https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2606
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales

Cognitive paths of pre-service teachers when they compare unequal ratios

Javier Monje Parrilla
Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante, Alicante, España
monjejavier@ua.es

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, Valencia, España
bernardo.gomez@uv.es

RESUMEN • En esta investigación se analizan las rutas cognitivas que subyacen a las resoluciones de un grupo de futuros maestros ante una tarea de comparación de razones desiguales en el contexto de las ofertas comerciales. La revisión de la literatura y el análisis en profundidad de las componentes críticas de la tarea nos han permitido definir las dimensiones de análisis de las resoluciones. A partir de ellas hemos realizado un análisis cualitativo de corte interpretativo del cual se desprende que los participantes poseen un escaso desarrollo del pensamiento relativo. Un número importante de ellos presenta dificultades con la comparación de las cantidades relativas desiguales cuando estas se les presentan normalizadas de forma diferente y con distinto referente.

PALABRAS CLAVE: Relativizar; Normalizar; Futuros maestros; Razón y proporción.

ABSTRACT • In this research we analyze the cognitive paths that underlie the resolutions of a pre-service teacher's group to solve a task of comparing unequal ratios in the context of commercial offers. The review of the literature and the in-depth analysis of the critical components of the task have allowed us to define the analysis dimensions of the resolutions. From them we have made an interpretative and qualitative analysis which shows that participants have a poor development of relative thinking. A significant number of them present difficulties with the comparison of unequal relative quantities when they are presented as normalized in a different way and with a different referent.

KEYWORDS: Relativity; Normalizing; Pre-service teachers; Ratio and proportion.

Recepción: febrero 2018 • Aceptación: abril 2019 • Publicación: junio 2019

Monje Parrilla, J. y Gómez Alfonso, B. (2019). Rutas cognitivas de futuros maestros ante una situación comparativa de razones desiguales. *Enseñanza de las ciencias, 37*(2), 151-172. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2606

INTRODUCCIÓN

Desarrollar criterios con los que juzgar cuándo la comparación relativa es apropiada es uno de los cambios de pensamiento requeridos en el desarrollo del razonamiento proporcional (Lamon, 1993).

La transición del pensamiento aditivo (o absoluto) al relativo es un proceso que debe iniciarse en Educación Primaria, que es donde se introducen los conceptos de razón y proporción (Real Decreto 126/2014). Los maestros de este nivel, pues, deben ser capaces de asistir a sus alumnos en esta transición. Sin embargo, es frecuente observar cómo algunos estudiantes para maestro recurren a formas de razonamiento aditivo cuando no encuentran otros métodos adecuados para resolver ciertas situaciones multiplicativas (Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2002; Livy y Vale, 2011; Sowder *et al.*, 1998), como pueden ser las que implican cantidades relativas. Estas cantidades tienen un significado relacional que resulta de la comparación multiplicativa de dos cantidades. La clave del comportamiento erróneo en estos casos puede radicar en la dificultad que tienen los estudiantes en coordinar multiplicativamente los datos de la situación (Fernández y Llinares, 2012).

De acuerdo con Gómez (2016), en el currículum es relevante el peso específico otorgado a mostrar la razón en los contextos de proporción (tener la misma razón); no obstante, parece no prestarse suficiente atención a mostrar la razón en las relaciones de desigualdad, es decir, tener mayor o menor razón. Estas situaciones, que no son proporcionales, tienen importantes aplicaciones en la vida diaria, como las que implican la elección entre diferentes descuentos comerciales. Nuestro trabajo realiza un aporte en esta línea ya que, atendiendo a lo expuesto en este epígrafe, pretendemos someter a evaluación el criterio de pensamiento (absoluto o relativo) de los estudiantes para maestro en situaciones que involucren la comparación de cantidades relativas desiguales. Esto es necesario para desarrollar en los futuros profesores un conocimiento adecuado de los contenidos y procesos matemáticos relacionados con la razón y la proporción (Valverde y Castro, 2012).

Así, esta investigación tiene como objetivo caracterizar las actuaciones de los futuros maestros ante una situación de comparación de razones desiguales en el contexto de las ofertas comerciales.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Tomando de referencia el marco descrito en Gómez (2016), pasamos a describir aquellos elementos teóricos relevantes para el propósito de este estudio.

Existen situaciones comparativas que hacen aflorar o bien la comparación de dos cantidades aditivamente creando una diferencia, o bien la comparación de dos cantidades multiplicativamente para crear una razón (Thompson, 1994). Actuar de la primera forma conduce a un tratamiento absoluto de las cantidades, mientras que la segunda forma está relacionada con un tratamiento relativo de estas. El término *relativizar* hace referencia a poner algo «en relación con», como expresión de una comparación multiplicativa.

La razón se entiende como «una función de un par ordenado de números o valores de magnitud» (Freudenthal, 1983, p. 180). Se pueden considerar dos maneras para formar una razón: una es comparando dos cantidades multiplicativamente y la otra es juntándolas para crear una unidad compuesta, cuya iteración o equipartición preserva la relación multiplicativa (Lobato y Ellis, 2011).

Según la naturaleza de las magnitudes implicadas en una razón, esta puede conceptualizarse o bien como una relación en una magnitud (*razón interna*), o bien como una relación entre magnitudes (*razón externa*). Vergnaud (1983) sustenta esta distinción en el carácter funcional o escalar de la relación multiplicativa entre las cantidades, según sea de dos espacios diferentes de medida o de un mismo espacio de medida respectivamente. Este aspecto se toma en consideración en este trabajo al hablar de razón interna o externa.

Existen relaciones multiplicativas definidas en un mismo conjunto que comparan la medida de una parte de este con la medida de la otra parte (parte-parte) o que comparan la medida de un subconjunto con la medida del conjunto del cual es parte (parte-todo) (Lamon, 2012). Como señalan Singer y Resnick (1992), este tipo de comparaciones pueden admitir expresiones coloquiales del tipo «de cada» o «por cada», que llaman a un razonamiento basado en los esquemas parte-todo o parte-parte, como en «se descuentan 2 € de cada 7 € que se compran» o «descuentan 2 € por cada 5 € que se pagan, del total que son 7 €». Aquellas relaciones multiplicativas planteadas entre elementos de conjuntos distintos, como en «pago 2 € por cada 3 botellas», no admiten un razonamiento basado en los esquemas parte-todo ni parte-parte, aunque admiten expresiones coloquiales como las anteriores (Singer y Resnick, 1992).

La normalización es un complejo de técnicas que permiten visualizar ciertas razones transformando el referente (Freudenthal, 1983). Por ejemplo, para la anterior situación, «descuentan 2 € por cada 5 € que se pagan, del total que son 7 €», se puede visualizar otra razón transformando el referente al responder qué parte es la que descuentan, «descuentan 2 € de cada 7 € que se compran», y a su vez esta se puede presentar normalizada a porcentaje, «me descuentan un 28,5 %». Por tanto, la normalización es un proceso útil para facilitar la visualización y comparación de razones con referentes distintos. Fernández (2009) distingue dos maneras para normalizar razones, «una en la que se cambian los referentes mediante escalas de manera que las magnitudes o tamaños resulten normales o familiares y otra en la que se unifican los antecedentes o los consecuentes de las razones para favorecer la comparación» (p. 52). La normalización, por tanto, está supeditada a la flexibilidad de pensamiento, lo cual permite elegir a conveniencia la forma de representar a la razón: fracción, decimal, porcentaje o unidad compuesta.

