

Propuesta didáctica para la enseñanza de las isometrías en Educación Secundaria

Learning Isometries in Secondary Education: A Teaching Proposal

MARTA MARTÍN-NIETO

LICENCIADA EN MATEMÁTICAS. PROFESORA EN EL CES DON BOSCO

Resumen

El propósito de este artículo es ofrecer a los docentes de matemáticas de Educación Secundaria una propuesta de trabajo para la enseñanza de las isometrías. Se presenta una unidad didáctica para 3º de ESO, idónea tanto para Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas como para Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Esta unidad busca generar la comprensión y el aprendizaje de movimiento rígido en el plano. El trabajo en las diferentes sesiones permite a los estudiantes partir de lo que ya saben y pasar de lo más simple a lo más complejo mediante la visualización, manipulación y resolución de actividades planteadas con GeoGebra.

Palabras clave: Isometría, GeoGebra, Secundaria, simetría, giro, traslación.

Abstract

The purpose of this article is to provide Secondary School teachers with a tool for teaching isometries. This is a teaching unit has been designed for the 3rd year of ESO usable for teaching both Academic Maths and Applied Maths. This unit aims to facilitate the understanding and learning of rigid motions of the plane. The work in the different sessions allows students starting from what they already know and progress from simplest concepts to complex ones by visualising, manipulating and solving a set of Geogebra activities.

Keywords: Isometries, Geogebra, Secondary School, symmetry, rotation, translation.

1. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, la geometría euclídea y, particularmente, los movimientos en el plano se han tratado de una manera superficial en algunos cursos de Educación Secundaria (BOCM, 29 de mayo, 2007). En estas páginas se desarrolla una propuesta de Unidad Didáctica geométrica para el nivel de 3º de ESO, aplicable en los dos itinerarios posibles: Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas o Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas. Los conocimientos previos de los alumnos en ambas opciones, al comienzo del bloque de geometría, son los mismos ya que el tercer curso de Educación Secundaria es en el que se escoge uno de los itinerarios.

El desarrollo de la unidad se estructura en diez sesiones-taller, que se llevarán a cabo en el aula de informática, contando cada estudiante con un ordenador. Además el profesor debe disponer de pizarra digital o proyector. En el desarrollo de las sesiones, cada alumno elabora un cuaderno de prácticas que llamaremos *cuaderno de movimientos*. Debe anotar día a día lo que se explica en clase y las conclusiones obtenidas, así como argumentaciones y razonamientos.

Por las destrezas que requieren, las actividades diseñadas para las sesiones se pueden aplicar en otros cursos aunque el currículo de Secundaria solamente menciona movimientos en el plano en 3º de ESO (BOE, 3 de enero, 2015). Además se pueden adaptar para la formación inicial del profesorado de primaria.

La unidad está estructurada en dos niveles: manipulativo y conceptual. En el primer nivel los objetivos son que el alumno se identifique con la herramienta GeoGebra y comprenda qué son los movimientos en el plano. En el segundo nivel se desarrollan algunas composiciones de movimientos para descubrir qué tipo de movimientos son. En las últimas sesiones realizaremos mosaicos geométricos aplicando lo aprendido. Se propone una evaluación en dos sesiones mediante dos controles, uno con GeoGebra y otro escrito. Ambos evaluarían conocimientos adquiridos de primer y segundo nivel y permitirán al profesor conocer si el alumno comprende los argumentos escritos en el cuaderno.

El objetivo de la propuesta es demostrar que es posible introducir contenidos de movimientos en el plano en Secundaria a alumnos que desconozcan geo-

metría analítica. En general, se puede deducir que es posible introducir más geometría con la ayuda del *software* dinámico GeoGebra.

2. MARCO TEÓRICO

GeoGebra, además de tener las posibilidad de un *software* de Geometría Dinámica, incluye otras particularidades algebraicas y de cálculo. Sin embargo, en esta propuesta se emplea GeoGebra fundamentalmente para resolver problemas de geometría por lo que lo denominaremos con las siglas SGD. La idea básica de los creadores y desarrolladores de este *software* (Hohenwarter, 2002; Hohenwarter, Jarvis, y Lavicza, 2009) ha sido unir geometría, álgebra y cálculo en un único programa que permita la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

En la página podemos descargar GeoGebra y toda la documentación necesaria para su uso. Es un *software* libre que tiene versiones para todos los sistemas operativos. La comunidad de usuarios se caracteriza por su enorme vitalidad, que no para de crecer, intercambiar recursos y organizar jornadas para difundir sus logros y desarrollar el *software*, adaptándolo a nuevos soportes (tabletas, móviles, etc.). Los institutos de GeoGebra son los encargados de la formación docente y la difusión de novedades.

La resolución de problemas con el uso de la herramienta GeoGebra se distingue por la posibilidad de utilizar el carácter dinámico de este *software*. Esta característica permite a los estudiantes realizar acciones que no son posibles o son difíciles con otros métodos, como lápiz y papel. La herramienta que representa esencialmente el dinamismo de GeoGebra es *Elige y mueve*, herramienta que selecciona un objeto y lo arrastra por la pantalla. Permite construir y modificar dinámicamente figuras geométricas euclídeas. Las propiedades geométricas y las relaciones entre objetos usados en una construcción se mantienen al manipular un objeto y, además, se modifican los objetos dependientes en consecuencia (Ruiz López, 2012).

Algunos autores (González López, 2001; Healy, 2000) mantienen que un entorno de geometría dinámica puede promover justificaciones empíricas que inhiben la necesidad de demostraciones formales aunque proporciona un entorno en el que los estudiantes pueden experimentar libremente, lo que les

lleva a desarrollar formas no tradicionales de aprendizaje. Otros autores (Christou, Mousoulides, Pittalis y Pitta-Pantazi, 2004; De Villiers, 1997; Jones, Gutiérrez y Mariotty, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000) defienden que los SGD benefician a los estudiantes porque facilitan la visualización, la exploración y los procesos de comprensión necesarios para formular conjeturas, lo que implica que mejoren en las habilidades de argumentación y demostración.

3. METODOLOGÍA

3.1 Descripción

Encuadre temporal en el currículum: los contenidos de matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria se estructuran en cinco bloques. Esta unidad didáctica se ubica dentro de bloque 3 de geometría.

Tanto en Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas 3º ESO, como Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Aplicadas 3º ESO, este bloque contiene lo siguiente: «Traslaciones, giros y simetrías en el plano» (BOE, 3 de enero, 2015).

Conocimientos previos: en la Educación Secundaria Obligatoria los alumnos ya han sido iniciados en varios campos del conocimiento matemático, primando el aspecto operacional sobre el teórico. Estos conocimientos son los que han de construir el punto de partida de la enseñanza. En el Real Decreto por el que se establece currículo básico de de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Movimientos en el Plano no aparecen hasta el tercer Curso. Sin embargo, en 1º y 2º de ESO aparece explícitamente como contenidos: «Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas» (BOE, 3 de enero, 2015).

3.2 Objetivos didácticos

- Conocer los movimientos existentes en el plano.
- Distinguir movimientos de los que no lo son.
- Diferenciar los distintos tipos de movimientos en el plano.

- Distinguir los movimientos que conservan la orientación de los que la cambian.
- Identificar puntos fijos.
- Identificar los movimientos en la vida cotidiana.
- Identificar las distintas composiciones de movimientos.
- Utilizar lenguaje formal para expresar razonamientos matemáticos sencillos.

3.3 Criterios de evaluación

En ambas asignaturas, uno de los criterios de evaluación, relacionado con los contenidos de la unidad didáctica: «reconocer las transformaciones que llevan de una figura a otra mediante movimiento en el plano, aplicar dichos movimientos y analizar los diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza» (BOE, 3 de enero, 2015).

Los criterios específicos diseñados para esta propuesta están contenidos en el criterio citado anteriormente y relacionados con los objetivos didácticos.

- Saber definir los movimientos en el plano.
- Distinguir una representación de movimientos de los que no lo son.
- Identificar movimientos básicos cuando se vean representados gráficamente.
- Saber distinguir qué es la orientación y qué movimientos la conservan
- Definir e identificar puntos fijos en movimientos en el plano.
- Saber cuántos puntos fijos deja cada uno de los movimientos básicos en el plano.
- Dar ejemplos de movimientos en el plano.
- Decir de qué movimiento o composición de movimientos se trata viendo una representación.
- Expresar argumentos y conclusiones utilizando lenguaje matemático.

- Utilizar la aplicación informática de geometría dinámica GeoGebra, representando cuerpos geométricos y comprobando, mediante interacción con ella, propiedades geométricas (BOCM, 20 de mayo, 2015).

3.4 Estándares de aprendizaje evaluables

En el currículo básico por el que se rige Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, los estándares de aprendizaje del bloque 3 que se corresponden con los de esta propuesta, son los siguientes: «4.1. Identifica los elementos más característicos de los movimientos en el plano presentes en la naturaleza, en diseños cotidianos u obras de arte. 4.2. Genera creaciones propias mediante composición de movimientos, empleando herramientas tecnológicas cuando sea necesario» (BOE, 3 de enero, 2015).

