



Herramienta para evaluar trayectorias de aprendizaje de la medida de longitud en niños de 6-8 años

Alba Rubio Franco

Fundació Escoles Garbí, Barcelona, España, arubio@escolesgarbi.cat

Yuly Marsela Vanegas Muñoz

Universidad de Barcelona, Barcelona, España, ymvanegas@ub.edu

Montserrat Prat Moratonas

Universidad Autónoma de Barcelona y Blanquerna-URL, Barcelona, España, montserratpm3@blanquerna.url

Fecha de recepción: 29-08-2018

Fecha de aceptación: 20-11-2018

Fecha de publicación: 15-04-2019

RESUMEN

Este artículo presenta el diseño y construcción de una herramienta para la caracterización de trayectorias de aprendizaje de la medida de longitud en niños de 6-8 años. El proceso seguido ha permitido configurar y validar un instrumento que permite reconocer, mediante actividades abiertas y manipulativas, niveles de comprensión de la medida de longitud, tales como: reconocimiento de la pre-longitud; reconocimiento de la longitud; comparación directa; comparación indirecta; ordenación serial hasta 6+; medida de extremo a extremo; relación y repetición de unidades de medida. El instrumento posibilita contar con diferentes tipos de evidencias para aproximarnos de mejor forma a las comprensiones de los niños, como son: sus acciones, sus explicaciones y sus preguntas.

Palabras clave: Trayectoria de aprendizaje, medida de longitud, primeras edades, diseño de instrumentos.

A tool to evaluate learning trajectories of length measurement with children 6-8 years

ABSTRACT

This paper presents the design and construction of a tool for the characterization of learning trajectories of length measurement in 6-8 years old children. The process followed has allowed us to configure and validate an instrument that permits to recognize, through open and manipulative activities, levels of understanding of the measure of length, such as: pre-length quantity recognizer; length quantity recognizer; length direct comparer; indirect length comparer; serial orderer to 6+; end-to-end length measurer; length unit relater and repeater. The instrument provides different types of evidence for a better approach to children comprehensions, such as their actions, their explanations and their questions.

Key words: learning trajectories, length measurement, early years, instrument design.

1. Introducción

La medida es un concepto matemático fuertemente relacionada con el mundo real, pues se utilizan las magnitudes de manera habitual en el día a día. Así, usamos la longitud para describir cuán grande es un

objeto, o que tan lejos viajamos (Battista, 2006). Sin embargo, la importancia de la medida reside también en ayudar a desarrollar y conectar otras áreas de las matemáticas, como el razonamiento y la lógica (Clements & Sarama, 2009), la numeración y la geometría (Clements y Sarama, 2009; Smith, van der Heuvel-Panhuizen, & Teppo, 2011); o, en sus conexiones con las ciencias o la geografía, y sus aplicaciones en tecnología (Montague-Smith & Price, 2012). Medir es, en definitiva, una de las seis actividades matemáticas “universales” presentes en todas las culturas (Bishop, 1999).

La presencia en los currículos escolares de la idea de medida es extensa y de fuerte importancia en las primeras edades (Barret et al., 2012; Belmonte, 2005). No obstante, como señala Belmonte (2005), “las propuestas de las autoridades educativas han sido tradicionalmente pobres y en muchos casos desacertadas” (p.317). Respecto a las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la medida, el porcentaje de investigaciones es mucho menor que el de otros tópicos matemáticos como numeración y cálculo (Barret et al., 2012; Sarama, Clements, Barret, Van Dine & McDonel, 2011).

La medida en las primeras edades no tiene como objetivo cuantificar las magnitudes, sino que se basa, según Buys & de Moor (2005), en la forma más elemental de medida, la consistente en comparar de manera directa la longitud, el peso, el volumen o el área de dos o más objetos. La identificación de las magnitudes y la construcción de la noción de medida deben iniciarse a partir de experiencias que permitan a los alumnos descubrir estas magnitudes y utilizarlas en situaciones cotidianas (Montague-Smith & Price, 2012; O’Sullivan, 2014; van den Heuvel-Pauhuizen & Buys, 2005).

De manera general pueden establecerse las etapas necesarias para construir la noción de magnitud y comprender el significado de la medida, aunque cada magnitud presenta sus propias características. Estas etapas requieren una fuerte dosis de experimentación y de vivencias ricas, y han sido estudiadas y reelaboradas por diferentes autores Alsina (2006), Belmonte (2005), Canals (1989), Piaget, Inhelder & Szeminska (1960), Clements & Sarama (2007, 2009).

