UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales

Tesis Doctoral

# Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional

Myriam Codes Valcarce

Director: Modesto Sierra Vázquez

Salamanca, 2009

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto SA080A07 del programa de apoyo a proyectos de investigación de la Junta de Castilla y Leon.

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA

---------------

1 *FACULTAD DE EDUCACIÓN*

----------------

**DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA Y**

**DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES**

----------------


Dr. Modesto Sierra Vázquez, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca,

HACE CONSTAR

Que la presente Memoria titulada “**Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional”,** ha sido realizada bajo mi dirección por Mirian Codes Valcarce y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Por lo que Autorizo su presentación, para que conste y tenga los efectos oportunos ante el Departamento de Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

Salamanca, a de de

Fdo.: Dr. Modesto Sierra Vázquez

Dedicatoria:

A mis padres, por ser los mejores.

A Jorge y Mariano, porque son el motor de mi vida y la razón de mi existencia.

A Maruja, por todo lo bueno que he aprendido de ella

Agradecimientos:

Este trabajo de investigación tiene mi firma, pero detrás hay muchas personas que han colaborado intelectual y personalmente para llegue a buen fin. A todas ellas, muchas gracias, y en especial:

Gracias a mi director de tesis, que me acogió el primer día que me presenté a él sin saber nada de mí y ha confiado todo este tiempo en mi trabajo lento, pero constante. Espero que se sienta orgullo del resultado que hemos conseguido.

Gracias a los compañeros del grupo de Didáctica del Análisis de la SEIEM que me han ayudado con sus inestimables aportaciones. Maite, Modesto, Carmen, Martín, Salvador, Matías, Tomás, Mar, de algún modo todos habéis contribuido a mejorar este trabajo. Lo bueno que tenga os lo debo a vosotros.

Gracias a mis alumnos, mi inspiración. En especial, a los integrantes de los dos grupos protagonistas de esta investigación por su participación desinteresada. Chema, Daniel, Ricardo, Carlos y Manuel, gracias por ser como sois.

Gracias a mis amigos que han estado todo el tiempo cerca de mí, y en tantas ocasiones me han ayudado a conciliar mi papel de madre con el de investigadora. Gracias a Mar por haber acogido a Jorge como a un hijo más cuando era pequeño. Gracias a Elvira por hacerme sentir segura sabiendo que ella está cerca.

Gracias a mi familia por esperar pacientemente a que finalizara este trabajo. A mis padres por formarme, intelectualmente y como persona, con el amor que sólo unos padres pueden dar. Y gracias también a mis padres por haberme dado a mis hermanas, el otro gran tesoro que me han entregado.

Gracias a Mariano por estar siempre a mi lado, por su aliento y su comprensión. Sin él nunca hubiera terminado este trabajo.

Gracias a mi hijo por tolerar mis ausencias sin reproches. Él nació después de que este trabajo hubiera comenzado y, en parte, es la causa de que haya durado tanto tiempo. Pero su existencia ha compensado con creces la demora de este momento, en el que doy por cerrada una etapa de mi vida.

Diciembre 2009

# Índice de Tablas

# Índice de Figuras

## Introducción y objetivos

Diversas investigaciones en didáctica de la matemática muestran las numerosas dificultades inherentes al aprendizaje del Análisis Matemático, y muchas destacan que los estudiantes finalizan los cursos de Análisis Matemático con ciertas destrezas en la manipulación simbólica, pero con grandes dificultades para resolver problemas no rutinarios y sin comprender el significado de los conceptos.

En todos los temarios de primer curso de matemáticas en carreras de ciencias, y en especial en ingenierías, se incluye el tema de la convergencia de sucesiones y series numéricas, cuyo aprendizaje está íntimamente ligado al concepto de infinito. Este tema, el de la convergencia de sucesiones y series, es de máxima importancia por su relación con otros tópicos propios de la matemática aplicada a la ingeniería, tales como la aproximación, los desarrollos trigonométricos y en series de potencias, o las integrales impropias, por nombrar algunos.

La autora de esta memoria es profesora en la Universidad desde hace trece años, durante los cuales siempre ha impartido clase a los estudiantes de primer curso de Ingeniería Informática. Su experiencia como profesora constata las dificultades que tienen los estudiantes cuando aprenden tópicos del Análisis Matemático, y en concreto con las series numéricas. Todos los cursos, algún alumno responde algo así como “infinito porque siempre se suma algo” cuando se le pregunta por el resultado de una suma infinita. Este es el punto de partida de esta investigación.

Así, la preocupación de la autora por los problemas que encuentran sus alumnos a la hora de aprender tópicos del Análisis Matemático, y el interés por mejorar su comprensión, le llevan a plantearse una instrucción distinta de la habitual con la que, apoyada en la herramienta de cálculo simbólico Maple, logre su objetivo como docente de ayudar a que sus alumnos construyan su conocimiento (Codes y Sierra, 2007b).

Para llevar a cabo la investigación se eligió el marco teórico APOS por centrarse en el aspecto cognitivo del proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, como señalan Dubinsky y McDonald (2001), este marco teórico posee las características necesarias para una investigación en didáctica de las matemáticas: capacidad de predicción y de ser explicativo, es aplicable a una extensa gama de problemas, ayuda a organizar lo que uno piensa sobre fenómenos complejos interrelacionados, sirve de herramienta para organizar la información, y proporciona un lenguaje para comunicar ideas sobre el aprendizaje que va más allá de descripciones superficiales.

Una vez elegido el marco teórico, se plantearon los primeros objetivos secundarios con los que se pretendía alcanzar el objetivo principal de analizar la comprensión del tópico *serie numérica* y su convergencia en alumnos de primer curso de Universidad. Estos objetivos secundarios están relacionados con la comprensión.

En primer lugar, fue necesario estudiar el desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia, que sirve de sustento para plantear una descomposición genética de este concepto. Apoyándose en ella, se describieron los niveles de comprensión que permiten explicar cómo los estudiantes conocen la convergencia de series numéricas.

El ordenador se empleó en las clases para facilitar el enfoque geométrico y gráfico de la instrucción y asistir en los cálculos repetitivos. Esto se llevó a cabo con el software de cálculo simbólico Maple y dio lugar a otro objetivo de investigación relacionado con el estudio del impacto de la utilización de una herramienta de cálculo simbólico en el aula de Análisis Matemático (Codes y Sierra, 2005).

El último paso antes del análisis de los datos para concluir los resultados, ha sido uno de los más duros y fructíferos a la vez. El empeño de la investigadora por analizar cómo construyen los estudiantes su conocimiento en la clase de matemáticas, le llevó a diseñar, asistida por un ingeniero en Telecomunicaciones, una técnica innovadora de recogida de datos que ha sido una de las contribuciones destacadas de la investigación y que ha forjado el último objetivo de investigación en relación al diseño experimental (Codes, Sierra, y Raboso, 2007). Éste consiste en utilizar de manera eficiente los recursos tecnológicos disponibles para obtener información acerca del trabajo de los estudiantes en el aula, rica en detalles y de manejo sencillo.

Así, las nuevas tecnologías han protagonizado esta investigación, no sólo por el empleo que se ha hecho de un software de cálculo simbólico para apoyar el trabajo en clase del estudiante, sino por el uso que se ha dado al software CamStudio y a las cámaras web para obtener las grabaciones de los estudiantes trabajando en las clases de matemáticas. La técnica con la que se han obtenido los datos de esta investigación ofrece un potencial que se puede explotar en un amplio abanico de investigaciones relacionadas con el trabajo de los estudiantes en un aula de ordenadores. Además, esta técnica se puede emplear en investigaciones de otras disciplinas que se apoyen en el trabajo del individuo con el ordenador.

Una de las ventajas relevantes de disponer de todas las sesiones de clase grabadas en formato digital, es que ha relevado la presencialidad del observador externo en todas las sesiones de clase. Esta figura es imprescindible en una investigación en la que el investigador juega también el papel de profesor.

Para esta investigación se obtuvieron grabaciones de seis grupos de estudiantes y de la profesora en la clase magistral, durante todas las sesiones en las que se impartió el tópico de sucesiones numéricas; las primeras sirvieron de banco de pruebas para las sesiones en las que se trabajó el tópico de serie numérica. Tras un visionado general de todas las grabaciones, se decidió analizar en profundidad aquellas en las que los estudiantes resolvían la *actividad rectángulos*. Ésta se diseñó teniendo en cuenta el estudio del desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia, y se presentó en clase antes de definir qué es una serie numérica (Codes y Sierra, 2007b).

Para analizar los datos, ha sido necesario realizar la trascripción de las grabaciones de los alumnos (véase el anexo IV), así como un documento resumen de las ejecuciones que llevaron a cabo con la herramienta de cálculo simbólico. Con este material, se realizó un primer análisis (Codes y Sierra, 2007a) sustentado por la primera descomposición genética que se planteó (Codes y Sierra, 2004) y que posteriormente se completó para el análisis que se presenta en esta memoria.

Una de las cuestiones que ha surgido en el análisis de los datos, ha sido la presencia de diversas dificultades a las que se enfrentan los estudiantes que frenan la construcción de su conocimiento (Codes y Sierra, 2008). Un análisis más detallado de este asunto establece una de las cinco líneas de investigación que han quedado abiertas y se proponen al final de la memoria.

## Organización de la memoria

La documentación generada contiene una memoria dividida en cinco capítulos y un DVD que se incluirá en los tomos impresos. El contenido de la memoria se resume a continuación.

En la primera parte se describen los principios teóricos sobre los que se asienta esta investigación, distinguiéndose cinco hitos: los modelos teóricos del pensamiento matemático avanzado, el papel de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, las dificultades, errores y obstáculos a los que han de hacer frente los estudiantes cuando construyen su conocimiento, el papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, y el papel que juega la historia de la matemática en la investigación en didáctica de la matemática.

En la segunda parte se revisan algunas investigaciones que versan sobre el tópico de las series numéricas y sobre otros tópicos relacionados con éste, como el de límite, infinito, y sucesiones numéricas. También se revisan algunos trabajos relevantes sobre el impacto del uso de herramientas de cálculo simbólico en la instrucción, y se comentan algunas aportaciones al diseño curricular de tópicos de Análisis Matemático.

Para finalizar este apartado, se repasa brevemente el desarrollo histórico del tópico serie numérica y se expone la descomposición genética de este concepto que es uno de los pilares sobre los que se apoya el análisis de los datos de esta investigación.

Una vez concretados el marco teórico y el problema de investigación, en la tercera parte se tratan aspectos relativos al diseño de la investigación. En primer lugar se documenta detalladamente el proceso de recogida de datos y se describe el cómo y el porqué del tipo de datos que se han obtenido. Para terminar, se describe la actividad con la que se obtuvieron los datos.

En el cuarto capítulo se describen las tres etapas en las que se ha llevado a cabo el análisis de los datos. La primera etapa es descriptiva e interpretativa ya que se ha relatado cómo han resuelto los distintos apartados de la actividad cada uno de los dos grupos y se ha comentado cada hito que de algún modo ha contribuido a caracterizar cómo se construye el conocimiento. La segunda es interpretativa y con ella se aporta una visión individual de los logros de cada grupo. La tercera etapa también es interpretativa y en ella se elabora una visión global del desarrollo de cada grupo en la construcción del concepto de serie numérica y su convergencia, que permite compararlos y caracterizar los elementos comunes y los que los diferencian en el proceso de construcción de este concepto.

En el quinto capítulo se exponen los resultados de investigación logrados, tratando de destacar aquellos que aportan algo innovador al panorama actual de la investigación en educación matemática. La memoria finaliza con la propuesta de cinco líneas de investigación que han quedado abiertas para ampliar los resultados de este trabajo o para desarrollar otras líneas de trabajo.

La redacción de esta memoria se ha realizado siguiendo el estándar marcado por la Asociación Americana de Psicología (American Psychological Association, 2009), con el apoyo de un manual de corrección de estilo (Rodríguez-Vida, 2006).

La información que contiene el DVD es la siguiente:

- ✓ Anexo I: Actividad Rectángulos.
- ✓ Anexo II: Lección de Cynthia Lainus.
- ✓ Anexo III: Descripción técnica de los medios utilizados en las grabaciones.
- ✓ Anexo IV: Trascripciones.
- ✓ Archivos de las grabaciones realizadas con CamStudio.
- ✓ Memoria de tesis en formato electrónico.

A continuación se plantean los objetivos de la investigación.

## Objetivos de la investigación

El principal objetivo de esta investigación es analizar la comprensión del tópico serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad. Para la consecución de este objetivo, se plantean los siguientes objetivos secundarios:

En relación a la comprensión:

Objetivo 1. Estudiar el desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia.

Objetivo 2. Realizar una descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica.

Objetivo 3. Describir niveles de comprensión que permitan explicar cómo los estudiantes conocen la convergencia de series numéricas.

El estudio del desarrollo histórico del concepto de serie numérica se ha planteado en este primer bloque por su estrecha relación con el objetivo 2. Como se verá en el primer capítulo de esta memoria, uno de los hitos sobre los que se apoya el diseño de la descomposición genética de un concepto, es el análisis de la evolución del mismo a lo largo de los siglos.

En relación al uso de un software de cálculo simbólico:

Objetivo 4. Estudiar el impacto de la utilización de una herramienta de cálculo simbólico como soporte en el aula, para facilitar el enfoque geométrico y gráfico de la instrucción, y asistir en los cálculos repetitivos.

En relación al diseño experimental:

Objetivo 5. Utilizar de manera eficiente los recursos tecnológicos disponibles para obtener información rica en detalles y de manejo sencillo.

Estos objetivos se formalizaron en el proyecto de tesis y se han conseguido en su totalidad.

# CAPÍTULO I Principios teóricos

En este capítulo se describen los principios teóricos sobre los que se asienta este trabajo. Se han distinguido cinco apartados con las principales cuestiones que atañen a esta investigación.

En el primer apartado se describen los modelos teóricos del pensamiento matemático avanzado que sirven de marco para el desarrollo de este trabajo. Se prestará especial atención al marco teórico APOS (Action, Process, Object, Schema) que sienta las bases de esta investigación. En el segundo apartado se hace una revisión general del papel de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. El tercero se encarga de analizar un aspecto esencial en el proceso de aprendizaje: las dificultades, errores y obstáculos a los que han de hacer frente los estudiantes cuando construyen su conocimiento. El cuarto apartado trata sobre la importancia y el papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, y en él se analizan algunas dificultades asociadas a la visualización. Para terminar, se sintetiza el papel que juega la historia de la Matemática en la investigación en didáctica de la matemática, destacando la relevancia de introducir la historia en el currículo y el modo en que se lleva a cabo.

# I 1 MODELOS TEÓRICOS SOBRE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO AVANZADO

En general, la investigación en didáctica de la matemática puede centrar su foco de atención en los procesos de enseñanza o en los procesos de aprendizaje. En el primer bloque, el protagonista es el profesor y el objeto de investigación puede ser, entre otros, su conocimiento matemático, sus actitudes, su conocimiento profesional, las estrategias educativas que emplea en el aula, o sus creencias acerca del proceso de enseñanza. En el segundo bloque, el protagonista es el estudiante y el objeto de investigación puede ser, entre otros, sus actitudes hacia las matemáticas, sus motivaciones, o cómo comprende un tópico matemático concreto.

Para abordar estos temas, existen dos grandes líneas de pensamiento psicológico que engendran los principales marcos teóricos: el constructivismo y el socio-culturalismo (Cottrill, 2003; Font, 2002). Una de las grandes diferencias entre estos dos marcos teóricos es la importancia otorgada al entorno en el que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje. Mientras que el marco socio-cultural, se apoya en la teoría de Vigotsky según la cual el desarrollo de la inteligencia de un individuo es el resultado de las iteraciones sociales con su entorno, el marco constructivista se apoya en la teoría cognitiva de Piaget según la cual el individuo construye su propio conocimiento en un entorno social que ostenta un papel secundario.

Dentro de la corriente socio-cultural, cabe destacar el enfoque antropológico desarrollado por Chevallard, y continuado por el grupo de Artigue, Trouche y Guin, entre otros.

Esta investigación se enmarca en la corriente constructivista y más concretamente en la teoría APOS que desarrolla el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). En el apartado I 1.5 se explica con detalle esta metodología de investigación, y en el capítulo II 7 se muestra cómo se ha aplicado a esta investigación.

También, dentro de la corriente constructivista caben destacar los trabajos de Tall y Vinner (1981), de Gray y Tall (1994), de Sfard, (1991) y de Sfard y Linchevski (1994), que se comentan más adelante.

