



VOL.23, Nº1 (Enero-Marzo, 2019)

ISSN 1138-414X, ISSNe 1989-6395

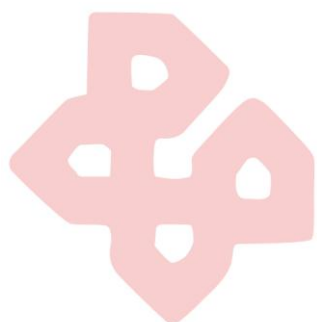
DOI: 10.30827/profesorado.v23i1.9160

Fecha de recepción: 17/07/2017

Fecha de aceptación: 20/12/2017

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN BÁSICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD

Primary education teachers' specialized knowledge to teach probability



*Claudia Vásquez Ortiz**

*Angel Alsina***

**Pontificia Universidad Católica de Chile*

***Universidad de Girona*

E-mail: cavasque@uc.cl ; angel.alsina@udg.edu

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5056-5208>

<https://orcid.org/0000-0001-8506-1838>

Resumen:

En este trabajo se evalúa el conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad de 93 profesores en activo de Educación Básica. Para ello, se analizaron desde un enfoque metodológico mixto, las prácticas explicitadas en las respuestas dadas a distintas situaciones problemáticas que evalúan aspectos del conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, y conocimiento del contenido en relación con el currículo. Los resultados arrojan un conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria insuficiente sobre todo para el caso del conocimiento en relación con el currículo. Lo que lleva a plantear la necesidad de incorporar en los programas de formación inicial y permanente del profesorado de primaria una didáctica de la probabilidad especializada para esta etapa escolar con el fin de impulsar y propiciar una enseñanza idónea de la probabilidad en el aula de Educación Primaria.

Palabras clave: *conocimiento especializado, probabilidad, educación básica, profesorado*

Abstract:

In this work the specialized knowledge for teaching probability of 93 active Primary Education teachers is evaluated. To do this, a set of explicit practices given in the responses to different problematic situations assessing aspects of specialized knowledge content, content knowledge concerning students, content knowledge regarding teaching, and content knowledge related to curriculum were analyzed following a mixed methodological approach. Results indicate that specialized knowledge of Primary Education teachers to teach probability is insufficient, especially regarding knowledge regarding the curriculum. This fact leads to raise the need to incorporate into the programs, of initial and ongoing primary teachers training, a probability didactics system specially designed for this school stage so as to promote and foster an appropriate teaching of probability in the Primary Education classroom.

Key Words: *specialized knowledge, probability, primary education, teachers*

1. Introducción

Durante el último cuarto de siglo el estudio de la probabilidad se ha incorporado con fuerza en el currículo escolar de diversos países (e.g. NCTM, 1989; National Curriculum, 1999; NCTM, 2000; CCSSI, 2010; Ministry of Education Singapore, 2007; Mineduc, 2012), adelantando su enseñanza a los primeros niveles educativos. Esto se debe, por un lado, a su utilidad y aplicabilidad en diversos campos de conocimiento en los que su aprendizaje constituye una base para la comprensión y estudio de temas más avanzados (Scheaffer, Watkins y Landwehr, 1998), al proporcionar modelos probabilísticos para medir la incertidumbre, que fundamentan, por ejemplo, parte de la teoría estadística. Por otro lado, el aprendizaje de la probabilidad contribuye al desarrollo de un pensamiento crítico, que permite a los ciudadanos comprender y comunicar distintos tipos de información presentes en numerosas situaciones de la vida diaria en las que están presentes los fenómenos aleatorios, el azar y la incertidumbre (Bennett, 1998; Everitt, 1999). Desde esta perspectiva, la probabilidad “proporciona una excelente oportunidad para mostrar a los estudiantes cómo matematizar, cómo aplicar la matemática para resolver problemas reales” (Godino, Batanero y Cañizares, 1997, p. 12). En consecuencia, surge la necesidad de educar a los estudiantes en esta área desde temprana edad, para así contar con ciudadanos alfabetizados probabilísticamente, “capaces de hacer frente a una amplia gama de situaciones del mundo real que implican la interpretación o la generación de mensajes probabilísticos, así como la toma de decisiones” (Gal, 2005, p. 40).

A pesar de esta necesidad, las investigaciones en torno al tema de la probabilidad y su enseñanza siguen siendo escasas, aunque en los últimos años han aumentado debido al impulso dado por la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study 18, “Statistics Education in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education” (Batanero, Burrill, Reading y Rossman, 2008, 2011). En estos estudios se indica que un aspecto clave para asegurar el éxito de las nuevas propuestas curriculares que incorporan la probabilidad desde muy temprana edad es la formación del profesorado. Sin embargo, los resultados de estudios recientes muestran que la mayoría de los profesores, sobre todo de Educación

Primaria, tienen una escasa o nula preparación en relación a la probabilidad y su didáctica, lo que les proporciona inseguridad para tratar dichos temas y, en consecuencia, para lograr una enseñanza idónea de la probabilidad (Pierce y Chick, 2011). Producto de esta falta de preparación, la enseñanza de la probabilidad tiende a omitirse, ya que es considerada un tema de menor importancia para la formación de los estudiantes (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006), y cuando se enseña, se focaliza principalmente en las fórmulas, dejando de lado la experimentación con fenómenos aleatorios y la resolución de problemas (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007).

Por otra parte, los documentos curriculares y los libros de texto, que en el caso de la enseñanza de la probabilidad constituyen el principal apoyo para la labor del profesor, no ofrecen el apoyo suficiente ya que en su mayoría presentan una visión sesgada o incompleta de la probabilidad (Ortiz, 1999; Cañizares, Ortiz, Batanero y Serrano, 2002; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006; Gómez, Batanero y Contreras, 2014; Vásquez y Alsina, 2015a; 2017a). Dado lo anterior, no se ofrece a los estudiantes una experiencia estocástica basada en una metodología activa y exploratoria de fenómenos aleatorios que permita el desarrollo de un razonamiento probabilístico desde la infancia. Por tanto, se requiere de profesores que comprendan la probabilidad y los aspectos relacionados a su enseñanza, así como los posibles errores y dificultades a los cuales podrían verse enfrentados sus estudiantes (Sthol, 2005), puesto que muchas de las actividades que éstos realizan en el aula dependen directamente de su conocimiento didáctico y matemático en relación al tema en cuestión.

Desde esta perspectiva, la finalidad de este estudio -que viene a complementar un estudio anterior sobre el conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad (Vásquez y Alsina, 2017b)- es analizar el conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad en profesores de Educación Primaria en activo. Para ello, nos situamos en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), y más específicamente, utilizamos las herramientas teórico-metodológicas que proporciona el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM) (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2016; 2017), para analizar, interpretar, caracterizar y categorizar los conocimientos que ponen en juego los profesores al enseñar un determinado contenido matemático. Desde este prisma, se asume que el conocimiento especializado es un conocimiento más profundo para la enseñanza de la matemática, necesario para una adecuada organización, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017).

2. Fundamentación teórica

En las últimas décadas han ido surgiendo diversas investigaciones que analizan en profundidad los conocimientos que los profesores deben poner en juego para enseñar matemáticas y provocar aprendizajes en sus estudiantes. En estos estudios

se establece que los conocimientos didácticos y matemáticos del profesorado son un factor decisivo para lograr que los estudiantes aprendan. Desde este punto de vista, es necesario que los profesores conozcan y comprendan en profundidad la matemática que deben enseñar para lograr una enseñanza eficaz. En este sentido, son variadas las investigaciones de modelos que buscan identificar y caracterizar los componentes del conocimiento didáctico y matemático que un profesor debe tener para enseñar matemáticas de manera idónea (Shulman, 1986, 1987; Llinares y Krainer, 2006; Ponte y Chapman, 2006; Philipp, 2007; Sowder, 2007; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008; Sullivan y Wood, 2008). Sin embargo, aún no existe un consenso en la comunidad científica sobre el modelo teórico más apropiado para describir y analizar los conocimientos didácticos y matemáticos que un profesor de matemática debe poseer.

