

Enseñanza por Recorridos de Estudio e Investigación en la escuela secundaria: la dialéctica del estudio y de la investigación

Verónica Parra;
vparra@exa.unicen.edu.ar

María Rita Otero
rotero@exa.unicen.edu.ar;

María de los Ángeles Fanaro
mfanaro@exa.unicen.edu.ar

Resumen: En este trabajo se reportan resultados de una investigación que desarrolla *la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2004). Se realiza un *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) alrededor de cuestiones vinculadas a la matemática y a la economía. Se presentan aquí los resultados de la implementación realizada en un curso del último año de la escuela secundaria argentina (con estudiantes de 17-18 años), con una inmersión en el campo de casi un año. Particularmente, aquí se analiza y describe la dialéctica *del estudio y de la investigación* (Chevallard, 2013). La implementación (36 sesiones) del REI se realizó en las clases de Matemática habituales, siendo la pregunta de partida del REI *¿cómo y cuánto varía el punto de equilibrio en un modelo lineal de oferta y de demanda?*

Palabras clave: Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Recorridos de Estudio e Investigación (REI), Dialéctica del estudio y de la investigación, modelo simple de oferta y demanda.

Abstract: This work reports results of a research that develops *the pedagogy of the investigation and of questioning the world* (Chevallard, 2004). There is realized a *Research and Study Course* (SRC) about questions linked to the mathematics and to the economy. It is present here the results of the implementation developed in a course of the last year of the secondary Argentine school (with 17-18-year-old students), for almost one year. Particularly, here there is analyzed and describes *the dialectics of the study and of the research* (Chevallard, 2013). The implementation (36 classes) was realized in the habitual classes of Mathematics, not in courses and/or out-of-school workshops. The generating question of REI refers to: *How and how much change the point of balance in a linear model of offer and of demand?*

Keywords: Anthropological Theory of Didactics (ATD), Research and Study Course (SRC), the dialectics of the study and of the research, Simple model of offer and demand.

Introducción

Este trabajo es parte de una investigación que se propone enseñar matemática a partir de *recorridos de estudio e investigación* (REI) (Parra, Otero, Fanaro, 2013). Una enseñanza por REI permite recuperar el sentido y las razones de ser de las nociones matemáticas que se estudian en los sistemas escolares. Se propone de esta forma, promover relaciones funcionales entre las Instituciones y el saber matemático para enfrentar el fenómeno de la *monumentalización de saberes* (Chevallard, 2004). Este fenómeno, presente en los sistemas escolares, nace, vive y se desarrolla en lo que Chevallard (2004) denomina la pedagogía de *inventariar los saberes*. Dentro de esta pedagogía, la enseñanza de la matemática se reduce a estudiar un conjunto de “*obras muertas*”, carentes de sentido y sin razones de ser. A los alumnos se les impone el estudio de obras matemáticas, no por lo que ellas permiten hacer, por su funcionalidad, sino por ellas mismas, como si fueran transparentes e incuestionables, organizaciones matemáticas (OM) que solo tienen usos ocasionales. Como si fueran *monumentos*, se visitan grandes cuerpos de saberes que son ajenos a los estudiantes, generando relaciones poco funcionales con el saber matemático.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) y las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis

Los REI son un dispositivo didáctico definidos en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard. El objetivo principal de los REI es introducir una nueva epistemología que otorgue sentido y funcionalidad al estudio escolar de la matemática en su conjunto (Chevallard, 2009) y que reemplace a la pedagogía de inventariar los saberes. Los alumnos (X) investigan y estudian sobre una pregunta Q bajo la dirección de un profesor (y) o de un conjunto de profesores (Y). Se forma entonces un sistema didáctico, denotado por $S(X;Y;Q)$. La respuesta a la pregunta Q , denotada por R^\heartsuit , se produce bajo determinadas restricciones y funciona como tal bajo esas restricciones, no siendo la respuesta única ni universalmente efectiva (Chevallard, 2009). El sistema didáctico necesita instrumentos, recursos y obras: necesita un medio didáctico M para producir la respuesta R^\heartsuit . El medio M contiene respuestas denominadas pre-construidas (denotadas por R^\diamond), preguntas derivadas (denotadas por Q_j) y obras (denotadas por O_k). Las respuestas R^\diamond son respuestas que en algún momento han sido y

son aceptadas por la cultura escolar: un libro, Internet, el curso de un profesor, etc.; las preguntas Q_j son preguntas derivadas de la generatriz y las obras O_k son por ejemplo, teorías, experimentos, praxeologías, etc. Tanto las respuestas R^\diamond , como las preguntas derivadas (Q_j) y las obras (O_k) deben ser estudiadas convenientemente, tanto en calidad como en cantidad, para ser utilizados en el momento oportuno, de manera efectiva y eficaz en el estudio de Q y entonces en la construcción y validación de R^\heartsuit . Por consiguiente, el medio M se formula de la siguiente manera: $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$. De esta manera, el sistema didáctico construye y organiza (\rightarrow) el medio M con el cuál engendrará o producirá (\rightarrow) una respuesta R^\heartsuit . Esto, es expresado por Chevallard (2004) a partir del denominado *esquema herbartiano desarrollado*¹:

$$[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \rightarrow R^\heartsuit$$