Todos estos enfoques se integran en lo que se conoce como *Pensamiento Matemático Avanzado* que según Robert y Schwarzenberger (1991) es una actividad creativa que, a través de la abstracción, completa un circuito que va desde las intuiciones iniciales y las conjeturas, hasta la definición y la demostración formal.

## I 1.1 Pensamiento matemático avanzado

En 1985, dentro del congreso del PME (Psychology of Mathematics Education), se crea un grupo de trabajo cuya principal preocupación es estudiar el proceso de enseñanza-aprendizaje del Análisis Matemático en niveles de enseñanza superior, esto es, bachillerato y primeros cursos de universidad (Azcárate, 1998; Azcárate y Camacho, 2003).

Si bien es cierto que muchas de las características que suelen asociarse a la actividad matemática en la enseñanza superior también se dan en la matemática elemental (Dreyfus, 1991), la capacidad de definir y deducir formalmente es propia de la matemática superior. En palabras de Tall (1991), “el paso de la matemática elemental al pensamiento matemático avanzado involucra una transición: de la descripción a la definición, del convencimiento a la demostración lógica basada en las definiciones” (p. 20).

Robert y Schwarzenberger (1991) repasan las similitudes y las diferencias que encuentran entre la matemática elemental y la matemática superior. Desde el punto de vista del contenido matemático, en la Universidad se imparten más conceptos en menos tiempo, lo que conlleva una mayor carga de trabajo individual fuera del aula. Además, los conceptos son muy diferentes desde el punto de vista del estudiante, ya que a menudo implican no sólo capacidad de generalización, sino también de abstracción y formalización. De hecho, el estudiante ha de formalizar en un breve espacio temporal, conceptos que históricamente han tardado mucho tiempo en consolidarse. Este trabajo involucra un proceso de abstracción generalizada que requiere nuevas construcciones mentales que entran en conflicto con las antiguas construcciones que se habían adquirido en la enseñanza elemental. Esto produce en los estudiantes de primer curso universitario una “falta de conexión en la difícil transición desde la matemática elemental a la matemática avanzada” (p. 129). Además, la tradición de examinar sobre nociones teóricas formales y sus demostraciones, suele desembocar en la memorización de una demostración formal sin que se llegue a producir un aprendizaje significativo, en el sentido de construcción del conocimiento.

Desde el punto de vista de las características psicológicas y cognitivas de los estudiantes, se espera que posean la capacidad de “distinguir entre el conocimiento matemático y el meta-conocimiento matemático (es decir, la exactitud, relevancia, o elegancia de una parte de las matemáticas)” (Robert y Schwarzenberger, 1991, p. 131), además de la capacidad de comunicarlo. Sin embargo, algunas investigaciones en didáctica de la matemática muestran que la realidad del aula es la de unos estudiantes que se enfrentan, en muchos casos sin éxito, a numerosos obstáculos de distinta índole, y que presentan muchas dificultades para adaptarse a las nuevas exigencias.

El pensamiento matemático avanzado “es un proceso extremadamente complejo, en el cual interactúa un gran número de componentes de forma compleja” (Dreyfus, 1991, p. 29). La abstracción es uno de los procesos que caracterizan la matemática superior y la distinguen de la matemática elemental, hasta el punto de que la capacidad de abstracción refleja el nivel del pensamiento matemático. Para Dreyfus, la abstracción es ante todo un proceso de “construcción de estructuras mentales desde estructuras matemáticas, es decir, desde propiedades y relaciones entre objetos matemáticos” (p. 37). Los procesos de representar, generalizar y sintetizar son necesarios para que se produzca la abstracción:

- ✓ Representar: a grandes rasgos, se pueden distinguir dos tipos de representaciones, las externas al individuo, es decir, los símbolos con los que representamos conceptos matemáticos, y las internas al individuo, es decir, las representaciones mentales. Las investigaciones en pensamiento matemático avanzado centran más su atención en las representaciones mentales del concepto matemático que construye el individuo. Una forma de precisar la comprensión de un concepto se basa en la riqueza de esas representaciones, medida a partir de los distintos modos de representación y la capacidad para alternar de unas a otras, y a partir de las conexiones que el individuo establezca entre los diversos aspectos relacionados con el concepto.

- ✓ Generalizar: consiste en identificar las características comunes a hechos particulares y extenderlas a un dominio más amplio. La generalización se produce siempre a partir de un objeto matemático y requiere tiempo y experiencia para adquirir las destrezas cognitivas que necesita.
- ✓ Sintetizar: consiste en extraer lo esencial de diversas partes y coordinarlas para construir una nueva entidad. Este proceso es difícil de trasmitir, de ahí que muchas veces los profesores dediquen su esfuerzo, y el de los estudiantes, en realizar tareas aisladas sin establecer las conexiones necesarias entre ellas para que se integren en una entidad.

### I 1.2 Esquema conceptual vs. definición del concepto.

Tall y Vinner (1981) utilizan el término *concept definition* (traducido por definición del concepto) para designar a la definición formal del concepto, la que acepta la comunidad matemática y se puede leer en los libros. Por otro lado, utilizan el término *concept image* (traducido por esquema conceptual) para referirse a “toda la estructura cognitiva que está asociada a un concepto” en la mente de un individuo. Así, cada individuo genera su propio esquema conceptual a lo largo de los años a partir de la definición del concepto y de la experiencia acumulada. El proceso de formación y maduración del individuo hace que este esquema no sea estático, sino que varíe incorporando nuevos elementos en el esquema o modificando los ya existentes. Además, este esquema no tiene porqué ser coherente, ya que el proceso de formación del mismo permite que los elementos asociados a un esquema puedan ser contradictorios. Estas incoherencias sólo las percibimos cuando el individuo evoca dos partes del esquema simultáneamente conflictivas. Es entonces cuando se manifiestan los errores de los que se hablará en la sección I 3.

Puesto que el esquema conceptual es individual y propio de cada individuo, la definición personal que éste puede dar de un concepto también es personal y característica de él, y por tanto no tiene porqué ser igual a la definición formal. De hecho, un individuo puede generar un esquema conceptual en el que la definición personal del concepto no sea la apropiada.

Tall y Vinner denominan *factor potencial de conflicto* a aquella parte del esquema conceptual o de la definición del concepto que puede entrar en conflicto con otra parte del esquema o de la definición. Cuando esto ocurre, el individuo cometerá errores y dará respuestas confusas que pueden llegar a ser contradictorias. El mayor problema ocurre cuando se produce una incoherencia entre una parte del esquema conceptual y la definición formal, ya que esto supone una seria dificultad para el aprendizaje; mientras no se produzca un conflicto, el individuo considerará que la teoría formal está carente de valor y le resultará inútil ya que con su esquema conceptual, aunque erróneo, es capaz de resolver tareas. Sólo cuando la definición formal del concepto desarrolle un esquema conceptual que entre en conflicto con el esquema anterior, se manifestará esta incoherencia y será posible una rectificación que proporcionará una oportunidad para que se produzca el correcto aprendizaje del concepto.

Hay ocasiones en las que el proceso de enseñanza puede provocar factores potenciales de conflicto. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el profesor utiliza ejemplos que representan sólo un aspecto del concepto y luego exige al estudiante que evoque otro aspecto; el estudiante es incapaz de hacerlo porque no se le ha entrenado para ello.

**La noción de procepto**

Hace más de una década, Gray y Tall (1994) introdujeron la noción de *procepto* para designar la combinación de un proceso y un concepto representados por el mismo símbolo.

Un *proceso*, es la representación cognitiva de una operación matemática que se implementa con un procedimiento. Éste, es un algoritmo específico formado por una secuencia coherente de acciones y decisiones que se ejecutan paso a paso. Cada proceso, se puede implementar mediante distintos procedimientos. Los símbolos matemáticos con los que describimos estos procesos pueden, a veces, describir también el *concepto* matemático asociado a dicho proceso. Esta doble interpretación de los símbolos, como concepto y como proceso, es lo que Gray y Tall llaman *procepto*.

Cuando Gray y Tall hablan de conocimiento procedimental, aluden al conocimiento focalizado en la manipulación rutinaria de objetos. El conocimiento conceptual, es más flexible y rico en relaciones. El alumno que piensa de manera proceptual es capaz de reconocer el carácter ambiguo de los símbolos que representan un tópico, como proceso y como concepto, logrando con ello una forma más eficiente de aprendizaje. La labor del docente es la de diseñar un currículo que facilite la exploración y la experimentación de un concepto antes de definirlo formalmente y conseguir así que el estudiante genere un esquema conceptual rico y coherente.

### I 1.3 La naturaleza dual de los objetos matemáticos

En 1991, Sfard publica un artículo en el que detalla los cimientos de una nueva teoría dentro del pensamiento matemático avanzado, la teoría de la *reificación*[1]. Según ésta, "las nociones abstractas, tales como número o función, pueden ser concebidas fundamentalmente de dos maneras: estructuralmente, como objetos, u operacionalmente, como procesos." (p. 1).

Cuando Sfard habla de objetos matemáticos, se refiere a nociones u objetos abstractos que son aquellos que no pueden ser explorados por nuestros sentidos; son entes que sólo existen en un universo teórico y, por tanto, sólo los podemos ver con nuestra mente.

[1] Traducción de *reification*.

Cuando uno se plantea si en la mente de un individuo existen o no esos objetos, no se plantea una existencia real que se pueda comprobar o refutar de forma rigurosa. El único criterio que se puede utilizar es su *efectividad teórica*: sólo se puede saber de la existencia de objetos matemáticos en la mente de un individuo si estos ayudan a dar sentido a comportamientos observables cuando dicho individuo realiza alguna actividad matemática.

Los objetos abstractos se comportan como vínculos que dan sentido a estructuras coherentes dentro de una teoría. Lo que ocurre con frecuencia es que son más fáciles de identificar cuando se dan situaciones en las que su ausencia provoca algún tipo de desorden; por ejemplo, cuando un estudiante yerra en la resolución de una desigualdad, confunde la relación entre una fórmula algebraica y una gráfica, o no identifica correctamente al dominio de una función, está manifestando la falta del objeto abstracto denominado función. Pero también se pueden identificar estos objetos en situaciones exitosas; por ejemplo, cuando un estudiante es capaz de resolver una ecuación lineal a partir de la representación gráfica mental de las dos rectas que implícitamente aparecen en la ecuación, está utilizando el objeto abstracto *función* como nexo de unión entre dos modos diferentes de representar simbólicamente dicho objeto. En este caso, la construcción de este objeto abstracto en la mente del individuo se manifiesta a través del vínculo que establece entre estas dos formas de representación que le llevan a resolver correctamente el problema planteado (Sfard y Linchevski, 1994).

La capacidad de un individuo para construir en su mente estos objetos (abstractos) matemáticos tiene que ver con su habilidad matemática. Esta es la concepción estructural de las nociones matemáticas, pero el análisis histórico y psicológico de la formación de conceptos matemáticos revela que, para la mayoría de las personas, la concepción operacional es el primer paso en la adquisición de una noción matemática nueva, de modo que precede a la concepción estructural (Sfard, 1991).

La concepción operacional de un objeto matemático está asociada a la ejecución de cálculos que dan sentido a su existencia. Sfard (Idem) caracteriza esta concepción como dinámica, secuencial y puntual. La concepción estructural implica la visión de un objeto matemático como un objeto abstracto, como una entidad que conexiona las partes de un todo. Supone, por tanto, un estado más avanzado en el desarrollo del concepto matemático. Sfard caracteriza esta concepción como estática, instantánea y con tendencia a combinar y coordinar diferentes elementos en un todo.

Estas dos maneras de concebir un objeto matemático no son incompatibles sino más bien complementarias, ya que las dos son necesarias para una correcta comprensión de los conceptos matemáticos. Según esta teoría, el proceso de aprendizaje y de resolución de problemas consiste en una compleja interacción entre la concepción operacional y estructural de los conceptos. Tras estudiar las fases de la formación de un concepto, Sfard llega a la conclusión de que la transición desde operaciones de cálculo a objetos abstractos es un proceso largo e inherentemente difícil, que se lleva a cabo en tres etapas que se corresponden con tres estados de estructuración de los objetos matemáticos en la mente del individuo: interiorización, condensación y reificación.

"En la etapa de interiorización, el individuo se familiariza con procesos que eventualmente darán lugar a nuevos conceptos. (…) Estos procesos son operaciones de bajo nivel que se realizan con objetos matemáticos" (Sfard, 1991, p. 18). Se dice que un individuo ha interiorizado un proceso cuando es capaz de reflexionar sobre él sin necesidad de ejecutarlo.

La etapa de condensación se produce cuando el individuo es capaz de pensar en el proceso como un todo, cuando las operaciones llevadas a cabo con el mismo objeto matemático se agrupan en una unidad más manejable. La consecución de esta etapa se manifiesta en la facilidad con la que se manipulan los procesos (combinándolos con otros procesos, comparándolos, generalizándolos).

El paso de la etapa de interiorización a la de condensación supone un cambio cuantitativo en el desarrollo del concepto que se realiza de manera gradual. Sin embargo, la última etapa de reificación se produce repentinamente cuando el individuo es capaz de concebir la noción como un objeto hecho y derecho y el objeto abstracto se convierte en un todo compacto. Cuando esto ocurre, el individuo posee una concepción estructural del concepto matemático, lo cual supone la "reorganización cognitiva del esquema" que a su vez conlleva a un "aprendizaje más efectivo". En este estado es cuando comienza la interiorización de alto nivel (Sfard, Idem).

Esta etapa conlleva una enorme dificultad, en gran parte, provocada por lo que Sfard denomina el *círculo vicioso* de la reificación: "por un lado, la reificación no se lleva a cabo sin un intento de interiorización de alto nivel; por otro lado, es indispensable para la reificación la existencia de objetos sobre los que ejecutar procesos de alto nivel – sin tales objetos los procesos aparecen carentes de sentido" (p. 31). De ese modo, para que se produzca la reificación un individuo ha de ejecutar procesos de alto nivel con un concepto matemático que previamente requiere de procesos de bajo nivel; así, los procesos de bajo nivel son previos a los de alto nivel. Sin embargo, los procesos de alto nivel justifican la necesidad de consolidar la manipulación de procesos de bajo nivel, por lo que los procesos de alto nivel se manifiestan previos a los de bajo nivel. Esta aparente discrepancia entre las dos condiciones que parecen necesarias para el nacimiento de un nuevo concepto matemático (Sfard y Linchevski, 1994) deja clara la necesidad de una concepción tanto operacional como estructural de los objetos matemáticos.

### I 1.4 La teoría de Piaget

La teoría de Piaget se basa en la idea de que el individuo construye su propio conocimiento del mundo; "las estructuras cognitivas se construyen desde el principio y sufren sistemáticamente modificaciones de creciente diferenciación e integración jerárquica" (Dubinsky y Lewin, 1986, p. 59); por ello es un constructivismo genético. Hay dos conceptos que juegan un papel central en la teoría de Piaget: la equilibración y la abstracción reflexiva.

La equilibración es "el principio organizador del desarrollo cognitivo" (Dubinsky y Lewin, 1986, p. 60). Consiste en una serie de acciones cognitivas que lleva a cabo el individuo cuando trata de comprender un nuevo paquete de información que recibe su sistema cognitivo. Esta nueva información produce un desequilibrio en el sistema cognitivo ante el cual el sujeto trata de *re-equilibrarlo* a través del proceso de *asimilación*. Así, el individuo aplica a esta nueva información operaciones cognitivas que ya han sido previamente construidas. En general, el nuevo conocimiento ofrece resistencia a este proceso de asimilación y provoca en el individuo la modificación de sus estructuras cognitivas hasta que concluya esta resistencia. Entonces se produce el proceso de *acomodación*; "llegado a este punto, el individuo ha comprendido el nuevo conocimiento y su sistema cognitivo se ha re-equilibrado a través de la reorganización y re-construcción de sus estructuras cognitivas" (p. 60). En toda adquisición de nuevo conocimiento, siempre se dan los procesos de asimilación y acomodación, pero con mayor o menor éxito dependiendo de diversos factores, como la estructura cognitiva existente en el individuo o el modo en que percibe el nuevo conocimiento.

La abstracción reflexiva es la forma más interesante y poderosa del proceso de equilibración, con la que Piaget "describe la construcción de estructuras lógico-matemáticas de un individuo durante el transcurso del desarrollo cognitivo" (Dubinsky, 1991, p. 95). Para Dubinsky y Lewin (1986) consiste en la construcción progresiva de estructuras cognitivas "a través de la interacción con alimentos cognitivos[2] y la re-construcción progresiva debida a continuas interacciones con alimentos cognitivos posteriores" (p. 59).