ANTECEDENTES

En el estudio de la razón, el razonamiento proporcional puesto en juego por los estudiantes es a menudo el foco de atención. Tradicionalmente se han empleado tres tipos de problemas en el estudio de los aspectos cognitivos del razonamiento proporcional: valor perdido, comparación cualitativa y comparación numérica (Cramer y Post, 1993). En este último tipo de problemas se dan las cantidades de dos razones y se debe averiguar si las dos razones son iguales o cuál es mayor o menor que la otra (Cramer y Post, 1993). Un ejemplo conocido de este tipo de problemas es la serie de problemas de Noelting (1980) denominada «Rompecabezas del jugo de naranja» (*Orange Juice Puzzle*) en el que se compara el sabor de naranja relativo a dos bebidas formadas por un cierto número de vasos de zumo de naranja y un cierto número de vasos de agua.

Algunos trabajos identifican las estrategias que utilizan los estudiantes para resolver con éxito los problemas de razón y proporción y, entre otras, señalan las siguientes: razón unitaria, estrategia de la fracción, producto cruzado (Cramer y Post, 1993) y construcción progresiva (Hart, 1981); así como métodos para comparar razones: método unitario y método del común múltiplo (Hoffer, 1988).

La estrategia de la razón unitaria responde a la pregunta «¿cuánto por uno?». Por ejemplo, para resolver el siguiente problema, «Si 4 botellas de vino cuestan 20 €, ¿cuánto costarán 12 botellas de vino?», el estudiante se preguntaría ¿cuánto pago por una botella? De esta manera encuentra la razón unitaria (5 €/u), que le permite resolver el problema.

En la estrategia denominada de la fracción, los estudiantes consideran la razón como una fracción y aplican reglas de equivalencia olvidando las etiquetas de las cantidades. Así, en el problema anterior, el estudiante multiplica por 3 el numerador y el denominador de la razón (20 € : 4b) y obtiene como resultado 60 €.

El algoritmo del producto cruzado es un proceso mecánico utilizado con frecuencia para resolver problemas de proporcionalidad. Los estudiantes crean una proporción formando un producto cruzado y el resultado es la solución de una ecuación por división.

La estrategia de construcción progresiva consiste en establecer una relación de una razón y extenderla a la otra por adición. Ante el problema anterior, el estudiante diría: Si 4 botellas de vino cuestan 20 €, 4 botellas más son 8 botellas por 40 €, y 4 botellas más son 12 botellas por 60 €.

En cuanto a los métodos para comparar razones, el método de la unidad consiste en el escalamiento de ambas razones para obtener razones que son equivalente en términos de una unidad simple, si es posible. El método del común múltiplo consiste en buscar un múltiplo común y establecer una comparación con los otros valores de las dos razones.

Al categorizar las actuaciones de los estudiantes ante situaciones que involucran un razonamiento proporcional, las respuestas de índole absoluto o aditivo son consideradas como previas en la transición a las de tipo multiplicativo (Karplus et al., 1983; Lamon, 1993). En este sentido, una de las estrategias erróneas reportadas por la literatura es la «estrategia aditiva» o de «diferencia constante» (Hart, 1981; Tourniaire y Pulos, 1985). En esta estrategia, se calcula la diferencia entre un término y el otro de una razón y esta diferencia es aplicada a la otra razón (Tourniaire y Pulos, 1985).

En situaciones de comparación de razones, una estrategia errónea señalada es «ignorar parte de los datos del problema» (Tourniaire y Pulos, 1985). Un caso particular es la estrategia denominada «relacionan solo una variable ignorando parte de los datos del problema» (Ben-Chaim, Fey, Fitzgerald, Benedetto y Miller, 1998). Para decidir entre dos razones, los estudiantes comparan únicamente los antecedentes (o consecuentes) (Fernández, 2009). Un aspecto que se debe considerar en los problemas de comparación de razones es si estas son iguales o no. En este sentido, resulta más difícil la comparación de razones desiguales (Karplus *et al.*, 1983). Esto puede deberse a que las situaciones no proporcionales requieren un razonamiento más sofisticado que las proporcionales.

La estructura y el contexto del problema son dos variables que afectan al desempeño de los estudiantes (Tourniaire y Pulos, 1985). Atendiendo a la estructura, aspectos como la presencia o ausencia de razones enteras, el tamaño de los datos usados y el orden en que se presentan los datos en el enunciado influyen en las actuaciones de los estudiantes (Noelting, 1980; Smith, 2002). Centrándonos en el contexto, Cramer y Post (1993) afirman que las escalas resultan significativamente más difíciles y consideran que «la instrucción debería comenzar con contextos más familiares y extenderse a los menos familiares» (p. 407). Heller *et al.* (1989) observan que los contextos de compra, al ser más familiares, parecen resultar más fáciles que los contextos sobre velocidad y consumo. Además, en estos primeros, las respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas formuladas influyen en las decisiones de los estudiantes (Ben-Chaim *et al.*, 1998).

METODOLOGÍA

Para este estudio se adopta una metodología de corte interpretativo que pretende identificar las rutas cognitivas de los estudiantes para maestro al resolver una situación de desigualdad de razones. Por ruta cognitiva se entiende la caracterización de los elementos involucrados en las estrategias de resolución que determinan el «camino» seguido para resolver la tarea. Para poder dar cuenta de estas rutas cognitivas es fundamental un análisis de los componentes críticos de las tareas y establecer las dimensiones de análisis que nos permitan interpretar las resoluciones (Gómez y García, 2015).

Muestra

Se utilizó una muestra de conveniencia formada por 339 estudiantes de tercer curso del Grado de Maestro/a de Educación Primaria de la Universidad de Valencia, en el comienzo del curso 2013-2014, en su grupo y en tiempo habitual de clase (40-50 estudiantes). Estos estudiantes ya habían cursado una asignatura que contenía un módulo sobre razón y proporción.

Instrumento

Como instrumento de recogida de datos se ha diseñado una tarea del tipo «¿Cuál es la mejor compra?» (Lamon, 2012), que resulta de la unión de tres ofertas extraídas de folletos comerciales. La tarea, denominada «el descuento», publicada en trabajos previos (Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, 2013; Monje, Pérez-Tyteca y Gómez, 2013), consiste en tres ofertas que se enuncian por medio de razones expresadas de forma diferente: «3 x 2», «-70 % en la 2.ª unidad» y «2.ª unidad a mitad de precio», en la que se pregunta qué descuento es el mejor (véase figura 1).

Fig. 1. Tarea «el descuento».

La primera y tercera ofertas se muestran con un ejemplo de producto al que se aplica: botellas de vino de «Rioja» y «Extremadura». Ambas ofertas incluyen los precios antes y después del descuento (5,58 € y 3,72 € la unidad; 9,74 € y 4,87 € la 2.ª unidad). La segunda oferta, «-70 % en la 2.ª unidad», es genérica y no se ejemplifica con un producto concreto.

La tarea involucra la interpretación del descuento como una cantidad relativa y el uso de técnicas de normalización para comparar razones. Por su tipología es una tarea de comparación numérica multiplicativa, en donde hay que juzgar cuál de las razones es mayor o menor, o tal vez iguales.

