La numeración y el cálculo: dos caras de una misma moneda

CELIA RIZO CABRERA
LUIS CAMPISTROUS PÉREZ
Facultad de Matemática, Universidad de la Habana, Cuba
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México

1. Introducción

El cálculo con números naturales, contenido que se trabaja desde edades muy tempranas en la mayor parte de los sistemas educativos y que, como todos saben, es la base del cálculo, es una dificultad que se inicia en los primeros grados de la escuela primaria y que impacta el cálculo en todos los dominios numéricos más amplios que el de los naturales. La importancia de continuar estudiando esta problemática de la *numeración y su impacto en el cálculo*, y verla con una mayor amplitud es que aunque es conocida, aún no está resuelta, y por ello se justifica profundizar en aspectos teóricos y didácticos que pueden contribuir al aumento de información sobre el problema antes referido.

Estas dificultades, aunque son muy generalizadas, muchas veces se analizan enmarcados sólo en eso, es decir *en el cálculo con números naturales*, aunque en realidad el origen de esas dificultades es mucho más complejo y está asociado a otros componentes de bases teóricas e históricas muy relacionados con la numeración. Las mismas no se ponen de manifiesto sólo en el cálculo con naturales, sino también en el resto de los números que se estudian en la escuela cuando estos están dados en representación decimal.

En este trabajo se presentan resultados de investigaciones realizadas por los autores en el Estado de Guerrero, México, dentro de una Investigación en curso titulada Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas como producto final de la Escuela Primaria. No obstante, la experiencia de trabajo en otros países nos permite afirmar que son bastante frecuentes las situaciones que en esta investigación se han puesto de manifiesto, y en las que se evidencia esta problemática de la numeración y su impacto en el cálculo, lo que justifica profundizar en aspectos teóricos y didácticos que pueden contribuir al aumento de información sobre el problema antes referido.

2. Aspectos históricos del desarrollo de la numeración y el cálculo

Desde miles de años antes de Cristo, el hombre comenzó a usar diferentes objetos, y posteriormente símbolos de objetos, para representar las cantidades que tenían los grupos o conjuntos de objetos que en la práctica tuvo que utilizar. Estos símbolos y algunas propiedades que le imponían al uso de esos símbolos, les permitían representar *muchos números*.

Revista Iberoamericana de Educación ***/ Revista Ibero-americana de Educação***
ISSN: 1681-5653
n.º 58/4 – 15/04/12
Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI-CAEU)
Organização dos Estados Ibero-americanos para a Educação, a Ciência e a Cultura (OEI-CAEU)

Como todos sabemos, la estructura del sistema de numeración decimal posibilita representar una serie infinita de números, eso naturalmente no es casual, es el resultado de miles de años de investigación estructurada o no, acerca de este tema.

Las primeras necesidades del hombre estuvieron determinadas por la necesidad de contar, y más precisamente por la necesidad de representar las cantidades de *cosas* que en un momento determinado cada individuo poseía. Esas cosas, en este caso asociadas a la cardinalidad de los números naturales, eran posibles de individualizar dado que, en el lenguaje actual, podríamos decir que eran *cantidades discretas*. Esta necesidad de contar, y también de ordenar, fue lo suficientemente fuerte para que en el transcurso de la historia surgiera la noción de *número natural* y el hombre creara diferentes sistemas de numeración para representar y operar con esos números.

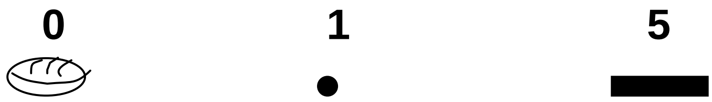
Esta necesidad primitiva de contar también determinó acciones de los hombres que, en una primera etapa, se manifestó por el uso de los dedos u otros objetos tanto para contar, como para calcular, y fue condicionando también el surgimiento de lo que después sería lo que hoy se conoce como *base del sistema de numeración*. Así aparecieron sistemas de base 5, de base 12, entre otros. Al final de ese largo proceso se instauró, por sus bondades, el sistema de base 10 que sustenta la estructura decimal del sistema de numeración más extendido actualmente y conocido como el *sistema decimal de numeración.*

Con respecto a lo antes planteado, en este trabajo se denomina *sistema de numeración* a un conjunto de símbolos y reglas o propiedades que permiten escribir cualquier número en ese sistema. Son ejemplos de sistemas de numeración *el egipcio, el babilónico, el romano, el maya, el azteca, el decimal, el binario*, entre otros. Las propiedades que más han sido utilizadas para conformar los sistemas son el *carácter aditivo y el carácter posicional*. Hay otras reglas que también han sido utilizadas como son el *carácter sustractivo y el multiplicativo* en el caso del sistema romano.