El presente trabajo muestra el proceso de elaboración de un instrumento para caracterizar la trayectoria de aprendizaje sobre la medida de la longitud en alumnos de 6-8 años. Consideramos como Sarama y Clements (2011), que mediante la comprensión de la trayectoria de aprendizaje de la medida de longitud podemos mejorar las estrategias de enseñanza y aprendizaje para favorecer la adquisición de esta competencia por parte de los niños y niñas.

1.1. El aprendizaje de la medida de longitud

Medir es “importante para el desarrollo de ideas matemáticas y se ocupa de comparar, ordenar y cuantificar cualidades que tienen valor e importancia” (Bishop, 1999, 55). Desde el punto de vista del currículum la medida es un bloque de contenido fundamental, ya que la medida de longitud tiene la potencialidad de conectar distintos dominios matemáticos como son la numeración y la geometría (Clements y Sarama, 2009; Smith, van der Heuvel-Panhuizen, & Teppo, 2011), y, es un concepto sin el cual muchas descripciones de tipo espacial serían vagas e imprecisas (Battista, 2006). Por otro lado, es un concepto importante de las matemáticas utilizadas en la cotidianidad (Battista, 2006; Clements y Sarama, 2009; Chamorro, 2003; Smith, van der Heuvel-Panhuizen, & Teppo, 2011; Antonopoulos, Zacharos y Ravanis, 2009). El aprendizaje de la medición ofrece además un aspecto de habilidad práctica importante en la vida cotidiana (Buys y De Moor, 2005).

Investigaciones sobre el aprendizaje de la medida en las primeras edades muestran que los educadores ponen el foco en la aritmética (contar, comparar cantidades) o la geometría (construcciones, formas y patrones) antes que en la medida (Benz, 2012), a pesar de la enorme presencia de la medida en el día a día de los niños y niñas. De manera similar se expresa Copley (2006) al notar que la medición es un tema matemático a menudo descuidado para los niños pequeños; o, Barret et al. (2012), para los cuales el aprendizaje de la medida está poco conectado con sus fundamentos matemáticos, perdiendo a menudo

los educadores oportunidades de fortalecer conceptos de medida como la idea de unidad. Debiéndose evitar un aprendizaje rutinario del concepto de medida (Clements y Sarama, 2009).

Para la construcción de una determinada magnitud los estudios piagetianos indican que los estadios que debe superar el niño y la niña son: la consideración y percepción de una magnitud, la conservación de la magnitud, la ordenación respecto de la magnitud, y la correspondencia de números a cantidades de magnitud (Belmonte, 2005). Para Clements & Sarama (2015), medir es “el proceso de asignar un número a una magnitud de algún atributo de un objeto, como su longitud, relativa a una unidad” (p.265). Estos atributos se miden en cantidades continuas, de manera que siempre se pueden dividir en cantidades más pequeñas (Clements & Sarama, 2015). Para estos autores “la longitud es una característica de un objeto que resulta de contar cómo de lejos se encuentran los puntos finales del objeto” (p. 265). Así pues, para poder determinar la longitud, hace falta primero, subdividir el objeto en unidades de medida iguales e iterarlas a lo largo del objeto (Clements & Sarama, 2015). Piaget, Inhelder & Szeminska (1960) definen el concepto de medida de longitud como la síntesis de la subdivisión y el cambio de posición, el cual incluye extraer una parte del total e iterar esta unidad a lo largo de todo el objeto.

El aprendizaje de la medida, y en particular de la medida de longitud, involucra según Clements y Sarama (2007; 2009), la comprensión de ocho conceptos: (i) comprensión del atributo (de longitud); (ii) conservación (de longitud); (iii) transitividad; (iv) partición equitativa del objeto a medir; (v) iteración de una unidad estándar; (vi) acumulación de distancia (el número de iteraciones indica el espacio cubierto por las unidades hasta un determinado punto); (vii) origen; y, (viii) relación entre el número y la medida.