3.5 Técnicas o actividades de calificación

Durante el proceso de evaluación habrá cuatro calificaciones bien diferenciadas:

- **Prueba con uso de *software* de geometría dinámica (30%):** está compuesto por tres actividades, que evalúan los conocimientos adquiridos de nivel manipulativo.
- **Prueba escrita (30%):** se trata de una prueba de razonamientos conceptuales para evaluar aprendizaje de razonamientos matemáticos.
- **Cuaderno de movimientos (30%):** el cuaderno de movimientos es un diario de prácticas en el que deben anotar día a día lo que se explica en clase y las conclusiones obtenidas, así como argumentaciones y los razonamientos. Se recomienda recoger cada semana y devolver corregido al alumno. Así se plantea, como herramienta de evaluación continuada del alumno. Tiene una doble función: aporta información tanto al profesor como al alumno para adoptar los métodos y estrategias adecuados.
- **Actitud del alumno (10 %):** la implicación en los talleres, la participación, el interés... son aspectos evaluables.

Parte del porcentaje de la nota final (40%) corresponde a evaluación continua mediante el cuaderno de movimientos y la participación del alumno. Sin embargo, deben demostrar en los controles finales de la unidad que han conseguido los

objetivos. Ambos controles siguen la línea de las actividades vistas en clase. La evaluación se corresponde de manera lógica con la metodología de enseñanza.

3.6 Método de enseñanza

La mayoría de las sesiones se estructuran de la siguiente manera: en primer lugar, motivación y planteamiento del problema, a continuación, resolución de una o varias actividades con uso del *software* dinámico y, para finalizar, reflexión sobre lo aprendido. La primera sesión es de introducción y exploración, mientras que las dos últimas son de aplicación de lo aprendido.

Los alumnos trabajarán de manera individual con su propio ordenador, pero, continuamente, se discutirá en gran grupo con la orquestación del profesor. El objetivo es conseguir un aprendizaje dialógico, poniendo siempre en común, al finalizar la sesión, las conclusiones obtenidas.

Quedará reflejado en el *cuaderno de movimientos* por escrito el desarrollo realizado en clase, reflejando argumentos y conclusiones. Así, se pretende alcanzar el objetivo didáctico «Utilizar lenguaje formal para expresar razonamientos matemáticos sencillos» de manera oral y escrita.

4. DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA

4.1 Contenidos específicos

- **Movimiento en el plano:** Transformación del plano en sí mismo que mantiene invariante las distancias, es decir, la distancia entre los puntos P y Q ha de ser la misma que entre sus homólogos P' y Q'.
- **Puntos fijos:** Permanecen en la misma posición cuando se les aplica un movimiento.
- **Identidad:** Movimiento en el cual todos sus puntos son fijos.
- **Simetría:** Movimiento que tiene una recta de puntos fijos (**eje de simetría**). Invierte la orientación.
- **Giro:** Movimiento con un punto fijo (**centro de simetría**) que realiza la una rotación con respecto al punto fijo y con un ángulo (**ángulo de giro**). Mantiene la orientación.
- **Traslaciones:** Movimiento que cambia la posición de un objeto según un vector (vector de traslación). No tiene puntos fijos.

- **Composición de movimientos:** Aplicación de un movimiento a continuación de otro. En esta unidad didáctica se trabajan las siguientes:
 - **Simetría y traslación** (una de ellas es **simetría deslizante**, como las huellas que deja una persona al caminar por la nieve).
 - **Giro y traslación.**
 - **Simetría y giro.**
- **Mosaicos:** Patrón de figuras idénticas que deben encajar sin dejar espacios entre ellas. Las figuras no deben superponerse. Si el patrón se repite, recubre un plano.

4.2 Temporalización

La unidad didáctica se desarrolla en diez sesiones que se describen a continuación.

4.2.1 Sesión 1

En la primera sesión se motiva el tema, descubrimos movimientos en el plano y los alumnos se inician en el uso de GeoGebra. Aunque en el Real Decreto por el que se establece currículo básico de de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en 1º y 2º de ESO aparece explícitamente como contenido: *Uso de herramientas informáticas para estudiar formas, configuraciones y relaciones geométricas* (BOE, 3 de enero, 2015) no suponemos que previamente hayan utilizado GeoGebra.

Los estudiantes deben tener preparado un cuaderno. Antes de comenzar se explica qué es el *cuaderno de movimientos*.

Para partir de lo que el alumno sabe, comenzamos la introducción de contenidos preguntando qué es un movimiento. Los adolescentes de esta edad conocen el concepto de movimiento en la vida cotidiana. El profesor dirige, en este momento, las respuestas para formalizar el lenguaje y llegar a la conclusión de que es un cambio de posición de un objeto. Resulta fundamental hacer especial hincapié en el hecho de que el objeto permanece invariante, es decir las distancias se conservan. Es el alumno quien debe descubrir este hecho, el profesor guía hacia ese descubrimiento. Se puede hablar sobre bailes porque cuando bailamos realizamos movimientos en un *espacio* que es la

sala de baile. En esta unidad tomaremos como *espacio* el suelo y nos fijaremos en los movimientos que hace un pie.

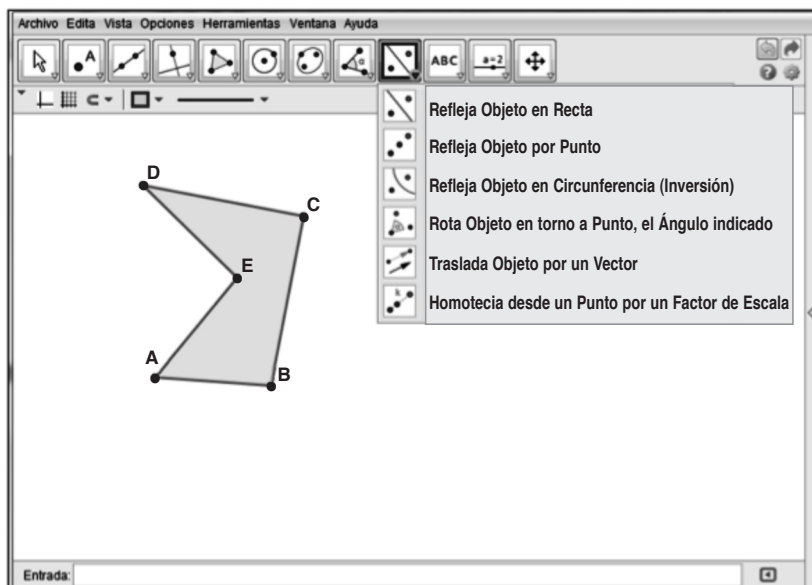
Para comprobar la adquisición del concepto de movimiento, se pide que piensen ejemplos de la vida cotidiana, como los bailes, en los que aparezcan movimientos y se hará una lluvia de ideas. Algunos ejemplos: movimiento de los girasoles hacia el Sol, lanzamiento de objetos, carreras, traslación y rotación de la Tierra...

Cuando el alumno ha comprendido el concepto de movimiento en el plano y es capaz de ejemplificar, es el momento de abrir GeoGebra. Tendrán unos minutos para *jugar*, el objetivo de este tiempo es que se familiaricen con esta herramienta y en particular con el arrastre. En distintas investigaciones (Arzarello, Olivero, Paola y Robutti, 2002; Ruíz-López, 2017) se ha observado que los estudiantes que empiezan a utilizar un *software* de geometría dinámica necesitan aprender a mover las figuras. Al principio no usan el arrastre, tienen que interiorizar esta función para hacer un uso productivo de ella.

Cada alumno dibuja un polígono (libre) en su ordenador y le aplican cada uno de los botones para intentar deducir si cada botón realiza al polígono un movimiento.

Figura 1. Actividad para descubrimiento de los botones que realizan movimientos.

Fuente: elaboración propia.



Con la orquestación del profesor, los alumnos llegarán a la conclusión de que «Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión)» y «Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala» no son movimientos, pues no se mantienen las distancias entre los vértices del polígono. El resto de los botones sí producen movimientos.

Resumen y conclusiones: en esta sesión, el alumno aprende a definir un movimiento de manera formal, a buscar ejemplos de la vida cotidiana y a familiarizarse con los botones de GeoGebra propios para el desarrollo de esta unidad. Además, conoce cuáles son los botones de GeoGebra que producen movimientos, distinguiéndolos de los que no los producen.