Se suele reconocer que el conocimiento disciplinar no es suficiente para asegurar competencia profesional, siendo necesarios otros conocimientos de índole psicológica (cómo aprenden los estudiantes, conocer los afectos, dificultades y errores característicos, etc.); además de considerar que los profesores deberían ser capaces de organizar la enseñanza, diseñar tareas de aprendizaje, usar los recursos adecuados, y comprender los factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2009, p. 14).

Desde este marco, Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008) realizan un análisis de los principales modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, identificando en ellos ciertas limitaciones. En consecuencia, elaboran un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico-matemático del profesor desde la mirada del EOS (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007), partiendo del modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Hill et al., 2008) y de la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). En este modelo integrador, la expresión conocimiento didáctico-matemático es entendida como el conocimiento didáctico y las competencias profesionales que el profesor debe poner en juego a la hora de enseñar matemáticas, para lograr aprendizajes en sus alumnos.

Godino (2009) profundiza en este modelo y refina algunas de las nociones anteriormente señaladas, al considerar que son aún demasiado generales:

Sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor (Godino, 2009, p. 19).

Posteriormente, Pino-Fan y Godino (2015) proponen un modelo de categorías de los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor de matemáticas (CDM), el cual reorganiza las dimensiones, facetas y componentes que permiten caracterizar el conocimiento que requiere el profesorado para la enseñanza de las matemáticas. Recientemente, Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016) con el propósito de

caracterizar aún más el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, proponen una evolución del modelo CDM, articulando para ello las nociones de competencia de análisis didáctico y conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas, el cual denominan (CCDM) (Figura 1). En este modelo se entiende por competencia “una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad” (Font, 2011, p. 18). Esta nueva propuesta no sólo se considera el conocimiento común y ampliado del contenido matemático a enseñar que debe poner en práctica el profesor en el nivel en que enseña, junto con su competencia para articular esos conocimientos con los de niveles superiores (conocimiento del contenido matemático *per-se*), sino que también incorpora un conocimiento más profundo para la enseñanza de la matemática, necesario para una adecuada organización, implementación y evaluación de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el *conocimiento didáctico-matemático*.

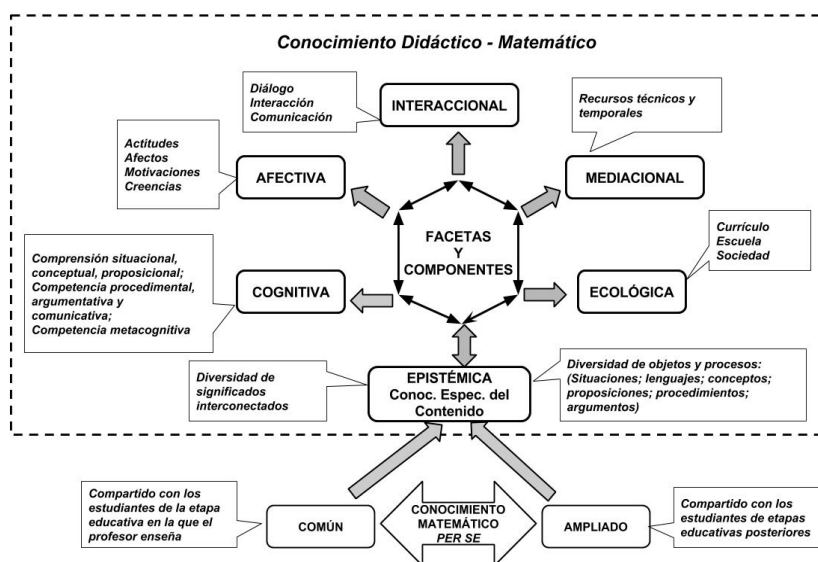


Figura 1. Facetas y componentes del modelo de los conocimientos del profesor de matemáticas.
Fuente: Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292)

Este modelo considera dos grandes categorías globales de los conocimientos del profesor de matemáticas que se analizan desde la faceta epistémica: el conocimiento del contenido matemático *per-se* (Scheiner, 2015) y el conocimiento especializado del contenido.

Dentro del conocimiento del contenido matemático *per-se* se incluyen el conocimiento común y ampliado del contenido. El primero se analiza a través de la faceta epistémica y se refiere a los conocimientos matemáticos, no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones en relación a un tema específico de las matemáticas. Por ejemplo, en el caso de que un profesor deba enseñar probabilidad, tiene que ser capaz de resolver situaciones que requieran el dominio de ciertos conceptos básicos acordes al nivel educativo en el que se desempeña. Por su parte, el conocimiento ampliado del contenido, al igual que el conocimiento común, es de tipo matemático y se analiza a

través de la faceta epistémica, y se refiere a que el profesor, además de saber resolver las situaciones sobre un tema de un nivel determinado en el que imparte clases, debe poseer conocimientos del currículo más avanzados sobre este tema, y establecer conexiones.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas se refiere al conocimiento adicional que el profesor debe saber -aparte del conocimiento común y ampliado del contenido- que lo diferencie de otras personas que saben matemáticas, pero que no son profesores. Este conocimiento incluye las siguientes seis facetas y componentes que forman parte del conocimiento especializado y predominan por sobre el conocimiento matemático *per-se* (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 291):

- Faceta epistémica: es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial.
- Faceta cognitiva: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje. ^[1] _{SEP}
- Faceta afectiva: incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido. ^[1] _{SEP}
- Faceta instruccional: conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.
- Faceta mediacional: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes. ^[1] _{SEP}
- Faceta ecológica: implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática. ^[1] _{SEP}

Es así como los sistemas de categorías genéricas propuestas por diversos modelos (e.g. Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008) para el conocimiento matemático para la enseñanza pueden ser interpretadas desde el EOS a partir de las facetas y componentes antes descritos. De este modo, el *conocimiento del contenido en relación con los estudiantes* se fundamenta en la faceta cognitiva y afectiva, y se refiere a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre el aprendizaje de los estudiantes. Lo que de acuerdo con Godino (2009), implica la capacidad del profesor para: describir los tipos de configuraciones cognitivas que los estudiantes han desarrollado al resolver la situación problemática propuesta, describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje en la resolución de un

cierto tipo de situaciones por parte de los estudiantes, formular cuestiones que permitan explicitar los significados personales de los estudiantes al resolver cierto tipo de situaciones, así como describir estrategias que se pueden implementar para promover que los estudiantes se involucren en la solución de situaciones o en el estudio de un determinado tema. De la misma manera, el *conocimiento del contenido en relación con la enseñanza*, se fundamenta en la faceta interaccional y mediacional, y se refiere a la reflexión sistemática, por parte del profesor, sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modelos de gestión de la clase (Godino, 2009). Por último, el conocimiento del contenido en relación con el currículo, se fundamenta en la faceta ecológica y se refiere al contexto en el que se desarrolla la práctica de enseñanza y aprendizaje.

El presente estudio, como se ha indicado, se focaliza en el análisis del conocimiento especializado para enseñar probabilidad, este tipo de conocimiento se refiere a que un profesor no solo debe ser capaz de resolver situaciones en relación a un determinado contenido aplicando diversos significados parciales vinculados al objeto matemático en cuestión, diferentes tipos de representaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, sino que además debe ser capaz de identificar los conocimientos puestos en juego (elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos), en la resolución de una determinada situación problemática. Por esta razón, se han considerado también en este estudio, los distintos significados vinculados a la probabilidad que han fundamentado la Teoría de la Probabilidad (Batanero, Henry y Parzyz, 2005). En su conjunto, se trata de significados que el profesorado debe comprender para poder abordar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la probabilidad (Batanero, 2005). Algunos de estos significados cobran gran relevancia en el contexto de la matemática escolar, debido a su presencia tanto en el currículo de Educación Primaria como de Educación Secundaria.