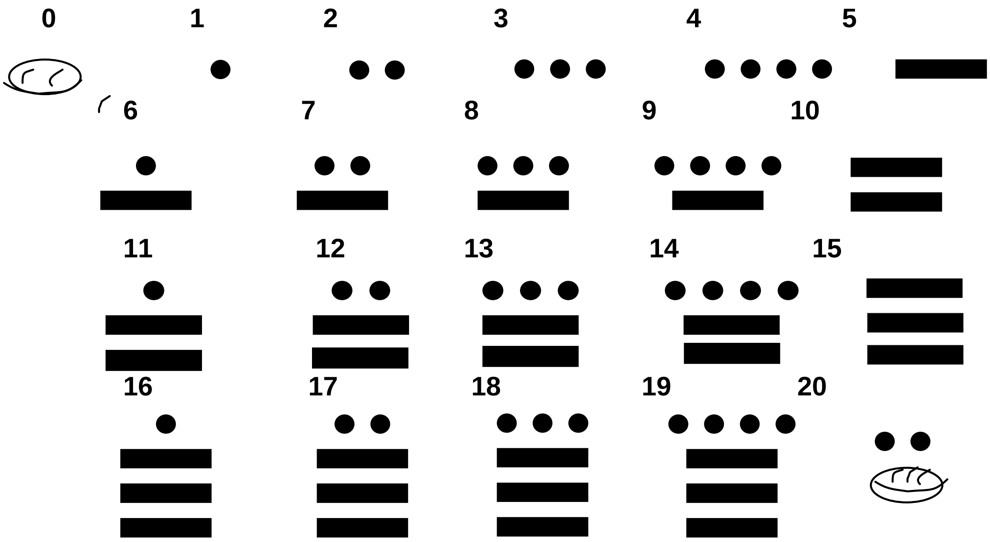
Sólo tres culturas, además de la india, lograron desarrollar un sistema de este tipo. Babilonios, chinos y mayas, en distintas épocas, llegaron al mismo principio. La ausencia del cero impidió a los chinos un desarrollo completo de su sistema de numeración hasta la introducción del mismo. No obstante, los sistemas babilónico y maya no eran prácticos para operar porque no disponían de símbolos particulares para los dígitos, usando para representarlos una acumulación del signo de la unidad y la decena (repetían los símbolos respectivos). El hecho de que sus bases fuesen 60 y 20 respectivamente no hubiese representado en principio ningún obstáculo. Los mayas por su parte cometían una irregularidad a partir de las unidades de tercer orden, ya que detrás de las veintenas no usaban 20x20=400 sino 20x18=360 para adecuar los números al calendario, lo que era una de sus mayores preocupaciones.

Aunque con frecuencia nos referimos a nuestro sistema de numeración cómo árabe, las pruebas arqueológicas y documentales demuestran el uso del cero, tanto en posiciones intermedias como finales, en la India antes del siglo VII. Los indios, antes del siglo VII, idearon el sistema tal y como hoy lo conocemos, solo con un cambio en la forma en la que escribimos los nueve dígitos y el cero. Los árabes transmitieron esta forma de representar los números y sobre todo el cálculo asociado a ella, aunque tardaron siglos en ser usadas y aceptadas. Una vez más se produjo una gran resistencia a algo por el mero hecho de ser nuevo o ajeno, aunque sus ventajas eran evidentes. Sin esta forma eficaz de numerar y efectuar cálculos difícilmente la ciencia hubiese podido avanzar.

Un ejemplo interesante en la historia de la matemática es el del *sistema de numeración maya*[1]. Como se sabe, la civilización maya floreció en México y otras partes de Centroamérica, alrededor del siglo IV de nuestra era, y aunque todavía no se han descifrado todos los jeroglíficos mayas, se sabe que tenían dos sistemas de numeración, los dos en base 20. Una de las notaciones del sistema de numeración maya era una notación práctica, con una estructura de sistema posicional, con solo tres símbolos: uno para el 0, otro para el 1 y otro para el 5:



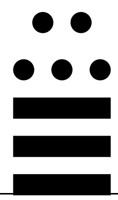
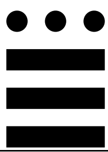
Con estos tres símbolos formaban los números hasta 20, utilizando la adición (carácter aditivo) y la posición de dichos símbolos:



Para los números mayores que 20 los símbolos, en este sistema maya, adquieren valor posicional, de acuerdo con el lugar donde está colocado el símbolo. En este sistema posicional, los lugares son potencias de 20 y, a diferencia del sistema de numeración decimal, los símbolos se escriben de abajo hacia arriba. Por ejemplo, para escribir el 58, hay primero que descomponerlo en suma de potencias de a 20:

$$58 = 40 + 18 = \mathbf{2 \times 20 + 18}$$

La suma la representaban de forma simbólica:

Múltiplos de **20**		Suma: **58** 
UNIDADES		

[1] Ver RIZO, C. (2003).

No todos los sistemas antes mencionados están estructurados sólo alrededor de lo que se denomina una *base*, como es el caso del sistema maya. El *sistema decimal o de base 10*, que se estructura alrededor del 10 como base, además es *posicional* porque el valor de un dígito depende tanto del símbolo utilizado, como de la posición que ése símbolo ocupa en el número.

Un ejemplo de lo antes planteado se puede ilustrar con el número 205 que está conformado por tres dígitos, y en el sistema decimal el primero ocupa el lugar de las unidades, en este caso el número tiene 5 en el lugar de las unidades, que en el lenguaje común se dice que tiene 5 unidades. En el lugar de las decenas tiene un 0, lo que significa que no tiene grupos de 10 unidades o decenas. Por último tiene un 2 en el lugar de las centenas, o sea que tiene 2 grupos de 100 unidades.

Si descomponemos al referido número en una *suma de múltiplos de potencias de 10* tendríamos: $205 = \underline{2}x10^2 + \underline{0}x10^1 + \underline{5}x10^0$, o representado como suma de múltiplos de 10, 100, $205 = \underline{2}x100 + \underline{0}x10 + \underline{5}$ y así sucesivamente.

Si en lugar del sistema decimal estuviéramos en el de base 5 (las cifras posibles para representar el número en este caso serían 0, 1, 2, 3 y 4), el número 205 en cuestión no existiría porque no podría tener nunca una cifra 5. Pudiera ser, por ejemplo, el número 204 y se descompondría en:

$$204 = \underline{2}x4^2 + \underline{0}x4^1 + \underline{4}x4^0$$

y representaría solo 2x16+4 unidades, o sea 36 unidades en el sistema de base 5.

Esta estructura del sistema decimal tiene una connotación para el cálculo con estos números, porque para adicionar dos o más números, por ejemplo, tenemos que tener en cuenta esa estructura y que una misma cifra puede representar una cantidad diferente, en dependencia del lugar que ella ocupe en el número dado. Esta relación entre numeración y cálculo, que depende de la estructura del sistema de numeración de que se trate, y el impacto que ello tiene en el aprendizaje, no siempre es comprendida por los docentes y por ende, el proceso de enseñanza del cálculo, digamos con números naturales, se ve afectado por la ausencia de significados.

Lo planteado en el párrafo anterior se puede ilustrar con estos dos ejemplos:

a) Para calcular 314 + 483 en el sistema decimal, todos sabemos que sumamos ordenadamente, empezando por las unidades, después las decenas y en este caso finalizamos sumando las centenas. ¿Por qué podemos hacer eso?

Una idea simple de la explicación de ese procedimiento es descomponer cada número como suma de múltiplos de 10, que lo podemos hacer porque estamos en el sistema decimal de numeración.

$$314 = 3x100 + 1x10 + 4 \qquad y\ 583 = 5x100 + 8x10 + 3$$

Si a partir de esa descomposición en suma de múltiplos de 10, se suman ordenadamente las cifras de un mismo orden, nos encontramos con el procedimiento para sumar en este dominio numérico.

Vamos a comenzar por las unidades para ir estableciendo ese orden que es el más conveniente. Entonces tendremos: 3 + 4 = 7 unidades, 1 + 8 = 9 decenas y 3 + 5 = 8 centenas. En este ejemplo la suma es 897.

Este procedimiento, cuando ya se han introducido las potencias, se realiza descomponiendo el número en sumas de potencias de 10. No obstante, en edades más tempranas ya se puede introducir, incluso en segundo o tercer grado, en lugar de presentar la descomposición como suma de potencias de 10, se hace con números menores y como suma de múltiplos de 10 como en el ejemplo.

b) Para calcular 572 + 385 se procede igual, aunque va a surgir la dificultad del sobrepaso en una cifra, o sea que la suma se pasa de 9, es 10 o mayor que 10.