4.2.2 Sesión 2

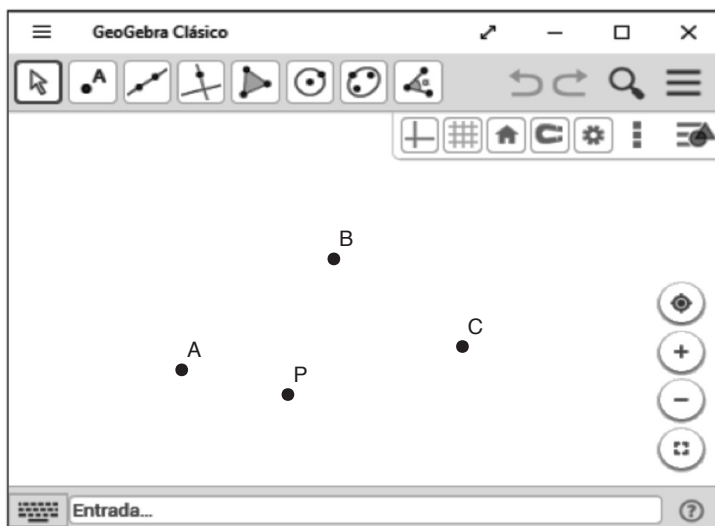
La clase comienza con la puesta en común de ideas sobre *punto fijo*, el profesor guía las intervenciones hasta formalizar el concepto. Como su propio nombre indica, es punto que permanece invariante en los movimientos (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

Antes de la realización de la siguiente actividad, el estudiante debe haber adquirido el concepto de movimiento en el plano e interiorizado el hecho de que las distancias se mantienen constantes como característica de todo movimiento.

Cada estudiante abre el fichero de GeoGebra.

Figura 2. Actividad 1.

Fuente: elaboración propia.

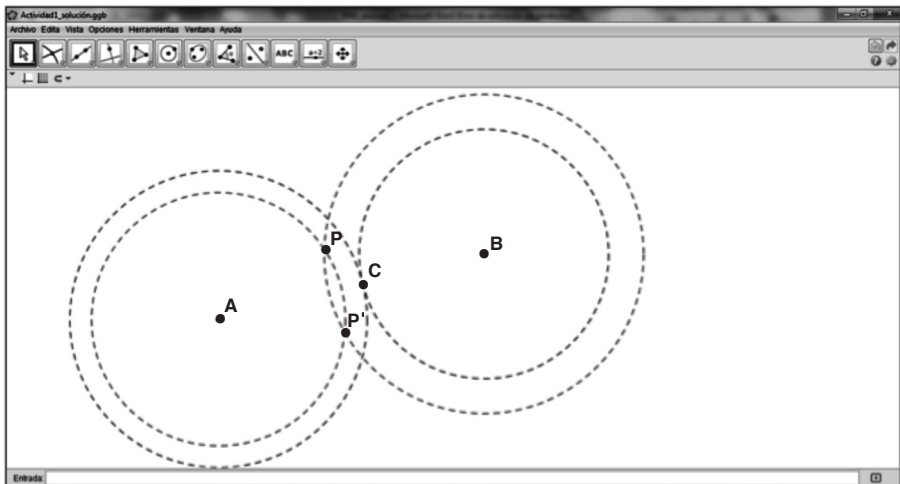


Los puntos A y B son dos puntos fijos. P es un punto cualquiera y Q está en la recta que pasa por A y B.

Actividad 1: se tiene un movimiento que deja dos puntos, A y B fijos. Encuentra las imágenes de los puntos P y Q. El movimiento dejará fijo algún punto más del plano. ¿Cuáles?

Figura 3. Solución Actividad 1.

Fuente: elaboración propia.



Para responder a la segunda parte de la actividad, se invita al alumno a realizar arrastre de todos los elementos de la figura. En el caso del punto Q será un arrastre sobre un lugar geométrico oculto. El alumno descubrirá cuál debe ser la situación de un punto para que sea fijo en este caso. La situación se generaliza cuando movemos cualquiera de los puntos de la figura a otros lugares del plano. Cuando hay dos puntos fijos, al menos hay una recta de puntos fijos que es la recta que pasa por los dos puntos.

Se presenta a continuación un **modelo de material pedagógico de apoyo en soporte papel** para esta actividad que sirve de guion para completar el cuaderno de movimientos.

Figura 4. Modelo de material pedagógico de apoyo en soporte papel.

Fuente: elaboración propia.

1. Descripción del problema.
Dados los puntos A y B de un plano dibuja las imágenes de otros dos puntos P y Q .

2. Construcción geométrica con el software Geogebra.
Dibuja una circunferencia de centro A y que pase por P y una circunferencia de centro B y que pase por P . La intersección de ambas circunferencias es la imagen de P .
Realiza el mismo procedimiento para Q

- ¿Por qué esa construcción da el resultado?

3. Preguntas y conclusiones.

- ¿Cómo se halla la imagen de P ?
- ¿Cómo se halla la imagen de Q ?
- Además de A y B ¿hay algún otro punto fijo?
- ¿Cuántos puntos hay?

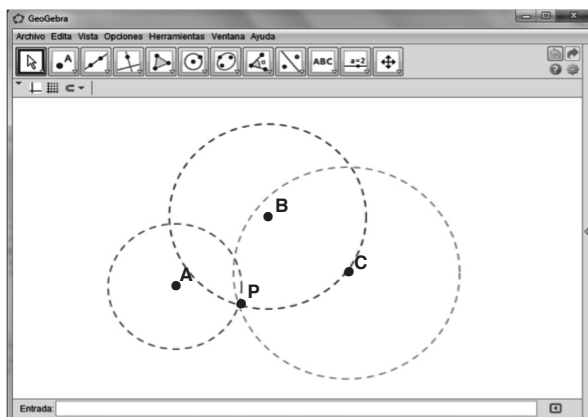
En la siguiente actividad, los alumnos descubren qué ocurre cuando son tres los puntos fijos, no alineados. Tras abrir, cada estudiante ve una pantalla con tres puntos fijos: A , B , C y un cuarto punto P .

Actividad 2: se tiene un movimiento que deja tres puntos, A , B y C fijos. Encuentra la imagen del punto P . El movimiento dejará fijo algún punto más del plano. ¿Cuáles?

Tras un tiempo para pensar en ello, se dialoga en grupo clase cuál será el procedimiento. Es similar al del ejercicio anterior.

Figura 5. Solución Actividad 2.

Fuente: elaboración propia.



Mediante el arrastre libre de los puntos, el alumno descubre que cualquier otro punto del plano permanecerá fijo por este movimiento. El profesor es quien enuncia que a este movimiento se le llama identidad. Además, puede añadir ejemplos con figuras geométricas o casos de la vida real.

Resumen y conclusiones: en esta sesión, se formaliza la definición de punto fijo. Mediante el uso de *software* dinámico el alumno descubre que si hay dos puntos fijos, entonces, hay una recta de puntos fijos. Si hay tres puntos fijos entonces todos los puntos son fijos. El movimiento que deja todos los puntos fijos se llama identidad.

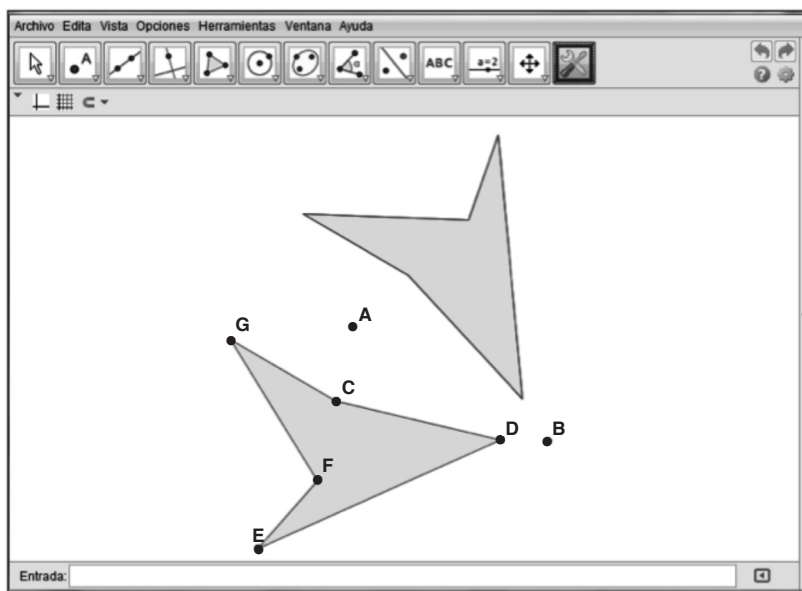
4.2.3 Sesión 3

Para esta sesión, previamente se tiene preparada una herramienta en GeoGebra que dibuja la imagen por un movimiento de un polígono dados dos puntos fijos. El profesor presenta esta nueva herramienta, se recomienda dedicar unos minutos para *jugar* con ella.

Actividad 3: dibuja un pentágono (cualquiera) y halla su imagen con un movimiento con dos puntos fijos. ¿Qué ocurre? ¿Cuáles son las imágenes de cada uno de los vértices de tu pentágono?

Figura 6. Actividad 3.

Fuente: elaboración propia.