Los REI pueden ser *codisciplinarios* (si involucran más de una disciplina) o *monodisciplinarios*. Los REI codisciplinarios requieren el ejercicio de un conjunto de “saber hacer” o “gestos” del estudio y de la investigación. En el marco de la TAD, estos gestos se denominan dialécticas. Una de estas dialécticas se denomina *des estudio y de la investigación*. La funcionalidad de esta dialéctica permite que las preguntas generatrices de investigaciones codisciplinarias, den lugar a diferentes REI amplios, y difícilmente pueden circunscribirse al ámbito limitado de un único sector o de una única disciplina (Chevallard, 2009). Determina, en cierto modo, la amplitud y el alcance del REI. Además, la *dialéctica del estudio e investigación* se opone a la tradición escolar que conduce a transitar por el camino más corto, conociendo de antemano y a la perfección cada una de las respuestas. Por ejemplo, la búsqueda de respuestas a la pregunta *¿Cómo obtener el punto de equilibrio en un modelo simple de oferta y demanda de un único bien?* genera, en principio preguntas derivadas propias de la Microeconomía, propias de la Matemática y preguntas que combinan ambas disciplinas. Asimismo, la búsqueda de respuestas a cada pregunta derivada requiere estudiar y/o

¹ Esta denominación se refiere al filósofo y pedagogo alemán Johann Friedrich Herbart (1776-1841). La pedagogía de Herbart atiende a dos asuntos básicos: al camino (cómo) y a la meta final (dónde). Así, por un lado, Herbart se refiere a la “filosofía práctica”, la que muestra “la meta de la formación”, es decir, el punto a donde se ha de llegar; y, por otro lado, a la “psicología”, la que reflexiona sobre “el camino, los medios y los impedimentos” que hay que transitar, recorrer, superar, para llegar a la meta y alcanzar así el fin.

reconstruir otras obras, de una de las disciplina o de ambas, disponibles en diferentes fuentes de información (diferentes medias en el sentido de la TAD).

El desarrollo de una enseñanza por REI necesita cambios en la construcción del medio didáctico (mesogénesis), cambios en el lugar que tanto el profesor como los estudiantes ocupan en el proceso de estudio (topogénesis) y en los tiempos didácticos o tiempos de estudio de las diferentes obras, respuestas y/o formulación de preguntas (cronogénesis). La mesogénesis es considerada la “fabricación” del medio M . La primera característica de la mesogénesis en un REI es que el medio M no está “totalmente hecho o construido de antemano”. El medio M es construido por la clase a partir de las producciones diversas, tanto *externas* a la clase como *internas* a ella. Estas últimas incluyen particularmente las respuestas propuestas por los estudiantes a partir de su propia actividad. El medio M , conformado así por las distintas R^\diamond , las obras disponibles y las preguntas derivadas, debe permitir aportar respuestas a cada pregunta formulada. Es necesario remarcar que muchos tipos de obras que pueden, *en principio*, venir a constituir el medio M de un REI son excluidas *por principio* de la enseñanza tradicional.

Esta reformulación del medio didáctico conduce también a una redistribución de responsabilidades. La construcción del medio deja de ser responsabilidad del profesor para pasar a ser responsabilidad de la clase en conjunto, es decir, del profesor y de los estudiantes. Así, el *topos* de los estudiantes se extiende ampliamente: no solamente un estudiante o un grupo de estudiantes podrá aportar su respuesta personal sino que también podrá proponer introducir en M toda obra que desee, y que considere útil, necesaria y adecuada para la elaboración de R^\heartsuit . Asociado a este cambio en el *topos* de los estudiantes se correlaciona un cambio importante en el *topos* del profesor, pues el profesor se aleja del lugar de único poseedor del saber. Al igual que los estudiantes, el profesor podrá incluir en el medio M las obras que considere adecuadas para construir la respuesta R^\heartsuit . Los posibles aportes del profesor serán considerados como una R^\diamond que, si los estudiantes consideran útil, podrán incorporar al medio M .

La construcción del medio M durante el proceso de estudio implica que los tiempos de estudio son superiores a los de una enseñanza tradicional. La constitución y el “trabajo” del medio M provocan una *dilatación del tiempo didáctico* y pues, correlativamente, de una *extensión del tiempo de reloj*. El trabajo de M con vistas a producir R^\heartsuit contendrá

particularmente un estudio *más o menos impulsado* de las obras O_j . Esta exigencia funcional conduce a que el sistema didáctico $S(X; Y; Q)$ se transforme momentáneamente en un sistema didáctico de tipo “clásico” $S(X; Y; O_j)$. Este estudio de la obra O_j conduce a las preguntas siguientes: ¿Cómo usar cada una de las obras O_j ? ¿Qué utilidad tiene determinada obra O_k para “fabricar” R^\heartsuit ? ¿Cuáles son las razones de ser? ¿Cómo funcionan?, entre otras. El profesor debe tener la virtud de asociar estas obras a la organización disciplinar de forma tal que su “estudio” sea a partir de una “necesidad” y no por una imposición.

Estas tres funciones didácticas difieren plenamente si el modo de enseñar corresponde a una enseñanza “monumentalista” o a una enseñanza por recorridos de estudio e investigación. En el primer caso, las funciones didácticas están limitadas y restringidas a decisiones pura y exclusivamente del profesor, mientras que, en el segundo caso, tanto la topogénesis como la mesogénesis y cronogénesis se amplían a partir no sólo las decisiones del profesor, sino también de los estudiantes. Pero una enseñanza por REI que implique cambios a nivel de las tres funciones didácticas requiere maneras de hacer propias de esta nueva enseñanza. Para poder gestionar un REI es necesario entonces activar gestos que, Chevallard (2013) denomina *dialécticas*. Una de las más importantes es la denominada *dialéctica del estudio y de la investigación* pues, impulsa acciones propias de un trabajo no sólo de estudiar una obra sino también de investigar. Es considerada una dialéctica pues el estudio de una obra conduce a estudiar otras y a su vez, la investigación desarrollada respecto a una obra, pregunta o noción conduce a estudiar aspectos que resultan desconocidos pero que pueden ser eficaces y funcionales en la construcción de las respuestas.