La demanda de la tarea consiste en comparar las tres ofertas. Para determinar qué cantidades deben ser comparadas, hay que tener en cuenta con qué objetos están relacionadas o a qué objetos se refieren; es lo que se denomina el referente. La primera oferta se diferencia de las otras dos por el referente: por una parte, el referente alude al número ordinal de la unidad a la que se aplica el descuento (ya sea la tercera en la primera oferta o la segunda en las otras); por otra parte, el referente está relacionado con el número cardinal de botellas: mientras en la primera oferta están involucradas tres botellas, en las restantes solo se incluyen dos.

Adicionalmente, las tres ofertas brindan un descuento que viene dado mediante cantidades relativas o razones que están normalizadas de modo diferente: una como fracción, otra como porcentaje y otra como unidad compuesta.

Esto determina dos componentes críticos de la tarea: los referentes y las normalizaciones, ya que para su resolución resulta necesaria una actividad de homogeneización o unificación.

De las dos ofertas que tienen como referente del descuento la segunda unidad, una está normalizada a fracción y la otra a porcentaje. La oferta de «2.ª unidad a mitad de precio» se puede expresar como porcentaje, por lo que un descuento del 50 % resulta menos ventajoso que uno del «70 %». Por tanto, la cuestión planteada en el problema se reduce a la comparación de las ofertas: «3 x 2» y «-70 % en la 2.ª unidad». Como se ha indicado anteriormente, estas dos ofertas tienen referentes y normalizaciones distintas, por tanto estos componentes críticos de la tarea permiten descomponer su proceso de resolución en dos subprocesos de unificación.

Relacionado con los referentes, se reformulan las relaciones entre cantidades para unificarlos. Un caso puede ser el siguiente: «me descuentan 1 botella de cada 3 botellas que compro» y «me descuentan 0,7 botellas de cada 2 botellas que compro», en particular las relaciones reformuladas son definidas en una magnitud (botellas) y llaman a un razonamiento del tipo parte-todo. Una vez reformuladas las relaciones, para compararlas se deben normalizar expresándolas de la misma forma, como porcentajes, decimales o fracciones, mediante alguna técnica de normalización.

Procedimiento de aplicación y análisis de datos

El instrumento se presentó a los alumnos en el formato de lápiz y papel, en una hoja de trabajo individual y no dispusieron de tiempo límite para realizarlo. Los datos de la presente investigación son las respuestas de los estudiantes a la tarea «el descuento».

Para el análisis de datos se han utilizado diferentes dimensiones derivadas de la fundamentación teórica, pero también del examen de los componentes críticos de la tarea antes descritos, a saber:

– Tipo de pensamiento: absoluto o relativo.
– Naturaleza de la razón: interna o externa.
– Esquema de pensamiento: parte-todo o parte-parte.
– Referentes. Presentación de la relación entre cantidades: uso de pago/compro, descuento/compro, o descuento/pago.
– Técnica de normalización o algoritmos: uso del algoritmo del producto cruzado, estrategia de la fracción, cociente, razón unitaria, construcción progresiva y sus métodos asociados para comparar razones: método de la unidad y método del común múltiplo.

Estas dimensiones determinan las categorías que utilizamos para realizar el análisis de nuestros datos, esto es, de las respuestas de los estudiantes. Este análisis, de corte interpretativo, consistió en un proceso iterativo y triangulado en el que se fue caracterizando cada una de las estrategias utilizadas y se asignaban a una de las categorías predeterminadas. Dichas categorías se han ido refinando y adaptando en función de los análisis realizados.

RESULTADOS

Los resultados obtenidos se han organizado en esquemas de categorías y subcategorías que dan cuenta detallada de las rutas cognitivas de respuesta a la tarea planteada (véase figura 2). En un primer nivel de análisis, las respuestas se han agrupado en tres categorías que se detallan a continuación.

– *Comparaciones relativas*. Se agrupan en esta categoría las respuestas que contienen evidencias de que los estudiantes interpretan el descuento como una cantidad relativa. En esta se han incluido dos subcategorías: las que presentan respuestas relativas y las que presentan solo una tendencia relativa.
– *Comparaciones no relativas*. Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes que no relativizan, o bien porque comparan diferencias de cantidades absolutas o bien porque ignoran parte de la información.
– *Otras respuestas*. Se recogen aquí las respuestas incompletas, imprecisas, inadecuadas o en blanco.

Tomando como base el resto de las dimensiones de análisis recién expuestas, en un segundo nivel de análisis se han agrupado las respuestas de los estudiantes en subcategorías. En la figura 2 se da cuenta de las frecuencias identificadas en las respuestas agrupadas en cada una de las categorías, subcategorías, clases y subclases.

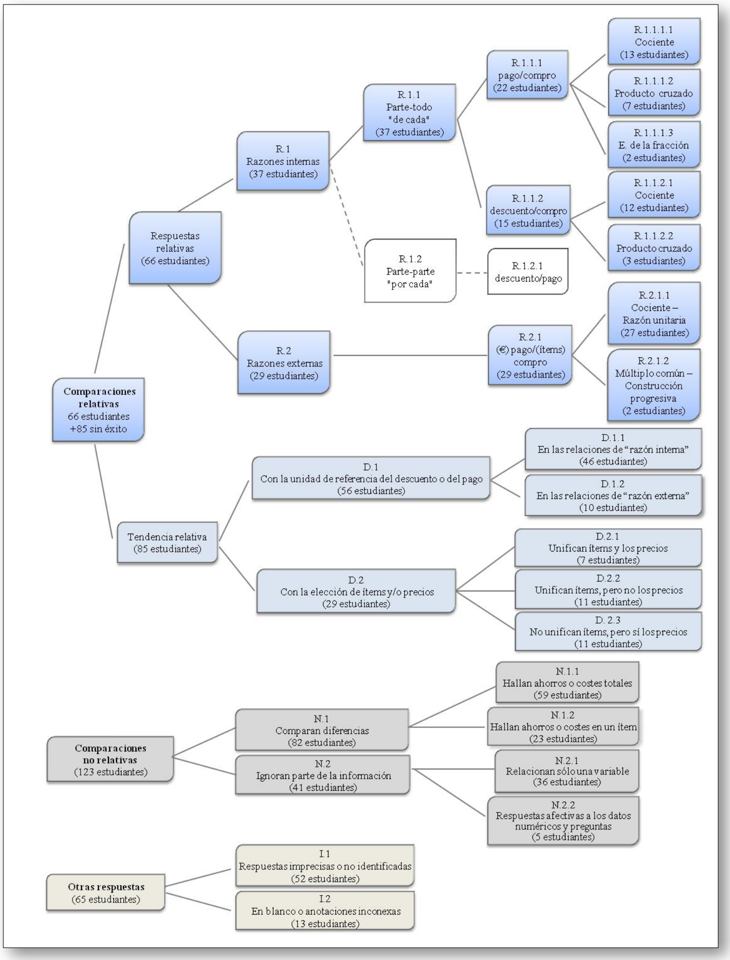

Fig. 2. Esquema de interpretación de las respuestas a la tarea «el descuento».