Figura 2. Significados de la probabilidad en el contexto de la matemática escolar.

Fuente: Vásquez y Alsina, (2015a, p. 443)

a) Significado intuitivo: utiliza términos de uso común para referirse a la incertidumbre y expresar, por medio de frases coloquiales, el grado de creencia en relación con sucesos inciertos;

- b) Significado laplaciano: considera la probabilidad de un suceso como la proporción del número de casos favorables al número de casos posibles, siempre que todos los resultados sean igualmente probables. Esta definición predomina en el contexto escolar, dada su simplicidad, aun cuando no puede ser aplicada en experimentos con un número infinito de posibilidades o cuando el espacio muestral es finito pero no simétrico;
- c) Significado frecuencial: plantea la asignación de probabilidades a partir de la frecuencia relativa observada en un gran número de repeticiones, permitiendo estimar la probabilidad del suceso. Así, la “Ley de los Grandes Números”, indica que la probabilidad de que la frecuencia relativa de un experimento repetido en las mismas condiciones se acerque a la probabilidad teórica del suceso, puede aproximarse suficientemente a 1, sin más que aumentar el número de pruebas;
- d) Significado subjetivo: se fundamenta en la confianza que una persona deposita sobre la verdad de una determinada proposición, por lo que no está unívocamente determinada. La probabilidad depende del observador y de lo que éste conoce del suceso en estudio;
- e) Significado axiomático: concibe la probabilidad como un tipo especial de medida, vinculándola con la teoría de la medida. Este enfoque establece axiomas a satisfacer y, por la rigurosidad matemática que conlleva, solo se observan algunos matices de su estudio en la Educación Básica.

Por tanto, es necesario que los profesores sean conscientes de la naturaleza de la probabilidad, en el contexto de la matemática escolar, así como de los distintos sesgos y heurísticas que debido a ideas informales y juicios previos sobre el tema, se generan en los estudiantes.

3. Metodología

El estudio realizado es de tipo exploratorio, dado los pocos estudios existentes sobre el tema, y su enfoque metodológico es mixto (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009; Johnson y Onwuegbuzie, 2004), ya que considera el análisis de variables tanto cuantitativas (por medio de la variable “grado de corrección de las respuestas: correctas, parcialmente correctas e incorrectas”) como cualitativas (por medio del análisis de los diferentes tipos de argumentos, justificaciones, errores, dificultades, etc.).

3.1. Participantes

Los participantes del estudio fueron 93 profesores de Educación Primaria en activo de 22 centros educativos que imparten clases de matemáticas en la región de La Araucanía (Chile). Éstos profesores imparten docencia en distintos tipos de establecimientos educacionales: municipales (33,3%), particulares subvencionados (59,1%) y particulares privados (7,5%). En cuanto a la distribución según el género, hay 68 mujeres (73,1%) y 25 hombres (26,9%). Respecto a la especialización, un 76,3% no tiene especialidad, un 15,1% tiene especialidad en matemáticas y un 8,6% tiene otra especialidad. En relación a los años de experiencia, la gran mayoría de los participantes (46,2%) tiene menos de 3 años de experiencia enseñando matemáticas

en Educación Primaria, el 21,5% tiene entre 3 y 5 años, un 17,2% tiene entre 5 y 10 años y tan solo un 15,1% tiene más de 10 años de experiencia.

Otro dato de interés es que al preguntarles si se sienten preparados para enseñar probabilidad, un 5,4% declara sentirse muy preparado, un 60,2% medianamente preparado y un 34,4% no se siente preparado. Al preguntarles si enseñan probabilidad en sus cursos, un 68,8% responde afirmativamente, un 28% no lo enseña y un 3,2% no responde.

Los datos se tomaron en el marco de un Seminario-Taller gratuito sobre enseñanza de la probabilidad, realizado por una universidad del sur de Chile.

3.2. Diseño y procedimiento

Para la obtención de datos, previamente se construyó el “Cuestionario CDM-Probabilidad”, y se analizó su validez y fiabilidad (Vásquez y Alsina, 2015b). Este instrumento se basa en el Modelo CDM y en la metodología que propone, la cual incluye dos fases: en primer lugar, se elige una tarea matemática que lleve a los profesores a poner en juego, por medio de la solución de la tarea o situación, los aspectos más relevantes en relación al tema probabilidad que se pretende analizar; y en segundo lugar, se formulan ítems de evaluación o propuestas de actividades que contemplen las distintas facetas del conocimiento del profesor que se desean analizar. Así, por medio de este cuestionario de respuesta abierta, es posible, a partir del conjunto de prácticas explicitadas en las respuestas dadas a las distintas preguntas que componen el cuestionario, obtener indicadores empíricos de los conocimientos didáctico-matemáticos de quienes han respondido, permitiendo de este modo llevar a cabo una evaluación de tales conocimientos, conocimientos a los que no siempre es posible acceder por simple observación o encuesta (Dane, 1990; Barbero, 1993).

El Cuestionario CDM-Probabilidad se compone de 7 situaciones hipotéticas de aula (ítems), que contienen consignas orientadas a evaluar aspectos parciales del conocimiento didáctico-matemático sobre probabilidad (Vásquez y Alsina, 2015b). Algunos de estos ítems son de elaboración propia y otros son reformulaciones de investigaciones previas (Green, 1983; Fischbein y Gazit, 1984; Cañizares, 1997). Por medio de estos ítems se abordan los contenidos que conforman el significado de referencia sobre probabilidad (Tabla 1), adoptado a partir del análisis de orientaciones curriculares chilenas e internacionales (Vásquez y Alsina, 2014).

Tabla 1

Contenidos que se espera movilizar en el conjunto de ítems que conforman el Cuestionario CDM-Probabilidad.

Contenidos	Ítems						
	1	2	3	4	5	6	7
Experimento y suceso aleatorio	x	x	x	x		x	x
Espacio muestral	x	x	x	x	x	x	x

Posibilidad de ocurrencia		x	x		x		
Significados de la probabilidad	x	x	x	x	x	x	x
Cálculo de probabilidad	x	x		x		x	x
Comparación de probabilidades		x		x		x	
Independencia de sucesos	x				x		x
Equiprobabilidad	x			x		x	x

Fuente: Elaboración propia.

Para acceder al conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad en profesores de Educación Primaria en activo se utilizaron las situaciones hipotéticas de aula del cuestionario CDM-Probabilidad, las cuales ejemplifican situaciones que se dan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, considerando para ello la diversidad de conocimientos didáctico-matemáticos que se ponen en juego cuando un profesor enseña probabilidad en el aula de Educación Primaria (Figura 3).

Ítem 1: La profesora Gómez plantea la siguiente situación a sus alumnos de sexto año básico:

Una persona lanza 8 veces la misma moneda, obteniendo en orden, los siguientes resultados: cara, sello, cara, sello, sello, sello, sello, sello. Si lanza la moneda por novena vez, ¿qué es más probable que pase en el noveno lanzamiento?

Algunos de los alumnos de la profesora Gómez dan las siguientes respuestas:
 Luís: *es más probable que salga cara, puesto que han salido demasiados sellos y ya es hora de que salga cara.*
 Andrés: *es igual de probable que salga cara o sello.*
 Lucía: *es más probable que salga sello, puesto que ha salido sello en cinco lanzamientos sucesivos.*

Responda:
 b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?
 c) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
 d) Describa las posibles dificultades, presentes en las respuesta incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.
 e) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Ítem 2: La profesora María Eugenia presenta el siguiente juego a sus alumnos:

Deben sacar una bola de una de las cajas siguientes con los ojos cerrados. Ganan si obtienen una bola blanca. ¿De qué caja es preferible hacer la extracción?