En este trabajo, se presentan algunos resultados de la implementación de un recorrido de estudio e investigación llevada a cabo en un curso del último año del nivel secundario, a los efectos de describir cómo funciona la dialéctica *del estudio y de la investigación* durante el desarrollo de este REI y su relación con las funciones didácticas denominadas *topogénesis, mesogénesis y cronogénesis*.

Preguntas generatrices del REI codisciplinar

El recorrido realizado por este grupo de alumnos se diseñó considerando ciertas hipótesis relativas a la Microeconomía, específicamente, al área de los modelos de oferta y de demanda:

H_0 : Existe el estado de equilibrio y es accesible.

H_1 : El equilibrio en el mercado se alcanza si y solo si la demanda excedente es cero. Esto es: $C_d - C_o = 0$, siendo C_d la función de demanda (cantidad demandada de mercancía) y C_o la función de oferta (cantidad ofrecida de la mercancía).

H_2 : Las funciones C_o y C_d son lineales y dependen de una única mercancía.

Las preguntas propuestas a los alumnos bajo estas hipótesis fueron las siguientes:

Q_1 : Supongamos que se está elaborando un producto con la intención de venderlo. De un ensayo de ventas previo se obtuvo la información ofrecida en las tablas siguientes:

Cantidad ofrecida	Precio por unidad (en \$)
155	10
307	18
98	7

Cantidad demandada	Precio por unidad (en \$)
330	7
250	15
270	13

¿Cómo determinar a qué precio por unidad todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha? ¿Qué modelo lineal permitiría estudiar el comportamiento de la oferta y demanda en este mercado?

Q_2 : ¿Cómo se podría estudiar el comportamiento de las leyes de oferta y la demanda para cualquier par de funciones lineales de oferta y de demanda? ¿Cómo podría hallarse en este caso el punto de equilibrio?

Q_3 : Supongamos que la función de oferta de un mercado está dada por la función $C_o(p) = 3p - 2$ y que la función de demanda, por $C_d(p) = -4p + 6$ ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si sólo se modifica el valor de la cantidad inicial demandada? ¿Y si en cambio se modifica el valor de la cantidad inicial ofrecida?

Q_4 : Sigamos considerando las mismas funciones de oferta y de demanda del caso anterior. ¿Cómo describir la variación del punto de equilibrio si ahora sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de demanda? ¿Y si sólo se modifica el valor de la pendiente de la función de oferta?

Q_5 : Hasta aquí hemos podido determinar cómo variará el precio y la cantidad según varíen las pendientes y las ordenadas (cantidades iniciales) de las funciones oferta y de demanda. Pero ¿Cuánto varía exactamente el punto de equilibrio en cada caso?

Preguntas de la Investigación

- ¿Qué indicadores evidencian el funcionamiento de la dialéctica del *estudio y de la investigación* en el curso considerado?
- ¿Cómo incide esta dialéctica en los procesos *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*?

Metodología de la Investigación

Se trata de una investigación cualitativa, de tipo etnográfica, cuyo objetivo es describir cómo se desarrolla el proceso de estudio de un grupo de alumnos correspondiente al último año del nivel secundario, a partir de una enseñanza por REI, dentro del curso de Matemática usual. El investigador fue, a la vez, el director de este proceso de estudio durante 36 sesiones de clase. Se realizó observación participante, tomando notas de campo, registrando todo el desarrollo de las clases en audio y recolectando las producciones de los alumnos. Las clases se realizaban en dos sesiones semanales de 2 horas cada una. El REI comenzó el primer día del ciclo escolar. De esta forma, los estudiantes no sabían con qué nociones matemáticas u organizaciones matemáticas podrían responder las cuestiones planteadas. Se evitó de esta manera que las obras matemáticas a estudiar fuesen consideradas “una aplicación” de lo estudiado en el transcurso de las clases anteriores.

Las cuestiones generatrices del REI se refieren a la Microeconomía, específicamente al comportamiento de las leyes de oferta y demanda de mercado. Se trata de un curso de 28 alumnos, los cuáles se distribuyen en 6 grupos de alrededor de 5 alumnos cada uno. A cada grupo de alumnos (G) se le asignó un número del 1 al 6 (G1, G2, G3, G4, G5 y G6) y, a su vez, cada alumno-miembro (A) del grupo se lo identificó del A1 al A28. Los protocolos presentados en este trabajo corresponden a representantes prototípicos de los grupos. El profesor introdujo inicialmente las preguntas, cada grupo de alumnos tenía que aportar una respuesta, comunicarla al resto y defenderla. Las preguntas que surgían en los distintos grupos de alumnos eran consideradas por la comunidad de estudio y también debían responderse.

Para el análisis de los registros obtenidos durante las 36 sesiones se diseñó la siguiente tabla, donde en la primera columna se coloca el número de clase (de la clase 1 a la 36),

en la segunda columna la fecha (con el objetivo de mostrar el tiempo transcurrido), la tercera columna contiene las preguntas estudiadas y la última columna, dividida en 9 sub-columnas, contiene las 9 dialécticas propuestas por Chevallard (2013) para pilotear un REI: del estudio y de la investigación; del individuo y del colectivo; del análisis (y la síntesis) praxeológica y del análisis (y la síntesis) didáctica; del tema y fuera-de-tema; del paracaidista y de las trufas; de las cajas negras y cajas claras; média-medio; de la lectura y de la escritura y de la difusión y de la recepción Se coloca un 1 para indicar que esa dialéctica fue identificada y un 0 que no. Finalmente, la quinta columna contiene el indicador del funcionamiento de la dialéctica correspondiente. Aquí se utiliza la notación I_i con $i = 1,2, \dots, 9$ para indicar que I_i es un indicador de la dialéctica i .