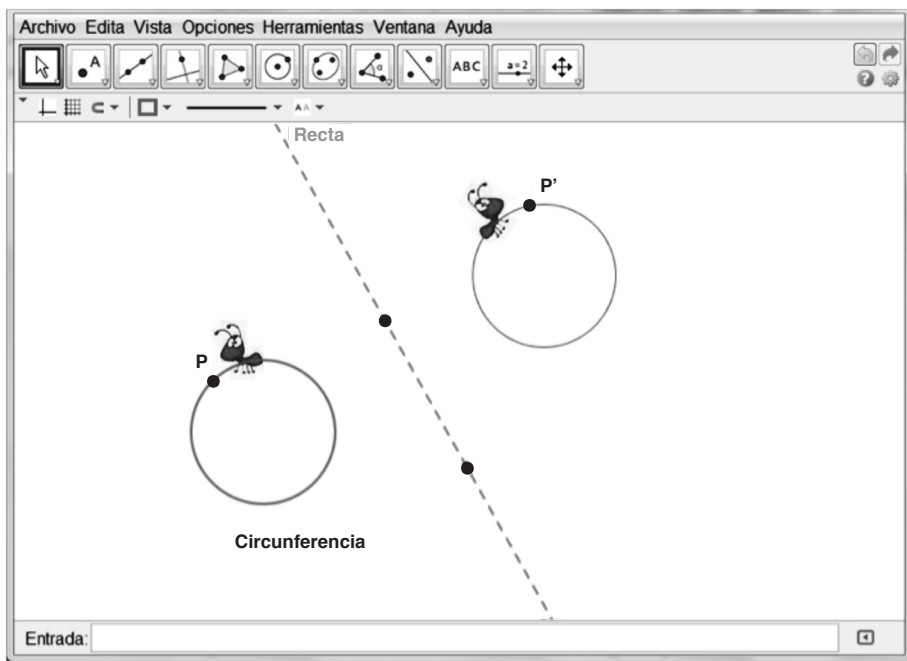


Utilizando el arrestre y guiados por el profesor, los alumnos investigan y descubren qué ocurre si uno de los dos puntos está en la figura de la que se halla la imagen, si están los dos, si hay uno en la recta de A y B (por lo visto en la sesión anterior saben que es una recta de puntos fijos)...

Para ilustrar el cambio de sentido, se propone el siguiente diseño con GeoGebra. Se trata de un circunferencia por cuyo perímetro camina una hormiga. Cuando movemos la hormiga en el original, la misma en el simétrico se mueve en sentido contrario. Podemos mover las circunferencias, hacerlas tangentes a la recta o cruzarlas.

Figura 7. Material auxiliar para ilustrar el cambio de sentido.

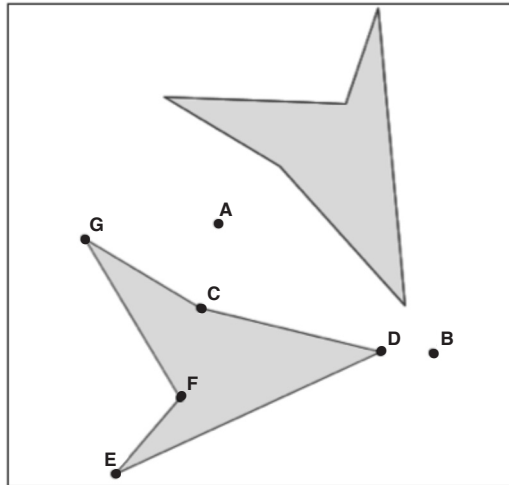
Fuente: elaboración propia.



El movimiento hace el efecto de un espejo. Si una hormiga camina por el perímetro de una de las figuras empezando en un vértice y terminando en el mismo, en la figura simétrica se verá reflejada caminando en sentido contrario. Volvemos a la *actividad 3*, para investigar sobre el sentido.

Figura 8. Sentido en la Actividad 3.

Fuente: elaboración propia.



Es conveniente señalar la recta de simetría para que todos lo vean, tanto en la actividad como en el ejemplo de orientación.

El alumno debe ser capaz de generalizar. Mediante el arrastre debe «jugar» moviendo los vértices de la figura, los puntos A y B, la recta de simetría... También dibujando una nueva figura a su antojo (no necesario cinco vértices) y volver a aplicarle el movimiento mediante la herramienta creada. Cuando ha adquirido el concepto es cuando el profesor pone nombre a lo que el alumno ya conoce, que se llama simetría axial o reflexión. La recta que une todos los puntos fijos se llama eje de simetría. Las características son que tiene una recta de puntos fijos e invierte la orientación.

Resumen y conclusiones: En esta sesión los alumnos descubren, investigando con el uso del *software* de Geometría Dinámica como herramienta, el concepto de simetría axial o reflexión y algunas características:

- Recta de puntos fijos, que se definirá como eje de simetría.
- Cambia la orientación.

4.2.4 Sesión 4

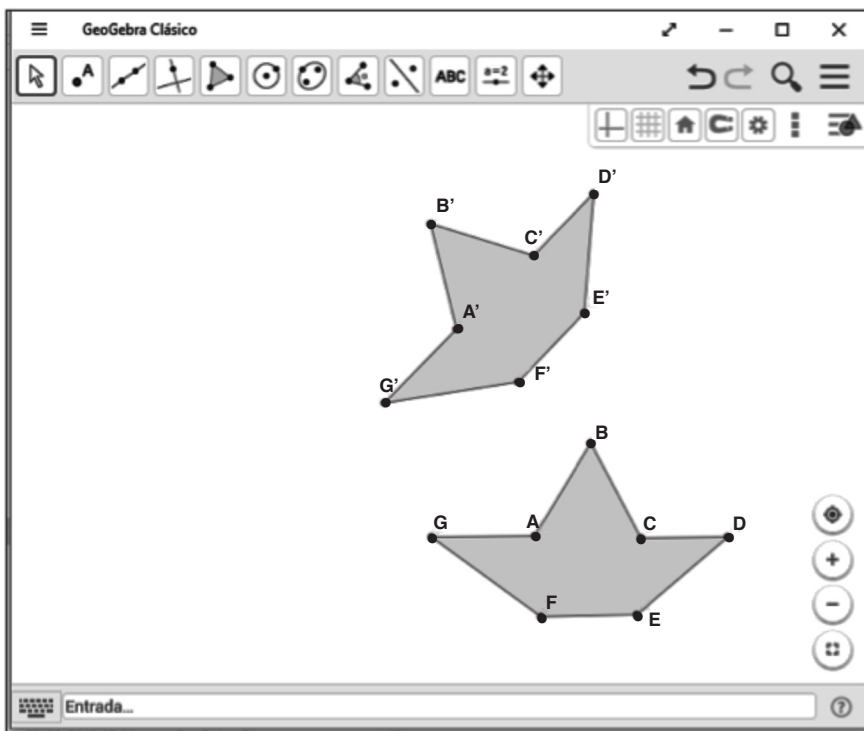
La sesión comienza con un pequeño repaso de lo visto hasta ahora. Si un movimiento deja tres o más puntos fijos, entonces, todos los puntos son fijos, lo llamamos identidad (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012). Si deja dos puntos

fijos, entonces deja fija una recta y se trata, en este caso, de una simetría. Se plantea la siguiente cuestión ¿existe algún movimiento que deje fijo solo un punto?

Actividad 4: a la figura de vértices A, B, C, D, E, F, G se le ha aplicado un movimiento que deja un único punto fijo. Encuentra el punto.

Figura 9. Actividad 4.

Fuente: elaboración propia.



Utilizarán el arrastre en esta ocasión como herramienta para la resolución de la cuestión planteada.

Cuando el alumno ha encontrado el punto, el profesor lanza la pregunta: ¿a qué movimiento de los vistos en la primera sesión nos suena? No esperamos que recuerden los movimientos ni su nombre por lo que en este momento pueden volver a revisar los botones.

Repasamos a continuación los movimientos vistos hasta el momento y la cantidad de puntos que dejan fijos.

Figura 10. Resumen puntos fijos I.

Fuente: elaboración propia.

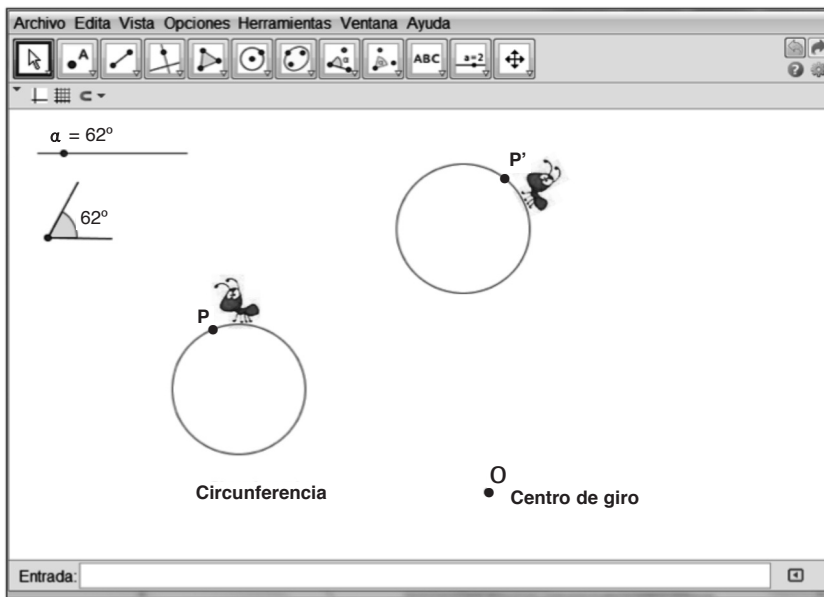
Puntos fijos	Nombre del movimiento
1	GIRO
2 ⇨ Recta de puntos	SIMETRÍA
3 ⇨ Todos	IDENTIDAD

Cuando han descubierto que el movimiento es un giro, el profesor plantea si mantiene la orientación, o como en el caso de las simetrías la invierte. Se abre un diálogo igualitario en el que deben intervenir todos los alumnos mientras que el profesor solamente realiza la labor de mediador, guía y orquestador sin verificar ni negar ningún argumento. De esta manera posibilitamos que se de un aprendizaje dialógico.