Caja A: 3 bolas blancas y 3 negras
 Caja B: 3 bolas blancas y 5 negras

Responda:
 b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
 c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
 d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?

Ítem 3: El profesor Ramírez plantea el siguiente problema a sus alumnos:

En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. ¿Cuántas bolas se deben sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Las respuestas obtenidas por parte de algunos de sus alumnos son las siguientes:
 Carla: *tres porque hay tres tipos de colores.*
 Antonio: *tendrá que cogerlas todas y así estará lo más seguro posible.*
 Raúl: *si se sacaran primero las bolas rojas y verdes, serían siete, pero como son una de cada color, pues ocho.*
 Karina: *para estar segurísimo habrá que sacar seis bolas, porque si hay nueve en total y hay de tres colores, hay que dejar tres bolas en la caja, una de cada color.*

Responda:
 b) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
 c) ¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 4: Usted se encuentra en quinto año básico y ha planteado el siguiente problema a sus alumnos:

En una clase de matemáticas hay 13 niños y 16 niñas. Cada alumno escribe su nombre en un trozo de papel y todos los trozos se ponen en un sombrero. El profesor saca uno sin mirar y pregunta a sus alumnos: ¿qué es más probable que suceda?

Uno de los alumnos da la siguiente respuesta:

"Es la suerte quien decide. Aunque haya más niñas, la suerte es igual. En parte podría ganar una niña".

Responda:

a) ¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.
 b) ¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?
 c) Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.
 d) ¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?

Ítem 5: Pedro ha participado en una lotería semanal durante los dos últimos meses. Hasta ahora no ha ganado nunca, pero decide continuar por la siguiente razón:

"la lotería es un juego basado en la suerte, algunas veces gano, algunas veces pierdo. Yo ya he jugado muchas veces y nunca he ganado. Por lo tanto, estoy más seguro que antes de que ganaré en alguna partida próxima".

¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?

Ítem 6: Eduardo tiene en su caja 10 bolas blancas y 20 negras. Luis tiene en su caja 30 bolas blancas y 60 negras. Juegan una partida de azar. El ganador es el niño que saque primero una bola blanca. Si ambos sacan simultáneamente una bola blanca o una bola negra, ninguno gana, devuelven las bolas a las cajas y la partida continúa.

Eduardo afirma que el juego no es justo porque en la caja de Luis hay más bolas blancas que en la suya.

¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.

Ítem 7: Usted ha seleccionado el siguiente problema para sus alumnos de 6º básico:

Al lanzar un dado 10 veces han salido los siguientes valores: 3, 6, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 6, 2. Si se lanza el dado otra vez, ¿qué número es más probable que salga?

Responda:

b) ¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?
 c) ¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.

Figura 3. Ítems y preguntas del cuestionario CDM-Probabilidad que evalúan el conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad.

Fuente: Elaboración propia.

En la tabla 2 se describe el conocimiento especializado que se evalúa en cada uno de los ítems que conforman el cuestionario a partir de las distintas facetas y componentes del modelo de los conocimientos del profesor de matemáticas que se ha utilizado para este estudio:

Tabla 2
Contenidos evaluados en cada ítem del cuestionario.

Ítem	Consigna	Tipos de conocimientos y facetas implicadas
1	b) ¿Cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿Por qué?	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
	c) ¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado (faceta epistémica)

	d)	Describa las posibles dificultades, presentes en las respuestas incorrectas, que han llevado a los alumnos a responder de manera errónea.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
	e)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e interaccional)
2	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado (faceta epistémica)
	c)	Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
	d)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e interaccional)
3	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado (faceta epistémica)
	c)	¿Qué estrategias utilizaría para que aquellos alumnos que han dado una respuesta errónea se den cuenta de su error y lo superen?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e interaccional)
4	a)	¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
	b)	¿Qué conceptos y/o propiedades deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado?	Conocimiento del contenido especializado (faceta epistémica)
	c)	Describa las posibles dificultades, a las cuales podrían verse enfrentados los alumnos para resolver de manera correcta el problema.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta mediacional e interaccional)
	d)	¿Qué estrategias utilizaría para ayudar a aquellos alumnos que no han sabido resolver el problema se den cuenta de su error y lo superen?	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e interaccional)
5		¿Cuál es su opinión sobre la explicación de Pedro?	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
6		¿Considera correcta la respuesta de este alumno? Justifique su veracidad o falsedad.	Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta afectiva y cognitiva)
7	b)	¿Qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene este problema?	Conocimiento del contenido en relación con el currículo (faceta ecológica)
	c)	¿Qué tipo de recurso utilizaría para representar el problema? Explique cómo lo utilizaría y justifique su elección.	Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e interaccional)

Fuente: Elaboración propia.

Los profesores accedieron a responder voluntariamente el cuestionario después de la firma del consentimiento informado y de la revisión de las instrucciones, además de señalar que los resultados no tendrían ningún efecto sobre los participantes, garantizando la confidencialidad de sus respuestas, utilizadas solo con fines académicos y de investigación. Señalado lo anterior, se administró el cuestionario CDM-Probabilidad, enfatizando en que debían explicar y argumentar cada una de sus respuestas, para lo cual los profesores disponían de un tiempo máximo de 90 minutos para responder, en forma individual utilizando solo lápiz y papel, a las preguntas planteadas.

Para evitar que los últimos ítems quedaran con un menor número de respuestas, ya fuese producto de la extensión del cuestionario o del cansancio de los sujetos, se prepararon cuatro versiones del instrumento (A, B, C y D) en las que la única diferencia es el orden en que se presentan los distintos ítems.

3.3. Análisis de los datos

Una vez recogidos los datos, se analizaron las respuestas y argumentos presentes en ellas, realizando un análisis tanto cuantitativo como cualitativo para acceder a aspectos iniciales del conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad desde la perspectiva del CDM. El análisis cuantitativo consideró la variable “grado de corrección” asignado los valores: “2” si la respuesta es correcta, “1” si la respuesta es parcialmente correcta, y “0” si la respuesta es incorrecta o no responde. Los criterios para definir a cuál de estas tres categorías pertenece la respuesta otorgada por cada profesor se explicitaron por medio de una rúbrica de evaluación previamente validada por un grupo de expertos en didáctica de la probabilidad. En el caso del análisis cualitativo, se procedió a leer las respuestas, para luego agrupar aquellas similares y categorizarlas por medio de un proceso cíclico e inductivo, característico del análisis cualitativo de datos (Buendía, Colás y Hernández, 1997). De modo más concreto, se siguieron los siguientes niveles de análisis:

1. Se empezó con la lectura individual de las respuestas para poder familiarizarse con su contenido y, con base en nuestro objetivo, ir organizando y estructurando la información. En este primer nivel de análisis se ordenaron, a través de la fragmentación o segmentación en unidades, los paquetes de respuesta de los que se disponía en total: a medida que íbamos leyendo dichas respuestas, señalábamos y anotábamos los diferentes conocimientos puestos en juego. Dicho de otra manera, se empezaron a transformar los “datos brutos” en “datos útiles” mediante una primera clasificación y codificación.

2. Se empezaron a establecer categorías grupales a partir de la categorización inicial realizada en la fase anterior: por ejemplo, “tipos de errores” o bien “argumentos proporcionados por los profesores”, entre otras. En este sentido la codificación y categorización se triangularon comparando, ordenando y estructurando para establecer categorías que permitieron comparar datos.

3. Se renombraron las categorías a partir de la utilización del método de comparaciones constantes (Strauss y Corbin, 1991), que incluye comparaciones realizadas entre las similitudes, diferencias y conexiones de los datos. Las unidades capturan y condensan significados y acciones, por eso, a medida que se van creando relaciones, comparando unidades, forjando un análisis preliminar de nuestras ideas, los nombres y contenido de las unidades van cambiando, mostrando nuevas relaciones y posibles interpretaciones entre categorías. Así, pues, se renombraron, eliminaron, relacionaron unidades y se concretaron los diversos errores, dificultades y argumentaciones presentes en el conocimiento especializado presentes en el conocimiento especializado que poseen estos profesores en relación con la probabilidad.