Tabla 1: Identificación de las dialécticas

Sesión N°	Fecha	Pregunta	Dialéctica									Indicador
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	
			Del estudio y de la investigación	Del individuo y del colectivo	Del análisis (y la síntesis) praxeológica y del análisis (y la síntesis) didáctica	Del tema y fuera-de-tema	Del paracaidista y de las trufas	De las cajas negras y cajas claras	De la conjetura y de la prueba (média-medio)	De la lectura y de la escritura	De la difusión y de la recepción	

Presentamos a continuación los tres tipos de indicadores de la dialéctica *del estudio y de la investigación*, denotados por $I_{1.1}$, $I_{1.2}$ e $I_{1.3}$.

$I_{1.1}$: Formulación de preguntas derivadas en los diferentes grupos y las búsquedas de respuestas a las mismas.

$I_{1.2}$: Búsquedas en Internet, en libros de Matemática y/o en libros de Microeconomía, y otras fuentes de información.

I_{1.3}: El estudio de respuestas existentes R_i^\diamond , tales como las que se mencionan a continuación. La notación OMat corresponde a organizaciones matemáticas mientras que la sigla OMic corresponde a organizaciones microeconómicas.

R_1^\diamond : OMat en torno a la función lineal.

R_2^\diamond : OMat en torno a rectas paralelas y rectas perpendiculares.

R_3^\diamond : OMat en torno a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

R_4^\diamond : OMic en torno a los modelos de oferta y demanda.

R_5^\diamond : OMic en torno a los desplazamientos de las curvas de oferta y demanda.

Estos indicadores, diferenciados para el análisis de los datos, están relacionados pues, para aportar respuestas a las preguntas generatrices es necesario formular otras preguntas derivadas (I_{1.1}), las cuales se deben responder accediendo, en principio a diferentes fuentes de información (I_{1.2}) y luego, estudiando obras existentes en la cultura escolar o conocidas por los estudiantes (I_{1.3}), identificadas como funcionales para la construcción de las respuestas buscadas.

Para especificar y precisar el funcionamiento de la dialéctica del estudio e investigación, se construyó la siguiente tabla, formada por cuatro columnas. La primera de ellas contiene el número de sesión de la clase, en la segunda columna se indica la pregunta que se está tratando de responder durante esa sesión (notada con Q_i), la tercera, contiene las preguntas derivadas de esa pregunta (Q_{ij}) y la última columna, las obras estudiadas – incluyendo las respuestas R_n^\diamond – por el grupo de clase para aportar respuestas a cada una de las preguntas derivadas (Q_{ij}).

Tabla 2: Pregunta generatriz (Q_i) y sus derivadas (Q_{ij})

Sesión N°	Pregunta Q_i	Preguntas derivadas Q_{ij}	Obras estudiadas o a estudiar O_k
-----------	----------------	------------------------------	-------------------------------------

Análisis de datos: dialéctica del estudio e investigación y su incidencia en las funciones didácticas

De la tabla 1 se obtuvo que la dialéctica del estudio e investigación fue identificada en 27 de las 36 sesiones de clase. Por ejemplo, durante las sesiones 1 y 2, los estudiantes comenzaron a estudiar e investigar las preguntas generatrices del REI y sus preguntas derivadas, tales como *¿Qué es el punto de equilibrio? ¿Cómo hallarlo? ¿Cómo*

construir el modelo? ¿Cómo representarlo?, etc. Esto combinó el estudio de respuestas R_n^\diamond disponibles en el grupo de estudiantes – tales como la función lineal, sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y el límite de funciones – con el estudio y la investigación realizada a través de Internet, en libros de Microeconomía y en libros de Matemática. A partir de la Tabla 2, se logró precisar en qué momentos de la clase, se había puesto en marcha la dialéctica, para esto, presentaremos a continuación algunos protocolos representativos de los indicadores antes mencionados.

El primer indicador corresponde a la formulación de preguntas derivadas de la generatriz. Estas preguntas, algunas formuladas al interior de los grupos y otras, en conjunto con el profesor, fueron listadas y cada una de ellas, respondidas. Por ejemplo, se comenzó a estudiar la praxeología matemática en torno al límite de funciones a partir de una búsqueda en Internet iniciada por las variaciones de una variable respecto a otras. Surgen así preguntas derivadas tales como *¿cuáles son los valores “especiales” que podemos encontrar en el cálculo de límites?* El protocolo siguiente presenta la lista de preguntas realizadas por el grupo 2 (G2) durante la clase 14 (C14).