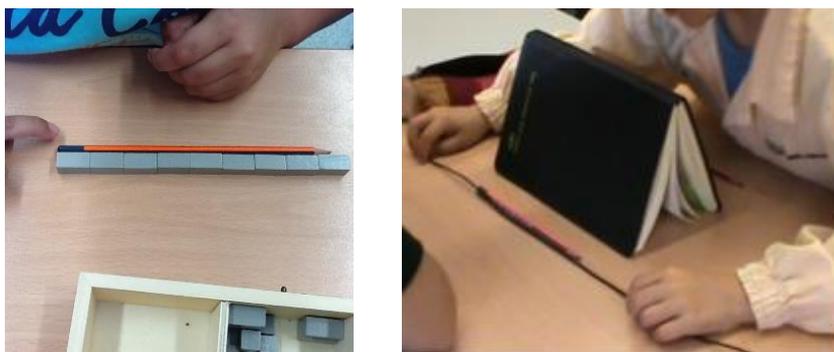


Figura 1. Niños midiendo con diferentes materiales

2. Trayectoria hipotética de aprendizaje de la medida de la longitud

El constructo Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (en adelante THA), fue introducido por Simon (1995), como parte de su modelo de ciclo de enseñanza. Según este autor, una THA se construye en torno a tres elementos: a) el objetivo de aprendizaje, b) las tareas matemáticas que se usarán para promover el aprendizaje y c) las hipótesis acerca del proceso de aprendizaje. De esta manera se busca establecer una predicción de cómo los alumnos pueden ir aprendiendo un determinado contenido matemático en función de sus conocimientos y experiencias previas.

Clements y Sarama (2015) afirman que los niños siguen procesos naturales de desarrollo en el aprendizaje de las matemáticas. Estas rutas de desarrollo son la base para las trayectorias de aprendizaje. Así, de forma semejante a lo planteado por Simon (1995), estos autores consideran que las trayectorias de aprendizaje involucran tres componentes esenciales: a) una meta matemática; b) una ruta de desarrollo; y, c) un conjunto de actividades instructivas o tareas propias de los niveles de pensamiento de la ruta. Asimismo, plantean que el uso de trayectorias de aprendizaje puede ayudar a responder preguntas claves de los procesos de enseñanza y aprendizaje: ¿Qué objetivos se deben establecer?;

¿Dónde se debe comenzar?; ¿Cómo saber hacia dónde dirigir el siguiente paso? o, ¿Cómo se logra ese siguiente paso?

De manera concreta, respecto a la medida de longitud Clements & Sarama (2009) proponen una THA organizada en diferentes niveles de desarrollo, a los cuales se asocian unas tareas instructivas. Se asume que dichos niveles indican la ruta por donde niños y niñas transitan construyendo significados para dicha noción. Para concretar estos niveles se consideran unas metas de aprendizaje definidas por aspectos clave del currículo para cada nivel escolar en la etapa inicial. Se valora que inicialmente los niños deben identificar los atributos de medida y comparar objetos usando estos atributos. Posteriormente deben ser capaces de ordenar objetos de acuerdo a su longitud. A medida que los niños avanzan en su comprensión sobre el número, se debe orientar su aprendizaje al reconocimiento de conexiones entre lo métrico y lo numérico, realizando mediciones que impliquen el uso de unidades y haciendo el conteo de dichas unidades. Finalmente, los niños deben ser capaces de reconocer la necesidad de tener unidades de igual longitud, el uso de unidades estándar, identificar y usar herramientas de medida.

Los niveles propuestos por Clements y Sarama (2009) para la trayectoria de aprendizaje de la medida de longitud, son: reconocimiento de cantidades de pre-longitud; reconocimiento de cantidades de longitud; comparación directa; comparación indirecta; ordenación serial hasta 6+; medición de extremo a extremo; relación y repetición de unidades de medida de longitud. En la Figura 1, se presenta un esquema de la organización de los niveles de la THA de la medida de longitud, propuesto por Sarama, et al (2011).

Tal y como lo plantean Simon (1995) y Simon et al., (2010), las THA se constituyen en una herramienta eficaz para realizar investigaciones sobre el pensamiento y las estrategias de los niños en relación a un objetivo de aprendizaje matemático específico. Mejorar la comprensión de los niños acerca de la medida de longitud, pasa por reconocer cómo ellos actúan ante diversas situaciones que implican dicha noción. Consideramos que las THA son un constructo que nos permite reconocer dicha comprensión, y por tanto aportan elementos clave para definir acciones concretas respecto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