4. Resultados del estudio

Para exponer los resultados del conocimiento especializado para la enseñanza de la probabilidad en profesores de Educación Primaria en activo se ha seguido el desglose operativo para dicho conocimiento propuesto por Godino y colaboradores: 1) conocimiento del contenido especializado (faceta epistémica); 2) conocimiento del contenido en relación con los estudiantes (faceta cognitiva y afectiva); 3) conocimiento del contenido en relación con la enseñanza (faceta mediacional e instruccional); y 4) conocimiento del contenido en relación con el currículo (faceta ecológica).

4.1. Conocimiento del contenido especializado, interpretado a partir de la faceta epistémica

Este tipo de conocimiento se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el que es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados, en este caso de la probabilidad, como la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados. Para analizar este conocimiento se han propuesto distintas situaciones hipotéticas de aula (Figura 2) que presentan interrogantes del tipo ¿qué conceptos y/o propiedades matemáticas deben usar los alumnos para dar una solución correcta al problema planteado? Específicamente, nos centramos en la reflexión epistémica que los profesores de primaria realizan sobre los conceptos y/o propiedades que se ponen en juego en la solución de la situación problemática planteada.

Los porcentajes de acuerdo con el grado de corrección así como el porcentaje de respuestas sin responder para cada una de las preguntas que evalúan el conocimiento del contenido especializado se muestran en la Figura 4.

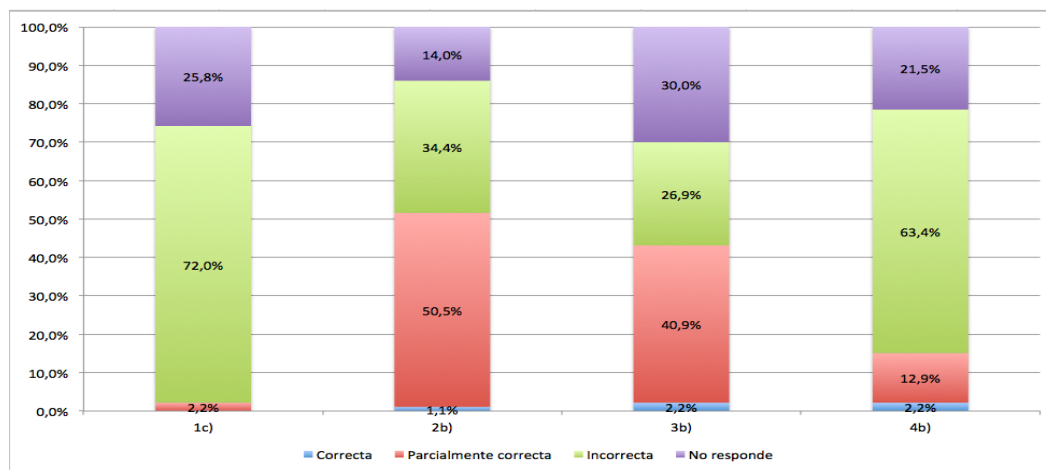


Figura 4. Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido especializado de acuerdo con el grado de corrección.

Fuente: Elaboración propia.

El conjunto de ítems centrados en evaluar este conocimiento (1c, 2b, 3b y 4b) abordan una diversidad de contenidos, conceptos y/o propiedades fundamentales vinculados a la probabilidad que el profesorado debe ser capaz de movilizar e identificar en la resolución de la situación planteada. Entre ellos, destaca la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio, el cálculo de probabilidades y la comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, comprensión del concepto de suceso seguro y capacidad combinatoria.

A partir de estos resultados se observa que el porcentaje de respuestas correctas referidas al conocimiento del contenido especializado no supera el 2,2%. Este dato pone de manifiesto que este tipo de conocimiento es insuficiente, sobre todo si consideramos que se trata de profesores de Educación Primaria en activo, y que se encuentran enseñando probabilidad en las escuelas. Al analizar las respuestas, encontramos que gran parte de ellas solo se centran en identificar conceptos básicos, a un nivel muy general, asociados a la resolución de la situación planteada, como por ejemplo: probabilidad, comparación de probabilidades, noción de suceso, azar, aleatoriedad, etc., pese a que en el momento de administrar el instrumento se solicitó que argumentaran en detalle los contenidos, conceptos y/o propiedades. Los datos obtenidos, pues, ponen de manifiesto que los profesores participantes en el estudio no lograron movilizar e identificar en su totalidad los contenidos, conceptos y/o propiedades que se deben poner en juego para dar una correcta solución al problema.

4.2. Conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, interpretado a partir de la faceta afectiva y cognitiva

Este tipo de conocimiento, como se ha expuesto, se refiere a la capacidad de los profesores para describir las configuraciones cognitivas y los conflictos de

aprendizaje de los alumnos al resolver un problema, además de describir estrategias para promover que los alumnos se involucren en la solución de problemas o en el estudio de un tema. En otras palabras, se refiere al conocimiento que el profesor debe tener sobre los errores, dificultades y conflictos presentes en los aprendizajes de sus estudiantes y su progresión. Incluye también las actitudes, emociones, creencias y valores relacionados con el proceso de estudio y a los objetos matemáticos vinculados al estudio de un determinado tema, en nuestro caso de la probabilidad en Educación Primaria.

Para evaluar este tipo de conocimiento nos centramos en el conocimiento del profesor para describir los principales tipos de conflictos de aprendizaje presentes en los alumnos cuando se resuelven un determinado problema (Godino, 2009). Para ello, se han presentado a los profesores cinco situaciones sobre probabilidad en las que se incorporan respuestas hipotéticas de alumnos de primaria. Estas respuestas se fundamentan en investigaciones previas y se relacionan con errores y dificultades frecuentes. Frente a este tipo de situaciones se ha pedido a los participantes que reflexionen y respondan a preguntas del tipo: ¿cuál o cuáles de los alumnos ha dado con la respuesta correcta? ¿por qué?, además de solicitarles que describan las posibles dificultades presentes en las respuestas incorrectas de estos alumnos ficticios. Con este propósito nos centramos en las argumentaciones y justificaciones que han dado los participantes a las preguntas 1b), 1d), 2c), 4a), 4c), 5 y 6 del Cuestionario CDM-Probabilidad.

En la Figura 5 se observa que el porcentaje de respuestas correctas es muy bajo y solo supera al 50% en una de las preguntas. A partir de estos datos se infiere de nuevo que este tipo de conocimiento es deficiente. En concreto, se evidencia que los profesores carecen de la capacidad para identificar y describir tanto las configuraciones cognitivas como los posibles conflictos de aprendizaje que pueden presentar los alumnos al tratar de dar respuesta a una determinada situación problemática sobre probabilidad.

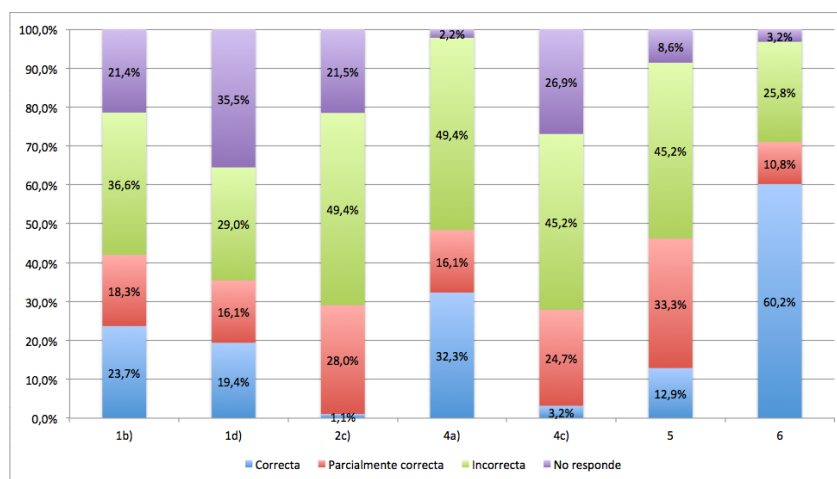


Figura 5. Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes de acuerdo con el grado de corrección.
Fuente: Elaboración propia.