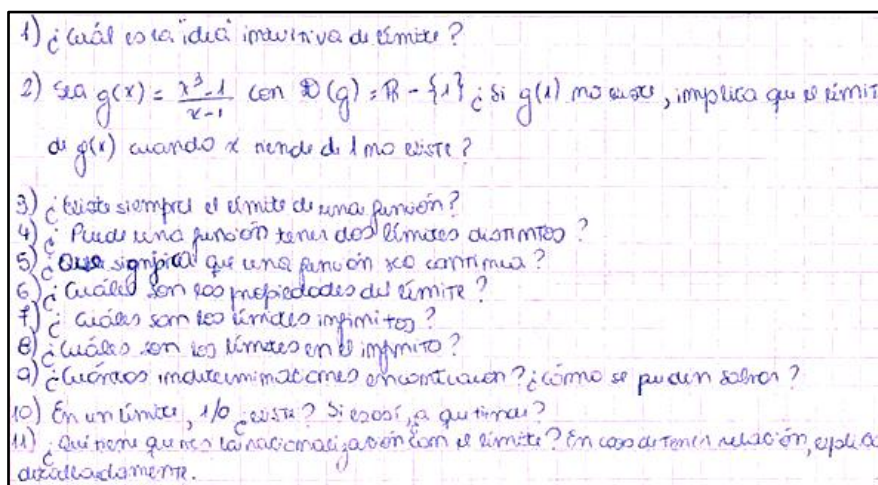


Figura 1: Cuestiones elaboradas por G2 en la sesión 14

Esta lista de preguntas fue compartida al resto de los grupos y cada uno de ellos debía, en conjunto, aportar respuestas y comunicarlas a los demás grupos de estudio. Esta difusión de respuestas se realizó durante tres sesiones de clases. Se acordaron las respuestas según las propuestas de los grupos, se anotaron en cada carpeta de los estudiantes y luego, se continuó con el estudio de las variaciones del punto de equilibrio según la variación de los parámetros del modelo.

El segundo indicador del funcionamiento de la dialéctica del estudio y la investigación corresponde a diferentes tipos de búsquedas realizadas en Internet, en libros de Matemática y/o en libros de Microeconomía (I_{1.2}). Por ejemplo:

- Búsquedas en Internet para saber qué es un modelo de oferta y de demanda y qué es el punto de equilibrio.
- Búsquedas en Internet y en libros de Matemática y de Microeconomía para hallar la relación entre los sistemas de dos ecuaciones y los modelos de oferta y de demanda.

El protocolo siguiente muestra una de las búsquedas en Internet del grupo de alumnos 3 (G3) realizado durante la clase número 2 (C2). Los estudiantes han decidido resaltar en color verde lo que consideran útil para aportar respuestas a ciertas preguntas derivadas de la generatriz:

Q_{1.1}: ¿Qué es un modelo de oferta y de demanda?

Q_{1.2}: ¿Qué es la oferta y qué es la demanda?

Q_{1.3}: ¿Cuáles son las leyes de la oferta y la demanda?

Q_{1.4}: ¿Qué es el punto de equilibrio?

Q_{1.5}: ¿Cómo se calcula el punto de equilibrio?

LEY DE OFERTA Y DEMANDA

El postulado, principio o incluso ley de la oferta y demanda es el modelo económico básico de la formación de precios de mercado de los bienes, usándose para explicar una gran variedad de fenómenos y procesos tanto macro como microeconómicos. Además, sirve como base para otras teorías y modelos económicos.

Q1.1

Diagrama de la oferta y la demanda

El modelo se basa en la relación entre el precio y las ventas de dicho bien y asume que en un mercado de competencia perfecta, el precio se establecerá en un punto —llamado punto de equilibrio— en el cual el se produce un vaciamiento del mercado, es decir, todo lo producido se vende y no queda demanda insatisfecha.

El postulado de la oferta y la demanda implica tres leyes:

- 1.- Cuando, al precio corriente, la demanda excede la oferta, el precio tiende a aumentar. Conversamente, cuando la oferta excede la demanda, el precio tiende a disminuir.
- 2.- Un aumento en el precio tiende, mas tarde o mas temprano, a disminuir la demanda y a aumentar la oferta. Conversamente, una disminución en el precio tiende, mas tarde o mas temprano, a aumentar la demanda y disminuir la oferta.
- 3.- El precio tiende al nivel en el cual la demanda iguala la oferta.

Teoría fundamental

Excedente de los consumidores y los productores en el punto de equilibrio para las curvas de oferta y demanda.

El modelo establece que en un mercado libre, la cantidad de productos ofrecidos por los productores y la cantidad de productos demandados por los consumidores dependen del precio de mercado del producto. La ley de la oferta indica que la oferta es directamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio del producto, más unidades se ofrecerán a la venta. Por el contrario, la ley de la demanda indica que la demanda es inversamente proporcional al precio; cuanto más alto sea el precio, menos demandarán los consumidores. Por tanto, la oferta y la demanda hacen variar el precio del bien.

Según la ley de la oferta y la demanda, y asumiendo esa competencia perfecta, el precio de un bien se sitúa en la intersección de las curvas de oferta y demanda. Si el precio de un bien está demasiado bajo y los consumidores demandan más de lo que los productores pueden poner en el mercado, se produce una situación de escasez, y por tanto los consumidores estarán dispuestos a pagar más. Los productores subirán los precios hasta que se alcance el nivel al cual los consumidores no estén dispuestos a comprar más si sigue subiendo el precio. En la situación inversa, si el precio de un bien es demasiado alto y los consumidores no están dispuestos a pagarlo, la tendencia será a que baje el precio, hasta que se llegue al nivel al cual los consumidores acepten el precio y se pueda vender todo lo que se produce mejor.

La curva de oferta **Q1.2**

La 2da ley enunciada (ver II arriba) establece que, ante un aumento en el precio de un bien, y asumiendo un mercado competitivo, la cantidad ofrecida de ese bien va a ser mayor; es decir, los productores de bienes y servicios aumentarán la producción. Esto es generalmente referido como "Ley de la oferta"

Curva de oferta típica

Lo anterior es conceptualizado en la curva de oferta, que es la representación gráfica de la relación -o elasticidad- existente entre el precio de un bien y la cantidad ofrecida del mismo.