Se propone mostrar el siguiente diseño con GeoGebra. Se puede mover el ángulo de giro utilizando un deslizador y se puede arrastrar el centro de giro. Cuando movemos la hormiga en el original, la otra se desplaza en el mismo sentido por la circunferencia.

Figura 11. Material auxiliar para ilustrar mismo sentido.

Fuente: elaboración propia.



Resumen y conclusiones: un giro respecto a un punto un ángulo indicado deja fijo dicho punto, que es el centro de giro. Este movimiento mantiene la orientación.

4.2.5 Sesión 5

Al iniciar la sesión retomamos la tabla con el resumen de los puntos fijos vistos hasta ahora. ¿Falta algún caso? ¿Hay algún movimiento de los que realiza los botones de GeoGebra que no deje ningún punto fijo? Repasamos:

- **Refleja Objeto en Recta** es una simetría, cuyo caso ya está contemplado.
- **Refleja Objeto por Punto** es un giro de 180° (los alumnos lo deben comprobar). El caso de los giros también está contemplado.
- **Refleja Objeto en Circunferencia (Inversión)** no es movimiento.
- **Rota Objeto en torno a Punto, el Ángulo indicado** es un giro, cuyo caso ya está contemplado.
- **Traslada Objeto por un Vector** no deja ningún punto fijo. Es el caso que falta por contemplar.
- **Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala** no es un movimiento.

Completamos la tabla:

Figura 12. Resumen puntos fijos II.

Fuente: elaboración propia.

Puntos fijos	Nombre del movimiento
0	TRASLACIÓN -----
1	GIRO
2 \leftrightarrow Recta de puntos	SIMETRÍA
Todos	IDENTIDAD

La parte de la tabla que corresponde con movimiento que no deja ningún punto está intencionadamente incompleta.

¿Traslación mantiene o invierte la orientación? Utilizando la misma metodología que en sesiones previas, respondemos a esta pregunta. Lo cual permite añadir una columna más a la tabla anterior, donde se especifique si cada uno de los movimientos mantiene o invierte la orientación.

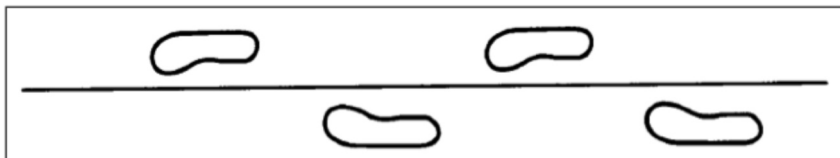
¿Puedo aplicar a una figura un movimiento y luego otro? ¿Qué ocurre en ese caso? Abrimos de nuevo un debate que provoque aprendizaje dialógico. Algunas posibles composiciones de los movimientos son Simetría-Traslación, Giro-Traslación y Simetría-Giro.

Para completar la tabla, nos fijaremos en primer lugar en Simetría-Traslación. Son los alumnos quienes deben descubrir qué ocurre en este caso. La composición de una simetría y una traslación es o bien una simetría o bien una simetría deslizante (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

Proyectando la imagen de unas huellas dejadas en la nieve por una persona caminando en línea recta. Se lanza la pregunta al grupo ¿qué movimiento representan las huellas? Como opciones posibles tenemos las composiciones de movimientos.

Figura 13. Simetría deslizante.

Fuente: Hernández, Vázquez y Zurro, 2012.



El movimiento es el resultado de la composición de una simetría, cuyo eje es la recta marcada y una traslación. ¿Cuál es el vector de traslación? ¿Qué características tiene?. El profesor realiza la identificación con el nombre al movimiento. *Definición:* La composición de una simetría de recta r y una traslación de vector paralelo a r se denomina simetría deslizante (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

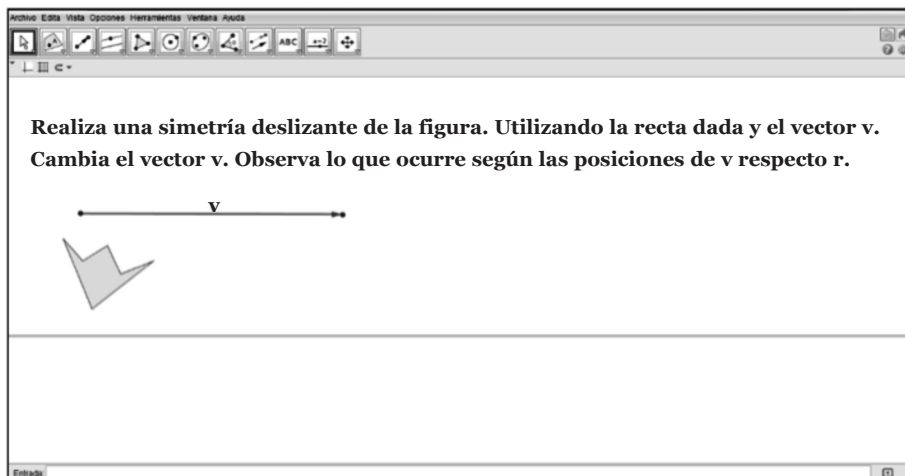
¿Qué puntos fijos deja? El grupo-clase reflexiona sobre esta cuestión y concluye que no deja ningún punto fijo. En este momento se puede completar la tabla.

La siguiente actividad tiene como objetivo aplicar relaciones.

Actividad 5: realiza una simetría deslizante de la figura.

Figura 14. Actividad 5.

Fuente: elaboración propia.



¿Qué ocurre si el vector de la traslación no es paralelo al eje de simetría? Utilizando el arrastre responden a esta cuestión. Con la ayuda del profesor los alumnos descubren que cuando el vector v es perpendicular a la recta tenemos una nueva simetría.

Resumen y conclusiones: Traslación es un movimiento que no deja ningún punto fijo. La composición de simetría y traslación es una simetría deslizante o una simetría:

- En general, se llama simetría deslizante y es un movimiento que no deja ningún punto fijo.
- En el caso en el que el vector de traslación es perpendicular al eje, se genera una nueva simetría.

En la siguiente sesión se profundiza sobre qué ocurre cuando el vector no es paralelo a la recta.

Figura 15. Resumen puntos fijos y orientación.

Fuente: elaboración propia.

Puntos fijos	Nombre del movimiento	Orientación
0	TRASLACIÓN SIMETRÍA DESLIZANTE	MANTIENE INVIERTE
1	GIRO	MANTIENE
2 ⇔ Recta de puntos	SIMETRÍA	INVIERTE
Todos	IDENTIDAD	MANTIENE

4.2.6 Sesión 6

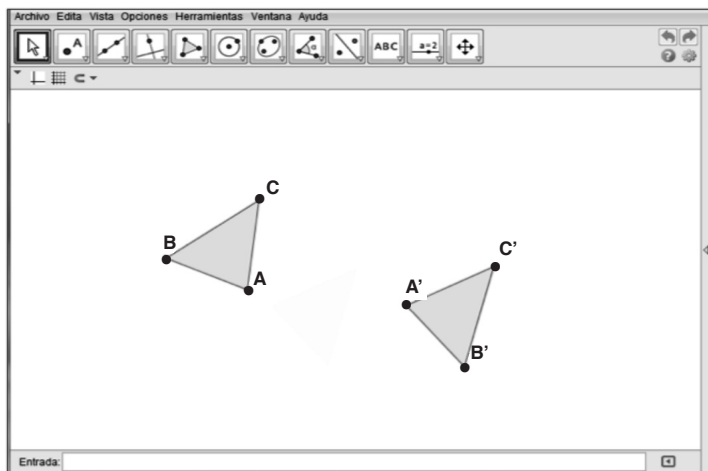
Si conocemos la imagen de tres puntos, queda totalmente definido un movimiento. Es decir, sabremos la imagen de otro punto cualquiera del plano. Por ello, se han escogido triángulos para las siguientes actividades. Se sugiere que el profesor haga conscientes a los alumnos de esto.

Las actividades de esta sesión son de aplicación de un conocimiento adquirido en la sesión anterior: la composición de una simetría y una traslación es o bien una simetría o bien una simetría deslizante (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

Actividad 6: ¿qué movimiento transforma el triángulo ABC en A'B'C'?

Figura 16. Actividad 6, parte 1.