De igual manera, a partir de los resultados y del análisis de las argumentaciones y justificaciones presentes en las repuestas, se observa que un porcentaje superior al 50% de los participantes no responden o entregan argumentos incorrectos para explicar las causas del error en las respuestas de los alumnos ficticios. De hecho, la respuesta más frecuente consiste en considerar que una dificultad que puede llevar a los alumnos a responder equivocadamente es el desconocimiento o débil manejo de los contenidos involucrados. Tal es el caso de la pregunta 1b) y 1d) referidas a la comprensión de la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio. Estas preguntas resultaron ser de dificultad media-alta para los profesores, pues el 23,7% logró identificar dentro de los alumnos ficticios al que daba una respuesta correcta (Andrés) y justificar adecuadamente su elección. Mientras que el 19,4% identifica correctamente el error o dificultad que está detrás de las respuestas erróneas de los alumnos ficticios. Los argumentos se centran en su gran mayoría en que las respuestas erróneas consideran la secuencia de los resultados de los lanzamientos anteriores de la moneda, lo que conduce a los alumnos ficticios a responder de manera equivocada.

Respecto a la pregunta 2c), referida al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, fue de gran dificultad para los profesores, pues solo uno de ellos (1,1 %) logró describir adecuadamente posibles errores y/o dificultades a los que podrían verse enfrentados los alumnos al resolver una situación problemática como la planteada. Un gran porcentaje de los profesores (70,9%) no logra identificar posibles dificultades pertinentes con el objeto de estudio o bien no responde, y el 28% restante considera que es posible que las dificultades se encuentren relacionadas con una inadecuada comprensión y manejo de los contenidos sobre probabilidad.

En el caso de las preguntas 4a) y 4c) vinculadas al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, se observa que este ítem presentó una dificultad media para los profesores. Concretamente, un 32,3% logró identificar en base a un argumento correcto que la respuesta del alumno ficticio es incorrecta, mientras que un 16,1%, si bien identifica que la respuesta es incorrecta, lo hace en base a un argumento incorrecto. Un porcentaje alarmante de los profesores (51,6%) considera que la respuesta del alumno es correcta o bien no da una respuesta. En el caso de los profesores que han respondido correctamente, sus argumentos se centran en que para decidir qué es más probable que suceda basta con realizar la comparación de las cantidades absolutas entre el número de niños y niñas, por lo que es más probable de que al extraer un papel este tenga el nombre de una niña. Al solicitar a los profesores identificar posibles dificultades a las que podrían verse enfrentados los alumnos de primaria al tratar de resolver la situación problemática planteada, solo tres profesores (3,2%) otorgan una respuesta correcta, mientras que un 24,7%, si bien identifica posibles dificultades, son muy generales.

Respecto a la independencia de sucesos en la asignación de probabilidades y a la noción de aleatoriedad, así como las creencias subjetivas que afectan sus concepciones sobre el azar (pregunta 5), se observa que presentó dificultades. En concreto, un porcentaje muy bajo de los profesores (12,9%) identifica correctamente que una posible dificultad puede ser debida a que el alumno cree erróneamente que los sucesos pasados afectan los futuros (falacia del jugador o efecto de recencia negativa), es decir, identifican que la razón de Pedro es incorrecta. Por otro lado, un 33,3%, si bien identifica que el razonamiento de Pedro es incorrecto, lo hace con base en un argumento incorrecto. El 53,8% restante de los participantes considera que la afirmación de Pedro es correcta o bien no responde a la pregunta.

Por el contrario, a partir de los resultados de la pregunta 6 que involucra la comparación de probabilidades simples, así como la noción de juego equitativo, se observa que no presentó grandes dificultades para los profesores. Un amplio porcentaje (60,2%) logra identificar que la afirmación del alumno ficticio está equivocada, otorgando además un argumento para ello que permite evidenciar las dificultades que han llevado a Eduardo a responder erróneamente. Finalmente, un 10,8%, si bien identifica que el alumno está equivocado, lo hace a partir de argumentos incorrectos, sin identificar posibles errores y/o dificultades.

4.3. Conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, interpretado a partir de la faceta interaccional y mediacional

En este tipo de conocimiento es fundamental, según Godino (2009), el rol otorgado a la reflexión sistemática sobre las relaciones entre la enseñanza y el aprendizaje, y la identificación de las consecuencias que pueden tener sobre el aprendizaje los modelos de gestión de la clase.

Para evaluar este tipo de conocimiento, aunque sea muy someramente, nos hemos centrado en el conocimiento del profesor para describir estrategias y/o recursos que utilizarían para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades a las que podrían verse enfrentados los alumnos al resolver las situaciones planteadas (Godino, 2009). Con este propósito se han presentado a los profesores cinco situaciones sobre probabilidad. En estas situaciones se han enunciado algunas preguntas que atienden a las facetas interaccional y mediacional de este conocimiento, pero centradas principalmente en la faceta mediacional. Tales preguntas consisten, a nivel general, en solicitar que describan las estrategias que utilizaría para ayudar a los alumnos que tengan dificultades para resolver el problema planteado.

A partir del análisis realizado, evidenciamos que el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza es de un nivel muy deficiente. En este sentido, un porcentaje muy pequeño de los profesores logra describir correctamente estrategias y/o recursos que utilizarían para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades a las que podrían verse enfrentados los alumnos al resolver las situaciones planteadas. Estos porcentajes de respuestas correctas no logran superar el 13%, observándose además cerca de un tercio de los profesores que no responde

por falta de conocimientos. Esta situación se puede observar en el gráfico de la Figura 6 que muestra la composición de los distintos tipos de respuestas de acuerdo con la variable “grado de corrección”, es decir, los porcentajes de respuestas correctas, parcialmente correctas e incorrectas, así como el porcentaje de respuestas sin responder, para cada una de las preguntas que evalúa el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza.

Como se observa en la figura 6, los porcentajes se concentran mayoritariamente en las respuestas parcialmente correctas, es decir, cerca del 50% de los profesores identifica estrategias pero a un nivel muy general sin dar mayor explicación acerca de cómo y por qué las utilizaría. Mientras que un amplio porcentaje no responde o lo hace de manera incorrecta.

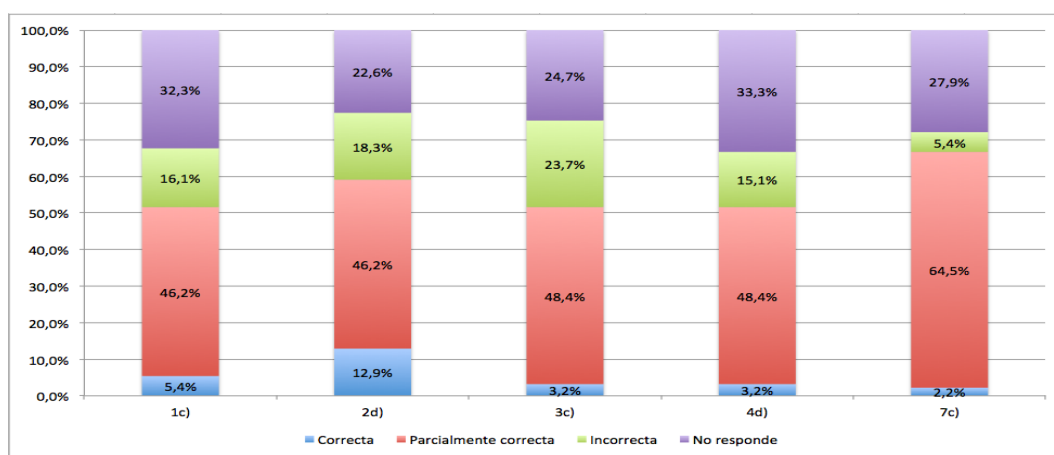


Figura 6. Composición de los distintos tipos de respuestas para el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza de acuerdo con el grado de corrección.