La pendiente de esta curva determina cómo aumenta o disminuye la cantidad ofrecida de un bien ante una disminución o un aumento del precio del mismo. Se denomina elasticidad precio de la oferta al grado de variación de la cantidad ofrecida a una modificación en el precio. Esta va desde una respuesta totalmente inelástica (línea vertical) significando que la producción no responde a cambios en precios a una totalmente elástica (línea horizontal), significando que cambios en la producción son mayores que cambios en los precios.

Los determinantes de esa elasticidad incluyen: facilidad o no de adquirir insumos. Existencia o no de capacidad excesiva de producción y/o inventarios acumulados. Complejidad del proceso de producción, o relativa dificultad de implementar extensiones o modificaciones a ese proceso, incluyendo el tiempo y costo necesario para implementar esas modificaciones. Consideraciones mas generales acerca de la posición de la empresa en relación al mercado, incluyendo posible conveniencia de simplemente tomar ventaja del aumento de precios, etc.

Debido a que la oferta es proporcional al precio, las curvas de oferta son, generalmente pero no siempre, crecientes. Además, y debido a la ley de los rendimientos decrecientes, la pendiente de una curva de oferta suele ser también creciente (es decir, suele ser una función convexa).

Sin embargo, las curvas de oferta no tienen necesariamente una pendiente creciente. Un ejemplo es la curva de oferta del mercado laboral. Generalmente, cuando el salario de un trabajador aumenta, éste está dispuesto a ofrecer un mayor número de horas de trabajo, debido a que un sueldo más elevado incrementa la utilidad marginal del trabajo (e incrementa el coste de oportunidad de no trabajar). Pero cuando dicha remuneración alcanza ciertos niveles, el trabajador puede experimentar la ley de los rendimientos decrecientes en relación con su paga. La cantidad de dinero que está ganando hará que otro aumento de sueldo tenga poco valor para él. Por tanto, a partir de ese punto podría dedicar menos horas al trabajo a medida que aumente el salario, decidiendo invertir su tiempo en ocio. Encontramos un ejemplo de esto en los sueldos de los miembros de los Consejo de administración. Mientras es relativamente fácil motivar a trabajadores manuales o profesionales a trabajar horas extras, es difícil motivar a los miembros de esos consejos, cuyas "horas de trabajo" generalmente van desde una reunión (matinal o de tarde) una vez al mes a cinco o seis, o incluso una o dos veces al año con salarios que van desde, para empresas pequeñas, "un salario de retención" de entre 5.000 a 10.000 dólares anuales y "bonos de asistencia" entre 500 y 2000 por cada reunión que se asista, mas "reembolsamiento" por "gastos de viaje", etc a salarios tales los 250.000 libras esterlinas anuales (el menor entre los directores del grupo bancario Barclays), el cual, sin embargo, es aumentado por "pago de buen manejo" (performance related pay) a 10,7 millones de libras esterlinas anuales, eso, sin contar una variedad de bonuses

Figura 2: Investigación realizada en Internet del sitio Wikipedia

El tercer indicador corresponde al estudio de respuestas existentes R_i^{\diamond} , tales como:

- Estudio sobre los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas para construir el modelo a partir de los datos y, posteriormente, cómo resolverlo.

La figura siguiente, correspondiente a la clase número 6, al grupo de alumnos 6 (G6), muestra el estudio realizado por los estudiantes respecto a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Particularmente anotan tres formas de resolver un sistema que, en este caso corresponde al siguiente:

$$\begin{cases} y = 7x + 3 \\ y = 5x + 2 \end{cases}$$

El grupo de estudiantes, resuelve este sistema por el denominado método de igualación, el de sustitución y de forma gráfica. Se puede identificar aquí, el acceso de los estudiantes a una respuesta preexistente, es decir, a una respuesta del tipo R_i^{\diamond} : OMat, que corresponde en este caso, a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