Piaget distinguió otros dos tipos de abstracción: la abstracción empírica, que produce conocimiento a partir de las propiedades del objeto; y la abstracción pseudo-empírica, por la que se obtienen propiedades que las acciones del individuo han introducido en el objeto. Los tres tipos de abstracciones son el resultado de construcciones internas del individuo. Sin embargo, mientras en la abstracción empírica las experiencias son externas al individuo, en la abstracción pseudo-empírica el conocimiento parte del objeto pero las relaciones que se establecen son el resultado de acciones internas al individuo; en la abstracción reflexiva la fuente del conocimiento es totalmente interna al individuo. Estos tres tipos de abstracción no son independientes, sino que más bien se apoyan unos en otros. Dubinsky (1991) sintetiza esta idea afirmando que:

> La abstracción empírica y pseudo-empírica extraen el conocimiento desde el objeto ejecutando (o imaginando) acciones sobre él. La abstracción reflexiva interioriza y coordina esas acciones para generar nuevas acciones y, en última instancia, nuevos objetos (que ya no son físicos sino matemáticos, como una función o un grupo). Entonces, la abstracción empírica extrae datos de esos nuevos objetos a través de acciones mentales sobre ellos, y así sucesivamente. (p. 98)

Existen diversas formas de abstracción reflexiva. La *generalización,* o extensión, es el equivalente a la abstracción empírica con objetos cognitivos. Ocurre cuando el individuo

[2] Dubinsky y Lewin (1986) se refieren con el término *alimento cognitivo* a las estructuras cognitivas que posee un individuo (sujeto epistémico) y que utiliza conscientemente para la adquisición de nuevo conocimiento.

se da cuenta de que un nuevo conocimiento posee ciertos atributos comunes a otros conocimientos que ya posee y puede aplicarle estructuras cognitivas ya existentes. Otra forma de abstracción reflexiva es la coordinación de dos o más estructuras existentes para dar lugar a otra nueva estructura. Pero la forma de abstracción reflexiva más importante es la *encapsulación*. Ocurre cuando el individuo es capaz de percibir una colección de conocimientos como un todo estructurado. Este proceso lleva tiempo y no todos los individuos llegan a experimentarlo (Dubinsky y Lewin, 1986).

## I 1.5 La teoría APOS

El modelo teórico conocido con las siglas APOS (Action, Process, Object, Schema) es una adaptación de la teoría piagetiana al aprendizaje de la matemática avanzada.

Para Dubinsky y McDonald (2001), un modelo teórico en el área de investigación en didáctica de las matemáticas ha de poseer las siguientes características: tener capacidad de predicción y de ser explicativo; debe ser aplicable a una extensa gama de problemas; ha de ayudar a organizar lo que uno piensa sobre fenómenos complejos interrelacionados; ha de servir de herramienta para organizar la información y ha de proporcionar un lenguaje para comunicar ideas sobre el aprendizaje que vaya más allá de descripciones superficiales. La teoría APOS posee estas seis características y en este apartado se dará muestra de ello.

En la teoría APOS, el foco de atención se centra en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en niveles superiores de enseñanza, por lo que sus objetivos tratan de responder a interrogantes tan diversos como ¿qué dificultades se encuentran los estudiantes en el proceso de aprendizaje?, ¿qué mecanismos ayudan a superar esas dificultades?, ¿cómo comprenden un tópico matemático determinado?, o ¿qué tipo de instrucción puede favorecer la construcción de esquemas mentales apropiados?

### I 1.5.1 *Elementos de la teoría APOS*

Esta teoría parte de la hipótesis de que “el conocimiento matemático de un individuo consiste en el modo en que se enfrenta a las situaciones-problema matemáticos, construyendo acciones, procesos y objetos mentales y organizándolos en esquemas para dar sentido a las situaciones y resolver los problemas” (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 276). El texto de Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas (1996) proporciona una detallada descripción de esta metodología que comprende un ciclo de tres pasos: un análisis teórico del concepto matemático objeto de estudio, el diseño e implementación de una instrucción basada en el análisis teórico, y la recogida y el análisis de datos cuyos resultados aportarán detalles al análisis teórico y posiblemente harán que se modifique la instrucción. Así, se vuelve a llevar a cabo otro ciclo hasta que el investigador considere que se ha depurado suficientemente la teoría.

**Descomposición genética**

El primer paso consiste en un análisis teórico del concepto que se pretende investigar, que incluye un análisis histórico del desarrollo del tópico matemático, y está influenciado por las concepciones del investigador o investigadores y de su experiencia como estudiante y como docente. El objetivo de este análisis es describir “las construcciones mentales específicas que un estudiante debería desarrollar para la comprensión del concepto” (Asiala y otros, 1996, p. 7). El análisis teórico concluye en una descomposición genética de dicho concepto que, según estos autores, es “un conjunto estructurado de construcciones mentales que podría describir cómo el concepto se puede desarrollar en la mente de un individuo” (p. 7). La descomposición genética no es única, ya que depende de la formación y la experiencia del investigador en el aprendizaje y la enseñanza del concepto matemático; además, no es estática ya que la información que aporta el análisis de los datos puede hacer que sufra modificaciones.

Las construcciones mentales que elabora un estudiante, consisten en acciones, procesos, objetos y esquemas (Action, Process, Object, Schema).

Las acciones son transformaciones de objetos que se perciben por el individuo como algo que es, en cierta medida, externo. La construcción de acciones, es el primer objetivo de la instrucción. Las acciones, se interiorizan en procesos cuando se repiten y el alumno reflexiona sobre ellas. El individuo, percibe un proceso como algo interno a él. Los procesos, se encapsulan en objetos cuando se perciben como una totalidad sobre la que se realizan transformaciones. Este paso de encapsular procesos en objetos, suele resultar muy complicado, y sólo unos pocos llegan a él. Para Asiala y otros (1996), “el esquema de un individuo, es la totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) a un tópico matemático particular” (p. 12); resulta de organizar estructuradamente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Cuando el individuo trata al esquema como un objeto en sí mismo, se dice que ha tematizado el esquema.

**Ciclo de enseñanza *ACE***

El segundo paso utiliza la descomposición genética para diseñar e implementar una unidad didáctica cuyo principal objetivo es que el alumno construya el modelo cognitivo propuesto en el análisis teórico.

Dubinsky (1991) apela a que el aprendizaje “involucra aplicar la abstracción reflexiva a esquemas existentes a fin de construir nuevos esquemas para comprender los conceptos” (p. 120), y a la necesidad de que esta construcción sea activa para el individuo, para justificar la discordancia entre la enseñanza tradicional y las necesidades docentes de un aprendizaje significativo. Dubinsky critica, principalmente, la falta de atención a los esquemas que ha de poseer un individuo y sobre los cuales se construyen nuevos esquemas, la ausencia de un aprendizaje activo y el uso de ejemplos repetitivos.

El aprendizaje, como proceso de construcción del conocimiento, no se puede derivar de prácticas como la imitación, la memorización y la transmisión verbal de los contenidos. Además, Dubinsky cuestiona la utilización de ejemplos repetitivos sin que el profesor preste atención a las estructuras cognitivas que posee el individuo. Así, si un estudiante ha construido un esquema incorrecto, los ejemplos repetitivos harán que este esquema se refuerce alzando una barrera de concepciones erróneas que cada vez será más difícil de franquear. Tall (1986), propone la utilización de *ejemplos genéricos* que sean “representativos de toda una clase de ejemplos que plasmen una propiedad general” (p. 5) y que favorezcan el proceso de abstracción. En este sentido, es muy importante que el profesor preste atención a los esquemas que están construyendo sus estudiantes, y que detecte y clasifique los errores que comenten para diseñar una estrategia que guíe a los estudiantes en la construcción de esquemas mentales apropiados.

En contraste con la tradicional organización secuencial de los contenidos, el grupo de investigación RUMEC propone lo que denominan un *holistic spray* que consiste en introducir al estudiante en un entorno desequilibrado; cada estudiante, o grupo de estudiantes, construye su conocimiento al tratar de dar sentido a la situación-problema. Esta técnica se basa en la idea de que cada individuo utiliza distintas partes de su conocimiento en diferentes situaciones, de modo que no siempre es capaz de utilizar todas las construcciones mentales que posee. Puesto que el desarrollo de la comprensión de un individuo no es lineal, tampoco debe serlo la instrucción que le conduzca a aumentar su comprensión sobre un tópico determinado. Además, proponen que los estudiantes trabajen en grupos colaborativos de modo que se favorezca la reflexión sobre lo que están aprendiendo.

Para implementar la propuesta teórica, el grupo RUMEC desarrolló el ciclo de enseñanza *ACE*: actividades, discusiones en clase y ejercicios (Asiala y otros, 1996). En un aula de informática, se realizan actividades que requieren la programación con el ordenador y pretenden favorecer las construcciones mentales que surgen tras el análisis teórico. Aunque pueden implicar un elemento de descubrimiento, el principal objetivo es proporcionar un entorno que facilite la experimentación. Después, se discute en la clase las actividades realizadas con lápiz y papel basadas en las practicadas con el ordenador. El objetivo de esta puesta en común, es que el alumno reflexione sobre lo que ha hecho y que el profesor aporte definiciones y explicaciones que relacionen los conocimientos que los estudiantes están construyendo. Por último, se proponen ejercicios tradicionales que el estudiante ha de resolver como tareas para casa, de modo que con ellos refuerce el conocimiento que ha construido en el aula. Como se ha mencionado anteriormente, este ciclo instructivo se realiza en un ambiente de trabajo cooperativo, que favorece la reflexión del individuo en los procedimientos que realiza.

En este ciclo el ordenador juega un papel esencial, ya que se utiliza como un recurso que favorece la abstracción reflexiva mediante la programación. En general, la implementación de un proceso en el ordenador conlleva la interiorización de dicho proceso; cuando el estudiante manipula ese proceso como un objeto sobre el cual se pueden ejecutar operaciones, se produce la encapsulación del proceso en un objeto. Para evitar que el lenguaje de programación genere dificultades añadidas a las propias del tópico en cuestión, el grupo RUMEC utiliza el lenguaje de programación ISETL cuyo diseño está fundamentado en los conceptos matemáticos. Así, posee una sintaxis tan cercana a la notación matemática que, además de resultar familiar al profesor, minimiza las dificultades propias de un lenguaje de programación de alto nivel (Dubinsky, 1995).

Para completar el proceso de instrucción, el grupo ha editado libros de texto basados en el enfoque constructivista en el que se apoya la teoría APOS, y con los que se impulsa al estudiante a descubrir las ideas matemáticas que conducen a la resolución de los problemas. Los libros de texto tradicionales no cumplen las expectativas creadas por este marco teórico ya que evitan el desequilibrio necesario para que el estudiante construya su conocimiento. La contrapartida de estos textos, es que no son buenos libros de consulta ya que están diseñados expresamente para el aprendizaje.

**Recogida y análisis de los datos**

La recogida de datos y su posterior análisis tiene como fin contestar a dos tipos diferentes de cuestiones. Por un lado, conocer cómo los estudiantes han construido su conocimiento respecto al modelo planteado en el análisis teórico puede aportar información que modifique dicho modelo, mejorando así su poder descriptivo y su capacidad de predicción. Además, del análisis del impacto de la instrucción en el aula se derivarán modificaciones en la misma que favorezcan las construcciones mentales que ha de adquirir el estudiante. En este caso, se completaría el ciclo que volvería a repetirse con las modificaciones del modelo teórico inicial y de la instrucción, que de nuevo se llevaría al aula para analizar su impacto. Este ciclo continúa hasta que el investigador considere que ha depurado la teoría y el proceso de instrucción.

Por otro lado, este análisis ha de dar respuesta a algunas de las preguntas que se plantean en las investigaciones en didáctica de las matemáticas y para las cuales se ha desarrollado este marco teórico: ¿cómo aprenden nuestros estudiantes?, ¿qué tipo de instrucción puede favorecer la construcción de esquemas mentales apropiados?, ¿qué dificultades se encuentran en el proceso de aprendizaje?, o ¿qué mecanismos ayudan a superar esas dificultades?

### I 1.5.2 *El mecanismo de la triada*

En 1997, Clark, Cordero, Cottrill, Czarnocha, DeVries, St. John, Tolias y Vidakovic publicaron un trabajo de investigación dentro del grupo de investigación RUMEC relativo a la comprensión de la regla de la cadena y sus aplicaciones. Siguiendo el marco teórico propuesto por la teoría APOS, propusieron una primera descomposición genética, implementaron una instrucción según el ciclo ACE y recopilaron datos cuyo análisis debía responder a tres cuestiones: ¿cómo construyen los estudiantes su comprensión de la regla de la cadena?, ¿qué componentes conceptuales son necesarias para construir el concepto de la regla de la cadena?, y ¿cómo reconocen y aplican los estudiantes la regla de la cadena en diferentes situaciones matemáticas?.

En la fase de análisis, se dieron cuenta de que los elementos de esta teoría (acciones, procesos y objetos) eran insuficientes para describir cómo comprendían los estudiantes la regla de la cadena. La descomposición genética que plantearon en un principio era incompleta, ya que era necesario describir las relaciones entre otros esquemas como, por ejemplo, la regla de potenciación. Motivados por esa falta de elementos que les permitiera describir cómo los estudiantes construían su conocimiento relativo a la regla de la cadena, introdujeron el mecanismo de la triada. Éste consiste en definir tres estados en el "desarrollo de las conexiones que el individuo puede realizar entre conceptos particulares dentro del esquema, así como la coherencia de esas conexiones" (Dubinsky y McDonald, 2001, p. 7). Cada uno de los tres niveles de desarrollo, el nivel *Intra*, *Inter* y *Trans*, se caracteriza por "el grado de construcción de relaciones entre los elementos constitutivos del esquema" (Trigueros, 2003, p. 6). El nivel Intra, se caracteriza por la falta de conexión entre acciones, procesos u objetos de la misma naturaleza. En el nivel Inter, el individuo establece relaciones entre los elementos cognitivos y en el nivel Trans el esquema adquiere coherencia, de modo que el individuo puede decidir qué está dentro y qué está fuera del esquema. Llegado a este punto, el individuo puede tematizar el esquema.

A partir del trabajo de Clark y otros (1997), diversas investigaciones, como Sánchez-Matamoros (2004), Trigueros (2003), Baker, Cooley, y Trigueros (2000), o McDonald, Mathews, y Strobel (2000), han incorporado el mecanismo de la triada para describir cómo los estudiantes construyen el conocimiento de un tópico matemático.

El trabajo de Sánchez-Matamoros (2004) plantea una variación del mecanismo de la triada propuesto por Clark y otros (1997). El principal objetivo de la investigación era el de caracterizar la comprensión/construcción del objeto *derivada* por parte del estudiante, es decir, su nivel de desarrollo del esquema. Para ello, se centra en los elementos matemáticos que aparecen (analíticos y gráficos) y en el tipo de relaciones que se establecen entre ellos (relaciones lógicas: conjunción, contra recíproco, y equivalencia). En la fase de análisis observó que, tras asignar a cada estudiante en un nivel, existían diferencias dentro de cada nivel, debido al número de elementos matemáticos que los estudiantes son capaces de usar y al número y tipo de las relaciones establecidas. Así, había alumnos en un mismo nivel de desarrollo que mostraban más riquezas en las relaciones sin que se pudieran considerar en un nivel más avanzado de comprensión. Esto le llevó a la definición de subniveles (*Intra 1* e *Inter 1*) que mostraban el carácter progresivo de la construcción del esquema. Con los cinco niveles, *Intra 1*, *Intra*, *Inter 1*, *Inter* y *Trans*, consiguió una mayor diferenciación de los niveles de comprensión que se tradujo en una mejor caracterización de la construcción del concepto de derivada por parte de los estudiantes.

### I 1.5.3 *Los procesos iterativos infinitos*

Brown, McDonald, y Weller (2008) consideran que un proceso iterativo infinito consiste en aplicar infinitamente la repetición "de una transformación de objetos mentales o físicos, que involucra uno o más parámetros que se modifican en cada repetición" (p. 118). Según estos autores, un proceso iterativo infinito es un tipo de construcción mental que se ajusta a lo que en la teoría APOS se entiende por proceso, y consideran que "se conceptualiza como resultado de coordinar un proceso de iteración *a través* del conjunto de los números naturales con una transformación que se puede aplicar repetidamente" (p. 125).