Pasamos a mostrar evidencias de las diferentes rutas cognitivas recogidas en el esquema interpretativo (figura 2). Para ello haremos uso de transcripciones de ejemplos de estudiantes.

Comparaciones relativas

Como hemos visto anteriormente, dentro de la categoría denominada «Comparaciones relativas» se distinguen las respuestas que realizan comparaciones relativas con éxito, que hemos denominado «Respuestas relativas», y las que realizan estas comparaciones sin éxito, que hemos denominado de «Tendencia relativa». Pasamos a describir cada una de ellas.

Respuestas relativas

En esta subcategoría se encuentran las respuestas que reflejan pensamiento relativo. Atendiendo a la naturaleza de la relación multiplicativa empleada por los estudiantes, estas actuaciones se han agrupado en dos clases: «Razones internas» (R.1) y «Razones externas» (R.2).

Razones internas (R.1)

Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes que relacionan cantidades definidas en una magnitud. En esta clase, podrían darse dos esquemas de comparación: parte-todo o «de cada» (R.1.1) y parte-parte o «por cada» (R.1.2); pero solo se ha observado el primero, por eso en la figura 2 esa posibilidad aparece con líneas punteadas.

Parte-todo o «de cada» (R.1.1)

Se trata de actuaciones que se fijan en el descuento o en el pago como partes de la cantidad total (que es el todo). Aquí se observa la unificación de los referentes elegida por los estudiantes usando dos relaciones entre cantidades diferentes: una es la relación pago/compro (R.1.1.1): «pago x … de cada y que compro», y la otra es la relación descuento/compro (R.1.1.2): «me descuentan x … de cada y que compro».

En la relación pago/compro (R.1.1.1) se observan tres técnicas de normalización: cociente, producto cruzado y fracción. Las dos primeras llaman a la estrategia del método de la unidad y la tercera al método del múltiplo común (Hoffer, 1988). Los siguientes ejemplos ilustran estas tres técnicas:

Cociente (R.1.1.1.1)

Con esta técnica los estudiantes obtienen una expresión decimal del pago o descuento que responde a la pregunta ¿cuánto por uno? Concretamente responden a cuántas partes pago por unidad (véase tabla 1). Aunque se podría decir que es la estrategia de la razón unitaria, estrictamente hablando no lo es, ya que lo que se entiende por la razón unitaria es una relación entre cantidades heterogéneas, como en «precio por unidad» (Lamon, 2012).

Tabla 1
Ejemplo R.1.1.1.1. Cociente

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
Pagas 2 [botellas] enteras y coges 3 2:3 = 0,66 por unidad	Pagas 1 entera y la segunda un 30 %. O sea, pagas 1,3 1,3:2 = 0,65 por unidad	Pagas 1 entera y la segunda un 50 % 0,75 por unidad

Producto cruzado (R.1.1.1.2)

Esta técnica la aplican los estudiantes para obtener la cantidad de botellas que pagan referida a 100 como denominación del todo (véase tabla 2).

Tabla 2
Ejemplo R.1.1.1.2. Producto cruzado

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
$\left.\begin{matrix} 3-100 \\ 2-x \end{matrix}\right\}$ 66,6 %	$\left.\begin{matrix} 2-100 \\ 1{,}3-x \end{matrix}\right\}$ 65 % (mejor descuento)	$\left.\begin{matrix} 2-100 \\ 1{,}5-x \end{matrix}\right\}$ 75 %

Estrategia de la fracción (R.1.1.1.3)

En esta estrategia se consideran las relaciones de las cantidades como fracción. Los estudiantes buscan fracciones equivalentes a las dadas, pero con igual denominador, para hacer posible la comparación. Es un método basado en el múltiplo común. Como ejemplo véase la tabla 3.

Tabla 3
Ejemplo R.1.1.1.3. Estrategia de la fracción

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{40}{60}$	$\frac{13}{20} \rightarrow \frac{39}{60}$ Pagas 39 partes de 60	$\frac{3}{4} \rightarrow \frac{45}{60}$

En la relación descuento/compro (R.1.1.2) solo se han observado dos técnicas para normalizar: cociente (R.1.1.2.1) y producto cruzado (R.1.1.2.2).

Cociente (R.1.1.2.1)

Con esta técnica los estudiantes también responden a la pregunta ¿cuánto por uno?, pero ahora responden a cuánto me descuentan por unidad (tabla 4).

Tabla 4
Ejemplo R.1.1.2.1. Cociente

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
Te regalan 1 de 3 productos. Por cada 1 te descuentan 1/3	Te regalan 0,7 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0,35	Te regalan 0,5 de 2 productos. Por cada 1 te descuentan 0,25
Observamos que el mayor descuento tiene lugar en la oferta del -70 % en la 2.ª unidad, puesto que es en la que mayor importe te regalan por cada producto.		

Producto cruzado (R.1.1.2.2)

Esta técnica la aplican los estudiantes para obtener los porcentajes que responden a la pregunta ¿cuánto me descuentan por unidad? (véase tabla 5).

Tabla 5
Ejemplo R.1.1.2.2. Producto cruzado

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
Sin oferta, 3 botellas cuestan 16,74 € Si compras 3→ te ahorras 5,58 € $\left.\begin{array}{l}16{,}74-100\%\\5{,}58-x\end{array}\right\}$ x = 33,3 %	(1 unidad: 100 €) Sin oferta, las dos unidades = 200 €, Con oferta te ahorras 70 € $\left.\begin{array}{l}200-100\%\\70-x\end{array}\right\}$ x = 35 %	Sin oferta, 2 unidades = 19,48 € Con oferta te ahorras 4,87 € $\left.\begin{array}{l}19{,}48-100\%\\4{,}87-x\end{array}\right\}$ x = 25 %
La mejor oferta es el -70 %, porque el ahorro es mayor		

Razones externas (R.2)

En esta clase se incluyen las respuestas de los estudiantes que relacionan cantidades de diferentes espacios de medida, en este caso euros (que pago) con ítems (que compro) (R.2.1). En esta relación se han observado las siguientes estrategias: cociente - razón unitaria (r.2.1.1) y múltiplo común - construcción progresiva (r.2.1.2).

Cociente - razón unitaria (R.2.1.1)

Aquí, los estudiantes unifican el precio eligiendo un valor arbitrario común. Calculan el coste de la compra para ese precio y normalizan por cociente las relaciones «€ que pago / n.º ítems que compro», obteniendo un valor unitario que responde a la pregunta ¿cuánto pago por unidad? (véase tabla 6). Esta estrategia es identificada por Cramer y Post (1993).

Tabla 6
Ejemplo R.2.1.1. Cociente - razón unitaria

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 10 €) 20 € por 3 productos … 6,6 € por unidad	(Precio: 10 €) 13 € por 2 productos … 6,5 € por unidad	(Precio: 10 €) 15 € por 2 productos … 7,5 € por unidad

Múltiplo común - construcción progresiva (R.2.1.2)

Aquí los estudiantes unifican el número de botellas y el precio. Con ese número expresan la razón como unidad compuesta (n.º ítems que compro, € que pago), después la extienden por adición hasta encontrar un múltiplo común al número de botellas (véase tabla 7). Esta manera de extender la razón es propia de la estrategia de construcción progresiva identificada por Hart (1981).