Ahora bien, ¿cómo se justifica el procedimiento en este caso? De nuevo nos valemos de la estructura decimal del sistema de numeración.

572 = 5x100 + 7x10 + 2 385 = 3x100 + 8x10 + 5

Así tenemos: 2 + 5 = 7 unidades, 7 + 8 = 15 decenas y 5 + 3 = 8 centenas.

¿Cuál es la suma en este caso?

Para sumar tendremos de nuevo que descomponer las 15 decenas, en este caso en decenas y centenas: 1 centena y 5 decenas. La suma entonces se compone de 7 unidades, 5 decenas y 9 centenas (8 de la suma de 5 y 3 y 1 que se obtuvo de la suma 7+ 8 = 15). Desde el punto de vista didáctico, ayuda mucho introducir desde grados iniciales las denominadas tablas de posición, que es un medio didáctico de gran ayuda para el trabajo con la numeración. En este caso:

	Centenas	Decenas	Unidades
	5	7	2
+	3	8	5
	1+8=9	1 5	9

La suma es 959

En síntesis, en la enseñanza de la numeración, y en consecuencia en el aprendizaje de la numeración por el alumno, es esencial que se revele desde el principio *la estructura decimal de ese sistema de numeración,* lo que ello significa para la escritura de los números, naturales en este caso, y lo que eso significa para el cálculo. Hay que tener en cuenta, con respecto a lo antes planteado, que hay una restricción importante: *se calcula siempre con unidades del mismo orden* reduciendo este cálculo al cálculo clásico con números naturales límite 9, y cuando se alcanza el 10, o se sobrepasa, entonces hay que recurrir a la heurística y *reducir el problema al caso anterior*, operando en el lugar que les corresponde a dichas cifras (ya sean decenas, centenas, entre otras), incrementando las unidades del orden siguiente.

Por otra parte, reiteramos que el dominio de la estructura decimal del sistema de numeración es determinante para la comprensión del cálculo en general, y muy en especial en aquellos casos en que se presente lo que técnicamente llamamos en este trabajo *sobrepaso*, o sea, cuando en la operación de que se trate se presenta la necesidad de o bien incrementar en el próximo lugar alguna cifra, en el caso de la suma o *pedir prestado* en el caso de la sustracción.

3. Evidencias empíricas del impacto de la numeración en el cálculo

Las evidencias empíricas posiblemente se las han encontrado muchos docentes en su quehacer diario, no obstante, por la importancia que tiene este hecho en el aprendizaje del cálculo aritmético, presentamos la manifestación de esta problemática en investigaciones realizadas por los autores en Cuba y en México, aunque las evidencias textuales que se presentan son de la investigación aún en curso, que se está realizando en México por los autores de este trabajo.[2].

Las evidencias antes referidas han sido aisladas mediante el uso de la técnica denominada *técnica del análisis por elementos del conocimiento,* mediante el cual se puede identificar en qué momento del proceso de adquisición de un concepto o de una habilidad el alumno se detiene, comienza a cometer errores, necesita ayuda. El término *elemento del conocimiento* significa *aquella porción mínima de información que tiene sentido completo dentro de un concepto, proceso, razonamiento, contemplado en el contenido de una determinada asignatura, en función del objetivo que se proponga medir la tarea evaluativa planteada, y que garantiza una mayor objetividad al precisar con mayor exactitud los aciertos y errores precedentes de los alumnos para poder arribar a la solución completa de la tarea dada***.**[3]

En los instrumentos en los que se utiliza esta técnica, *no interesa una calificación del alumno sino en qué elementos del conocimiento presenta dificultades*. En todos los casos siempre se procede como sigue:

- Se dará 1 por cada elemento del conocimiento correcto.
- Se dará 0 por cada elemento del conocimiento incorrecto[4].

Si no se puede apreciar nada o ese aspecto no lo haya incluido en su respuesta, o no se pueda decidir cuál es el error, se deja en blanco la casilla en la que resumen los elementos del conocimiento. No realizar la síntesis es, por ejemplo, escribir el quinientos noventa y cuatro como 500904 o 50094, o 5904, entre otras posibilidades. En el caso de escribir el setecientos veinticinco mil nueve como 725 000 9, tiene dos errores: la síntesis (por el 725 000) y los ceros intermedios por el 9, pues en ese caso hay ceros en las cifras de las centenas y decenas (si escribe 725 000 009 el error es solo de síntesis. Por supuesto, en todos esos ejemplos dados también tendrían 0 en el elemento del conocimiento del número completo bien escrito.