Fuente: Elaboración propia.

En el caso de la pregunta 1c), referida a la independencia de sucesos en ensayos repetidos bajo las mismas condiciones de un experimento aleatorio, se observa que los profesores presentan gran dificultad para proponer posibles estrategias que sirvan de apoyo a los alumnos que muestran dificultades. En concreto, solamente un 5,4% es capaz de describir y explicar tales estrategias, mientras que un alto porcentaje (46,2%) solo se limita a nombrar estrategias a un nivel muy general, como por ejemplo que “una estrategia adecuada sería el realizar el experimento de lanzar la moneda”. Además, un 16,1% entrega una respuesta completamente incorrecta y sin sentido, y un 32,3% no responde a la pregunta planteada.

La pregunta 2d) vinculada al cálculo de probabilidades y comparación de probabilidades de sucesos elementales no equiprobables en un experimento simple, presentó dificultad para los profesores. Los datos obtenidos han puesto de manifiesto que solo un 12,9% señala y explica estrategias que ayudarían a los estudiantes a una

mejor comprensión de la situación problemática, para así superar sus dificultades, como por ejemplo: “realizar el experimento, comparar cantidades de bolitas blancas y negras” o bien “comparar cantidad de bolitas por medio de porcentajes”. Un 46,2% solo nombra posibles estrategias sin dar ninguna explicación de ellas, mientras que un 18,3% señalan estrategias poco adecuadas como, por ejemplo, realizar el ejercicio repetidas veces. Por último, cabe destacar que un 22,6% de los profesores no responde a la pregunta.

En lo que respecta a la comprensión del concepto de suceso seguro y la capacidad combinatoria de los profesores de primaria (pregunta 3c), los resultados son muy bajos. De hecho, solo 3 de los 93 profesores logra identificar y explicar al menos una estrategia adecuada que permita que los alumnos se den cuenta de su error y lo superen, como por ejemplo: “realizar el experimento de manera concreta con bolitas”. Cerca de la mitad de los profesores (48,4%) solo menciona que utilizaría material concreto, sin dar mayor explicación al respecto. Un 23,7% nombra estrategias poco adecuadas, como por ejemplo leer bien el ejercicio, y un 24,7% no responde.

Para la pregunta 4d) referida al cálculo y comparación de probabilidades de sucesos elementales de un experimento aleatorio simple de sucesos no equiprobables, los resultados son bastante similares a los anteriores, presentando gran dificultad para los profesores, pues solo 3 de ellos logran explicar adecuadamente una posible estrategia a utilizar. Un 48,4% nombra y explica estrategias a un nivel muy general, limitándose solo a señalar, en la gran mayoría de los casos, que utilizarían material concreto, y un 15,1% señala estrategias sin sentido. Cabe destacar el amplio porcentaje (33,3%) de preguntas sin responder.

Una de las preguntas que mayor dificultad presentó fue la pregunta 7c) que aborda la independencia de sucesos y cálculo de probabilidades. Sólo 2 de los participantes responden adecuadamente, mientras que un 64,5% solo se centra en indicar que utilizaría material concreto como un recurso de enseñanza. Por su parte, un 5,4% presenta respuestas incorrectas y un 27,9% no responde a la pregunta planteada.

4.4. Conocimiento del contenido en relación con el currículo, interpretado a partir de la faceta ecológica

Este tipo de conocimiento, que se fundamenta en la faceta ecológica del conocimiento del profesor, considera aspectos vinculados con el proceso de enseñanza y aprendizaje tales como: las actividades y tareas que el profesor propone para lograr desarrollar en los alumnos los objetivos de aprendizaje que proponen las orientaciones curriculares.

Para evaluar el conocimiento del contenido en relación con el currículo nos hemos centrado en el aspecto vinculado a las orientaciones curriculares de la faceta ecológica que deben poner en juego los profesores para dar respuesta a la pregunta planteada (Godino, 2009). Para ello, se ha presentado a los profesores una situación

problemática (ítem 7) vinculada a la independencia de sucesos y al cálculo de probabilidades, en la que se pide a los profesores que reflexionen y respondan a la siguiente pregunta: ¿qué objetivo en relación con las bases curriculares cree usted que tiene esta situación-problema?

El tipo de respuesta y las argumentaciones presentes en ellas han dejado en evidencia un conocimiento muy deficiente, puesto que un porcentaje muy bajo de los profesores (3,2%) logra dar una respuesta correcta a la pregunta planteada.

Al analizar tanto las respuestas correctas como las parcialmente correctas, 3 de los 93 profesores identifica correctamente el propósito de la situación problemática planteada; un 4,3% logra identificar el cálculo de probabilidades como objetivo de la situación problemática, y un 73,1% de los profesores no responde por falta de conocimientos, distribuyéndose el 23,7% restante entre aquellos profesores que han respondido parcialmente correcto o de manera incorrecta.

5. Reflexiones finales

En este estudio se ha indagado en aspectos parciales e iniciales del conocimiento especializado, puesto que explorar en profundidad este tipo de conocimiento requiere analizar aspectos que escapan a esta investigación, como por ejemplo el análisis de la idoneidad didáctica de las prácticas de los profesores en acción o bien las argumentaciones empleadas en el proceso de enseñanza. Estos aspectos no son accesibles, por completo, por medio de las argumentaciones dadas a las distintas preguntas que componen el cuestionario CDM-Probabilidad. Sin embargo, el análisis en detalle de cada una de las categorías que componen el conocimiento especializado desde la perspectiva del EOS ha puesto en evidencia que el conocimiento especializado del profesorado de Educación Primaria para enseñar probabilidad es insuficiente, puesto que el porcentaje promedio de respuestas correctas no ha logrado superar el 9,9%. Estos resultados son ligeramente inferiores a los obtenidos en investigaciones similares como la de Gómez (2014) con futuros profesores de primaria españoles.

Una interpretación más detallada de los resultados parciales ha puesto en evidencia que:

a) El profesorado de Educación Primaria no posee los conocimientos especializados necesarios para identificar adecuadamente los conceptos y/o propiedades sobre probabilidad que los alumnos deben poner en juego para resolver situaciones de forma adecuada. Chick y Pierce (2008) señalan también que el profesorado de Educación Primaria no cuenta con los conocimientos necesarios para identificar los conceptos presentes en la resolución de un problema de estadística o probabilidad. Del mismo modo, Contreras (2011), en una investigación de características similares con futuros profesores de Educación Primaria, concluye que los maestros en formación presentan también un bajo nivel de conocimiento especializado del contenido. Mohamed (2012), también en un estudio con futuros profesores, obtiene resultados que señalan la misma tendencia. Quizás ello se deba a la reciente

incorporación del estudio de la probabilidad en Educación Primaria, junto con la escasa preparación que los profesores poseen para enseñar probabilidad.

b) En relación con el conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, el profesorado parece tener un conocimiento insuficiente para poder anticiparse y comprender los principales conflictos de aprendizaje presentes en los argumentos y respuestas de los alumnos cuando éstos se ven enfrentados a resolver un problema de probabilidad. Mohamed (2012) llegó a una conclusión similar al afirmar que, si bien los futuros maestros logran identificar algunos errores y/o dificultades a los cuales podrían verse enfrentados los alumnos, no consiguen argumentar y justificar lo suficiente el porqué de tales errores. Además, el tipo de errores y/o dificultades encontrados son de un carácter muy básico y se centran, principalmente, en cuestiones de tipo procedimental o conceptual. Este dato concuerda también con los resultados obtenidos por Watson (2001) al evaluar el conocimiento de los profesores para reconocer las dificultades de sus alumnos en relación a la probabilidad y la estadística.