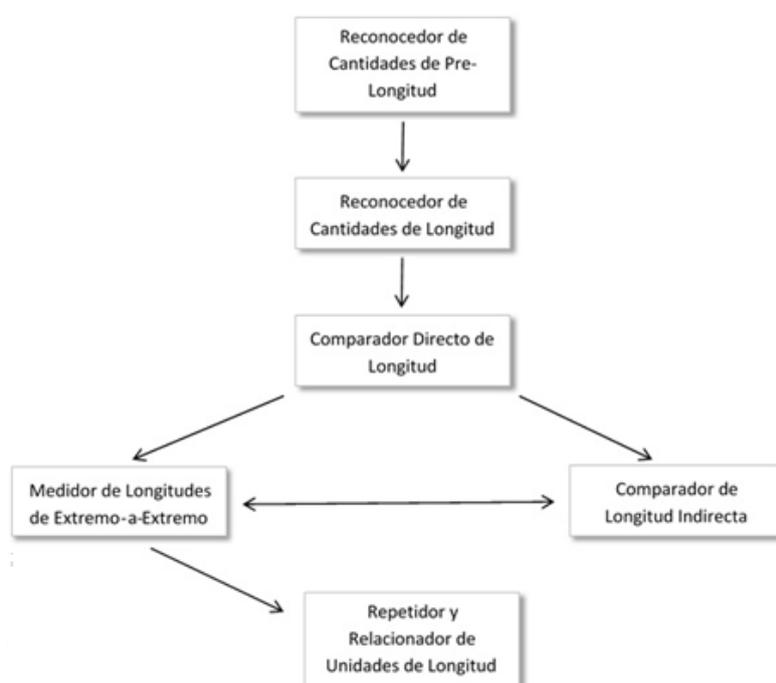


Figura 2. Relación entre los niveles hipotéticos de pensamiento en la THA de la medida de longitud (Traducción del original, Sarama et al. 2011)

3. Diseño y construcción de un instrumento para evaluar trayectorias de aprendizaje de la medida de longitud en alumnos de 6 a 8 años

El diseño y construcción del instrumento contempló cinco etapas: 1) revisión de estudios acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la medida de longitud en los ciclos iniciales de formación; 2) estudio de investigaciones sobre los niveles de progresión en el aprendizaje y las Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje; 3) construcción de la versión piloto del instrumento; 4) revisión de la versión piloto del instrumento; y, 5) construcción de la versión final del instrumento.

3.1. Construcción de la versión piloto del instrumento

Para elaborar el instrumento piloto, se parte de la propuesta de Trayectoria de Aprendizaje de la medida de longitud de Clements y Sarama (2009) descrita en el apartado anterior. En un segundo momento, se elabora una adaptación en los niveles de desarrollo de la THA, en la cual se asume como eje central los procesos aludidos en la progresión de desarrollo y que están asociados a los conceptos clave que subyacen a la medida: *reconocer*, *comparar*, *ordenar* e *iterar*. En la Tabla 1 se muestra la adaptación planteada de la progresión de desarrollo de la THA, en la cual se asocia a cada proceso, el nivel y un código de identificación.

Tabla 1. Progresión de desarrollo de la Trayectoria de Aprendizaje de la medida de longitud

	<i>Cantidades de Pre-longitud</i> : No identifican la longitud como un atributo (PR)
<i>Reconocer</i>	<i>Cantidades de longitud</i> : Identifican la longitud como un atributo pero no como una comparación (R)
<i>Comparar</i>	<i>Directa</i> : Físicamente alinean dos objetos para saber cuál es el más largo (CD)
	<i>Indirecta</i> : Comparan la longitud de dos objetos con otro objeto-Transitividad (CI)
<i>Ordenar</i>	<i>Ordenan longitudes</i> : ordenan entre 1 y 6 longitudes diferentes (O)
<i>Iterar unidades de medida</i>	<i>Medida de extremo a extremo</i> : Extienden las unidades para medirlas de principio a fin, teniendo el concepto implícito que las longitudes pueden estar compuestas por repeticiones de medidas más cortas. A pesar de no reconocer la necesidad que las unidades tengan igual medida, o no dejar espacios vacíos (EE)
	<i>Relación y repetición de unidades de medida</i> : iteran una unidad única para medir, utilizando reglas con poca ayuda. Relacionan la medida y un número de unidades explícitamente (RR)

Posteriormente, para cada nivel de la THA de la medida de longitud se propone una tarea. En el planteamiento de estas tareas se considera el uso de materiales conocidos por los niños y de fácil acceso: lápices, cuerdas, clips, regletas y reglas. Se diseñan tareas que permiten la experimentación y se anticipan posibles respuestas de los niños a cada una de las actividades. La Tabla 2 muestra las tareas asociadas inicialmente a cada uno de los niveles.