Por ejemplo, en la primera actividad que contempla el temario, se pide que escriban el número correspondiente a un numeral dado. La misma está orientada a conocer en qué medida los alumnos dominan la estructura decimal y posicional del sistema de numeración, a través de la escritura de los números a partir de su numeral. Por ello se han escogido números dentro del grupo básico (unidad, decena y centena) y su extensión al segundo grupo y tercer grupo de las unidades, decenas y centenas de millar y

2 Universidad Autónoma de Guerrero. Unidad Académica de Matemáticas. Investigación en curso titulada Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas como producto final de la Escuela Primaria. 2009.
3 Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de Cuba. (2002).
4 El 1 y el 0 no son más que códigos para indicar lo correcto y lo incorrecto, aunque al representarlo por números naturales tiene la ventaja que facilita la síntesis de la cantidad de elementos correctos o incorrectos.

de millón. En especial se ha incluido la dificultad de los ceros como cifras, que son buenos indicadores de una buena compresión de esa estructura.

Los *numerales* en cuestión, en quinto grado, son: treinta y ocho, quinientos noventa y cuatro, veintiséis mil, mil ochenta y tres, dos mil ciento cuarenta y siete, ciento seis, setecientos veinticinco mil nueve y treinta mil seiscientos ochenta. Para el análisis por elementos del conocimiento de la pregunta referida en el párrafo anterior, se han aislado tres elementos fundamentales a tener en cuenta: la síntesis, los ceros intermedios y el número correctamente escrito.

En el caso de la *síntesis*, nos referimos a *no realizarla* cuando, por ejemplo, el alumno escribe el quinientos noventa y cuatro como 500904 o 50094, o 5904, entre otras posibilidades. En el caso de escribir el setecientos veinticinco mil nueve como 725 000 9, tiene dos errores: la síntesis (por el 725 000) y los ceros intermedios por el 9, pues en ese caso hay ceros en las cifras de las centenas y decenas por lo que si escribe 725 000 009 el error es solo de síntesis. Por supuesto en todos esos ejemplos dados también perderían el 1 por el elemento del conocimiento del número completo bien escrito.

En la tabla que sigue a continuación, se muestran las respuestas de tres alumnos de quinto grado, en la pregunta de numeración que se hizo en la etapa de validación de los instrumentos que se aplicaron en la investigación. Uno de los alumnos es un alumno con necesidades educativas especiales.

Quinto grado	Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3 (con NEE)
treinta y ocho	38	38	38
quinientos noventa y cuatro	594	50094	50090
veintiséis mil	026	2607	6000
mil ochenta y tres	183	100083	1000803
dos mil ciento cuarenta y siete	2147	200010047	200020407
ciento seis	106	106	106
setecientos veinticinco mil nueve	72509	7251009	7002051009
treinta mil seiscientos ochenta	3680	3000680	30100070080

En el caso del alumno 2 comete *errores de síntesis*, considerado este error, por ejemplo, al escribir el quinientos noventa y cuatro como 500904 o 50094, o 5904**,** entre otras posibilidades. Por ejemplo, el mismo alumno 2 que escribe el setecientos veinticinco mil nueve como 7002051009, tiene dos errores: la síntesis (por el 725 000) y los ceros intermedios por el 9, pues en ese caso hay ceros en las cifras de las centenas y decenas. En el caso de que escribieran el número 725 000 009, el error es solo de síntesis y lo sucedido con el alumno con necesidades educativas especiales es aún más grave porque no hay ninguna manifestación de síntesis, lo escribe como lo oye. Este alumno, además, confunde el 6 con el 7.

No obstante este error antes descrito se presenta también, como hemos visto en el caso del alumno 2, que no está identificado con necesidades educativas especiales. Se aprecia, por ejemplo**,** cuando escribe el quinientos noventa y cuatro como 50094, y el treinta mil seiscientos ochenta que escribecomo 3000680. Esto es una evidencia de que este es un serio problema que tiene que estar muy atendido por la didáctica, en este caso, del trabajo con la comprensión y utilización de los sistemas de numeración, en su tratamiento en la escuela.