Fuente: elaboración propia.

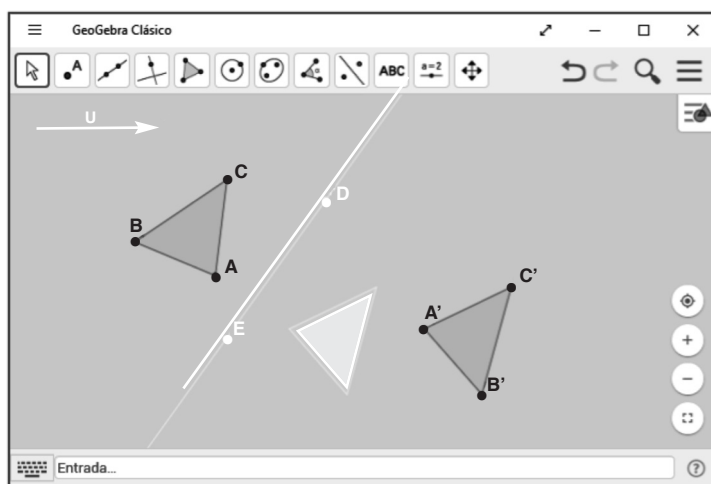


Observarán si el movimiento mantiene o invierte la orientación. Además, utilizando el arrastre buscarán puntos fijos. En este caso, el movimiento invierte la orientación y no hay puntos fijos. El único movimiento que hemos visto hasta ahora que cumpla ambas cosas es la simetría deslizante.

Cuando cambiamos el color del fondo de esta actividad, se descubre que en realidad se ha aplicado una simetría y una traslación por un vector no paralelo ni perpendicular al eje de simetría.

Figura 17. Actividad 6, parte 2.

Fuente: elaboración propia.



Actividad 7: mismo enunciado que la actividad anterior. En esta ocasión, al triángulo se le ha aplicado una simetría y una traslación con vector perpendicular al eje de simetría. Hay una recta de puntos fijos y el movimiento cambia la orientación del objeto, luego esta composición es otra simetría.

Resumen y conclusiones: Se han aplicado los resultados de la sesión anterior.

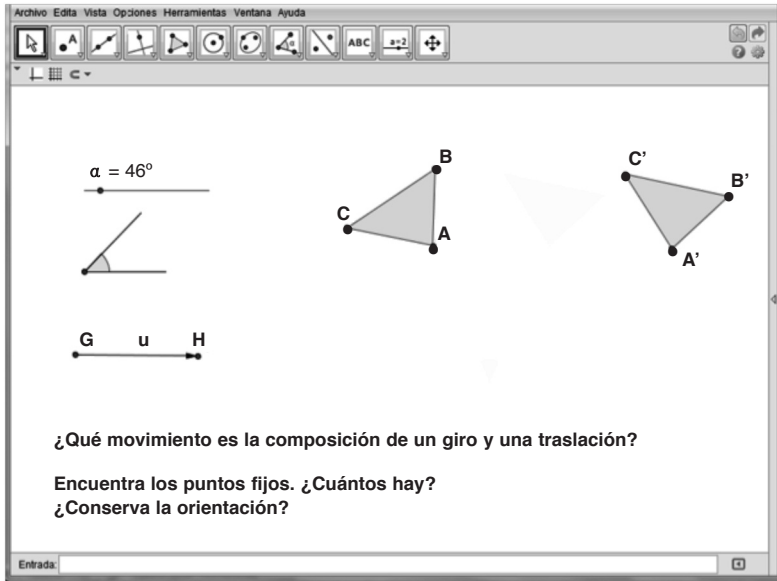
4.2.7 Sesión 7

El objetivo de esta sesión es que los alumnos descubran el siguiente resultado: La composición de un giro y una traslación es otro giro del mismo ángulo (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

Actividad 8: ¿qué movimiento es la composición de un giro y una traslación?

Figura 18. Actividad 8.

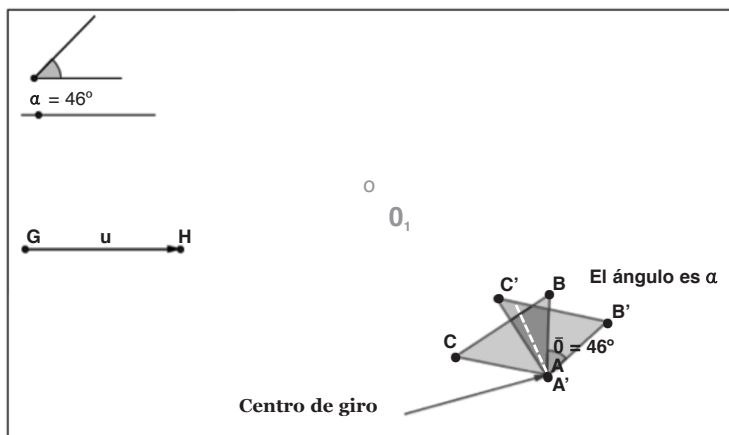
Fuente: elaboración propia.



En la actividad, se presenta un triángulo al que se le ha realizado un giro y una traslación. Los alumnos observan si el movimiento mantiene o invierte la orientación. Utilizando el arrastre, buscan puntos fijos. Hay un punto fijo y mantiene la orientación, entonces el punto fijo es el centro de un giro. Midiendo ángulos, se puede comprobar que el ángulo de giro es el mismo.

Figura 19. Actividad 8. Ángulo de giro.

Fuente: elaboración propia.



Resumen y conclusiones: experimentando con GeoGebra se descubre que la composición de un giro y una traslación es otro giro de mismo ángulo.

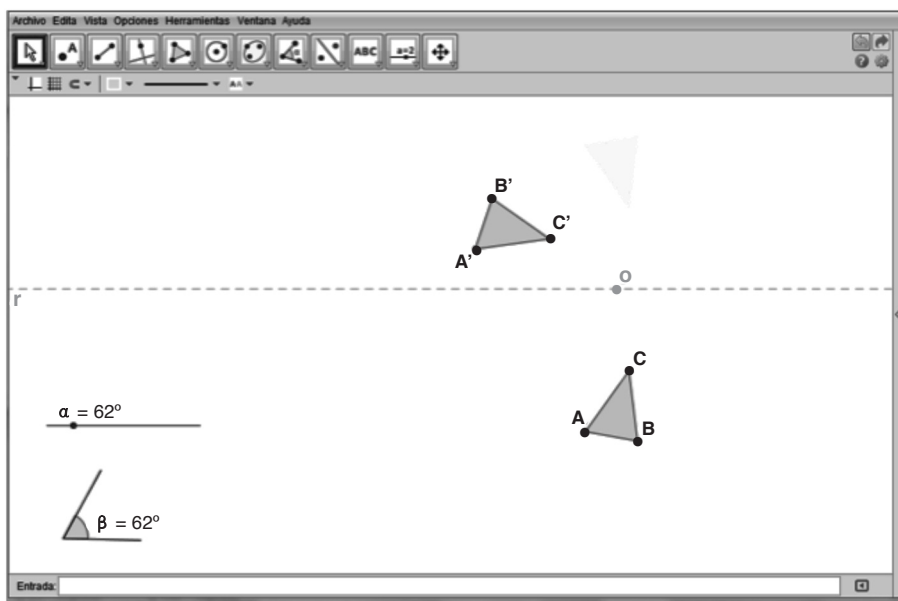
4.2.8 Sesión 8

El objetivo de la primera actividad es que los alumnos descubran el siguiente resultado: La composición de una simetría y un giro de centro perteneciente al eje de simetría es otra simetría (Hernández, Vázquez y Zurro, 2012).

Actividad 9: ¿qué movimiento se ha aplicado?

Figura 20. Actividad 9.

Fuente: elaboración propia.

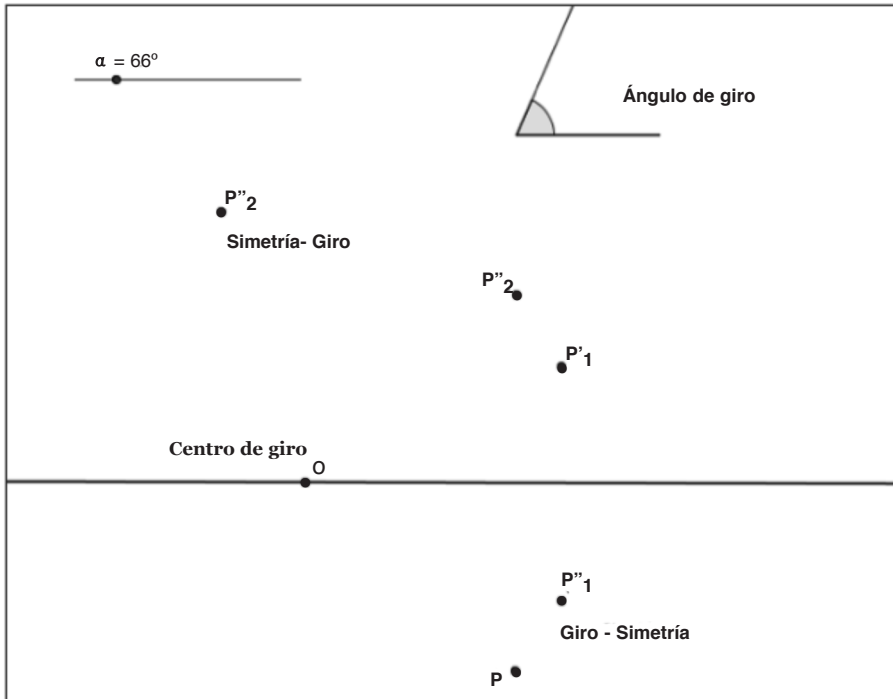


La dinámica para la resolución de la actividad es la misma que en la sesión anterior.