Tabla 2. Propuesta de tareas correspondientes a cada nivel de la THA

Procesos	Tareas	Posibles respuestas
<i>Reconocer</i>	T1: Discusión abierta sobre las diferencias entre tres cuerdas.	- No identifican la longitud como un atributo. - Identifican la longitud con un atributo.
<i>Comparar</i>	T2: Comparación directa de dos lápices.	- No tienen en cuenta el origen o la colocación. - Comparan directamente teniendo en cuenta el origen y la colocación.
	T3: Comparación indirecta de dos lápices con una cuerda.	- No son capaces de comparar indirectamente los dos lápices. - Comparan los dos lápices indirectamente de manera correcta.
<i>Ordenar</i>	T4: Ordenación de regletas por comparación directa.	- Ordenan las regletas de manera correcta, con un criterio propio. - No ordenan las regletas de manera correcta.

Tabla 2 (continuación). Propuesta de tareas correspondientes a cada nivel de la THA

Procesos	Tareas	Posibles respuestas
Iterar unidades de medida Transición entre: Medir de principio a fin ↓ Relación y repetición de unidades de medida	T5: Medir el lápiz con clips.	- Dejan / no dejan espacios o superponen los clips o las regletas. - Utilizan / no utilizan los clips o las regletas siempre en la misma posición. - Ven / no ven la necesidad de utilizar siempre unidades de la misma medida de longitud y por ello utilizan clips/regletas de diferentes longitudes.
	T6: Medir del lápiz con regletas.	- Comprenden/ no comprenden que la acumulación de clips o regletas es lo que da la medida del lápiz. - Coloca / no coloca los clips o regletas en el origen del lápiz.
	T7: Medir los lápices con una regla sin números, solamente con marcas.	- Tiene / no tiene en cuenta el origen. - Comprende / no comprende que el número de unidades de medida que cuenta representan la longitud cubierta por todas las unidades, y por lo tanto corresponde a la medida del lápiz.

3.2. Revisión del instrumento piloto

La revisión del instrumento piloto implicó dos aspectos: la validación del instrumento, y la implementación del mismo a un niño de primero de Primaria (7-8 años). El proceso de validación del instrumento contempla: la validez del contenido y el contraste de la validez de las tareas. La validez del contenido se garantiza a partir de la elección de la Trayectoria de Aprendizaje de la medida de longitud de Clements y Sarama (2009); Sarama et al., (2011) y, Barret et al., (2012). A través del juicio de expertos se valida el contraste de las tareas.

En el juicio de expertos del instrumento piloto participaron cinco profesoras de la etapa de 6 a 8, y cuatro expertos en Didáctica de las Matemáticas de España seleccionados por su conocimiento especializado en la enseñanza de las matemáticas en las edades del estudio. Para llevar a cabo el proceso de validación todos los expertos disponían de la versión piloto del instrumento, junto con una pauta con los elementos a evaluar. Los elementos evaluados fueron:

- La pertinencia de cada tarea al nivel correspondiente en la THA.
- La formulación, en concreto la opinión respecto a la claridad y al lenguaje utilizado en cada una de las tareas, considerando la edad de los alumnos a los que se dirige el instrumento.
- La adecuación de los materiales empleados en cada tarea.

En el segundo aspecto de la revisión del instrumento piloto, la implementación, participa un niño de primero de Primaria (7-8 años) y es orientada por una de las investigadoras. Se realiza un registro audiovisual y fotográfico de momentos concretos de la implementación, con la finalidad de comprobar si las tareas son claras, y si las respuestas permiten identificar el nivel en la THA.



Figura 3. Niño realizando una de las tareas del instrumento piloto

La puesta en común con expertos llevó a ratificar la pertinencia de las tareas en relación a la THA. Los expertos hicieron sugerencias acerca del lenguaje a utilizar para el diálogo con los niños. Finalmente, se propuso introducir cambios referentes al material usado especialmente en la primera tarea, en la que inicialmente se ofrecía al niño tres cuerdas; para decidir que se ofreciera una cuarta cuerda del mismo tipo (color y grosor) a una de las iniciales pero que tuviera mayor longitud, lo que hacía más rica la oferta de atributos diferentes o iguales entre las cuerdas (color, longitud, grosor).