Los errores de ceros intermedios es cuando llevándolos no los pone, por ejemplo en el mil ochenta y tres escribe 183. De hecho es también un error de síntesis, pero se aísla para tener clara la dificultad y poderle dar tratamiento a los que la presenten. Por supuesto, en todos esos ejemplos dados también tendrían 0 en el elemento del conocimiento del número completo bien escrito.

En estos ejemplos que se han mostrado se observan claramente las diferencias entre los tres niños en cuanto a sus dificultades. El primero comete errores básicamente en la omisión de los ceros intermedios, e inexplicablemente no puede escribir el 26 000. El segundo y el tercero, contrariamente al primero e independientemente de las características del tercero, tienen errores de síntesis, muy similares entre ellos, que necesariamente se han consolidado, por la falta de atención detallada de las dificultades, durante el desarrollo del proceso pedagógico a lo largo de la escuela primaria. En ambos casos hay errores de síntesis y de ceros intermedios. En el caso del alumno con necesidades educativas especiales hay también cambios de cifras que pueden estar dados por algún problema auditivo, aunque en el desarrollo de la investigación se comprobó que un número apreciable de alumnos realizan esos cambios de cifras, especialmente entre el 6 y el 7.

En los tres alumnos antes referidos, las respuestas correctas se concentran en los números hasta de tres cifras, lo que podía haber sido una potencialidad importante para el aprendizaje correcto de la escritura de números cualesquiera, pues bastaba extenderlo a los restantes grupos de a tres. Obviamente que cualquier error ya hace que el alumno tenga mal el número pero también es importante saber quiénes lo logran escribir bien, por eso se considera también un elemento del conocimiento. Otras evidencias empíricas se muestran en los epígrafes siguientes.

4. Los procedimientos de cálculo y la técnica de la evaluación por elementos del conocimiento

Quizás en los ejercicios de cálculo es donde mejor se revela esta técnica de analizar los resultados denominada *técnica de análisis por elementos del conocimiento*. En su implementación se comienza por la elaboración de un grupo de ejercicios que, partiendo de los grados inferiores, constituyen condiciones previas para el aprendizaje posterior del cálculo. En la figura 1 aparece el sistema de ejercicios propuestos en la investigación antes referida, en la parte de adición y sustracción en quinto grado, y como lo que se quiere aislar son las dificultades de cálculo, no se les permite usar la calculadora. Se aprecian también los errores que en ese aspecto cometió este alumno que llamaremos Luis para facilitar su referencia, que participó en la investigación antes referida. La parte escrita al margen de los ejercicios no es del alumno, es del investigador.

Los incisos a), b) e) y f) son de primero y segundo grados de la primaria con edades de 6 y 7 años como promedio. Los restantes ya son de tercero y cuarto e incluyen la dificultad del sobrepaso[5]. Entre ellos se recorren todos los ejercicios básicos de adición y sustracción (las llamadas tablas).

[5] Le llamamos *sobrepaso* en este trabajo al caso en que se alcance en una suma el 10 o un número mayor que 10 y entonces, como aparece en la suma una cifra del orden siguiente a los sumandos hay que "agregar dicha cifra en el próximo lugar". Así, en la suma 8 + 5 =13, la suma es 3 (en el lugar de las unidades), pero hay que agregar 1 en el próximo lugar porque el resultado sobrepasó a las unidades y llegó a las decenas. Esta dificultad se incluye en el cálculo a partir del cuarto en la escuela mexicana, y desde el primer