Por tanto, aparecen dos esquemas, el de la iteración a través de los números naturales, $\mathbb{N}$, y el de la transformación que, en general, se manifestará a través de una operación matemática. "La descripción teórica de iteración a través de $\mathbb{N}$ se utiliza como parte de la descripción de la conceptualización de un proceso iterativo infinito que obtiene una secuencia de objetos, y de la encapsulación de ese proceso” (p. 126). Estos autores proponen la siguiente descripción de las concepciones acción, proceso y objeto de estos dos esquemas:

Comprensión acción de la iteración a través de ℕ: un individuo manifiesta una concepción acción de iteración a través de ℕ cuando

> se refiere explícitamente a avanzar a través de un segmento de ℕ, normalmente escribiendo o hablando de los valores que toma la secuencia. El individuo se puede referir a añadir repetidamente 1, o usar terminología que sugiera pasar de un número natural a su sucesor. (p. 125)

Comprensión proceso de la iteración a través de ℕ: un individuo manifiesta una concepción proceso de iteración a través de ℕ cuando

> la acción de iteración finita a través de un segmento de ℕ se interioriza en un proceso mental de iteración a través de cualquier segmento finito de ℕ; se coordinan múltiples casos de iteraciones finitas, aunque no necesariamente la inicial, para construir un proceso infinito completo de iteración a través de ℕ. Tener conciencia de que cada número natural se ha alcanzado, y admitir que sólo se pueden tomar números naturales, indican que el individuo puede concebir el proceso como completado. (p. 125)

Comprensión objeto de la iteración a través de ℕ: un individuo manifiesta una concepción objeto de iteración a través de ℕ cuando

> una vez que se ve como una totalidad (es decir, como una sola operación que se sobreentiende que consiste únicamente en alcanzar cada natural en orden), el proceso de iteración infinita se puede encapsular cuando el individuo intenta aplicar una operación de evaluación para determinar qué es “lo siguiente”. El objeto resultante tradicionalmente se denota con $\infty$. Este objeto se puede ver como un valor de la variable de iteración que va más allá de los naturales, pero se debe sobreentender que este objeto no se obtiene en el proceso de iteración a través de ℕ. (p. 126)

Comprensión acción de proceso iterativo infinito: un individuo manifiesta una concepción acción de proceso iterativo infinito cuando

> ejecuta un pequeño número de transformaciones. Un individuo, por ejemplo, puede percibir la presencia de una variable índice en la notación matemática dada como la indicación de comenzar $k = 1$, obtener el primer objeto utilizando la transformación, añadir 1 para tener $k = 2$, obtener el segundo objeto, y así sucesivamente. (p. 126)

Comprensión proceso de proceso iterativo infinito: un individuo manifiesta una concepción proceso de proceso iterativo infinito cuando

> la acción de iteraciones finitas se interiorizan en un proceso mental de iteración finita coordinando un proceso de iteración a través de un segmento finito de ℕ con una transformación que se puede aplicar repetidas veces. Posteriormente, se coordinan múltiples representaciones de este proceso mental (es decir, utilizando la misma

> transformación pero avanzando a través de diferentes segmentos finitos de ℕ), para construir un proceso mental infinito, al cual podemos llamar proceso infinito iterativo. Con el proceso iterativo infinito se logra una secuencia de objetos (infinita contable). El individuo entiende que un objeto se obtiene para cada número natural en orden, y esos objetos se obtienen sólo para números naturales. (p. 126)

Comprensión objeto de proceso iterativo infinito: un individuo manifiesta una concepción objeto de proceso iterativo infinito cuando

> una vez que se ve como una totalidad (es decir, como una sola operación que asocia un objeto a cada natural en orden), el proceso de iteración infinita se puede encapsular en respuesta a un intento de realizar una acción de evaluación. El objeto resultante es un estado en el ∞. Se sobreentiende que este objeto va más allá de los objetos que se corresponden con los números naturales y así no es el resultado directo del proceso. Llamamos a este objeto un objeto trascendente para el proceso. (p. 126)

Existe una sutil distinción entre haber construido completamente un proceso infinito y verlo como una totalidad: en el primer caso, el individuo puede imaginar cómo realizar cada paso y qué se obtendrá en cada paso; en el segundo caso, el individuo se da cuenta de que el proceso consiste en una sola transformación que se puede aplicar en ese momento. De acuerdo con la teoría APOS, ver el proceso como una totalidad forma parte de la encapsulación de un proceso en un objeto que ocurre cuando se lleva a cabo una acción, en este caso una acción de evaluar.

En el caso de las series numéricas convergentes, el objeto trascendente (la suma de la serie) es finito. Los autores se cuestionan si en este caso aparecerán el mismo tipo de construcciones y surgirán el mismo tipo de cuestiones.

## I 2 ENTORNO COMPUTACIONAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Hace más de veinte años, se comenzaron a introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Primero fueron las calculadoras, después las calculadoras gráficas y, en los últimos años, software de cálculo simbólico ejecutado en un ordenador personal. Se han realizado muchas investigaciones en didáctica de las matemáticas en las que se introduce un entorno de trabajo con ordenadores para aprovechar las ventajas que ofrece, sin olvidar las dificultades adicionales que originan. Otras investigaciones, se centran en estudiar el impacto de este nuevo entorno en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Los tópicos matemáticos en los que se centran las investigaciones son variados, desde la geometría hasta el cálculo, pasando por el álgebra y la aritmética.

Existen dos marcos teóricos principales que determinan el paradigma en el que se desarrollan las investigaciones, el constructivista y el instrumental. Si bien los dos tienen como objetivo común mejorar la enseñanza y el aprendizaje de distintos tópicos matemáticos, discrepan en el modo de llevar a cabo esta mejora.

El punto principal de discrepancia de estos dos enfoques es el valor otorgado al trabajo técnico. Bajo el enfoque instrumental, se piensa que nuestra forma de interactuar con los objetos matemáticos está determinada y expresada a través de tareas y técnicas que le dan forma y valor, y del discurso técnico y teórico circundante. Este enfoque se apoya en la teoría antropológica de Chevallard, que le permite integrar la dimensión institucional y defiende el papel de las técnicas y los instrumentos como mediadores del conocimiento matemático. El enfoque constructivista, centra su atención en el aspecto cognitivo del aprendizaje y no otorga el mismo valor al trabajo técnico, que está asociado a la automatización de tareas y esto, en ocasiones, a la falta de comprensión.

Así, mientras que la teoría antropológica sostiene que el conocimiento avanza con la automatización de tareas y técnicas, el enfoque constructivista mira con recelo los automatismos que pueden encubrir una falta de comprensión. Desde la perspectiva constructivista, el conocimiento matemático se forja desarrollando destrezas cognitivas como la intuición, la interiorización y la abstracción.

Por otro lado, estos dos paradigmas tienen en común el interés por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, a la vez que utilizan la noción de esquema que introdujo Piaget. Desde el constructivismo, el esquema de un individuo es la totalidad del conocimiento que para él está conectado (consciente o inconsciente) con un tópico matemático particular (Asiala y otros, 1996); resulta de organizar estructuradamente la colección de objetos, procesos y acciones que el individuo posee. Desde la instrumentalización, es “la organización invariante de conductas para una clase de situaciones dada” (Vergnaud, citado en Guin y Trouche, 2002, p. 205); tiene tres funciones principales: una función pragmática (permite al sujeto hacer algo), una función heurística (permite al sujeto anticipar y planear acciones) y una función epistémica (permite al sujeto entender algo).

En una posición moderadora, en cuanto al uso de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas, Buchberger (2003) propone el principio de caja blanca/caja negra que proclama un uso comedido del ordenador según la fase de aprendizaje del tópico en la que se encuentre el estudiante. La idea que subyace en este principio es secundada por diversos autores que comparten la utilización del ordenador en el aula de forma controlada. Dana-Picard y Steiner (2003) sostienen que el alumno ha de utilizar comandos de bajo nivel para fomentar la creatividad; cuando se ha superado la comprensión del concepto en cuestión, se pueden utilizar comandos de alto nivel para realizar cálculos que ya han sido interiorizados.

La revisión bibliográfica que se expone en las siguientes secciones, revela que las investigaciones en didáctica de las matemáticas y nuevas tecnologías tratan de responder a preguntas del tipo: ¿cómo utilizar las nuevas tecnologías para enseñar matemáticas?, ¿qué tópicos matemáticos se pueden enseñar en este nuevo entorno?, ¿hay que modificar el currículo, y si es así, cómo?, ¿cuáles son las actitudes de los alumnos hacia el uso de las nuevas tecnologías?... A pesar de que las investigaciones aportan soluciones parciales sobre ciertos tópicos concretos, estas preguntas quedan abiertas. Al margen del marco teórico sobre el que se desarrollen las investigaciones, y de las preguntas que se planteen, existen ciertas reflexiones que se repiten en muchas de ellas. Algunas de estas reflexiones comunes referentes a la utilización de nuevas tecnologías en el aula son:

- ✓ Sin una buena planificación, los efectos son negativos.
- ✓ No es la panacea a los problemas de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.
- ✓ Requieren un cambio profundo en la enseñanza.
- ✓ Existen ciertas ventajas e inconvenientes que se manifiestan en algunos entornos, en concreto con calculadoras gráficas y con el uso de software específico en ordenadores personales.
- ✓ Existe una resistencia social e institucional al empleo de nuevas tecnologías en el aula.
- ✓ ¿Están preparados los profesores para los cambios que se avecinan al introducir nuevas tecnologías en el aula?
- ✓ Hace más compleja la tarea del alumno y del profesor, ya que el manejo correcto del nuevo entorno demanda un aprendizaje por parte de ambos.
- ✓ Requiere una renovación de los recursos pedagógicos.
- ✓ Las nuevas tecnologías, junto con el trabajo cooperativo, mejoran el aprendizaje.

Heid (2003) afirma que "la tecnología puede afectar al aprendizaje de los alumnos, a la interacción profesor-alumno, al acceso de los alumnos a las ideas matemáticas y a la naturaleza de la enseñanza de las matemáticas". Siendo así, es necesario prestar atención a los resultados de las investigaciones de los dos enfoques teóricos comentados anteriormente, el instrumental y el constructivista.

### I 2.1 Enfoque instrumental

En los años 80, se produce en Francia un movimiento para introducir nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Una década después, el equipo de investigación al que pertenece Artigue, se incorpora a una iniciativa del Ministerio de Educación para reflexionar sobre el potencial de los sistemas de cálculo simbólico en la enseñanza de las matemáticas a nivel de secundaria. Con el software Derive, se lleva a cabo una investigación en la que se trabaja a partir del enfoque antropológico desarrollado por Chevallard. La elección de este marco teórico se debe fundamentalmente a dos motivos. Según Artigue (1997), por un lado permite trabajar la dimensión social e institucional de la integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática, frente al análisis epistemológico y cognitivo que más impera. Por otro lado, ayuda a reflexionar sobre la dimensión técnica e instrumental del trabajo matemático, que en análisis más conceptuales quedan en un segundo plano. "Para Y. Chevallard, los objetos matemáticos no existen por sí mismos, sino que emergen de sistemas de prácticas, prácticas que son necesariamente las prácticas institucionales, en el sentido amplio que se da a este término en la teoría" (p. 138).

Este paradigma concierne a la complejidad de la relación entre el trabajo técnico y el conceptual. Desde este modelo, no se pueden tener en cuenta estos problemas sin considerar el contexto institucional, las restricciones que impone y las potencialidades que ofrece a la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En palabras de Artigue, la evolución tecnológica provoca un cambio en las necesidades matemáticas de las técnicas, que no se puede identificar fácilmente si no se le da la importancia debida al trabajo técnico. Estas necesidades, surgen ligadas a la implementación en el ordenador del conocimiento matemático y asociadas a la evolución de las representaciones semióticas. El enfoque antropológico proporciona un marco adecuado para cuestionarse este tipo de cambios y sus posibles efectos en la enseñanza y el aprendizaje (Artigue, 2001).

Desde la perspectiva del enfoque antropológico,

> los objetos matemáticos (…) son entidades que surgen de la práctica en una institución dada.
>
> Estas prácticas o *praxeologías*, como las llama Chevallard, se describen en términos de tareas que contienen los objetos, en términos de técnicas utilizadas para resolver esas tareas y en términos de un discurso que explica ambas y justifica las técnicas. Y. Chevallard distingue dos niveles en ese discurso: el tecnológico y el teórico (…).
>
> Analizar la vida de un objeto matemático en una institución, entender el significado en la institución del "conocimiento/comprensión de un objeto", es identificar las praxeologías que entran en juego. En este punto, juegan un papel esencial las *técnicas*. (Artigue, 2001, p. 3)

Guin y Trouche (2002) definen una técnica como un "conjunto de gestos, o acciones, construidos por el sujeto para llevar a cabo una tarea dada" (Lagrange, citado en Guin y Trouche, 2002, p. 206). Es un modo de "resolver una tarea, (…) un complejo engranaje de razonamientos y de subtareas rutinarias" (Artigue, 2001, p. 3), que tienen un valor pragmático y epistémico que al cambiar por ser instrumentadas por el ordenador, hace que estos valores cambien. Por otro lado, un gesto es un "componente elemental de la actividad que puede tener diversas funciones. Para comprender su función, no se puede considerar de manera aislada, sino dentro de la actividad efectuada por el estudiante para conseguir la tarea planteada" (Touche, citado en Guin y Trouche, 2002, p. 206). Lagrange (2000) utiliza el término *geste* en su sentido etimológico de acción finalizada. En un entorno tecnológico, muchas veces se llevan a cabo con la ejecución de un comando, mientras que en un entorno no tecnológico, con el lápiz y el papel. Una técnica posee un valor pragmático, el que le permite producir resultados, y un valor epistémico relativo al modo en el que contribuye a comprender los objetos que involucra (Artigue, 2001).

El elemento clave de este paradigma es la génesis instrumental que Trouche (2003), define como "un proceso complejo, que requiere tiempo y conexiona las características de la herramienta (sus potencialidades y sus restricciones) y la actividad del individuo, su conocimiento, formando un método de trabajo" (p. 5). Mediante el proceso de la génesis instrumental, un artefacto se convierte en un instrumento mediante la generación de una construcción de esquemas personales, o más frecuentemente, una apropiación de esquemas sociales preexistentes. Según esta teoría, un instrumento consta de dos partes, una material o simbólica, el artefacto, y otra psicológica, el esquema, que hace de este artefacto un instrumento. La noción de esquema fue introducida por Piaget, y en este enfoque la redefine Vergnaud como “la organización invariante de conductas para una clase de situaciones dada” (citado en Guin y Trouche, 2002, p. 205). Para entender su función y dinamismo, se deben considerar todos sus componentes: el objetivo y la anticipación, las reglas de acción, de información creciente, de toma de control y de invariantes operativos. Estos últimos, son el conocimiento implícito contenido en los esquemas que guían las actividades; pueden ser de dos tipos, concepto-en-actos y teorema-en-actos, que son conceptos o proposiciones aceptados implícitamente como verdaderos y forman parte de los esquemas de acción instrumentada. Como se citó anteriormente, un esquema tiene tres funciones principales: una función pragmática (permite al agente hacer algo), una función heurística (permite al agente anticipar y planear acciones) y una función cognitiva (permite al agente entender algo) (Trouche, 2003).

A continuación, se comentan algunos trabajos relevantes que tratan de investigaciones bajo este paradigma instrumental.

Artigue (1997) introduce los fundamentos teóricos del enfoque instrumental para enmarcar una investigación en la que va a analizar la integración de entornos informáticos en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel de secundaria. Utiliza el software de cálculo simbólico Derive, del que, además de atribuirle el aumento de la motivación de los estudiantes, destaca otras ventajas como el facilitar la posibilidad de individualizar la enseñanza según las necesidades particulares de cada estudiante, permitir la “integración en el currículo de problemas más interesantes y más ricos que los problemas escolares usuales” (p. 142), y favorecer, de manera sencilla, el uso de un enfoque experimental.

En la misma investigación, establece algunos requisitos, a un nivel más cognitivo, que se esperan de esta herramienta informática: “favorecer un trabajo más reflexivo, estratégico y conceptual, al liberar al alumno del trabajo técnico” (p. 142); puede remediar, en cierta medida, las dificultades que tienen los estudiantes en cuestiones como los cálculos numéricos o el álgebra elemental;

> puede ayudar a desarrollar imágenes mentales, por las posibilidades que ofrece la visualización, y a mejorar la comprensión de la relación entre la formulación numérica, gráfica y algebraica, por la posibilidad del manejo conjunto de los tres enfoques; (…) en definitiva, puede compensar ciertos efectos negativos de las calculadoras en la concepción de número desarrollada por los alumnos, por la posibilidad que ofrece de cálculos exactos. (pp. 142-143)

Uno de los hechos relevantes de esta investigación, es el escaso número de profesores que utilizan el software Derive en sus clases, y los que lo utilizan, lo hacen con tan poca frecuencia, que no es suficiente para que el alumno se familiarice con el entorno. A este hecho, se le atribuyen restricciones materiales e institucionales, pero Artigue está convencida de que tienen que existir otras razones más profundas que la materiales, que justifiquen la lenta adaptación del sistema educativo a las nuevas tecnologías, ¡con lo rápido que avanzan!