Cuando se ha finalizado esta actividad, el profesor lanza la pregunta ¿la composición de movimientos es conmutativa? De nuevo, se abre un debate que provoca un aprendizaje dialógico. Mediante contraejemplos, que el alumno puede elaborar con GeoGebra, se demuestra que la composición de movimientos no es conmutativa.

Figura 21. Contraejemplo en la composición de movimientos.

Fuente: elaboración propia.



Resumen y conclusiones: se descubre que la composición de una simetría y un giro de centro perteneciente al eje de simetría es otra simetría. Mediante un contraejemplo, se comprueba que la composición de movimientos no es conmutativa. Hacemos conscientes a los alumnos de que existen más composiciones de movimientos que no estudiaremos en esta unidad.

4.2.9 Sesión 9

Las actividades de las dos últimas sesiones son de carácter aplicativo. En primer lugar, se requiere una motivación sobre el tema de los mosaicos y su importancia geométrica y artística. Se propone el siguiente vídeo (RTVE, 1999).

Mosaico 1: ¿qué es un mosaico regular según lo visto en el vídeo? ¿Qué polígonos podemos utilizar para construirlo? Cada alumno puede utilizar cualquiera de los polígonos y deben pensar qué movimientos necesitan realizar. Como siempre, el profesor en su papel de guía, dará pistas para ayudar a que

los estudiantes vayan descubriendo los pasos. Los movimientos que generan este primer mosaico regular serán simetrías.

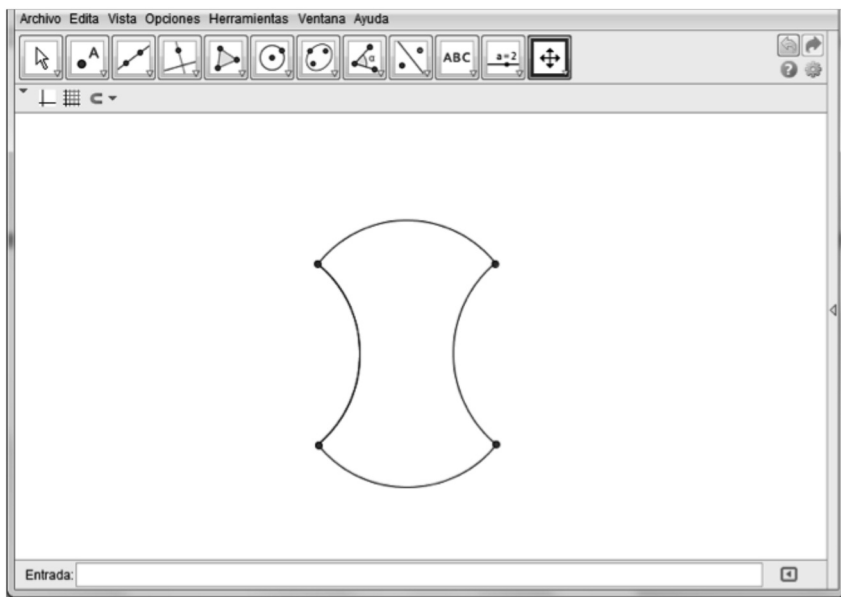
Resumen y conclusiones: se introducen los mosaicos. Un mosaico periódico es el que rellena todo el plano mediante la repetición de la misma forma o motivo fundamental. Los únicos polígonos regulares que pueden generar este tipo de mosaicos son hexágonos, cuadrados y triángulos. En cada vértice tienen que confluír ángulos cuya suma sea 360° . Trabajando con el *software* dinámico, cada alumno aplica algunos de los conocimientos adquiridos en la sesión para construir un mosaico regular utilizando simetrías.

4.2.10 Sesión 10

Mosaico 2: en esta sesión se realizará un mosaico utilizando giros y traslaciones a partir de un cuadrado deformado (Bermejo, 2013).

Figura 22. Cuadrado deformado.

Fuente: elaboración propia.



Los alumnos, con la orquestación del profesor descubren qué movimientos aplicar para rellenar el plano.

Resumen y conclusiones: deformando polígonos (en este caso el cuadrado) de una manera equilibrada y armoniosa podemos construir gran variedad

de mosaicos. Es posible construir un mosaico utilizando giros y traslaciones, esto es conquistado por los alumnos cuando son capaces de ponerlo en práctica, utilizando un *software* dinámico.

4.3 Modelo de evaluación

El 60% del peso de la nota de esta unidad didáctica cae sobre dos controles, cada uno de ellos realizado en una sesión. En estas dos sesiones, se evalúan los dos niveles que componen la unidad didáctica: conceptual y manipulativo. Además existirá una tercera sesión, que se utilizará para corregir ambos controles en clase interactuando con los alumnos.

4.3.1 Control de GeoGebra

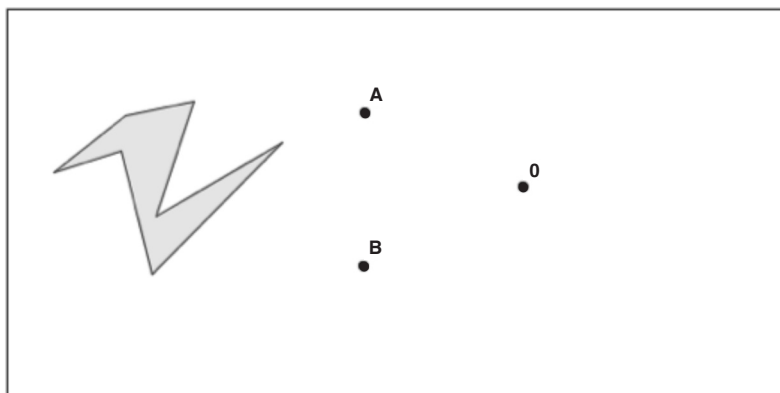
Para esta parte de la evaluación se utilizará el *software* dinámico que ha estado presente en todas las sesiones de la unidad. Además del ordenador y GeoGebra los alumnos dispondrán, en el examen, de material didáctico de apoyo en soporte papel, en el que deberán responder a preguntas sobre las actividades.

A continuación se presenta un modelo compuesto por tres actividades.

Actividad 1: halla la imagen de la composición de la simetría con eje la recta que pasa por los puntos A y B dados y el giro de centro el punto O y ángulo de giro 60° en el sentido horario. ¿Mantiene este movimiento la orientación? Justifica tu respuesta.

Figura 23. Evaluación 1.

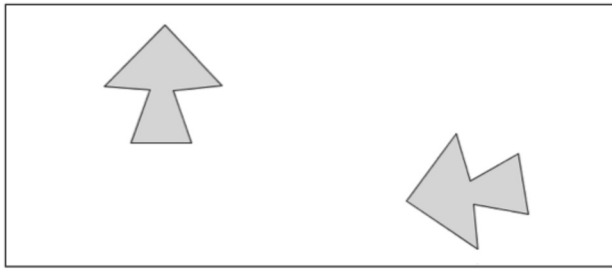
Fuente: elaboración propia.



Actividad 2: en esta actividad deben encontrar los puntos fijos de un movimiento. Se trata de un giro luego sólo hay un punto fijo. Deben abrir la vista gráfica para responder a la pregunta planteada en la fotocopia que deben entregar junto con las actividades.

Figura 24. Evaluación 2.

Fuente: elaboración propia.



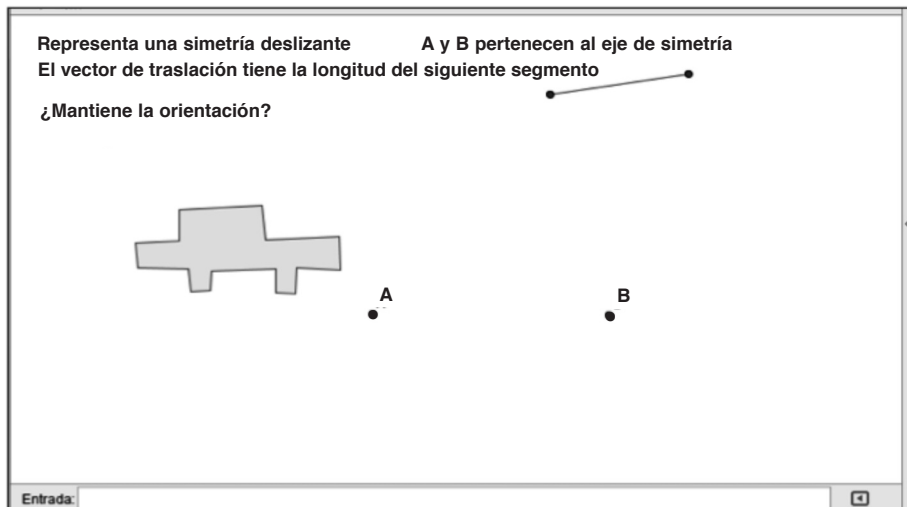
Actividad 3: en esta actividad, tienen que representar una simetría deslizante dados el polígono, la recta de simetría y la longitud del vector (pueden considerar un vector oblicuo o paralelo). Cuando lo hayan hecho responderán a la pregunta ¿Mantiene la orientación?