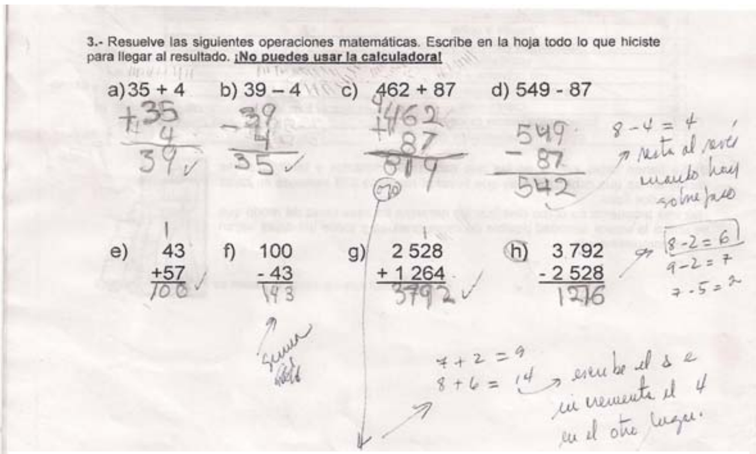


Fig.1 . Caso adición y sustracción en quinto grado

En el propio trabajo están señaladas algunas dificultades de Luis, alumno antes referido. En este caso, en los incisos a) y b) se considerarán dos elementos del conocimiento: 1 Por la colocación correcta y 1 si la suma es correcta (2 en total). En estos dos incisos Luis no presentó dificultades. El c) y el d) tendrán cada uno 4 elementos del conocimiento: la colocación correcta, el procedimiento de la operación correcto, los ejercicios básicos bien hechos y la respuesta correcta con el punto decimal. (8 en total). Observen que Luis en el inciso c) no sabe cómo se realiza el sobrepaso e invierte los dos pasos del procedimiento específico: en la suma de las decenas (cuyo resultado sobrepasa a estas), en lugar de sumar las decenas con las decenas invierte el procedimiento y suma las decenas con las centenas y agrega en el próximo lugar las decenas a las centenas.

Del e) al h) tendrán 4 elementos del conocimiento: el procedimiento de la operación correcto, el sobrepaso bien hecho, los ejercicios básicos bien y la respuesta correcta**.** (16 en total). La pregunta en total recorre 28 elementos del conocimiento. De igual modo al ejemplo anterior se dará 1 por cada elemento del conocimiento correcto y 0 por cada elemento del conocimiento incorrecto.

Se dejará en blanco la casilla, cuando no se puede apreciar nada o ese aspecto no lo haya incluido en su respuesta, o no se pueda decidir cuál es el error. Con esas consideraciones Luis hubiera tenido 17 elementos del conocimiento correctos de 28 posibles. Estos resultados de los elementos del conocimiento alcanzados por Luis en ese ejercicio de cálculo, se sistematiza en la tabla 1 que aparece a continuación:

Tabla 1. Sistematización de los elementos y su calificación

a) 35+14=49		b) 49 –35=14		c) 462+87=549				d) 549-87=462			
Colocación	Res-puesta	Coloca-ción	Respuesta	Colocación	Procedi-miento	Ejer-cicio Básico	Resp	Col.	Proc	Ejer. Bás.	Resp
1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0
e) 43+57=100				f) 100 - 43=57				g) 2528+1264=3792			
Procedi-miento	Sobre-paso	Ejer. Básico	Resp.	Proc.	Sobre-paso	Ejer Básico	Resp	Proc.	Sobrepaso	Ejer Básico	Resp
1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1
h) 3792-2528=1264				Total Pregunta 18 (de 28)							64.2%
Procedi-miento.	Sobre-paso	Ejer. Básico	Resp.								
0	0	1	0								

grado en la escuela cubana pero sin usar reglas, sino por el conteo y la suma de cantidades pequeñas donde hay sobrepaso como es el caso del 8+5. Después se formaliza.

Es interesante destacar en este caso que, a pesar de los importantes errores que tiene este alumno en cuanto a procedimientos de cálculo, no tiene errores de ejercicios básicos. El momento más complejo para decidir lo antes planteado se presenta en el ejercicio c) al calcular 462 + 87.

4		
4	**6**	**2**
+	**8**	**7**
8	**1**	**9**

Observen que el error está al sumar 6+8, que él sabe que es 14, pero que en vez de escribir el 4 y adicionar 1 en el próximo lugar, escribe el 1 y adiciona 4 en el próximo lugar.

Lo ocurrido en el ejercicio anterior es un error muy importante de procedimiento de la suma cuando hay sobrepaso, pero no de cálculo de ejercicio básico, y es una evidencia clara del impacto de la numeración en el cálculo al no identificar el significado del lugar que ocupa cada cifra y lo que eso representa para el valor real de esa cifra, como decena en este caso, pero mayor de 10, porque en realidad en este caso, 6 y 8 son decenas y su suma son 14 decenas.

Si observen de nuevo lo realizado por el mismo alumno donde obviamente, el dominio de la estructura del sistema decimal lo tiene que llevar a la consideración de que 14 decenas es lo mismo que 1 centena y 4 decenas, entonces debe colocar el 4 como respuesta en ese lugar y adicionar el 1 (la centena) en el próximo lugar que es el de las centenas. Pero lamentablemente comete un error grave al considerarlo al revés: coloca el 1 (que es una centena) como respuesta de la sustracción en ese lugar de las decenas y añade 4 (que son decenas) a las centenas que hay en el siguiente lugar.