Referente a los estudiantes, detecta cuatro posicionamientos respecto al software Derive. Muy minoritariamente, de rechazo; minoritariamente, de confianza ciega; mayoritariamente útil para calcular y verificar resultados y también minoritariamente, útil para el aprendizaje.

En la investigación que lleva a cabo, Artigue observa dos situaciones de distinta naturaleza: situaciones construidas en torno a Derive, en las se utiliza para un tópico matemático específico y "aparece como un elemento esencial de medida a-didáctica", y situaciones en las que Derive es "un elemento periférico más de medida a-didáctica, aparece como un instrumento de trabajo, a la disposición del alumno, que en general es libre para utilizarlo; esto hace aumentar la viabilidad y la productividad matemática de la situación" (p. 147).

Ligados a los mecanismos de transposición del saber, registra dos fenómenos didácticos: la pseudo-transparencia y la doble referencia. El fenómeno de pseudo-transparencia está ligado al desnivel existente entre lo que escribe el alumno y lo que muestra la pantalla; el de doble referencia, a la doble interpretación de las tareas dependiendo de si uno trabaja en un entorno de papel y lápiz o con un software de cálculo simbólico (Guin y Trouche, 2002).

En un trabajo posterior, Artigue (2001) hace hincapié en la compleja relación entre el trabajo técnico y la conceptualización. Identifica dos principios en los cuales el trabajo instrumentado mediante software de cálculo simbólico puede ofrecer una conceptualización, o más generalmente, una progresión del conocimiento matemático. Uno de ellos, es el poder de las técnicas instrumentales; describe un ejemplo en el que aparece la herramienta de cálculo simbólico como motor para la construcción de situaciones didácticas, permitiendo al profesor establecer una negociación y trabajar con sus alumnos. En entornos tradicionales, se sabe que esto es complicado de llevar a cabo. Artigue argumenta con este ejemplo que se ve compensada la reducción del valor epistémico por la mejora observada en los resultados. El segundo principio, es el nuevo potencial que ofrecen las herramientas de cálculo simbólico. Este principio es el más fácil de identificar y el que más está presente en la literatura. Las herramientas de cálculo simbólico permiten conexionar el trabajo gráfico con el simbólico, permitiendo al alumno probar simbólicamente las regularidades observadas gráficamente. Es interesante destacar que esto lo han utilizado en diversos proyectos de investigación autores como Lagrange, Trouche, o Drijvers.

Drijvers (2000, 2002) realiza un trabajo exhaustivo acerca de los obstáculos con los que se encuentran los estudiantes al recibir la instrucción en un entorno computacional. Todos los resultados y conclusiones, están condicionados por el marco teórico REM (Realistic Mathematics Education) en el que desarrolla la investigación. Este entorno se caracteriza por contextualizar los problemas con situaciones del mundo que rodea a los alumnos; dar oportunidad a los alumnos a que desarrollen sus propias técnicas, guiados por el profesor;

llevar a cabo una progresiva matematización, tanto horizontal (modelizar matemáticamente una situación problema y viceversa) como vertical (alcanzar un mayor nivel de abstracción matemática), a través de la reflexión; interactuar entre el profesor y los alumnos y entre alumnos, para impulsar la discusión y la cooperación, que juegan un papel importante en la reflexión; e impulsar la habilidad para interactuar entre distintos tópicos.

Destaca tres posibles beneficios del uso de sistemas de álgebra computacional:

- ✓ Matematización horizontal: al dejar de lado la parte puramente algorítmica, permite al alumno centrar su atención en la interpretación de los resultados.
- ✓ Exploración: permite descubrir, conjeturar, reflexionar,…
- ✓ Facilita la integración flexible de distintos sistemas de representación.

Aunque también advierte de los peligros más importantes:

- ✓ Herramienta top-down: ya está todo inventado, por lo que puede frustrar la motivación del alumno por construir o reinventar.
- ✓ Caja negra: el modo de operar de la herramienta informática es desconocido para el alumno.
- ✓ Idiosincrasia: cada herramienta tiene su propia sintaxis y un modo particular de visualizar los resultados que el alumno ha de conocer.

Los resultados referentes a los obstáculos que surgen cuando los estudiantes trabajan en un entorno computacional se tratan en la sección I 3.2 de esta memoria.

Relacionado con la utilización de herramientas tecnológicas en el aula, pero centrando el estudio en las calculadoras gráficas, Guin y Trouche (1999) analizan las restricciones y las ventajas del uso de la calculadora gráfica en el aula. Las restricciones son las que Trouche caracteriza en su trabajo de tesis doctoral: restricciones internas, restricciones de comandos y restricciones de organización.

- ✓ Las restricciones internas están “ligadas a la representación interna de los objetos y sus procesos de cálculo” (p. 203). A su vez se catalogan en aquellas cuya causa son las limitaciones inevitables de memoria, las debidas al también inevitable proceso de hacer discreto el trazo de un gráfico por las propiedades de la pantalla, y aquellas “ligadas a la coexistencia de distintos modos de cálculo” (p. 204), el exacto y el aproximado.
- ✓ Las restricciones de comandos están ligadas a las posibilidades de elección, por parte del usuario, de los comandos que han de ejecutarse. Es ineludible el conocimiento y la memorización de dichos comandos que, a pesar de la ayuda que facilitan las herramientas, suelen generar problemas. En contra de lo que normalmente se piensa acerca de la falta de reflexión asociada a la utilización de comandos, estos autores creen que las limitaciones propias de los comandos pueden generar situaciones en las que se produzca esta reflexión.

- ✓ Las restricciones de organización están “ligadas al acceso a los comandos y su organización” (p. 203).

En cuanto a las ventajas, destacan la posibilidad que ofrecen los nuevos entornos de trabajo para manipular los distintos enfoques gráfico, algebraico y de tablas, que fomentan el trabajo experimental. Estos cambios de registro, favorecen el descubrimiento de las propiedades invariantes de los conceptos matemáticos. Además, frente a los ordenadores personales, las calculadores gráficas ofrecen la ventaja de estar disponibles en cualquier momento, sin necesidad de acondicionar un aula con un ordenador de sobremesa para cada alumno, o de disponer en casa del software apropiado.

A parte de las restricciones mencionadas, hay que tener en cuenta los inconvenientes derivados del mal uso de las nuevas tecnologías. En esta investigación, en concreto, se menciona el bajo porcentaje de profesores que utilizan las calculadoras gráficas en sus clases. Esto no sólo no evita que el alumno las utilice, sino que provoca que el alumno *mal interprete* la información de las gráficas y le lleve a adoptar reglas incorrectas. Además, no hay que olvidar que los “efectos de la visualización pueden ser mucho más complejos de lo que habitualmente se considera. (…) [Ya que] la calculadora no es un instrumento matemático eficiente per se” (pp. 198-199), es necesario que el profesor intervenga para evitar este tipo de inconvenientes.

Guin y Trouche (2005) reiteran la importancia y la complejidad del papel que desarrolla el profesor en el proceso de enseñanza e instan a facilitar su labor mediante un programa de formación a distancia para dar soporte a los profesores que utilizan nuevas tecnologías en el aula. Con ello, se podría subsanar la falta de formación y de medios de que dispone el profesor para llevar al aula las herramientas de cálculo simbólico (calculadoras simbólicas o software para ordenadores personales).

Para que el profesor promueva la instrumentalización de las calculadoras gráficas, Guin y Trouche (1999) proponen tres sugerencias: desde el punto de vista institucional, dedicar más tiempo al trabajo exploratorio del alumno y disponer correctamente el mobiliario del aula; desde el punto de vista tecnológico, limitar el número de comandos introducidos en cada actividad, dedicar el tiempo suficiente al aprendizaje de los distintos registros, gráfico y numérico, relacionar los dos entornos en las actividades, proporcionar técnicas instrumentadas eficientes, y tener en cuenta el currículo oficial; desde el punto de vista psicológico, adaptar la instrucción a la capacidad de los alumnos y facilitar el trabajo experimental.

Lagrange (2000) reflexiona acerca de la manipulación algebraica y la comprensión, en la enseñanza tradicional y en la enseñanza que utiliza programas de cálculo simbólico. Afirma que,

> si la integración de un instrumento tecnológico tiende a reducir la dimensión técnica de la actividad matemática a un papel accesorio, no puede realmente contribuir a la adquisición de conceptos: los alumnos se van a encontrar con las trampas de la doble referencia y de la experimentación a ciegas. En contraposición, la consideración de

> técnicas es, junto con la instrumentalización, una de las claves que permiten pensar en la incorporación de la tecnología en la enseñanza. (p. 26)

En este trabajo, trata de contestar, principalmente, a dos cuestiones: una relacionada con las matemáticas experimentales, el papel de las nuevas tecnologías en su desarrollo y los problemas de su transposición en la enseñanza, y otra, a cómo varía la comprensión de los alumnos en ambientes tecnológicos y qué relaciones aparecen entre el trabajo técnico y el conceptual.

Describe dos características importantes de los lenguajes de cálculo simbólico tipo Derive, Maple o Mathemática, que afectan a la actividad matemática cuando se utilizan en el aula: la inmediatez de las acciones y el fenómeno de la doble referencia. Para Lagrange, la importancia de las acciones recae en su finalidad y la reflexión que puedan suscitar, más que en el comando concreto que se halla ejecutado o lo que se haya escrito con lápiz y papel. La rapidez con la que un ordenador ejecuta un comando, bien sea para calcular un límite, o para representar una gráfica, "no garantiza la productividad matemática que dará a la actividad un verdadero carácter 'experimental'" (p. 5). Por otro lado, la interacción con un software de cálculo simbólico implica para el estudiante lidiar con los significados matemáticos y a la vez con la lógica algorítmica del sistema informático. Para que el fenómeno de la doble referencia no tenga un efecto negativo en el aprendizaje, es necesaria la anticipación del profesor a este fenómeno, instruyendo a sus alumnos en el buen uso de la herramienta.

Recalca el aspecto positivo del uso de herramientas informáticas al evitar errores de cálculo y liberar al alumno de las tareas manipulativas. En contraposición, los cálculos a veces provocan una reflexión y una experimentación que las herramientas no siempre permiten que se lleven a cabo, y la utilización de herramientas de cálculo simbólico puede introducir errores debido a la sintaxis y a la semántica del software que se utilice.

También Trouche (2004) concluye algunas ventajas e inconvenientes acerca de la informatización de los entornos de aprendizaje. Por un lado, muestra las capacidades de un útil y de su puesta en marcha en un entorno dado, evidencia la importancia del tiempo en la construcción de un instrumento e infunde la necesidad de adecuar los entornos (orquestación instrumental) para asegurar la viabilidad de los útiles y su transformación en instrumentos. Por otro lado, hace más compleja la tarea del alumno y del profesor, ya que el nuevo entorno demanda un aprendizaje para su correcto manejo y requiere una renovación de los recursos pedagógicos.

### I 2.2 Enfoque constructivista

El trabajo de Piaget es el punto de partida de las investigaciones bajo el paradigma constructivista. Según esta escuela, el conocimiento de un individuo se construye con la encapsulación de procesos y acciones en objetos matemáticos. Se van a comentar dos corrientes en las que el ordenador juega un papel importante en el aprendizaje de la matemática, tanto es así, que en ambas se ha desarrollado un software específico para materializar sus teorías.

En los trabajos del grupo RUMEC, dentro del ciclo de enseñanza ACE (ver apartado I 1.5.1) el ordenador se utiliza como fuente de experiencia, a través de la programación, para favorecer las construcciones mentales que llevan al alumno a tematizar un esquema. Dentro de este grupo se ha desarrollado el lenguaje ISETL (Dubinsky, 1995) que es una adaptación del lenguaje de programación SETL de Jack Schwartz para la enseñanza de la matemática.

En la corriente de Tall y Gray, el ordenador juega el papel de herramienta en forma de organizador genérico y, según el caso, cibernético. El organizador genérico, ha de ayudar al alumno a conseguir experiencias que le proporcionen una estructura cognitiva sobre la que pueda construir conceptos abstractos. Así, con una secuencia diferente a la tradicional encapsulación por repetición de tareas hasta hacerlas rutinarias, se puede desarrollar un esquema conceptual más rico (Tall, 1993). Los entornos de aprendizaje basados en nuevas tecnologías, facilitan la exploración y la experimentación de un concepto antes de definirlo formalmente. Para obtener los beneficios que pueden aportar, es necesario un buen diseño de actividades, sin olvidar el papel del profesor como mediador y guía. Para ello, Tall (2000) propone el *principio de construcción selectiva* basado en el diseño de software que permita al estudiante centrar su foco de atención en la parte conceptual mientras el ordenador lleva a cabo, de manera oculta, la parte procedimental. Así, mientras que con un enfoque tradicional el alumno ha de familiarizarse con la parte rutinaria antes de conocer el concepto subyacente, con este enfoque, el ordenador realiza estas tareas rutinarias, permitiendo el contacto del alumno con el concepto antes, después o durante la fase procedimental (Tall, 1993). En su teoría, define los *organizadores genéricos* como entornos que permiten explorar ejemplos y contraejemplos de procesos o conceptos, mediante la ejecución de instrucciones que introduce el usuario a través de comandos. El organizador genérico se limita a realizar su labor de herramienta, dejando para el usuario la labor de control y el poder de decisión sobre la corrección de los resultados. Cuando un organizador genérico permite, además, programar acciones, se le llama *organizador cibernético* (Tall, 1990). La complejidad con la que el ordenador manipula internamente los proceptos, hace que se clasifiquen en tres tipos: operacionales, plantilla, o estructurales (Tall, 1995). Los operacionales requieren programar un algoritmo sencillo que los efectúe, mientras que los plantilla se manipulan de distinta forma según el contexto. Los estructurales, requieren de una programación más compleja, utilizando más algoritmos para su ejecución. Según esta clasificación, un procepto puede ser, por ejemplo, operacional para la máquina pero no para el estudiante.

Tanto en el entorno del grupo RUMEC como en el de Tall y Gray, el ordenador se utiliza como herramienta que facilita la construcción de esquemas mentales ricos; en el caso del paradigma RUMEC, apoyándose en una instrucción diseñada a partir de la descomposición genética del tópico matemático y aplicando el ciclo ACE; en la teoría del procepto, a través de la experimentación con ejemplos y contraejemplos.

A continuación, se comentan algunos trabajos relevantes que tratan de investigaciones bajo este paradigma constructivista.

Asiala y otros (1996), proponen un modelo de enseñanza que facilite la reflexión en los alumnos. Lo que pretenden es que el trabajo que lleven a cabo los alumnos con el ordenador les afecte a la mente, y esto ocurre de tres formas distintas:

- ✓ Fomentando construcciones mentales directamente, a través del diseño de tareas que incidan en las fases de la descomposición genética propuesta en el análisis teórico (ver apartado I 1.5.1). Para ello, se proponen a los alumnos la realización de pequeños programas para construir conceptos matemáticos a nivel de acción, interiorizar acciones en procesos, construir conceptos matemáticos a nivel de proceso, encapsular procesos en objetos, y finalmente construir esquemas.
- ✓ Proporcionando una *base de experiencia* para facilitar la abstracción.
- ✓ A través de efectos indirectos, como los observados en alguna experiencia en la que, tras la práctica con programas de cálculo simbólico, se percibe mayor riqueza en las respuestas de los alumnos y una evolución de la concepción acción a la concepción proceso.

En un trabajo antiguo, Ayers, Davis, Dubinsky, y Lewin (1988) realizaron un análisis comparativo entre un grupo que recibe la instrucción en un entorno informático con UNIX y un grupo de control con enseñanza tradicional, para el aprendizaje de la composición de funciones. Una de las conclusiones más relevantes de esta investigación, aparte de que no se haya observado desventaja en la manipulación algebraica por parte de los alumnos del grupo experimental, es el hecho de que el ordenador aporte un entorno en el que se favorece la abstracción reflexiva (en el sentido APOS), entre otros motivos, por la atracción que ejerce el entorno informático en los estudiantes.