Tabla 7
Ejemplo R.2.1.2. Múltiplo común - construcción progresiva

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 10 €) 3 botellas por 20 € … Compramos 6 botellas 40 € / 6 botellas	(Precio: 10 €) 2 botellas por 13 € … Compramos 6 botellas 39 € / 6 botellas	(Precio:10 €) 2 botellas por 15 € … Compramos 6 botellas «descarta esta oferta»

Tendencia relativa

Los estudiantes que no tienen éxito en su tentativa de comparar las cantidades relativas tropiezan con dificultades que están ligadas al referente del descuento o del pago (D.1), y a la elección de los ítems y/o precios (D.2). No consideramos las dificultades que se pueden atribuir a descuido o falta de atención.

Dificultades con la unidad de referencia del descuento o del pago (D.1)

De esta clase se extraen dos subclases que corresponden a las dificultades con la unidad de referencia en las relaciones o bien de «razón interna» (D.1.1), o bien de «razón externa» (D.1.2).

En las relaciones de «razón interna» (D.1.1)

En la tabla 8, aparece en primer lugar la actuación de un estudiante que calcula el pago porcentual en la oferta del «3 x 2»; de él saca el descuento porcentual y lo compara con los descuentos porcentuales, sin percatarse de que los referentes de los descuentos son distintos, en un caso el referente son 3 ítems y en el otro, dos. En segundo lugar aparece la actuación de otro estudiante que, en este caso, pierde de vista el conjunto total de ítems que intervienen para cada oferta. Calcula el coste en tanto por uno en la oferta del «3 x 2» obteniendo el coste para cada unidad. Por otro lado, en el resto de ofertas calcula el coste en tanto por uno solo para la segunda unidad. Compara los resultados, pero lo hace confundiendo el coste con el descuento (once estudiantes manifestaron esta confusión).

Tabla 8
Ejemplos D.1.1. Dificultades en las relaciones de «razón interna»

3 x 2	*-70 % (2.ª unidad)*	*Mitad de precio (2.ª unidad)*
5,58 × 3 = 16,77 3,72 × 3 = 11,16 $\left.\begin{array}{l}16{,}77-100\%\\ 11{,}16-66{,}54\%\end{array}\right\}$ 33,45 % de descuento	→ 70 %	→ 50 %
El mejor descuento es -70 % en la 2.ª unidad porque en la primera oferta solo es un 33,45 % de descuento y en la tercera un 50 %.		
$\left.\begin{array}{l}5{,}58-1\\ 3{,}72-x\end{array}\right\}$ x = 0,6 de descuento	$\left.\begin{array}{l}10-1\\ 3-x\end{array}\right\}$ x = 0,3 de descuento	$\left.\begin{array}{l}9{,}74-1\\ 4{,}87-x\end{array}\right\}$ x = 0,5 de descuento
El mejor descuento es en la primera oferta.		

En las relaciones de «razón externa» (D.1.2)

El estudiante del ejemplo transcrito en la tabla 9 unifica los precios y calcula el coste por unidad al aplicar el descuento en las ofertas del «3 x 2» y «2.ª unidad a mitad de precio», pero no en la oferta del «-70 % en la 2.ª unidad», en la que solo calcula el descuento en una de las dos unidades. A continuación, compara los resultados obtenidos sin percatarse de que son normalizaciones con distinto referente.

Tabla 9
Ejemplo D.1.2. Dificultades en las relaciones de «razón externa»

3 x 2	*-70 % (2.ª unidad)*	*Mitad de precio (2.ª unidad)*
(Precio: 5,58 €) La unidad sale a 3,72 €	(Precio: 5,58 €) $5{,}58\cdot\dfrac{70}{100}=3{,}906$ € La unidad sale a 3,906 €	(Precio: 5,58 €) 5,58 € ÷ 2 = 2,79 5,58 + 2,79 = 8,37 8,3 ÷ 2 = 4,18 € La unidad sale a 4,18 €
Por lo tanto la mejor oferta sería la de «3 x 2»		

Dificultades con la elección de ítems y/o precios (D.2)

Para normalizar razones podemos proceder con la unificación de los antecedentes o los consecuentes para favorecer la comparación (Fernández, 2009). En las relaciones (€ / ítems), la elección del número de ítems y de un precio común es fundamental para una comparación exitosa. Se incluyen aquí las respuestas de los estudiantes para los que o bien la elección inadecuada del número de ítems, o bien la unificación de los precios, actúan como condicionantes en la comparación de los descuentos, lo que desvirtúa la ventaja de alguna oferta. Tres subclases se han identificado en esta clase. A continuación, describiremos cada una de ellas e ilustraremos algunos ejemplos.

Unifican ítems y los precios (D.2.1)

En esta subclase se agrupan las actuaciones que, pese a tomar el mismo precio en las distintas ofertas, unifican el número de ítems a un valor que desvirtúa el sentido de alguna oferta, creando unas cantidades relativas «no eficaces» que utilizan para dar respuesta a la tarea. Se observan dos tipos de comparaciones: las que se realizan tras reducir a la unidad dichas razones o las que se realizan directamente.

En la tabla 10, la primera fila muestra la respuesta de un estudiante que compara los costes unitarios que obtiene al unificar el número de ítems a tres. Toma como precio común a las tres ofertas el precio del 3 x 2. Después, aplica el descuento a los tres ítems en el «3 x 2», y en las otras dos ofertas solo lo aplica a un segundo ítem. Con ello desvirtúa el sentido de estas ofertas que solo se ofrecen comprando dos ítems.

El estudiante cuya resolución se transcribe en la segunda fila de la tabla 10, después de igualar a tres el número de ítems y tomar como precio común 10 €, compara directamente las relaciones creadas. Como sucede con el estudiante del ejemplo anterior, no se beneficia de la oferta con el descuento del «-70 % en la 2.ª unidad».

Tabla 10
Ejemplos D.2.1. Unifican ítems y los precios

3 x 2	*-70 % (2.ª unidad)*	*Mitad de precio (2.ª unidad)*
(Precio: 5,58 €) … Unidad al comprar 3: 3,72 €	(Precio: 5,58 €) $\frac{5{,}58\times 30}{100}=1{,}67€$ $1{,}67+5{,}58\times 2=12{,}83€$ $12{,}83\div 3=4{,}27€$ Unidad al comprar 3: 4,27 €	(Precio: 5,58 €) $5{,}58\div 2=2{,}79€$ $2{,}79+5{,}58\times 2=13{,}95€$ $13{,}95\div 3=4{,}65€$ Unidad al comprar 3: 4,65 €
(Una botella son 10 €) 3 botellas cuestan 20 €	(Una botella son 10 €) La segunda botella saldría a 7 € (70 % de 10 €) pero la tercera botella costaría su valor total. 3 botellas serían 27 €	La descarto ya que la mitad de precio es un descuento menor que el 70 % La mejor oferta es el «3 x 2»

Unifican ítems, pero no los precios (D.2.2)

Al no unificar los precios, aquí los estudiantes, en vez de contestar a qué descuento es mejor, contestan a la pregunta de qué oferta ofrece el producto más barato o más caro por unidad o al comprar un mismo número de botellas.