En el caso de la sustracción, a Luis se le presenta de nuevo el problema del sobrepaso para restar, como se ve en los incisos d) y h), donde el alumno, para esquivar esa dificultad, va acomodando a su conveniencia los cálculos de modo de que no se le presente dicha dificultad.

d)	5	4	9
—		8	7
	5	4	2

h)	3	7	9	2
—	2	5	2	8
	1	2	7	6

Observen que en ambos ejercicios resta al revés en cada columna donde el sustraendo es mayor que el minuendo:

d) 9 – 7 = 2 8 – 4 = 4 5 – 0 = 5
h) 8 – 2 = 6, 9 – 2 = 7, 7- 5 = 2, 3 – 2 = 1

En cada inciso está obviando la dificultad de que el sustraendo es mayor que el minuendo, aunque detrás de estas dificultades está, como error de base, el no dominio de la estructura decimal del sistema de numeración que le impide comprender y, en consecuencia, actuar aprovechando las bondades de la misma. En este caso se agrava la situación porque el alumno actúa convenientemente (según él) sumando o restando para esquivar la dificultad en el caso de la sustracción. Una manifestación clara de esta conducta se presenta cuando en el inciso f) debe realizar la resta 100 – 47 y como no sabe cómo hacerlo, entonces suma**.**

En estos ejemplos, lamentablemente, de nuevo se pone de manifiesto como la no atención a las dificultades concretas que presentan los alumnos, en este caso en el cálculo, refuerzan sus errores en lugar de eliminarlos.

En esta investigación también se exploraron las dificultades en la multiplicación y la división, operaciones en las que lo no logrado en la adición y sustracción se convierten en importantes barreras para su dominio. Por razones de espacio no se ejemplifican cómo se manifiestan las referidas barreras y el papel que juega en ellas el dominio de la numeración y en especial, de la estructura decimal del sistema, aspecto central que se ha tratado de trasmitir a los lectores en este trabajo, aunque será considerado en artículos posteriores.

A modo de conclusión es necesario insistir en la importancia que tiene, casi para toda la vida, una clara comprensión del sistema de numeración decimal por sus implicaciones para la práctica más inmediata de los seres humanos en la sociedad actual. No obstante, es aún más importante la contribución a la formación de un pensamiento estructurado y organizado que, en el caso que se ejemplifica, tendrá connotaciones no sólo para la práctica sino para el propio desarrollo intelectual de los alumnos desde edades muy tempranas. Este desarrollo les servirá para transferir a otras situaciones similares, dentro del propio aprendizaje de la matemática y en otras áreas de su actividad intelectual y práctica, lo que indudablemente contribuirá a ser un hombre más capacitado para comprender el mundo, interactuar en él y participar activamente en la transformación de la sociedad en que le toque vivir.

Bibliografía

INSTITUTO CENTRAL DE CIENCIAS PEDAGÓGICAS DE CUBA. (2002). San Luis Potosí: una experiencia innovadora de evaluación de la calidad de un sistema educativo. Referido en el informe presentado en el Seminario de Prácticas Destacadas de Evaluación. IIX Reunión de Coordinadores Nacionales Del LLESE. Monterrey, Nuevo León, México. 18 de Noviembre de 2002.

RIZO, Celia et al. (1990) Matemática 4. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, República de Cuba.

___________ (1988) Matemática 5. Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, República de Cuba.

___________ (1989) Matemática 6 Editorial Pueblo y Educación. Ciudad de la Habana, República de Cuba.

RIZO, Celia (2003) Cartas al Maestro Matemáticas 1. Publicaciones del Reino Unido Save the Children y el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba. La Habana, Cuba.

___________ (2004) Cartas al Maestro Matemáticas 2. Publicaciones del Reino Unido Save the Children y el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba. La Habana, Cuba.

___________ (2005) Cartas al Maestro Matemáticas 3. Publicaciones del Reino Unido Save the Children y el Instituto Central de Ciencias Pedagógicas de la República de Cuba. La Habana, Cuba.

___________ (2003) Matemática 1. Cómo trabajar la numeración en los primeros grados. Cartas al maestro. Instituto Central de Ciencias Pedagógicas. Save the Children. La Habana, Cuba. .

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE GUERRERO. Unidad Académica de Matemáticas. Investigación en curso titulada Evaluación del Aprendizaje de las Matemáticas como producto final de la Escuela Primaria. 2009.