También Breidenbach, Dubinsky, Hawks, y Nichols (1992) apoyan este resultado al observar una mejora en la comprensión de los estudiantes debida, en parte, al entorno de trabajo en el que se ha llevado a cabo la instrucción. Este entorno utiliza el lenguaje ISETL que, como se indicó anteriormente, ha sido diseñado con una sintaxis muy parecida a la notación matemática estándar para crear una herramienta sencilla de manejar.

La creación de este lenguaje se debe a Dubinsky (1995), que muestra con algunos ejemplos cómo la programación de código con este programa puede facilitar al alumno la construcción de acciones, procesos, y objetos relativos a un tópico matemático, y los procesos de interiorización y encapsulación.

Gray y Tall (1994) afirman que al realizar el ordenador la parte mecánica, el alumno puede concentrarse en los resultados y mejorar así su aprendizaje.

Para Mackie (2002) el ordenador es un medio, no un fin. Es una herramienta que ofrece al alumno un entorno de descubrimiento para construir su propio conocimiento. Advierte de los peligros que encierran las herramientas de cálculo simbólico por la pérdida de habilidades en la manipulación algebraica, que muchos matemáticos consideran fundamental para la comprensión de ciertos tópicos; pero también destaca cómo facilitan el desarrollo de una mejor comprensión de los conceptos matemáticos, al “cambiar el énfasis de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo desde las técnicas y la manipulación simbólica de rutinas hacia un nivel superior de destrezas cognitivas que se centran en los conceptos y la resolución de problemas" (p. 1). La característica de los sistemas de álgebra computacional de facilitar enfoques gráficos, analíticos y algebraicos de un tópico, destaca la ventaja que ofrecen para transferir el conocimiento aprendido de una tarea a otra y moverse entre distintas representaciones de objetos matemáticos, ambos claves indicadoras de la profundidad del aprendizaje y la comprensión conceptual.

Pero Mackie también advierte del peligro que entraña el conocimiento sólo parcial del entorno de la herramienta informática. Desde luego, sin el conocimiento del lenguaje de la herramienta y sin la comprensión del concepto matemático, se producen situaciones en las que la herramienta produce matemáticas sin sentido. Los errores de la sintaxis de la herramienta se pueden subsanar fácilmente si el alumno se da cuenta de que algo va mal, pero no siempre tiene el conocimiento necesario para ello.

Al igual que Dubinsky, también Tall (1990, 1993) diseñó un software que permite al estudiante centrar su foco de atención en la parte conceptual mientras el ordenador lleva a cabo, de manera oculta, la parte procedimental. En esto se basa el *principio de construcción selectiva* con el que, en un entorno computacional, se consigue una mejor formación del esquema conceptual debido a que este entorno facilita una secuencia didáctica distinta a la tradicional mecanización y encapsulación por repetición.

Para Tall (1990), los ordenadores son herramientas que han de utilizarse para "suplementar y complementar los procesos del pensamiento humano" (p. 55), siendo necesaria la intervención de profesor como mediador y guía en el proceso de aprendizaje (Tall, 2000) para obtener las capacidades que ofrece el entorno computacional.

Tall (2000) propone explorar un concepto antes de definirlo o conocerlo formalmente, y el uso de las nuevas tecnologías hace viable esta propuesta que huye de la tradicional secuencia de aprendizaje. Además, aún sin realizar un estudio exhaustivo del número de estudiantes de Análisis Matemático que serán futuros matemáticos, podemos asegurar que es inferior al de estudiantes de Análisis Matemático que terminarán sus estudios superiores en otras disciplinas menos formales, como ingenierías u otras carreras de ciencias. Esto compensa el que se utilicen propuestas que huyen del formalismo y se centran en la comprensión.

Tall, Smith, y Piez (2008), tras analizar un gran número de investigaciones en las que se trabaja con un entorno computacional, destacan la atmósfera de cooperación que fomenta la experimentación y la discusión, y complementa la construcción personal del conocimiento de muchas propuestas innovadoras que utilizan un entorno computacional. Estos autores sintetizan la evolución de las tecnologías aplicadas al cálculo en cinco etapas:

- ✓ etapa de algoritmos numéricos: se utilizan lenguajes de programación como BASIC o ISETL diseñados específicamente para desarrollar conceptos matemáticos.

- ✓ etapa de visualización gráfica: el potencial de las pantallas para realizar representaciones gráficas promueve nuevos enfoques que pretenden ayudar a que el estudiante visualice las ideas matemáticas. Sin embargo, no hay que perder de vista las restricciones de las pantallas del ordenador y el peligro que esto supone por la interpretación que se pueda dar a una representación gráfica en el plano cartesiano.
- ✓ etapa de control activo: el desarrollo de interfaces que permiten la intervención directa del usuario (normalmente haciendo uso del ratón), pone al alcance del usuario (en este caso el estudiante) una herramienta con un alto potencial para la exploración y para manipular objetos matemáticos.
- ✓ etapa de herramientas de cálculo simbólico: programas como Mathematica o Maple sirven de apoyo a un buen diseño curricular para liberar a los estudiantes de los cálculos algorítmicos y centrar su atención en los conceptos esenciales; pero sin una buena planificación por parte del profesor, no representan una mejora (los alumnos aprenden lo que hacen, y si se limitan a apretar un botón sin centrarse en los conceptos esenciales, sólo aprenderán a apretar un botón).
- ✓ etapa de nuevas tecnologías: actualmente vivimos en un período de gran crecimiento tecnológico que pone a nuestra disposición nuevas herramientas con las que intervenir en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Las nuevas tecnologías como el World Wide Web o el software multimedia siguen planteándonos el reto de evaluar cómo intervienen en el aprendizaje.

A pesar de que las nuevas tecnologías están ahí, por lo que ¿por qué no usarlas?, no se puede dar una respuesta definitiva a la cuestión de si el uso de las tecnologías, en general, es mejor. De hecho, muchos estudios revelan que el uso del ordenador sin más no aporta nada; entre otros factores, porque es necesario un buen diseño de la instrucción para que el ordenador contribuya a conseguir un aprendizaje eficiente (Tall, 2000).

### I 2.3 El principio de caja blanca / caja negra

Existen dos posturas extremas en cuanto a la utilización de herramientas informáticas, o más generalmente, de nuevas tecnologías, en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: la de aquellos que defienden no utilizar las herramientas informáticas en el proceso de enseñanza-aprendizaje por el peligro que suponen al reducir ciertas habilidades de los estudiantes, y la de aquellos que consideran que las herramientas informáticas son la panacea para los problemas rutinarios y que habrá que poner hincapié en enseñar a manejar estas herramientas. Con objeto de reducir la distancia entre estas dos posturas contrapuestas, Buchberger introdujo en 1989 el principio White-Box/Black-Box sustentado por un modelo de enseñanza basado en lo que él denomina la espiral de la creatividad o de la invención.

En este modelo, el tópico matemático que se enseña pasa por dos fases, la fase de caja blanca (White-Box) y la de caja negra (Black-Box). En la fase de caja blanca, el tópico matemático es nuevo para el alumno y no debe utilizarse el ordenador para aquellos algoritmos que le atañen directamente. En la fase de caja negra, el alumno ha superado la etapa de aprendizaje de este tópico y puede utilizar el ordenador para ejecutar el algoritmo referido al concepto ya aprendido (Buchberger, 1997).

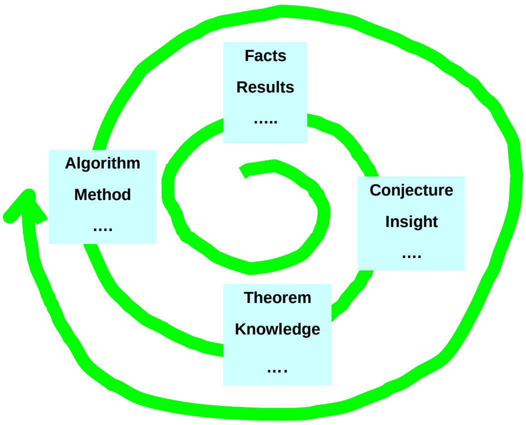



Figura 1. Espiral del aprendizaje.

Cuando Buchberger alude en su discurso al uso de las nuevas tecnologías, se refiere a la utilización del ordenador para ejecutar un algoritmo matemático. En su propuesta, el uso del ordenador toma una postura intermedia entre las expuestas anteriormente, de modo que ni se repudia, ni se asume sin restricciones, sino que se emplea, en mayor o menor medida, dependiendo de la fase de aprendizaje en la que se sitúe el tópico matemático. Las restricciones que imperan en cada fase han de ser controladas por el profesor, para facilitar la interiorización de los conceptos que se pretenden transmitir.

Uno de los ejemplos propuestos por Buchberger concierne al tema de los sistemas lineales y no lineales (Buchberger, 2003). Cuando se enseñan sistemas lineales, el tópico de *operaciones aritméticas* está en la fase de caja negra, por lo que es óptimo utilizar el ordenador para realizar estas operaciones. Algunos tópicos, como los *sistemas triangularizables*, algunos *sistemas lineales*, el *teorema de Gauss* o el *algoritmo de Gauss*, están en la fase de caja blanca, por lo que no se debe utilizar el ordenador para realizar algoritmos que involucren la solución directa de estos problemas. El ordenador se utiliza de modo restringido.

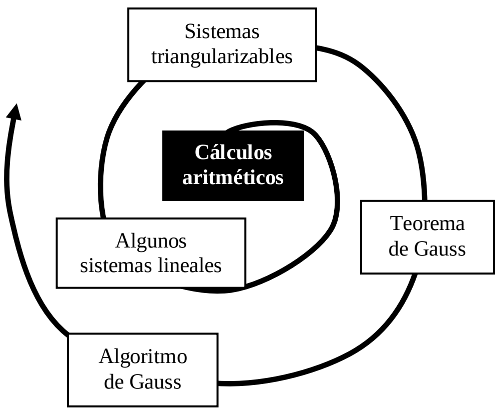



Figura 2. Caja blanca/Caja negra en el aprendizaje de los sistemas lineales.

Prosiguiendo en la espiral de aprendizaje, los sistemas no lineales se enseñan cuando se ha superado la fase de aprendizaje de los sistemas lineales. En este punto, el algoritmo de Gauss está en fase de caja negra. Puesto que ahora la caja blanca contiene a los sistemas no lineales, es lícito utilizar el ordenador para resolver, por ejemplo, un sistema lineal por el método de Gauss. Se sigue utilizando el ordenador, pero con otra restricción.

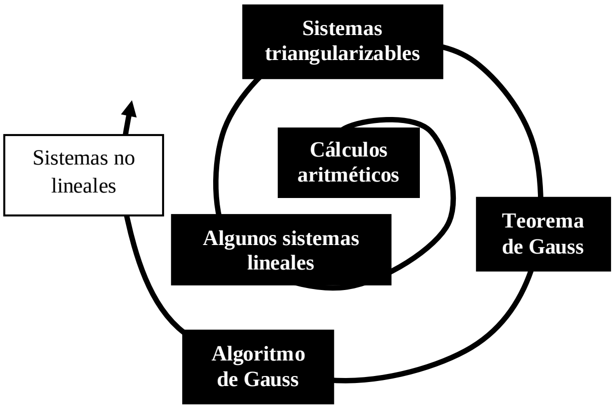



Figura 3. Caja blanca/Caja negra en el aprendizaje de los sistemas no lineales.

La espiral de aprendizaje es recursiva porque, lo que en un momento es una caja blanca, se convierte en caja negra una vez superada su instrucción.

Esta propuesta para el uso del ordenador en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en la que sólo se permite manejar con el ordenador aquellos conceptos que ya se conocen, va en la línea de la reflexión de Monaghan (citado en Stacey, Kendal, y Pierce, 2002) que propone que el alumno realice *a mano* aquellos algoritmos que jueguen un papel importante en el desarrollo cognitivo, o aquellos que contienen un principio que sea importante para un desarrollo posterior.

En este sentido, el algoritmo de Gauss para resolver un sistema lineal de ecuaciones, juega un papel importante cuando se están estudiando los sistemas lineales, y deja de ser relevante cuando el alumno ha interiorizado este proceso y su resolución no le aporta conceptualmente nada.

En el caso del aprendizaje de las sucesiones numéricas a nivel de primer curso de universidad, los tópicos del Análisis Matemático *funciones reales* y *límites de funciones reales*, se sitúan en la fase caja negra. Ya que éstos son conceptos que se estudian en Bachillerato, se puede utilizar el ordenador para representar gráficamente una función real, o calcular ciertos límites que ayuden a obtener resultados parciales al aplicar algún criterio de convergencia de sucesiones numéricas. Como el tópico de *sucesión numérica*, está en la fase caja blanca, no es óptimo calcular el límite de una sucesión utilizando, por ejemplo, el comando *limit* de Maple.

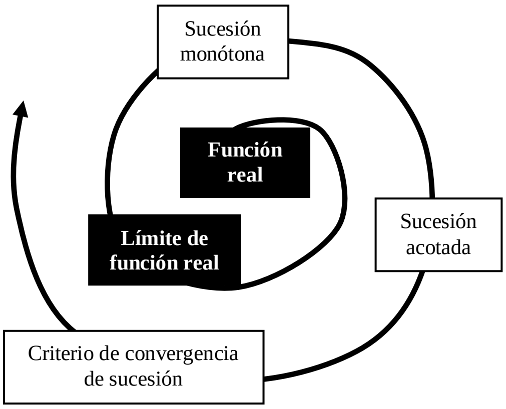



Figura 4. Caja blanca/Caja negra en el aprendizaje de las sucesiones numéricas.

Siguiendo con la espiral de aprendizaje, una vez que las sucesiones numéricas de términos positivos, que no tengan una expresión del término general en la forma de suma parcial, pasen a la fase de caja negra, el tópico de *series numéricas* de términos positivos entrará en la fase de caja blanca.

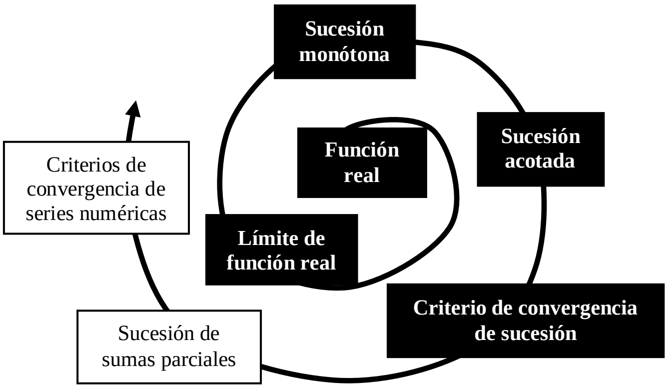



Figura 5. Caja blanca/Caja negra en el aprendizaje de las series numéricas.

En unas matemáticas más avanzadas, por ejemplo con series de funciones, el estudio de la convergencia de una serie numérica utilizando un programa de cálculo simbólico estaría en la fase de caja negra, mientras los criterios de convergencia de series de funciones estarían en fase de caja blanca.

### I 2.4 Otros enfoques

A continuación se recapitulan los principales resultados de algunas investigaciones que, al margen del paradigma teórico bajo el que se desarrollan, se centran en el uso de nuevas tecnologías en el aula.

#### I 2.4.1 *El papel del profesor*

La introducción del ordenador en el aula genera cambios en la labor del docente que no se pueden obviar. Según Balderas (1999), cambia la actividad profesional del profesor por su relación con el nuevo entorno de trabajo (otras formas de diseñar y resolver tareas,…) y cambia el modo de comunicarse con sus alumnos y, en general, con la comunidad docente y científica (correo electrónico, páginas Web,…).

Estos cambios, demandan una formación técnica de los profesores para desenvolverse con soltura en el entorno de las nuevas tecnologías (internet, correo electrónico, software de cálculo simbólico,…) y originan obstáculos que pueden surgir por problemas puramente técnicos (problemas con la red, falta de memoria, gestión de ficheros,…). No hay que olvidar que la mayoría de los docentes forman parte de una generación que no se formó en este entorno y esto provoca, en algunos casos, no sólo errores sino también un rechazo hacia los cambios innovadores. Uno de los motivos de rechazo puede ser el hecho de que el profesor vea mermada las fuentes donde consultar, ya que muchos libros de texto se han escrito antes de la era tecnológica y están desfasados respecto de las nuevas tecnologías y las nuevas metodologías de enseñanza que éstas conllevan.

Kendal y Stacey (2002) compararon la instrucción de dos profesores que utilizan herramientas de cálculo simbólico de modo diferente. Uno de ellos la utiliza para mejorar la comprensión y restringe su uso porque considera que realizar a mano algunas operaciones algebraicas facilita la comprensión. El otro, considera que la herramienta ahorra tiempo en los cálculos rutinarios, por lo que no restringe su uso para facilitar las operaciones. El análisis de los dos tipos distintos de enseñanza que llevan a cabo los profesores voluntarios, les hace reflexionar sobre qué debe cambiar en el ámbito educativo para introducir adecuadamente las herramientas de cálculo simbólico en el aula.

