desarrollo intelectual. Cognición y desarrollo humano*. Barcelona. Paidós.

GROEN, G.J. y PARKMAN, J.M. (1972) A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review* 79, 329-343.

GREENO (1978) A Study of problem solving. En R. Glaser (Ed.) *Advances in instructional Psychology*, N.J. Erlbaum.

HAYES (1981) *The complete problem solver*. Filadelphia. Franklin Institute Press.

MAYER, R.E. (1982) Memory for algebra story problems. *Journal for Educational Psychology* 74, 199-216.

MAYER, R.E. (1986) Capacidad matemática. En R.J. Stenberg (Ed.) *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Barcelona. Labor.

MAYER, R.E. (1986) *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona. Paidós.

MIRANDA CASAS, A. Y FORTES DEL VALLE, M.C. (1989) Aplicación de las técnicas cognitivo-comportamentales en la resolución de problemas de matemáticas. *Revista de Psicología de la Educación* 2, 57-72.

PULASKI, M.A.S. (1975) *Para comprender a Piaget*. Barcelona. Península.

RESNICK Y FORD (1981) *The Psychology of Mathematics for Instruction*, N.J. Erlbaum.

RODRIGO LOPEZ (1985) Psicología Evolutiva y Procesamiento de Información. En A. Marchesi, M. Carretero y J. Palacios (1985) *Psicología Evolutiva. 1. Teorías y Métodos*. Madrid. Alianza.

SERRANO, J.M. Y DENIA, A.M. (1987) Estrategias de conteo implicadas en los procesos de adición y sustracción. *Infancia y Aprendizaje* 39-40, 57-69.

SOLOWAY, LOCKEAD Y CLEMENT (1982) Does Computer programming enhance problem solving ability?. Some positive evidence on Algebra word problem. En R.J. Seidel, E. Anderson y B. Hunter (Eds.) *Computer Literacy*. N.Y. Academic Press.

SIEGLER Y SHRAGER (1984) Strategy choices in addition and subtraction: How do children know what to do. En P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (Eds.) *Additon and Subtraction: A cognitive perspective*. N.J. Erlbaum.

STENBERG Y SMITH (1988) *The Psychology of Human Thought*. Cambridge. University Press.

WOODS, S.S., RESNICK, L.B., y GROEN, G.J. (1975) An Experimental Test of Five Process Models for Substraction. *Journal of Educational Psychology* 67, 17-21.