La implementación del instrumento piloto permitió identificar mejoras a realizar acerca de la formulación de las preguntas en la primera tarea; ya que al ser muy generales el alumno no comprendía lo que se le pedía. Así mismo, se constató que el cambio realizado a partir del juicio de expertos referente al material, ofrecer dos cuerdas iguales donde solo cambia el atributo de la longitud, permitía diferenciar aspectos clave de los niveles iniciales de la THA. También, se constata que el resto de actividades son comprendidas sin problemas por el niño, lo que corrobora la adecuación del lenguaje a la edad. En referencia a la selección del material, tal como habían validado los expertos, en la implementación se verifica su adecuación.

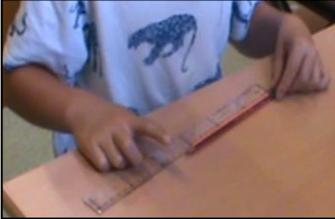
4. Resultados

El producto que generó este estudio fue el instrumento para evaluar la trayectoria de aprendizaje de la medida de longitud en niños de 6 a 8 años. El instrumento definitivo considera la progresión de desarrollo (descrita en el apartado anterior), unos objetivos de aprendizaje y las tareas que permiten identificar donde se sitúa cada alumno en la trayectoria de aprendizaje de la medida de longitud. El instrumento está diseñado para aplicarlo en formato de entrevista individual, por consiguiente, en todo momento se pregunta al niño acerca de las decisiones y/o estrategias que va realizando. A continuación, en la Tabla 3 se presenta la versión final de dicho instrumento, en la que se incluye además de las componentes de la THA, una columna con sugerencias de preguntas que pueden orientar el diálogo en la implementación del mismo.

Tabla 3. Instrumento para evaluar trayectorias de aprendizaje de la medida de longitud (6-8 años)

	OBJETIVO	TAREA	DESCRIPCION	IMAGEN	DIÁLOGO
RECONOCER	Determinar si el niño reconoce el atributo de longitud en los objetos. Evaluar si el niño se sitúa en el nivel PR o R .	Dialogando sobre longitudes de cuerdas	Se dan cuatro cuerdas, con diferentes atributos: grosor, color, y longitud. Se pretende que en la actividad los niños hablen de los atributos de las cuerdas, y que se aluda de manera clara a la noción de longitud.		¿Qué diferencias observas entre estas cuerdas? ¿Son las cuatro iguales? ¿En qué se diferencian? ¿Hay alguna otra característica que veas diferente? ¿Cómo se le dice si son diferentes de "grande"?
COMPARAR	Determinar si el niño realiza comparaciones directas de objetos para saber cuál tiene mayor longitud. Evaluar si el niño se sitúa en nivel CD .	Comparando lápices	Se propone a cada niño que tome su lápiz y se coloca otro lápiz sobre la mesa. Luego se le pide que descubra cuál es más largo. Se pretende que el niño realice una comparación directa con un objeto que es común para él. La		¿Cómo puedes colocar los lápices para reconocer el más largo? ¿Si los pones como los estás colocando ahora podrás identificar cuál es el más largo?

		<p>actividad se conduce con preguntas abiertas sin hacer referencia explícita a la colocación en paralelo de los dos lápices, ni a la igualación de los objetos en un punto de origen.</p>			
	<p>Determinar si el niño es capaz de hacer comparaciones indirectas de objetos para saber cuál tiene mayor longitud. Evaluar si el niño se encuentra en nivel CI.</p>	<p>Comparando lápices con un cordel.</p>	<p>Se sitúa sobre la mesa un objeto (libreta o caja) que impida al niño ver a la vez los dos lápices. Se ubica un lápiz a un lado de la libreta (o caja) y se pide al niño que coloque su lápiz al otro lado (ver imagen). Se pide al niño que identifique cuál de los dos lápices es el más largo. El niño puede mirar y tocar los lápices sin moverlos de su lugar. Pueden utilizar cualquier objeto que tengan a su alcance (sobre la mesa tienen una cuerda).</p>		<p>¿Puedes utilizar la cuerda de para identificar el lápiz es más largo? ¿Puedes utilizar algún otro objeto per medirlos?</p>
ORDENAR	<p>Determinar si el niño es capaz de ordenar objetos de diferentes longitudes. Evaluar si el niño se encuentra en el nivel O.</p>	<p>Ordenando regletas.</p>	<p>Cada niño ordena 6 regletas de diferente longitud. Se conduce la actividad mediante preguntas abiertas, haciendo hincapié en la idea de ordenarla a partir de un criterio definido por ellos.</p>		<p>¿Están las regletas ordenadas? ¿Cómo las has ordenado? ¿Se pueden ordenar de algún otro modo? ¿Podrías ordenarlas de más larga a más corta? (esta pregunta sólo se formularía en el supuesto que el niño realice la ordenación de varias maneras diferentes pero sin utilizar el atributo de longitud).</p>
ITERAR UNIDADES DE MEDIDA	<p>Determinar si el niño es capaz de iterar una unidad de medida no convencional para obtener la longitud de un objeto. Evaluar si el niño se encuentra en el nivel EE o en el nivel RR.</p>	<p>Midiendo con clips.</p>	<p>Cada niño dispone de clips de dos longitudes distintas. Se le pide que mida su lápiz utilizando los clips.</p>		<p>¿Cuántos clips mide de largo tu lápiz? ¿Son iguales o distintos los clips que has utilizado? ¿Colocados así los clips, puedes medir bien el lápiz? ¿Por qué?</p>