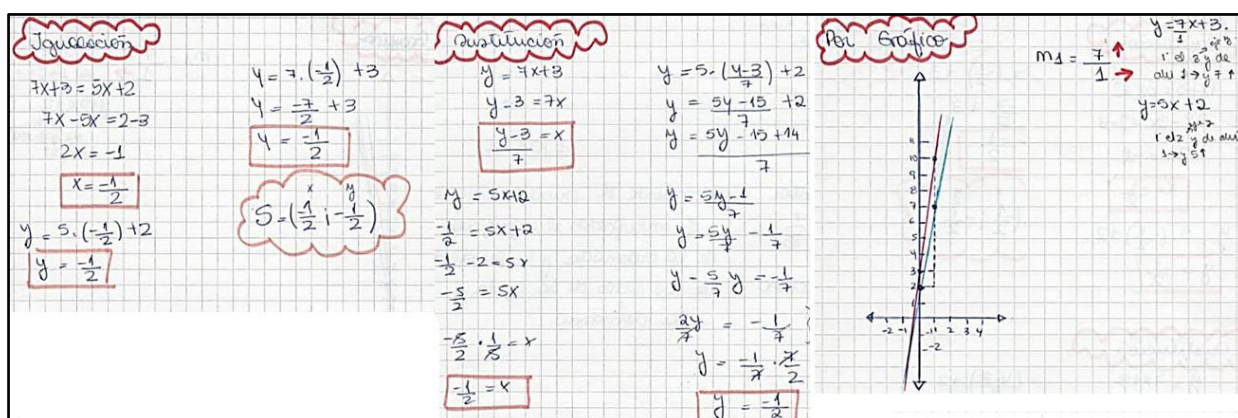


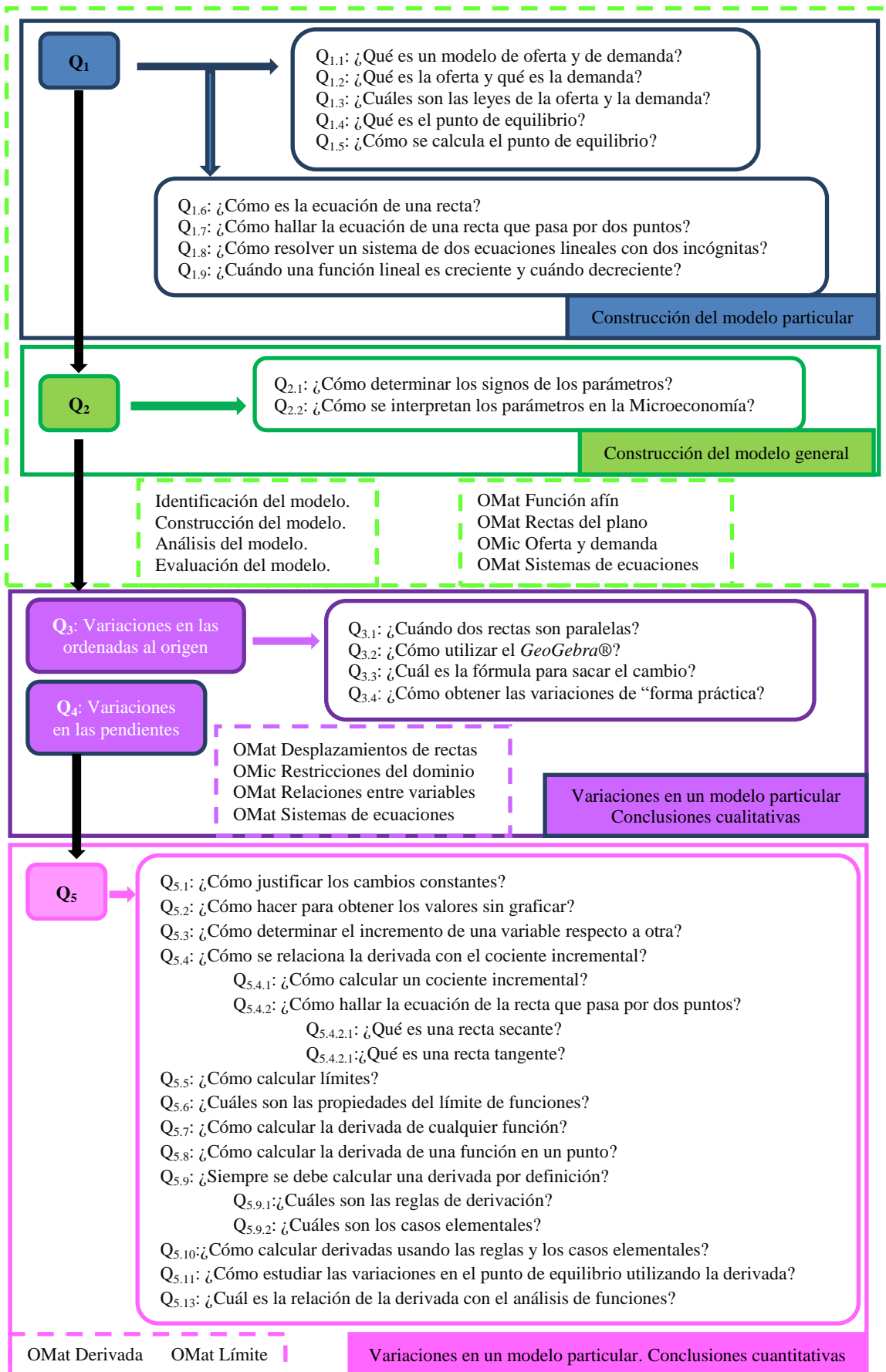
Figura 3: Estudio realizado durante la clase 6 por G6 en torno a los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Otros ejemplos de este tipo de indicador, son los siguientes:

- Estudiar e investigar la relación entre los parámetros y sus signos en Microeconomía para responder la pregunta relativa a cómo actúan los parámetros en un modelo de oferta y de demanda.
- Estudio de la praxeología de las rectas paralelas para responder la pregunta ¿cómo varía el punto de equilibrio si se modifican las ordenadas de las funciones de oferta y de demanda?
- Los estudiantes estudian e investigan respecto a las variaciones constantes y no constantes, respecto a las relaciones entre variables para responder la pregunta sobre la variación del punto de equilibrio si se varían las pendientes de las funciones de oferta y de demanda.
- Se estudia el cociente incremental de una función $f(x)$ cualquiera para responder la pregunta relativa a cómo justificar cada uno de los resultados obtenidos respecto a las variaciones en el precio y cantidad de equilibrio.
- Se retoma el estudio del cociente incremental lo que conduce, nuevamente, a la técnica de cómo hallar la recta que pasa por dos puntos.

- El estudio del cociente incremental conduce a definir la derivada de funciones como un caso particular de límite. A su vez, esto genera dos nuevas preguntas: ¿Cómo calcular la derivada de cualquier función? ¿Cómo calcular la derivada de una función en un punto?
- Al investigar y estudiar sobre la derivada, varios grupos encontraron que la derivada se utiliza también para realizar el análisis de funciones.

Las preguntas generatrices del REI permitieron derivar otras preguntas tales como la lista presentada en la Figura 2. El esquema siguiente resume la forma en que, a través de la dialéctica del estudio y de la investigación se ha combinado el estudio de obras de la matemática, con obras de la microeconomía así como también la generación de nuevas preguntas.



Esquema 1: Preguntas derivadas y construcción del modelo

En el desarrollo del recorrido implementado, cada uno de los indicadores de la dialéctica del estudio y de la investigación permite mostrar los cambios necesarios a nivel de las funciones didácticas.