c) Los datos obtenidos sobre el conocimiento del contenido en relación con la enseñanza han puesto de manifiesto, de nuevo, un conocimiento insuficiente para describir estrategias y/o recursos que utilizaría el profesorado para ayudar a superar posibles errores y/o dificultades de los alumnos al resolver situaciones de probabilidad. Esto concuerda, por ejemplo, con los resultados obtenidos por Sthol (2005), quien muestra que los profesores tienen dificultades a la hora de trabajar la probabilidad de una forma más experimental y basada en la simulación, ya sea por medio de la utilización de material concreto o software, pues se centran en la utilización de muestras pequeñas, lo que impide a los alumnos observar la convergencia de los resultados.

d) Finalmente, el conocimiento del contenido en relación con el currículo es también deficiente, puesto que la mayoría de los profesores no son capaces de identificar los elementos del currículo chileno que se abordan a través de la realización de una determinada situación problemática, es decir, no logran descifrar la finalidad que hay detrás de una determinada situación.

En términos generales, la situación respecto a los conocimientos especializados para enseñar probabilidad en Educación Primaria es alarmante, e indica que urge contar con un proceso de formación continua que ayude a adquirir y desarrollar dicho conocimiento. Dicho programa de intervención deberá considerar el desarrollo de conocimientos vinculados a la probabilidad como objeto matemático, conocimientos vinculados directamente con la didáctica de la probabilidad, así como promover la integración entre ambos tipos de conocimientos. Desde este punto de vista, consideramos que es necesario que los programas de formación inicial y permanente del profesorado de Educación Primaria incorporen cursos con una didáctica de la probabilidad especializada para esta etapa escolar, que propicie una enseñanza y aprendizaje de calidad. Para ello, creemos que es necesario tener en cuenta las siguientes líneas de acción:

- Necesidad de enfatizar en los distintos significados de la probabilidad, para favorecer la toma de conciencia de los errores y heurísticas que subyacen a

cada uno de ellos, y de cómo estos significados deben ser abordados con los estudiantes de manera integrada y progresiva.

- Diseño de recursos y actividades organizados por etapas o niveles educativos que impulsen el aprendizaje de la probabilidad a partir de un lenguaje cotidiano e informal, para transitar progresivamente a una probabilidad de carácter axiomático. De igual manera es necesario que estos recursos y actividades fomenten e incorporen el uso de recursos tecnológicos, dado su potencial para el análisis y simulación de experimentos aleatorios sobre todo en lo que respecta al enfoque frecuentista de la probabilidad..

De este modo no tan solo se estaría contribuyendo a mejorar la formación del profesorado para enseñar probabilidad en el aula de Educación Primaria, sino que también se fomenta e impulsa fuertemente el desarrollo de la alfabetización probabilística de los estudiantes.

En estudios posteriores será necesario abordar de forma más precisa las características que deberían tener los programas de formación inicial y continua del profesorado de Educación Primaria en general para poder avanzar hacia una enseñanza idónea de la probabilidad, así como analizar de forma más precisa los aspectos necesarios para que el profesorado adquiriera un conocimiento especializado que contribuya a aumentar la alfabetización probabilística de la sociedad.

Referencias bibliográficas

- Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. *A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.
- Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. y Rossman, A. (2008). Joint ICMI and IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. ^[1]_{SEP}
- Batanero, C., Henry, M., y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. En G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer.
- Batanero, C., Ortiz, J.J., y Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO*, 44, 7-16.
- Bennett, D. J. (1998). *Randomness*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

- Buendía, L., Colás, P. y Hernández, F. (1997). *Métodos de investigación en Psicopedagogía*. Madrid: McGraw-Hill.
- Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Cañizares, M. J., Ortiz, J. J., Batanero, C., y Serrano, L. (2002). Probabilistic language in Spanish textbooks. En B. Phillips (Ed.), *ICOTS-6 papers for school teachers* (pp.207-211). Cape Town: IASE.
- CCSSI (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Recuperado de: <http://www.corestandards.org>
- Chick, H. L., y Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI e IASE. Recuperado de: www.ugr.es/~icmi/iase_study/
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Dane, F. C. (1990). *Research methods*. Thompson. Pacific Grow. CA.
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. New York: CopemicusSpringer-Verlag.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*. 15, 1-24.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.
- Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. En G. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 43-71). Kluwer Academic Publishers.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1997). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.

- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En: C. Fernández et al. (Ed.). *Investigación en Educación Matemática XX*. (pp. 288-297). Málaga: Ed. SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Stud: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, v. 31, n. 57, p. 90-113.
- Gómez, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Gómez, E., Batanero, C., y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Green, D. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In D.R. Grey, P. Holmes, V. Barnett, & G.M. Constable (Eds), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, England: Teaching Statistic Trust.
- Hart, L., Smith, S., Swars, S. y Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 1(3), 26-41.
- Hill, H. C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Johnson, R. B., y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33(7), 14-26.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mathematics Primary Syllabus (2007). Curriculum Planning and Development Division. Ministry of Education, Singapore. Recuperado de: <http://www.moe.gov.sg>
- Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática*. Santiago de Chile: Unidad de Currículum y Evaluación.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.
- National Curriculum (1999). The National Curriculum for England, Mathematics. Recuperado de: www.nc.uk.net
- Ortiz J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pierce, R. y Chick, H. (2011). Reacting to quantitative data: Teachers' perceptions of student achievement reports. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, y S. Thornton. (Eds.), *Mathematics: traditions and [new] practices: Proceedings of the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 631-639). Adelaide, SA: AAMT
- Pino-Fan, L.; Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, v. 36, n. 1, p. 87-109.
- Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.
- Scheaffer, R. L., Watkins, A. E. y Landwehr, J. M. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. En S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching and assessment in Grades K-12* (pp. 3-31). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En, K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (p.3248-3253). Prague, Czech Republic.
- Schoenfeld, A. H. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador de Bahía, Brasil: International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2): 4-14.

- Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the new reform*. Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.
- Sowder, J. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 157- 223). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics & Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Stohl, H. (2005). Probability in teacher education and development. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 297-324). New York: Springer.
- Strauss, A. y Corbin, J. (1991). Basics of qualitative research. Grounded theory: procedures and techniques. Newbury Park, CA: Sage Publications.
- Sullivan, P., y Wood, T. (2008). *The International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 1. Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam, The Netherlands: Sense publishers.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2014). Enseñanza de la Probabilidad en Educación Primaria. Un Desafío para la Formación Inicial y Continua del Profesorado. *Revista Números*; Volumen 85, p.5-23.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015a). Un modelo para el análisis de objetos matemáticos en libros de texto chilenos: situaciones problemáticas, lenguaje y conceptos sobre probabilidad. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, v. 19, n. 2, p. 441-462.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2015b). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación Primaria sobre Probabilidad: Diseño, Construcción y Validación de un Instrumento de Evaluación. *Revista Bolema*, v. 29, n. 52, p. 681-703.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2017a). Proposiciones, procedimientos y argumentos sobre probabilidad en libros de texto chilenos de Educación Primaria. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, v. 21, n. 1, p. 433-457.
- Vásquez, C. y Alsina, A. (2017b). Aproximación al conocimiento común del contenido para enseñar probabilidad desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático. *Revista Educación Matemática*; Volumen 29(3), p.79-108.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4(4), 305-337.

Cómo citar este artículo

- Vásquez, C. y Alsina, A. (2019). Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, 23(1), 393-419. DOI:10.30827/profesorado.v23i1.9160