<p>Determinar si el niño es capaz de iterar una unidad de medida no convencional (pero más parecida a una convencional) para obtener la longitud de un objeto. Evaluar si el niño se encuentra en el nivel EE o en el nivel RR.</p>	<p>Midiendo con regletas</p>	<p>Cada niño dispone de regletas de diferentes medidas. Se le pide que mida su lápiz con ellas.</p>		<p>¿Cuántas regletas mide de largo tu lápiz? ¿Cómo colocas las regletas para medir la longitud del lápiz? ¿Colocadas así las regletas, puede medir bien el lápiz? ¿Por qué?</p>
<p>Determinar si el niño es capaz de medir la longitud de un objeto usando un instrumento de medida convencional. Evaluar si el niño se encuentra en el nivel EE o en el nivel RR.</p>	<p>Midiendo con regla</p>	<p>Cada niño dispone de una regla. Se pide que midan la longitud del lápiz usando la regla. Si la respuesta del niño es el número de centímetros que mide el lápiz de longitud, se les pedirá que explique cómo ha obtenido su respuesta.</p>		<p>Si tienes una regla, ¿me podrías decir como es de largo tu lápiz? ¿Colocada la regla de esta manera, puedes medir la longitud de tu lápiz? ¿Cuánto mide tu lápiz? ¿Cómo lo sabes? ¿Me explicas cómo lo has hecho?</p>

5. Conclusiones

Con este trabajo, se ha mostrado el proceso de diseño, construcción y validación de un instrumento para la caracterización de trayectorias de aprendizaje de la medida de longitud de niños 6-8 años. Las diversas etapas seguidas en el proceso, determinación de aspectos clave de la enseñanza y aprendizaje de la medida de longitud, valoración del juicio de expertos y análisis de la versión piloto del cuestionario, han permitido, informar acerca de la validez de las diferentes tareas, para refinar y elaborar así la versión final.

El instrumento elaborado aborda un tópico matemático relevante que usualmente no se desarrolla suficientemente en las etapas iniciales, por ello contar con un instrumento que permita reconocer los conocimientos intuitivos que tienen los niños al respecto, resulta fundamental para la planificación e implementación de las propuestas de formación escolar centradas a la enseñanza de la medida de longitud.

Tal y como lo plantean Clements y Sarama (2009), constatamos que la identificación de las trayectorias de aprendizaje de los niños y su comparación con la trayectoria hipotética definida, permite, por una parte, valorar el nivel en que se encuentran los niños respecto a sus interpretaciones sobre la medida de longitud; y, por otra parte, reconocer aspectos clave para la enseñanza y aprendizaje de la noción de medida. Lo que se constituye en base para la estructuración de nuevas tareas escolares que den oportunidades a los niños para mejorar o ampliar los significados construidos sobre la medida de longitud.

Al considerar una etapa como la de 6-8 años, es relevante destacar que la importancia del instrumento no sólo radica en la definición de un objetivo de aprendizaje, las tareas y la descripción de la progresión hipotética de aprendizaje, sino en cómo se implementa. Plantear actividades abiertas, experimentales y centradas en el diálogo con los niños, ofrece al investigador y al maestro reconocer la diversidad de

maneras como los niños interpretan; lo cual muchas veces se ve limitado en tareas de "lápiz y papel", más aún en esta etapa. El instrumento también permite que se cuente con diferentes tipos de evidencias para aproximarnos de mejor forma a las comprensiones de los niños, como son: sus acciones, sus explicaciones, sus preguntas, etc. Así mismo, el hecho que el instrumento esté basado en actividades manipulativas es relevante, ya que propone un conjunto de actividades ricas para trabajar la medida de longitud en esta etapa, las cuales incorporan un enfoque competencial.