En la tabla 11 se recoge la actuación de dos estudiantes, uno que calcula los costes unitarios sin unificar los precios y otro que compara el coste total al comprar el mismo número de botellas (3 ítems). El primero toma los precios dados en las ofertas «3 x 2» y «2.ª unidad a mitad de precio». Como la oferta del «-70 % en la 2.ª unidad» no tiene un precio explícitamente dado, le atribuye el mismo precio que a la oferta del «3 x 2». Después compara los resultados para valorar qué producto es más barato o caro por unidad. El segundo estudiante responde con el mismo criterio, tomando 3 botellas en cada oferta.

Tabla 11
Ejemplos D.2.2. Unifican ítems, pero no los precios

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 5,58 €) 5,58 × 2 = 11,16 € 11,16 ÷ 3 = 3,72 €/unidad	(Precio: 5,58 €) 70 % de 5,58 € = 3,906 5,58 – 3,906 = 1,674 5,58 + 1,674 = 7,254 7,254 ÷ 2 = 3,627 €/unidad	(Precio: 9,74 €) 50 % de 9,74 = 4,87 9,74 – 4,87 = 4,87 9,74 + 4,87 = 14,61 14,61 ÷ 2 = 7,305 €/unidad
(Precio: 5,58 €) Comprando 3, el total es 11,16 €	(Precio: 5,58 €) Comprando 3, el total sería 13,06 €	(Precio: 9,74 €) Comprando 3, el total sería 24,35 €
Sale más barata la oferta de 3 x 2		

No unifican ítems, pero sí los precios (D.2.3)

Se agrupan en esta subclase las actuaciones de algunos estudiantes que, para crear las relaciones, utilizan el mismo precio en cada oferta y las comparan sin unificar el número de ítems, lo que desvirtúa el criterio para elegir el descuento.

En la tabla 12 aparece la actuación de un alumno que utiliza el mismo precio en cada oferta (20 €), creando la relación (€ pago / ítems totales) que utiliza para la comparación. La respuesta de este estudiante puede estar condicionada a que, en la oferta del «-70 % en la 2.ª unidad» y «2.ª unidad a mitad de precio», al comprar 3 botellas no se puede beneficiar del descuento y por tanto pagaría más que en el 3 x 2.

Tabla 12
Ejemplo D.2.3. No unifican ítems, pero sí los precios

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 20 €) Si me llevo 3 pago 40 €	(Precio: 20 €) Pagamos 26 € y solo me llevo 2	(Precio: 20 €) Pagamos 30 € y solo me llevo 2
El mejor descuento es el del 3 x 2		

En contraposición a las respuestas categorizadas hasta el momento, que realizan comparaciones relativas (con o sin éxito), se encuentran aquellas resoluciones que no reflejan un pensamiento relativo. Pasamos a describirlas.

Comparaciones no relativas

Dentro de ella distinguimos las siguientes subcategorías: Comparan diferencias (N.1) e Ignoran parte de la información (N.2).

N.1. Comparan diferencias

En esta subcategoría se incluyen las respuestas de los estudiantes que comparan diferencias de cantidades absolutas. Se distinguen las siguientes clases: Hallan ahorros o costes totales (N.1.1) y Hallan ahorros o costes en un ítem (N.1.2).

Hallan ahorros o costes totales (N.1.1)

Los estudiantes agrupados en esta clase calculan el coste total antes y después del descuento, utilizando precios diferentes en alguna de las ofertas. Posteriormente hallan la diferencia entre ambos valores obteniendo el ahorro total en cada oferta, que es lo que comparan para dar respuesta a la tarea, como se observa en el ejemplo recogido en la tabla 13.

Tabla 13
Ejemplo N.1.1. Hallan ahorros o costes totales

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 5,58 €) 5,58 × 3 = 16,76 3,72 × 3 = 11,16 16,76 – 11,16 = 5,6 € ahorro	(Precio: 9,74 €) 9,74 × 2 = 19,48 9,74 + 2,84 = 12,58 19,48 – 12,58 = 6,9 € ahorro	(Precio: 9,74 €) 9,74 × 2 = 19,48 9,74 + 4,87 = 14,61 19,48 – 14,61 = 4,87 € ahorro
El mayor ahorro se consigue con la oferta del -70 % en la segunda unidad		

Hallan ahorros o costes en un ítem (N.1.2)

Esta clase se diferencia de la anterior en que los sujetos hallan el ahorro absoluto en un solo ítem.

La tabla 14 muestra la resolución de un alumno que asigna un precio arbitrario de 15 € a la oferta del «-70% en la 2.ª unidad» al carecer de precio en el enunciado. Aplica el descuento a una unidad, calcula el coste al que resulta y lo interpreta erróneamente como «lo que te ahorras». Lo compara con lo que te ahorras en las otras ofertas en una sola unidad.

Tabla 14
Ejemplo N.1.2. Hallan ahorros o costes en un ítem

3 x 2	*-70 %* *(2.ª unidad)*	*Mitad de precio* *(2.ª unidad)*
(Precio: 5,58 €) 5,58 – 3,72 = 1,86 1,86 € te ahorras	(Precio: 15 €) 15 – 10,5 = 5,5 5,5 € te ahorras	(Precio: 9,74 €) 9,74 – 4,87 = 4,87 4,87 € te ahorras
En la segunda oferta te ahorras más		

N.2. Ignoran parte de la información

Esta subcategoría agrupa las respuestas de los estudiantes que se centran solo en una variable del problema (en el número ítems) o en aspectos afectivos o subjetivos, dando lugar a las subcategorías N.2.1 y N.2.2, respectivamente.

Relacionan solo una variable (N.2.1)

La denominación de esta estrategia está tomada de Ben-Chaim *et al.* (1998). Los estudiantes que aplican esta estrategia deciden cuál es el mejor descuento fijándose solo en una de las variables del problema.

En el caso del ejemplo mostrado en la tabla 15 el estudiante se centra en el número de ítems de cada oferta relacionándolo con las preferencias del consumidor, en este caso 3 y 2 botellas, ignorando el resto de la información que aporta el enunciado.

Tabla 15
Ejemplo N.2.1. Relacionan solo una variable

La del «3 x 2» en el caso de que desees llevarte 3 productos o múltiplos de este. En tal caso pagas 2 productos y te llevas 3, mientras que en las otras dos pagas 2 y la parte proporcional del descuento aplicado. Si solo deseas 2 productos o múltiplos de este, la mejor oferta es la del descuento del 70 %.

Respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas (N.2.2)

Aquí se incluyen las respuestas de los estudiantes que dan respuestas subjetivas a la tarea usando, por ejemplo, argumentos que tienen que ver con los gustos o preferencias individuales, como por ejemplo la calidad del producto (véase tabla 16). La denominación de esta estrategia también está tomada de Ben-Chaim *et al.* (1998).

Tabla 16
Ejemplo N.2.2. Respuestas afectivas a los datos numéricos y preguntas

Considero mejor el primer descuento siempre que te guste el vino de Extremadura. En primer lugar, porque por un precio estimado de 10 € te llevas 3 botellas, en cambio, la otra oferta del vino, en principio, relacionando calidad-precio, es un Rioja, y por tanto puede que sea una buena oferta, pero si lo que quieres es un vino barato, resulta que este vale el primero ya casi 10 € y comprando dos gastas alrededor de 15 €.