Una vez que el profesor introduce el ordenador en el aula, ha de posicionarse entre estas dos posturas que se reflejan en la investigación de Kendal y Stacey (2002). Monaghan (citado en Stacey y otros, 2002), al igual de Buchberger (2003) y Dana-Picard y Steiner (2003), sugiere que los estudiantes realicen a mano aquellos algoritmos que jueguen un papel importante en el desarrollo cognitivo, o aquellos que contengan un principio que sea importante para un desarrollo posterior. Pero, aquí está la gran pregunta, ¿cuáles son esos? La respuesta a esta cuestión es uno de los retos que se le plantean al profesor cuando ha de planificar el currículo.

También Guin y Trouche (2005) aluden a la falta de formación y de medios de que dispone el profesor como uno de los problemas que se plantean al introducir las herramientas de cálculo simbólico (calculadoras simbólicas o software para ordenadores personales) en el aula. Desde el paradigma instrumental, insta a facilitar su labor mediante un programa de formación a distancia para dar soporte a los profesores que utilizan nuevas tecnologías en el aula.

#### I 2.4.2 *Enseñanza tradicional versus nuevas tecnologías*

En general, en las investigaciones que analizan comparativamente un grupo que recibe la instrucción en un entorno computacional y otro grupo de control con enseñanza tradicional, no se observan desventajas en la manipulación algebraica por parte de los estudiantes que reciben la instrucción con nuevas tecnologías (Heid, 1988; Ayers y otros, 1998; Soto-Johnson, 1998). Sin embargo, son muchos los trabajos que constatan una mejoría en el proceso de aprendizaje, en cuanto a comprensión del tópico matemático objeto de estudio, cuando se utiliza un entorno computacional (Balderas, 1999; Breidenbach y otros, 1992; Camacho y Depool, 2001a, 2001b, 2001c; Soto-Johnson, 1998; McDonald y otros, 2000; Galbraith y Haines, 1998; O'Callaghan, 1998; Palmiter, 1991). Uno de los factores que contribuyen a esta mejoría, es la actitud positiva que, en general, muestran los estudiantes hacia el uso de herramientas de cálculo simbólico en la clase de matemáticas. Además, las propuestas curriculares innovadoras suelen requerir la participación activa del estudiante, con lo cual se introduce un elemento que contribuye a mejorar el aprendizaje. No obstante, hay que tener en cuenta que en muchas ocasiones los individuos trabajan mejor cuando saben que forman parte de un experimento (Palmiter, 1991).

#### I 2.4.3 *Propuestas curriculares*

Muchos trabajos se desarrollan en torno a una propuesta curricular innovadora en cuanto a la introducción del ordenador en el aula, (Breidenbach y otros, 1992; Buchberger, 2003; Camacho y Depool, 2003a, 2003b; Guzmán, 1991; Guin y Trouche, 1999; Heid, 1988; Kidron, 2001; Kimmis, 2004; Llorens y Santonjan, 1997; Soto-Johnson, 1998; Trouche, 2004). Con ella, principalmente se pretende crear un escenario que satisfaga algunas de las siguientes características:

- ✓ que el alumno pueda explorar, plantear conjeturas, y evaluarlas y sintetizar los resultados;
- ✓ que permita trabajar de manera gráfica y analítica, y muestre así otro enfoque distinto al algorítmico;
- ✓ que libere al alumno de cálculos, facilitando el trabajo experimental y de ese modo pueda centrar su atención en el porqué de los resultados;
- ✓ que les ayude a enfocar su atención en aspectos más globales de la resolución de los problemas;
- ✓ que les haga sentir confianza en los resultados que obtienen;
- ✓ que ayude al estudiante a construir su propio conocimiento matemático;
- ✓ que sea sencillo en el manejo y eficaz;
- ✓ que favorezca la visualización.

Hitt (2003) propone un "uso reflexivo de la tecnología", destacando su papel de herramienta que permite manipular diferentes representaciones y, con ello, favorecer la construcción de los conceptos matemáticos. También Kidron (2002) destaca la facilidad con la que el ordenador pone al alcance del estudiante distintas representaciones del mismo concepto, y lo pone en práctica proponiendo el uso de animaciones gráficas en el ordenador que ponen al alcance del estudiante el manejo del concepto de suma infinita desde un enfoque analítico y algebraico. Con ello se ayuda al estudiante a que perciba una serie como el límite de un proceso infinito.

## I 3 DIFICULTADES, ERRORES, OBSTÁCULOS

Es un hecho indiscutible que los estudiantes se encuentran con no pocas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, se enfrentan a obstáculos, y cometen errores. El estudio de estas dificultades, errores, y obstáculos, se ha convertido en un aspecto importante de muchas investigaciones (Blanco, 2001; Cornu, 1991; Drijvers, 2002; Herscovics, 1989; Llorens y Santonjan, 1997; Sierpinska, 1985; Socas, 1997, 2007; Tall, 1994) que tratan de aportar alguna solución, aunque sea parcial, a los problemas que involucran la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Socas (1997) sintetiza esta realidad afirmando que:

> El aprendizaje de las Matemáticas genera muchas dificultades a los alumnos y éstas son de naturalezas distintas.…
>
> Estas dificultades se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos en forma de errores. (p. 125)

En este apartado se tratarán estos aspectos.

### I 3.1 Dificultades

Los argumentos más sencillos para explicar las dificultades que encuentran los estudiantes cuando aprenden matemáticas suelen recaer sobre una enseñanza inadecuada o un bajo potencial intelectual de los estudiantes. Sin embargo, es posible encontrar otras justificaciones. Herscovics (1989), busca una explicación a las dificultades que aparecen en el aprendizaje del álgebra teniendo en cuenta tres puntos de vista diferentes:

- ✓ Desde el punto de vista histórico, el álgebra, comparada con otras disciplinas como la aritmética o la geometría, es una disciplina relativamente joven. “Históricamente, su nacimiento fue tardío y su crecimiento bastante lento” (p. 61) debido en parte a su alto nivel de abstracción, a que maneja elementos que no son numéricos ni figurativos, y a su representación simbólica.
- ✓ Desde el punto de vista epistemológico, al igual que los obstáculos epistemológicos definidos por Bachelard se consideran impulsores inseparables del desarrollo del pensamiento científico, también los obstáculos cognitivos se consideran piezas clave en el desarrollo de los esquemas conceptuales de un individuo, e igualmente son propios de la construcción individual del conocimiento.
- ✓ Desde el punto de vista psicológico, se necesita un marco teórico de referencia que siente las bases de cómo se construye el conocimiento. Uno de los marcos teóricos utilizados por las investigaciones de naturaleza constructivista es la teoría de Piaget de la equilibración y la abstracción reflexiva. Desde esta perspectiva (ver apartado I 1.4), la acomodación conlleva cambios en la estructura cognitiva del individuo que son necesarios para la adquisición del nuevo conocimiento. Pero no es fácil modificar la estructura cognitiva que posee el estudiante y así, su existencia se convierte en un obstáculo cognitivo para la construcción de estructuras nuevas. Por

ejemplo, algunas investigaciones como las de Collins, Davis o Matz (citados en Herscovics, 1989), muestran cómo la aritmética es una "fuente de dificultades para la construcción del significado de las expresiones algebraicas" (p. 62).

Para Socas (1997) las dificultades del aprendizaje de las matemáticas proceden generalmente del microsistema educativo: alumno, materia, profesor e institución escolar. Este autor distingue cinco grandes categorías que describen la procedencia de las dificultades:

- ✓ Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: "el lenguaje de las Matemáticas opera en dos niveles, el nivel semántico -los signos son dados con un significado claro y preciso-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-" (p. 130). Es decir, los objetos matemáticos se presentan bajo dos posibles estatus que son los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los mismos.
    - o El estatus operacional tiene un carácter dinámico y en él los objetos se ven como procesos.
    - o El estatus conceptual tiene un carácter estático y en él los objetos se ven como una entidad conceptual.
- ✓ Dificultades asociadas a la complejidad de los procesos de pensamiento matemático: la naturaleza lógica de las matemáticas exige que se fomente el pensamiento lógico, sin necesidad de ser formal, como "una destreza de alto nivel que resulta necesaria para alcanzar determinados niveles de competencia matemática" (p. 131). Pero en muchas ocasiones, en el aula de matemáticas se genera una lógica escolar diferente a la lógica social; así, "los modos de pensamiento matemático provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático" (p. 132); el saber matemático anterior produce modelos implícitos que pueden ser inadecuados tras la adquisición de nuevos conocimientos. El profesor ha de tener constancia de estas dificultades para diseñar estrategias que las hagan explícitas a fin de facilitar su superación.
- ✓ Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas: tienen que ver con la institución, el currículo y con los métodos de enseñanza.
- ✓ Dificultades asociadas a los procesos del desarrollo cognitivo de los alumnos: esta información es muy valiosa para el profesor a la hora de diseñar secuencias de aprendizaje. Para ello, hay que apoyarse en alguno de los diferentes enfoques que describen el desarrollo cognitivo del individuo (jerárquico, evolutivo, constructivista, estructuralista,…).
- ✓ Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emociones hacia las matemáticas: la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores, las creencias trasmitidas por los padres, etc., pueden producir sentimientos de

ansiedad o miedo que ocasionan bloqueos de origen afectivo que interfieren en el aprendizaje.

Por tanto, las dificultades "pueden abordarse desde varias perspectivas según pongamos énfasis en uno u otro elemento: desarrollo cognitivo de los alumnos, currículo de matemáticas y métodos de enseñanza" (p. 125). Según Palarea (1998), las dificultades asociadas a la propia disciplina (debidas a la complejidad de los objetos matemáticos y a la complejidad de los procesos de pensamiento matemático), en general, no pueden evitarse, pero es necesario conocerlas para que el profesor implemente estrategias de enseñanza-aprendizaje que las expliciten para facilitar la adquisición de nuevos conocimientos.

### I 3.2 Obstáculos

El filósofo Gaston Bachelard introdujo en 1938 la noción de obstáculo epistemológico en el contexto de las ciencias experimentales:

> c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. Et il ne s'agit pas de considérer des obstacles externes, comme la complexité et la fugacité des phénomènes, ni d'incriminer la faiblesse des sens et de l'esprit humain: c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons des obstacles épistémologiques. (Bachelard, 1975. Reedición).

Bajo el paradigma de la transposición didáctica, Brousseau introdujo la noción de obstáculo en el contexto de la didáctica de las matemáticas. Para este autor, los obstáculos no son el resultado de una falta de conocimiento, sino un conocimiento, entendiendo conocimiento como "la manera regular de tratar un conjunto de situaciones" (Brousseau, 1997) que en un determinado dominio proporciona resultados correctos pero que en un dominio nuevo o más extenso, provoca respuestas falsas o inadecuadas. Estos son los errores entendidos como la manifestación de los obstáculos. Así, al adquirir un nuevo conocimiento, el conocimiento antiguo se convierte en un obstáculo por la imposibilidad de adaptarse al cambio. Los obstáculos tienen así un carácter permanente por la complejidad que supone integrar el nuevo conocimiento. También tienen un carácter universal, en el sentido de que no son propios de construcciones mentales personales de un individuo, aunque sí de dominio concreto, sino que aparecen en la génesis del concepto.

Sintetizando, los obstáculos se manifiestan a través de errores y oponen resistencia a la adquisición de nuevos conocimientos para los cuales son un obstáculo, por tanto, más que ignorarlos, hay que utilizarlos para diseñar contraejemplos que ayuden a construir el nuevo conocimiento. En este sentido "son constitutivos del saber" (Brousseau, 1983).

También Tall (1991) considera necesario utilizar contraejemplos para facilitar en el estudiante la construcción del conocimiento. Para Tall, la causa de muchos obstáculos responde al principio de extensión genérica:

> If an individual works in a restricted context in which all the examples considered have a certain property, then, in the absence of counter-examples, the mind assumes the known properties to be implicit in other contexts. (p. 10)

Este principio justifica ampliamente la necesidad de diseñar cuidadosamente un currículo que evite la aparición de estos obstáculos. Para ello, Tall propone el uso de contraejemplos que compensen el abuso de ejemplos en contextos limitados que conllevan la aparición de obstáculos cognitivos.

Otras investigaciones, como las de Blanco (2001), Cornu (1991), Herscovics (1989), Llorens y Santonjan (1997) y Socas (1997), dejan también patente la necesidad de revisar el currículo, prestando especial atención a su secuencia para prevenir, y si cabe solventar, las dificultades que generan los obstáculos.

Socas (1997) destaca la necesidad de realizar una evaluación diagnóstica, tanto al comienzo de las unidades didácticas como durante su desarrollo, con objeto de detectar los errores y su naturaleza. Con esta información, el profesor puede diseñar un plan de prevención.

Blanco (2001) observa errores de contenido matemático en estudiantes de magisterio en conceptos de geometría. La causa se la atribuye a la enseñanza que han recibido los estudiantes cuando cursaban primaria. Algunas características de este tipo de enseñanza son:

- ✓ Utilizar ejemplos estándar para describir distintos conceptos.
- ✓ Enfatizar excesivamente la definición, obviando el análisis de propiedades y restando importancia a la visualización.
- ✓ Abusar de los ejemplos *plantilla* en los que aparecen procesos repetitivos y estáticos.
- ✓ Escasez de oportunidades para experimentar y, en general, de materiales y recursos.

Llorens y Santonjan (1997) critican la secuencia de contenidos en los libros de texto referidos al concepto de integral, y la incidencia en los apartados *cálculo de primitivas* y *métodos de integración*. Consideran que con ello sólo persiguen, y consiguen, que el estudiante ejercite el cálculo de primitivas repitiendo muchos ejercicios estándar. También creen que se abusa del formalismo y se omite una revisión del concepto de área. Todo esto justifica la aparición de deficiencias, ya que este tipo de instrucción fomenta que el estudiante genere un esquema conceptual que entra en conflicto con la definición del concepto. De su experiencia y de otras investigaciones, resumen en tres las deficiencias que manifiestan los estudiantes en el conocimiento del concepto de integral:

- ✓ El que se identifique la *integral* de una función con su *primitiva*.
- ✓ El que se identifique una integral definida con la regla Barrow, aunque ésta no pueda aplicarse.

- ✓ La falta de asociación de los conceptos de área y de integral, que también se pone de manifiesto cuando, por ejemplo, un estudiante plantea utilizar una integral cuando se le pide calcular el área de una figura sencilla como un rectángulo (base por altura).

Para evitar estas deficiencias, proponen invertir el orden en que habitualmente se expone el tópico en las aulas, y apoyarse en el recurso que ofrece DERIVE para la visualización.

Brousseau (1983) distinguió tres tipos de obstáculos:

- ✓ De origen ontogenético, debidos a las limitaciones del individuo.
- ✓ De origen didáctico, debidos al sistema de enseñanza y en particular a la práctica docente (diseño curricular, etc.)
- ✓ De origen epistemológico, constitutivos del propio conocimiento.

Para Herscovics (1989) los obstáculos cognitivos se identifican con dificultades en el aprendizaje que no son de naturaleza idiosincrásica, pero que ocurren de manera generalizada. Apoyándose en un enfoque constructivista, distingue tres tipos de obstáculos cognitivos:

- ✓ Obstáculos inducidos por la instrucción, producto de la discontinuidad cognitiva que existe en muchas ocasiones entre el nuevo concepto y el conocimiento que posee el individuo. En ocasiones, una instrucción muy formal produce este tipo de obstáculos.
- ✓ Obstáculos de naturaleza epistemológica. El paralelismo existente entre los obstáculos epistemológicos, de los que dan fe el estudio histórico de algunos conceptos, y algunos obstáculos cognitivos que aparecen en los individuos, ha de interpretarse con reservas ya que el entorno actual de aprendizaje es sensiblemente diferente al de hace unos siglos.
- ✓ Obstáculos asociados a los procesos de acomodación del individuo. Son los más retadores pedagógicamente hablando, ya que los esfuerzos por diseñar y llevar a cabo una secuencia didáctica que ayude a los estudiantes a completar el proceso de acomodación, no garantiza el éxito de los resultados.

Algunos investigadores han analizado los obstáculos epistemológicos de un tópico concreto como es el caso de Cornu (1991) y Sierpinska (1985) con el concepto de límite.