Agradecimientos

Este trabajo ha contado con el soporte de los proyectos: EDU2015-65378-P y EDU2013-46083-R, MINECO. España.

Referencias

- Alsina, A. (2006). Como desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años. Octaedro.
- Antonopoulos, K. Zacharos, K. & Ravanis, K. (2009). Measurement activities and teaching interaction in early childhood education. In M. Paramythiotou & C. Angelaki (Eds), European regional conference "Current Issues in Preschool Education in Europe: Shaping the Future" (pp. 55-63), Syros: OMEP
- Barrett, J. E., Sarama J., Clements, D. H., Cullen, C., McCool, J., Witkowski-Ru,sey, C., & Klanderma, D. (2012). Evaluating and improving a learning trajectory for linear measurement in elementary grades 2 and 3: A longitudinal study. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 28-54.
- Battista, M. T. (2006). Understanding the development of students' thinking about length. *Teaching Children Mathematics*, 13(3), 140-146.
- Belmonte, J. M. (2005). La construcción de magnitudes lineales en Educación Infantil. En M^º del C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*, (pp. 315-345). Madrid: Pearson Educación.
- Benz, C. (2012). Attitudes of Kindergarten Educators about Math. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2), 203-232.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós.
- Buys, K. & de Moor, E. (2005). Domain description Measurement. In M.van den Heuvel-Panhuizen and K.Buys (Eds.), *Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary School* (pp.15-36). Rotterdam: Sense Publishers.
- Canals, M. A. (1989). *Per una didàctica de la matemàtica a l'escola -I Parvulari*. Vic: EUMO.
- Chamorro, M. C. (2003). *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Educación.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2007). Early Childhood Mathematics learning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 461-555). USA: Information Age Publishing.
- Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York: Routledge.
- Copley, J.V. (2006). *The Young Child and Mathematics*. Washington: NAEYC.
- Montague-Smith, A. & Price, A. J. (2012). *Mathematics in Early Years Education*. USA: Routledge.
- O'Sullivan, L. (2014). Measures. In H. Taylor and A. Harris, *Learning and Teaching Mathematics 0-8* (pp.196-210). London: SAGE Publications Ltd.
- Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The Child's Conception of Geometry*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Sarama, J., Clements, D.H, Barrett, J., Van Dine, D. W. & McDonel J. S. (2011). Evaluation of a learning trajectory for length in the early years. *ZDM Mathematics Education*, 43, 667-680.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., Saldanha, L., McClintock, E., Akar, G. K., Watanabe, T. & Zembat, I. O. (2010). A developing approach to studying students' learning through their mathematical activity. *Cognition and Instruction*, 28(1), 70-112.
- Smith, J.P., van den Heuvel-Panhuizen, M. & Teppo, A. (2011). Learning, teaching, and using measurement: introduction to the issue. *ZDM Mathematics Education*, 43, 667-820.

van den Heuvel-Panhuizen, M. & Buys, K. (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry*. Netherlands: Sense Publishers.

Alba Rubio Franco. Responsable del ámbito matemático, científico y tecnológico de la Fundació Escoles Garbí, Barcelona, España. Diplomada en magisterio de Educación Primaria y Máster en Investigación Educativa, especialidad en didáctica de las matemáticas de la UAB.

Email: arubio@escolesgarbi.cat

Yuly Marsela Vanegas Muñoz. Profesora asociada de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Barcelona. Miembro del grupo de investigación: Práctica Educativa y Actividad Matemática – GIPEAM. Ha publicado diversos artículos y capítulos de libro sobre cuestiones de educación matemática. Línea de investigación: Desarrollo profesional del profesor de matemáticas.

Email: ymvanegas@ub.edu

Montserrat Prat Moratonas. Profesora asociada de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB) y Blanquerna-Universidad Ramón Llull. Miembro del grupo de investigación GERI (Grupo de Estudio e Investigación sobre la Infancia). Ha publicado diversos artículos y capítulos de libro sobre cuestiones de educación matemática. Líneas de investigación: aspectos sociales y culturales de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en las primeras edades y en la formación del profesorado.

Email: montserratpm3@blanquerna.url