Otras respuestas

Esta es otra de las categorías recogidas en el esquema interpretativo. En ella se incluyen las respuestas imprecisas o no identificadas (I.1), y las respuestas en blanco o con anotaciones inconexas (I.2).

En la tabla 17 se muestra un ejemplo del primer tipo. En él, el estudiante no deja suficientes rastros para interpretar su resolución.

Tabla 17
Ejemplo I.1. Respuestas imprecisas o no identificadas

El mejor es el del -70 % en la segunda unidad ya que se hace una mayor rebaja que en las otras dos ofertas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El análisis interpretativo de las resoluciones a la tarea «el descuento» nos ha permitido conocer las rutas cognitivas de 339 estudiantes para maestro a partir de las dimensiones de análisis adoptadas.

Atendiendo al criterio relativo o absoluto para comparar cantidades, los datos apuntan a que la mayoría de los estudiantes evidencian un escaso desarrollo del pensamiento relativo. Estos resultados concuerdan con los obtenidos en trabajos precedentes como el de Valverde y Castro (2012) o el de Gómez y García (2015). Si se ignoran las 65 respuestas no identificadas, del total de las respuestas que se han podido analizar solo 66 estudiantes de 274 (24 %) compararon cantidades relativas satisfactoriamente. Casi la mitad de las 274 respuestas, 123 (44 %), corresponden a estudiantes que no hicieron uso de un pensamiento relativo. Estos estudiantes hicieron comparaciones propias de un pensamiento absoluto (82 estudiantes calcularon diferencias entre cantidades con independencia de sus referentes) o ignoraron una parte relevante de la información ya que dieron respuestas centradas en una sola variable (36 estudiantes), o de carácter afectivo o subjetivo (5 estudiantes). En la tabla 18 se resumen las frecuencias de las respuestas a la tarea «el descuento».

Tabla 18
Frecuencias de las respuestas a la tarea «el descuento»

Comparan cantidade srelativas		*No comparan cantidades relativas*	*No identificadas o en blanco*
Con éxito	Con dificultad	123 estudiantes	65 estudiantes
66	85		
151 estudiantes			

Algo más de la mitad de los estudiantes, 151 (55 %), dieron indicios de un pensamiento relativo; no obstante, más de la mitad de ellos, 85 (56 %), tropezaron con dificultades (tendencia relativa).

Es significativo que las dificultades de los estudiantes no radicaron en los aspectos formales (definición y propiedades) y algorítmicos propios de las razones y de su normalización, sino que radicaron principalmente en el manejo de los referentes de los descuentos (56 estudiantes) o en la elección del número de los ítems y/o el precio de las ofertas (29 estudiantes). Específicamente tuvieron dificultades con los referentes de las razones normalizadas a porcentajes mediante las que se expresan los descuentos, como en «-70 % en la 2.ª unidad», porque ignoraron las cantidades que se debían comparar y no las unificaron. Este resultado concuerda con lo señalado por Parker (1997). Este autor afirma que «cuando los estudiantes pierden de vista la naturaleza comparativa del porcentaje, a menudo desarrollan procedimientos erróneos basados en los tamaños de los números más que en las relaciones del problema» (p. 406). En este sentido, hubo un número significativo de estudiantes que confundieron las relaciones descuento/compro con pago/compro o a la inversa (11/56 estudiantes).

En cuanto a la naturaleza de las relaciones multiplicativas (véase tabla 19), los estudiantes optaron indistintamente por las razones interna y externa, con una ligera preferencia por la razón interna.

Tabla 19
Frecuencias de las respuestas relativas

<table>
<tr><td colspan="5">Comparaciones relativas</td></tr>
<tr><td colspan="3">En las relaciones de «razón interna»</td><td colspan="2">En las relaciones de «razón externa»</td></tr>
<tr><td colspan="2">Con éxito</td><td>Con dificultad</td><td>Con éxito</td><td>Con dificultad</td></tr>
<tr><td colspan="2">37</td><td>46</td><td>29</td><td>39</td></tr>
<tr><td>Pago/compro</td><td>Descuento/compro</td><td rowspan="2"></td><td colspan="2" rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>22</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="3">83 estudiantes</td><td colspan="2">68 estudiantes</td></tr>
</table>

Las dificultades halladas se dieron con frecuencias similares en las relaciones de «razón interna» (46/83 = 55 %) y en las relaciones de «razón externa» (39/68 = 57 %). Todos los estudiantes que optaron por las relaciones de «razón interna» optaron por el esquema de pensamiento parte-todo (37 estudiantes), con preferencia por la relación pago/compro, no dándose en ningún caso el esquema parte-parte, cuya concreción es la relación descuento/pago. Esto se puede interpretar como una señal del escaso tratamiento en la enseñanza de la razón con el significado parte-parte, que queda oscurecido por el trato predominante dado a la razón como fracción, y es que «muchos autores de libros de texto muestran ejemplos de razones descontextualizados de las representaciones parte-parte y parte-todo sin mencionar por qué dos conceptos diferentes pueden representarse con la misma notación» (Clark, Berenson y Cavey, 2003, p. 312).

Por lo que se refiere a las técnicas de normalización de los estudiantes que contestaron satisfactoriamente, la preferencia fue la estrategia del cociente, que es la que da lugar al valor unitario, seguida del producto cruzado, ambas estrategias dominantes en el modelo de enseñanza. Apenas es significativo el número de estudiantes que usaron la estrategia de la fracción o el múltiplo común. Estos datos permiten inferir conclusiones que tienen que ver con el efecto del modelo de enseñanza dominante, que parece priorizar los aspectos procedimentales, en concordancia con aportes de otros investigadores (Ben-Chaim *et al.*, 2002; Ilany, Keret y Ben-Chaim, 2004; Parker, 1997).

En relación con el uso de herramientas heurísticas como la descomposición del problema en partes para reducir la comparación de las tres ofertas a dos, los datos muestran que hay un significativo número de estudiantes que arrastraron las tres ofertas hasta el final de sus procesos de resolución. Eso se puede interpretar en el sentido de que no hacen una reflexión previa sobre cuál es la mejor manera de abordar el problema. Además, más de la mitad de los estudiantes que resolvieron con éxito la tarea mostraron un comportamiento precio-dependiente para determinar qué cantidades hay que comparar (40 de 66 estudiantes). Este comportamiento, aunque es innecesario y complica los cálculos, guía sus actuaciones incluso en la oferta donde el precio no es un dato («-70 % en la 2.ª unidad»), a la que le asignan uno arbitrario o tomado de las otras tareas.

El hecho de que las ofertas se optimicen al comprar un número de ítems múltiplo de 2 y 3 apenas tuvo repercusión en el razonamiento de los estudiantes, por lo que inferimos que los estudiantes no llegan a entender la situación planteada en su globalidad, ya que son incapaces de percatarse de que, de otro modo, desaprovecharán la ventaja que ofrecen las ofertas.

IMPLICACIONES

De la discusión de los resultados obtenidos se desprende que la tarea «el descuento» permite una evaluación del pensamiento relativo de los estudiantes y hace emerger sus criterios para establecer y desarrollar los procesos comparativos con cantidades relativas, así como sus rigideces y dificultades que, como producto de la enseñanza previamente recibida, les han pasado desapercibidas.