Respecto a la topogénesis, los estudiantes se comprometieron con el estudio de las preguntas, con la formulación de nuevas preguntas y con la difusión al resto de la clase de cada una de sus respuestas. Respecto a la mesogénesis, se incorporaron al medio del estudio de las preguntas no sólo las búsquedas en Internet, sino también, la consulta en Biblioteca de libros de Matemática, de Microeconomía e incluso, el profesor de Economía. Un grupo de estudiantes coordinó una clase de consulta con el profesor de Economía de la misma Institución para que pudiera aclararles sobre los modelos de oferta y de demanda y el punto de equilibrio. De esta forma surgió no sólo la respuesta parcial a las preguntas referidas al sistema económico de oferta y de demanda, sino también, a la posibilidad de otro tipo de equilibrio que corresponde al de ingresos y costos de una empresa.

Las obras se estudiaron para abarcar una necesidad, por ejemplo, se estudió de sistemas de ecuaciones lo necesario para poder responder las preguntas referida al punto de equilibrio. Respecto a la cronogénesis, el tiempo de reloj necesario para realizar este tipo de enseñanza fue muy superior al de una enseñanza tradicional. En este caso, fueron necesarias 36 clases para abordar el estudio de la derivada de funciones con las salidas al estudio de rectas, sistemas de ecuaciones lineales y límite, mientras que en una enseñanza tradicional, ese estudio probablemente requiera de menos clases y en una secuencia ordenada de menor a mayor complejidad.

Conclusiones

Durante 36 sesiones de clase se desarrolló una enseñanza por REI que permitió cubrir buena parte del programa de estudios del curso, a partir de cuestiones de la Microeconomía. El saber matemático surgió como respuesta a las diferentes preguntas, asociado a los modelos de oferta y de demanda de un único bien.

El funcionamiento de la dialéctica del estudio y de la investigación resulta evidente al considerar la generación de variadas preguntas derivadas cuyas respuestas necesitaron el estudio de diferentes obras y la reconstrucción de respuestas disponibles en el grupo de

estudiantes. En el nivel mesogenético, ingresaron al “medio” diferentes “medias” como búsquedas en Internet, libros de microeconomía, consultas a los profesores de economía, etc.

Respecto a la topogénesis, los alumnos se hicieron cargo de las preguntas a responder, en principio, con cierto rechazo. El profesor logró superar la resistencia inicial de los estudiantes y ocupar el lugar de director del proceso de estudio que requiere una enseñanza por REI, y abandonó el lugar de media universal y garante del saber así como su papel de profesor explicador.

La cronogénesis se desarrolló de manera muy diferente a la de una enseñanza tradicional pues una misma pregunta se mantuvo viva durante un largo período de tiempo –muy superior a los tiempos de la enseñanza tradicional– en, manteniéndola “abierta” y “vigente”, derivando el estudio de nuevas cuestiones. Esto pone de manifiesto el fenómeno llamado dilatación del tiempo del reloj.

También se relevaron las dificultades de gestionar el REI, particularmente se han considerado aquí las dificultades de una dialéctica como la del estudio y la investigación, que resulta disparada por la codisciplinariedad del dispositivo. Asociadas a las dificultades en la gestión del REI, se identificaron ciertas restricciones tales como restricciones institucionales sobre la forma de enseñar y aprender matemática, restricciones provocadas por la necesidad de asignar una nota numérica entre 1 y 10 al trabajo de los estudiantes, restricciones generadas por las exigencias de un aprendizaje “rápido” y que abarque en el menor tiempo posible todo el programa de estudios y restricciones que provienen de considerar que el saber matemático es definitivo e incuestionable.

Una enseñanza por REI se opone radicalmente a cualquier forma de enseñanza tradicional donde el profesor ocupa el papel de “explicadora la vez que es el único que formula preguntas y el único que aporta respuestas culturalmente aceptadas. En un REI, el profesor ocupa el papel de “director del estudio y de la investigación”, no tiene la exclusividad de la formulación de las preguntas ni es el poseedor del saber “culturalmente aceptado”. Asociado con esto, es importante mencionar lo difícil que resulta para el profesor no ceder ante la demanda de los estudiantes, habituados al que el

profesor asuma responsabilidades que son de ellos. Esto evidencia las dificultades de desarrollar una enseñanza por REI, si el profesor no es experimentado, ni está familiarizado con la TAD.

El trabajo deja varias preguntas sin responder: ¿Cómo desarrollar progresivamente la autonomía de los estudiantes, necesaria para que ellos abandonen los hábitos de obediencia y dependencia generados por la pedagogía tradicional? ¿Cómo gestionar el proceso de acreditación de los estudiantes en una enseñanza por REI? ¿Qué equipamiento praxeológico necesitan los profesores para desarrollar una enseñanza por REI?

Finalmente, a pesar de las dificultades, restricciones y cuestiones abiertas que persisten, fue posible realizar una enseñanza alternativa a la tradicional llamada enseñanza por REI en un curso usual de la escuela secundaria argentina, recuperando al menos un sentido y una razón de ser de las obras que allí se estudian.

Referencias

- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Recuperado el 26 de marzo de 2013 de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45
- Chevallard, Y. (2009). Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER". Recuperado el 26 de marzo de 2013 de: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155
- Chevallard, Y. (2013). Journal du seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement. Recuperado el 15 de abril de 2013 de: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2012-2013-1.pdf>
- Parra, V., Otero, R., Fanaro, M. (2013). Los Recorridos de Estudio e Investigación en la Escuela Secundaria: resultados de una implementación. *Revista Bolema*, 27(47), 847-874.