Figura 25. Evaluación 3.

Fuente: elaboración propia.

Representa una simetría deslizante A y B pertenecen al eje de simetría
El vector de traslación tiene la longitud del siguiente segmento

¿Mantiene la orientación?



Entrada:

4.3.2 Material didáctico de apoyo en soporte papel

Figura 26. Evaluación. Material didáctico en apoyo soporte papel.

Fuente: elaboración propia.

Evaluación 1: ¿El movimiento mantiene la orientación? Justifica tu respuesta.

Evaluación 2: Puntos fijos: _____

Evaluación 3: ¿El movimiento mantiene la orientación?

4.3.3 Control de conocimientos adquiridos

En la segunda sesión se realizará un control escrito de conocimientos adquiridos. Un modelo es el siguiente:

1. Define con tus palabras y da un ejemplo en cada caso.
 - a. Punto fijo.
 - b. Simetría respecto a una recta.
 - c. Eje de simetría.
 - d. Traslación.

2. ¿Cuáles son los movimientos que aparecen representados en las siguientes imágenes? Identifica los elementos de cada uno de ellos.

Figura 27. Evaluación. Control escrito 1.

Fuente: <https://goo.gl/Lg9DHF>

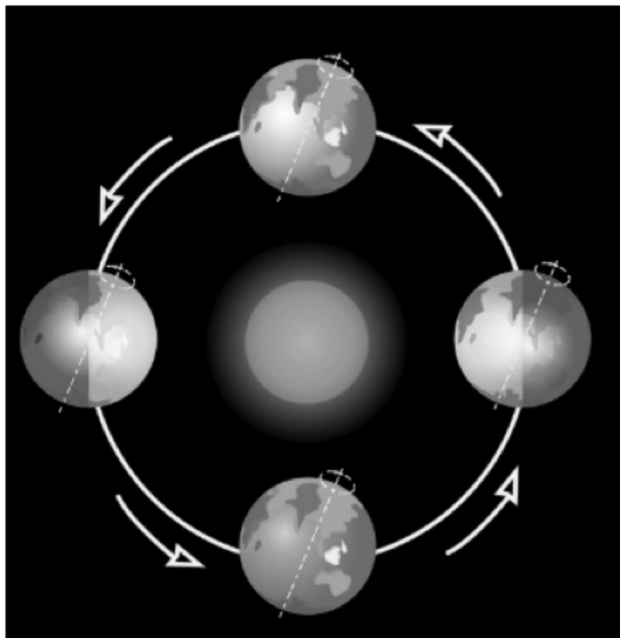
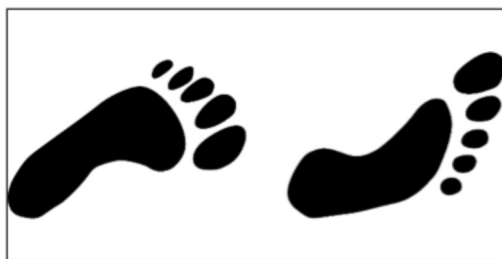


Figura 28. Evaluación. Control escrito 2.

Fuente: <https://goo.gl/mNnMDn>



3. Completa la tabla:

NOMBRE DEL MOVIMIENTO	¿Mantiene la orientación?	Número de puntos fijos
		3
SIMETRÍA		
TRASLACIÓN		
SIMETRÍA DESLIZANTE		
GIRO		

5. CONCLUSIONES

Esta propuesta muestra que es posible introducir todos los contenidos que de Secundaria sobre movimientos en el plano en un único curso y en una unidad didáctica. Y, además, permite añadir otros que hasta ahora no aparecen en el currículo.

El método de enseñanza intenta hacer más atractiva la geometría, basándose en el uso diario de un *software* dinámico. GeoGebra permite manipular los datos y los resultados fácilmente, lo que incita al alumno a la experimentación. Con esta herramienta, se pueden visualizar cómodamente los movimientos y algunas de sus propiedades.

Los conceptos se asimilarán en diez sesiones si se explican con la suficiente claridad y con una metodología adecuada. El uso del ordenador facilita la comprensión, el cuaderno de movimientos es herramienta de aprendizaje y desarrollo del pensamiento analítico.

Las diez sesiones y las dos sesiones de controles sirven para evaluar los objetivos transversales propuestos. El resto de los objetivos se van tratando uno a uno en las diferentes actividades. Se ha diseñado un sistema de evaluación pensando en el aumento de la motivación del alumnado por estos temas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arzarello, F. O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in cabri environment. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, 34(3), 66-72.
- BOCM. (29 de mayo de 2007). *Decreto 23/2007 de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. Recuperado de http://www.madrid.org/dat_capital/loe/pdf/curriculo_secundaria_madrid.pdf [Consulta: 26/06/2018].
- BOCM. (20 de mayo de 2015). *Decreto 48/2015, de 14 de mayo, por el que se establece para la comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. Recuperado de https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2015/05/20/BOCM-20150520-1.PDF [Consulta: 26/06/2018].
- BOE. (3 de enero de 2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Recuperado de <https://www.boe.es/boe/dias/2015/01/03/pdfs/BOE-A-2015-37.pdf> [Consulta: 26/06/2018]
- Bermejo, D. (28 de Enero de 2013). *Cómo construir mosaicos con GeoGebra*. Recuperado de www.youtube.com/watch?v=5ZJMI9n_mmg [Consulta: 01/05/2013].
- Carrillo de Albornoz, A., y Llamas, I. (2009). *GeoGebra. Mucho más que geometría dinámica*. Madrid: Ra-Ma.
- Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., y Pitta-Pantazi, D. (2004). *Proofs through exploration in dynamic geometry environments*. International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- De Villiers, M. (1997). The role of proof in investigative, computer-based geometry: Some personal reflections. En J. Kinnig y D. Schattschneider (eds.), *Geometry turned on: Dynamic software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 15-24). Whashington, DC: Mathematical Association of America.
- Flecha, R. (1997). *Compartiendo palabras: El aprendizaje de las personas adultas a través del diálogo*. Barcelona: Paidós.
- González López, M. J. (2001). *La gestión de la clase de geometría utilizando sistemas de Geometría dinámica*. Obtenido de Iniciación a la investigación en didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de https://archive.GeoGebra.org/static/publications/diplomarbeit_GeoGebra.pdf [Consulta: 26/06/2018].
- Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft cabri constructions. *Proceedings of the 24th PME International Conference*, 1, 103-117.
- Hernández, E. Vázquez, M. J., y Zurro, M. A. (2012). *Álgebra lineal y Geometría*. Madrid: Pearson.

- Hohenwarter, M. (2002). *GeoGebra - a software system for dynamic geometry and algebra in the plane*. Austria: Universidad de Salzburgo. Recuperado de https://archive.GeoGebra.org/static/publications/diplomarbeit_GeoGebra.pdf [Consulta: 26/06/2018].
- Hohenwarter, M., Jarvis, J., y Lavicza, Z. (2009). Linking geometry, algebra, and mathematics teachers: GeoGebra software and the establishment of the international GeoGebra institute. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16(2), 83.
- Jones, K., Gutiérrez, A., y Mariotty, M. A. (2000). Proof in dynamic geometry environments: A PME special issue. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 1-3.
- Junta de Andalucía. (6 de Febrero de 2008). *Arte y Matemáticas arquitectura movimientos*. Recuperado de www.juntadeandalucia.es/averroes/html/adjuntos/2008/02/06/0001/arquimate/Movimientos/movimientos.htm [Consulta: 10/03/2013].
- Marrades, R., y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- RTVE. (01 de Enero de 1999). *La Aventura del Saber*. Recuperado de http://www.rtve.es/aventura/mas-por-menos/webcap2/actividades_parte_3.html [Consulta: 15/05/2018].
- Ruiz López, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría didáctica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria* (Tesis doctoral). Madrid: Universidad Autónoma, Facultad de Formación del Profesorado y Educación.
- Ruiz López, N. (2017). The instrumental genesis process in future primary teachers using Dynamic Geometry Software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

CITA DE ESTE ARTÍCULO (APA, 6ª ED.):

Martín-Nieto, M. (2019). Propuesta didáctica para la enseñanza de las isometrías en Educación Secundaria. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 40, 15-47.