En concreto, el análisis interpretativo nos ha aportado conocimiento bien fundamentado sobre el desempeño de los estudiantes en este tipo de tareas y nos ha permitido observar que existe un grupo importante de futuros maestros que optan por un criterio absoluto para dar respuesta a la tarea. Este criterio para manejar las cantidades no es erróneo, pero no es el pertinente. Este aspecto pone en evidencia la falta de competencia de muchos estudiantes para maestro en relación con la comparación de cantidades relativas que tienen que ver con las decisiones de compra, cuando como consumidores en los supermercados les presentan distintos tipos de descuento.

Se ha constatado que para la mayoría de los futuros profesores no es fácil hacer las comparaciones cuando las ofertas se presentan con razones desiguales, diferentemente normalizadas y con referentes distintos. Esto concuerda con el trabajo de Karplus *et al*. (1983), quienes afirman que cuando las razones no son iguales, como en este caso, los problemas son considerados en general más difíciles que aquellos con razones iguales.

Alrededor del 80 % de los futuros maestros no fueron capaces de dar una respuesta satisfactoria a la tarea. Este trabajo aporta una caracterización detallada de sus dificultades que puede constituir una herramienta potente para entender sus procesos de pensamiento y poder diseñar, a partir de ellos, propuestas de aula encaminadas a superar dichas dificultades.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ben-Chaim, D., Fey, J. T., Fitzgerald, W. M., Benedetto, C. y Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *36* (3), 247-273.
https://doi.org/10.1023/a:1003235712092

Ben-Chaim, D., Ilany, B. S. y Keret, Y. (2002). Mathematical and pedagogical knowledge of pre- and in-service elementary teachers before and after experience in proportional reasoning activities. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 81-88). Norwich: pme.

Clark, M., Berenson, S. y Cavey, L. (2003), A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning, *Journal of Mathematical Behavior*, *22*(3), 297-317.
https://doi.org/10.1016/s0732-3123(03)00023-3

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, *86*(5), 404-407.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción. Un estudio en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, C. y Llinares, S. (2012). Características del desarrollo del razonamiento proporcional en la educación primaria y secundaria. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *30*(1), 129-142.
https://doi.org/10.5565/rev/ec/v30n1.596

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 165-174). Granada: Comares.

Gómez, B. y García, A. (2015). What is a better buy? Rationale and empirical analysis of unequal ratios tasks in commercial offers contexts. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 266-273). Praga, República Checa: erme.

Gómez, B., Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance in ratio realistic discount task. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 293-302). Middle East Technical University. Manavgat-side/Antalya. Turquía: erme.

Hart, K. M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray Publishers Ltd.

Heller, P., Ahlgren, A., Post, T., Behr, M. y Lesh, R. (1989). Proportional reasoning: The effect of two context variables, rate type and problem setting. *Journal for Research in Science Teaching*, *26*(1), 205-220.
https://doi.org/10.1002/tea.3660260303

Hoffer, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En: T. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods.* (pp. 285-313). Boston: Allyn and Bacon.

Ilany, B. S., Keret, Y. y Ben-Chaim, D. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio & proportion in pre-service teacher education. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 81-88). Bergen, Noruega: pme.

Karplus, R., Pulos, S. y Stage, E. K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on «rate» problems. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(3), 219-233.
https://doi.org/10.1007/bf00410539

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41-61.
https://doi.org/10.2307/749385

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*, 3rd edition. Nueva York: Routledge Taylor y Francis Group.
https://doi.org/10.4324/9780203803165

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development*, *13*(2), 22-43.

Lobato, J. y Ellis, A. (2011). *Developing essential understanding of ratios, proportions and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: seiem.

Noelting, G. (1980). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I—Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, *11*, 217-253.
https://doi.org/10.1007/bf00304357

Parker, M. (1997). The ups and downs of percent (and some interesting connections). *School Science and Mathematics*, *97*(8), 406-412.
https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1997.tb17385.x

Singer, J. A. y Resnick, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics*, *23*, 231-246.
https://doi.org/10.1007/bf02309531

Smith, J. P. (2002). The development of students' knowledge of ratios. En B. Litwiller y G. Bright (Eds.), *2002 Yearbook of the NCTM* (pp. 3-17). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J., Armstrong, B., Lamon, S., Simon, M., Sowder, L. y Thompson, A. (1998). Educating teachers to teach multiplicative structures in the middle grades. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(2), 127-155.
https://doi.org/10.1023/a:1009980419975

Thompson, P. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: State University of New York Press.

Tourniaire, F. y Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(2), 181-204.
https://doi.org/10.1007/bf02400937

Valverde, G. y Castro, E. (2012). Prospective Elementary School Teachers Proportional Reasoning. *PNA*, *7*(1), 1-17.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). Nueva York: Academic Press.

Cognitive paths of pre-service teachers when they compare unequal ratios

Javier Monje Parrilla
Departamento de Innovación y Formación Didáctica,
Universidad de Alicante, Alicante, España
monjejavier@ua.es

Bernardo Gómez Alfonso
Departamento de Didáctica de la Matemática,
Universidad de Valencia, Valencia, España
bernardo.gomez@uv.es

Pre-service teachers must be able to assist their students in the transition from additive (or absolute) to relative thinking. However, it is common to observe how some pre-service teachers resort to forms of additive reasoning when they do not find other methods to solve certain multiplicative situations (Ben-Chaim, Ilany and Keret, 2002; Livy and Vale, 2011; Sowder *et al.*, 1998), like those that involve the comparison of unequal relative quantities. These situations, which are not proportional, have important applications in daily life, such as those related to the choice between different commercial discounts. Thus, this research aims to characterize the actions of pre-service teachers in a situation of comparison of unequal ratios in the context of commercial offers. The characterization of the elements involved in the resolution strategies determines the cognitive path of pre-service teachers.

In order to account for these cognitive paths, it is essential to analyze the critical components of the tasks and establish the dimensions of analysis that will allow us to interpret the resolutions (Gómez and García, 2015). In our case, we designed a task: «Which is the better buy?» (Lamon, 2012), requiring the interpretation of the discount as a relative quantity and the use of normalizing techniques to compare ratios. The different inequality of ratios presented and their referents determine the critical components of the task.

This research included the participation of 339 pre-service teachers in the third year of the Primary Education degree from the University of Valencia. Our data consist of students' answers to the designed task. For its analysis, we have used different dimensions derived from the theoretical framework, but also from the examination of the critical components of the task indicated above, such as: the type of thought (absolute or relative); the nature of ratios (internal or external); the scheme part-whole or part-part; the relationship between quantities (payment / purchase, discount / purchase or discount / payment) and normalizing techniques (cross product algorithm, fraction strategy, quotient, unit rate, progressive construction and their associated methods to compare ratios: unit method and common multiple method).

The results obtained have been organized into categories and subcategories that give a detailed account of the cognitive paths of response to the proposed task. Considering the relative or absolute criteria for comparing quantities, the data point to the students' poor development in relative thinking. These results are in line with those obtained in previous works such as Valverde and Castro (2012), or Gómez and García (2015). This aspect highlights the lack of competence of many future teachers with regards to the comparison of relative amounts that have to do with purchasing decisions. More particularly, this work provides a detailed characterization of their difficulties, which can be a powerful tool to understand their thinking processes and to design, from them, classroom proposals aimed at overcoming these difficulties.