Cornu (1991) mantiene la clasificación de Brousseau y distingue cuatro grandes obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico del concepto de límite:

- ✓ El fracaso en enlazar la geometría con los números.
- ✓ La noción de infinitamente grande e infinitamente pequeño.
- ✓ El aspecto metafísico de la noción de límite.
- ✓ El argumento de si se alcanza o no el límite.

Como otros investigadores, propone distinguir y analizar los obstáculos para identificar las dificultades con las que se encuentran los estudiantes en el proceso de aprendizaje y encontrar una estrategia de enseñanza apropiada que permita superarlos.

También Sierpinska (1985) analiza los obstáculos epistemológicos relativos a la noción de límite. Tras el estudio del desarrollo histórico del concepto y el análisis de una experiencia propone estos cinco:

- ✓ *Horror al infinito*, expresión debida a Cantor con la que define “una forma de miopía que impide ver el infinito actual”. Relacionados con este obstáculo, aparecen otros, como los asociados al paso al límite y los de tipo algebraico. Los primeros se manifiestan al rechazar el paso al límite como una operación matemática, o al asociar el paso al límite con un movimiento físico. Los segundos, se producen al transferir automáticamente las manipulaciones algebraicas propias de cantidades finitas a cantidades infinitas, y las propiedades de los términos de una sucesión convergente a su límite.
- ✓ Obstáculos ligados a la noción de función, manifestados al razonar sólo con funciones monótonas o al no distinguir el límite de una función con su cota superior o inferior.
- ✓ Obstáculos geométricos, que se manifiestan en la concepción geométrica de la diferencia entre una cantidad variable y otra constante que es su límite. Esto está relacionado con la concepción geométrica y numérica de punto.
- ✓ Obstáculos lógicos, relacionados con el significado y las propiedades de los cuantificadores lógicos (existencial y universal).
- ✓ Obstáculos simbólicos, debidos al significado de la grafía *lim*, introducida por Cauchy. Este obstáculo, está relacionado con el de no considerar el paso al límite con una operación matemática en sí misma.

Aceptando dos aspectos de la noción de obstáculo epistemológico de Bachelard (la aparición de obstáculos es inevitable y la repetición de su aparición en la filogénesis -origen y desarrollo evolutivo- y la ontogénesis -formación y desarrollo- del concepto), Sierpinska utiliza una noción de obstáculo caracterizada por ser específica de un concepto y sólo de él, y por la necesidad de tomar conciencia del mismo para el desarrollo del concepto.

Centrado también en los límites y en los números reales, Tall y Schwarzenberger (1978) sugieren el diseño de un currículo que evite los conflictos que surgen en relación a estos dos conceptos. Para ello, proponen que el profesor tenga en cuenta esos conflictos y “construya un esquema libre de conflictos en el sentido de que exista un tránsito sin problemas que enlace unos y otros [conceptos] sin el estrés y la inestabilidad que se produce por la oscilación de un concepto a otro” (p. 49). En este contexto, distinguen tres tipos de conflictos. Los causados por un uso inadecuado del lenguaje, que se pueden remediar eligiendo cuidadosamente la definición o motivación del concepto; los causados por la propia diferencia en cuanto a la naturaleza matemática de diversos conceptos, como el de sucesión y serie (nos centramos en eliminar primero el conflicto de las sucesiones y se dejan las series para más tarde); y los conflictos que surgen de experiencias particulares anteriores de cada alumno, que sólo podrá remediar un profesor que tome conciencia de la situación.

Unos años más tarde, sin distinguir entre distintos tipos de obstáculos, Tall (1989) postula dos causas que los provocan: el principio de extensión genérica citado anteriormente y la secuencia en el diseño del currículo. Este último motivo se debe a que no siempre la secuencia lógica que se emplea es la más adecuada. Teniendo en cuenta que los obstáculos cognitivos son el resultado de las experiencias previas del individuo, un cambio en el orden en que se introducen los conceptos puede esquivar algunos obstáculos cognitivos.

**Obstáculos debidos a las herramientas de cálculo simbólico (HCS).**

Las investigaciones de Drijvers (2000, 2002) destacan por el análisis que realiza de los obstáculos que aparecen cuando se incorporan las herramientas de cálculo simbólico (HCS) en el aula de matemáticas. Desde la perspectiva del enfoque instrumental, la definición de obstáculo como falta de equilibrio entre la parte técnica y la parte conceptual en el proceso de instrumentalización, desencadena la evidencia de que el trabajo que requiere superar un obstáculo, beneficia al proceso de aprendizaje. Aunque los detalles de esta conclusión no son compartidos por otras corrientes, la lista de obstáculos que presenta, en gran parte, es corroborada por otras investigaciones en las que se ha hecho hincapié en los problemas que aparecen cuando se incorpora el ordenador a la clase de matemáticas. (Artigue, 1997; Balderas, 1999; Gleason, 2001; Guin y Trouche, 1999; Lagrange, 2000; Mackie, 2002).

Drijvers (2002) considera que un obstáculo se produce cuando “se desequilibra la parte técnica y la parte conceptual de la instrumentación de un esquema, bien porque la técnica no esté acompañada por las concepciones y significados apropiados, o porque se carezca de la destreza técnica para ejecutar un concepto” (p. 224). Puesto que el desarrollo conceptual forma, en general, parte del proceso de instrumentación y, en particular, de los procesos que superan los obstáculos, estos propician oportunidades para el aprendizaje.

Drijvers (Idem) enumera una totalidad de doce obstáculos, unos locales y otros globales. Con obstáculos locales se refiere a aquellos que son propios de un tópico matemático y tienen por tanto un carácter dual, por la parte técnica y la parte concerniente al concepto matemático. Los globales, son aquellos propios de la idiosincrasia de la herramienta. Estos obstáculos, no están provocados por las herramientas de cálculo simbólico, sino que son obstáculos cognitivos que en ocasiones se manifiestan más intensamente con el uso de las mismas. Los doce obstáculos son:

- ✓ Obstáculos locales (aparecen con un tópico concreto, en este caso el álgebra, y con el modo en que es tratado por la HCS):
    - o La diferencia entre la representación algebraica que proporciona el HCS y aquella que los estudiantes esperan y conciben como *simple*.

- La diferencia entre los cálculos algebraicos y numéricos, y la forma implícita en la que el HCS se ocupa de estas diferencias.
- La concepción flexible de variables y parámetros que requiere el uso de HCS.
- La tendencia a aceptar sólo soluciones numéricas y no algebraicas.
- La concepción limitada de la sustitución algebraica.
- La concepción limitada de la solución algebraica.
- La concepción de una expresión como un concepto.

✓ Obstáculos globales (aparecen, en general, cuando se trabaja con la máquina):

- Las limitaciones de la HCS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas que ayuden a la HCS a superar estas limitaciones.
- La imposibilidad de decidir cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil.
- El carácter de caja negra de las HCS.
- La dificultad de transferencia entre las técnicas de la HCS y las de lápiz y papel por la falta de congruencia entre las técnicas en los dos medios.
- La dificultad de interpretar la respuesta de la HCS.

Aunque estos obstáculos han salido a la luz en distintos experimentos y dependen de ellos, tanto por el individuo que participa como por el objeto de estudio y el entorno en el que se desarrollan, se pueden tomar como punto de partida para la detección y el análisis de los obstáculos que aparecen cuando el currículo se desarrolla en entornos informáticos.

Drijvers aporta dos razones poderosas por las que hay que tener en cuenta los obstáculos. Por un lado, aunque en ocasiones el quehacer matemático lleva consigo estados de frustración, otras veces la frustración producida por los obstáculos puede ser contraproducente, incluso la ignorancia de los obstáculos desde la posición del profesor puede amplificar este estado de frustración negativo. Por otro lado, la concepción de obstáculo implica la integración de aspectos técnicos y conceptuales, por lo que trabajar la manera de superar obstáculos, a menudo significa trabajar el desarrollo conceptual de las matemáticas que involucran. Los obstáculos que se han observado, a veces son obstáculos cognitivos que se manifiestan más abiertamente en un entorno computacional. Por ello, todo el trabajo de descubrirlos y buscar estrategias para superarlos repercute en una mejora de la comprensión. Así, es importante la relación entre los beneficios de los entornos de álgebra computacional y los obstáculos que originan, porque los errores y dificultades pueden desempeñar un papel importante en el proceso de aprendizaje, y al mismo tiempo pueden aportar información valiosa para el trabajo de los docentes e investigadores.

La propuesta de Drijvers para prevenir la repercusión que tienen estos obstáculos en el proceso de enseñanza se sintetiza en tres medidas:

- ✓ Los profesores deberían tenerlos en cuenta y prestar atención a las ventajas que poseen las HCS haciendo explícitas las matemáticas que hay detrás.
- ✓ Cuando se utilizan HCS, merecen más atención los cálculos aproximados y exactos, la simplificación de fórmulas y el papel que desempeñan variables y parámetros, que cuando no se utilizan.
- ✓ Hay que evitar que en el alumno se establezca una dependencia con las herramientas informáticas.

Para Tall (1989) el ordenado juega un doble papel. Por un lado, es una herramienta poderosa para el aprendizaje porque ayuda a los estudiantes a crear representaciones mentales de conceptos que provocan dificultades; por otro lado, la *autoridad del ordenador* puede entorpecer el aprendizaje. Tall cita el trabajo de Nachmias y Linn en el que observaron que algunos estudiantes interpretaron literalmente las representaciones gráficas que visualizan en la pantalla del ordenador y esto les llevó a conclusiones incorrectas.

También Weigand (2004) hace una reflexión sobre el uso del ordenador en el aula y advierte del peligro que supone trabajar con el ordenador por la cantidad de información que se puede llegar a generar en una sesión de trabajo. Sin embargo, destaca la ventaja que conlleva el que permita un manejo tanto simbólico como gráfico, y la facilidad para cambiar de uno a otro con cierta flexibilidad.

### I 3.3 Errores

Es muy habitual que los profesores dediquen muchos esfuerzos intentando corregir los errores que cometen sus estudiantes. Sin una reflexión profunda, podría parecer que estos errores son sólo fruto de una falta de conocimiento o un despiste. Sin embargo, son muchos los investigadores, como Brousseau (1983), Cornu (1991) o Socas (1997), que consideran que el error es algo más que el resultado de un esquema cognitivo inadecuado.

Tall (1991) cree que la causa de muchos errores son los conflictos que se producen entre el esquema conceptual y la definición del concepto. Considerando que el nuevo conocimiento se construye siempre sobre experiencias previas que concurren con las definiciones formales del concepto en la mente del individuo, para evitar que se produzcan estos conflicto, es necesario que tomemos conciencia del esquema conceptual que ha construido el estudiante antes de conocer la definición del concepto.

Socas (1997) diferencia tres orígenes distintos de los errores:

- ✓ Debidos a obstáculos, bien sean didácticos, epistemológicos o cognitivos.
- ✓ Debidos una ausencia de sentido por la complejidad de los objetos matemáticos.
- ✓ Debidos a dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales.

Considerando que en un error siempre hay una falta de sentido, la semiosis del error es como sigue:

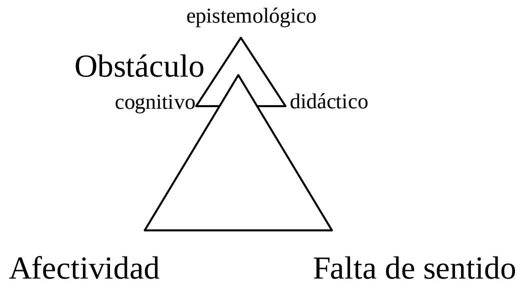



Figura 6. Semiosis del error.

Para Socas (2007), las dificultades y los errores a los que se enfrentan los individuos forman parte del modelo de competencia cognitivo según la siguiente semiosis:

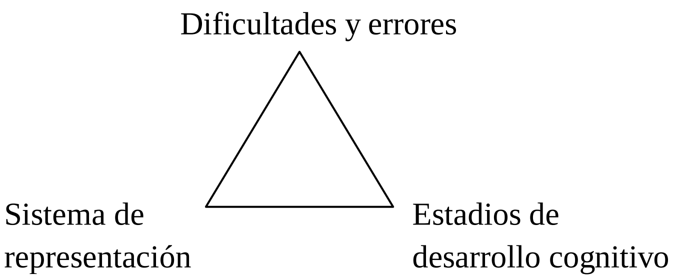



Figura 7. Modelo de competencia cognitivo.

Socas (2007) propone desarrollar marcos teóricos locales para contenidos matemáticos concretos que permitan no sólo una clasificación, sino también una explicación del origen de los errores. De este modo, al menos se conseguirá a nivel individual lo que aún no se ha conseguido con marcos de referencia generales que pretenden un tratamiento sistemático de los errores. Sólo al conocer el origen de los errores se podrán diseñar líneas de actuación que traten de corregirlos.

## I 4 VISUALIZACIÓN

El fracaso de un gran número estudiantes de cálculo en los primeros cursos universitarios, es un hecho evidente que motiva a muchos investigadores en busca de las causas que lo desencadena. Algunos investigadores, creen que una posible causa de este hecho es la falta de conexión entre los aspectos visuales y analíticos de los conceptos y procedimientos matemáticos (Eisenberg y Dreyfus, 1991). Para Arcavi (2003) la visualización es:

> La capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre dibujos, diagramas, e imágenes en nuestra mente, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensando y desarrollando ideas previamente desconocidas y anticipando la comprensión. (p. 217)

Para Guzmán (2002) la visualización matemática consiste en prestar atención a la “posible representación concreta de los objetos que uno manipula para conseguir un enfoque más eficiente de las relaciones abstractas” (Sección 1, para. 4). El hecho de que nuestro principal sentido para percibir el mundo exterior sea la visión, hace que el aspecto visual esté inmerso en muchas tareas en matemáticas, no sólo las relacionadas directamente con la geometría sino también las propias del Análisis Matemático.

Arcavi (2003) destaca el papel que desempeña la visión en nuestras vidas, tanto a nivel biológico como socio-cultural, por su labor en los procesos de comunicación. A través de algunos ejemplos, muestra cómo diversos aspectos de la visualización ponen de manifiesto su capacidad para convertirse en un poderoso complemento en la enseñanza-aprendizaje de distintos tópicos matemáticos. Por ejemplo, para el estudiante la representación visual es un soporte y un ilustrador de resultados simbólicos, como las gráficas en estadística; debido a la capacidad que posee una imagen visual para crear la sensación de convencimiento y de inmediatez, permite resolver conflictos entre una solución simbólica correcta y una intuición incorrecta; además, les "ayuda a re-enlazar y recuperar conocimientos básicos que pueden pasar inadvertidos en una solución simbólica" (p. 222). Si bien la visualización no resolverá todos los problemas asociados al fracaso con las matemáticas, especialmente las matemáticas superiores, puede aportar cierta información complementaria acerca de cómo los estudiantes construyen los conceptos matemáticos.

Uno de los aspectos que potencian la importancia del papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas es la oportunidad que ofrece como medio para demostrar algunos resultados. Este aspecto es el centro de ciertas controversias ya que, frente a una posición más conservadora que considera una demostración válida sólo si se puede expresar aritméticamente, otros, como Eisenberg y Dreyfus (1991) o Arcavi (2003), consideran que el razonamiento visual también se puede considerar formal. Sirva de ejemplo, la demostración del criterio de convergencia de las series alternadas propuesta por Hammack y Lyons (2006), o las representaciones visuales de las sumas de diversas series recopiladas en Bossé y Faulconer (2007), en Lay (1985), o en Bonar y Khoury (2006), como la de la serie geométrica de razón ¼ que aparece en Mabry (1999):

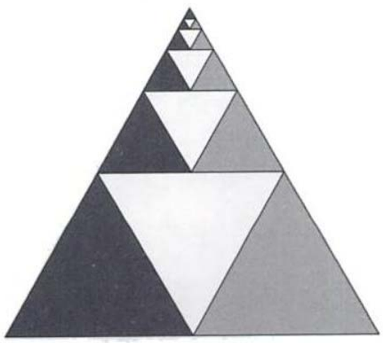


Figura 8. Demostración visual de la suma de la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$

Sfard (1991) considera que la visualización de representaciones gráficas facilita una concepción estructural de los objetos matemáticos, ya que, frente al carácter secuencial de la representación no pictórica (verbal), la representación gráfica permite obtener distinta información según el contexto desde el que se analice.

### I 4.1 Dificultades asociadas a la visualización

A pesar de las ventajas que ofrece la visualización, muchos estudiantes se muestran reticentes a trabajar en un entorno visual, prefiriendo el enfoque algebraico o analítico, según el tópico al que se aplique. Eisenberg y Dreyfus (1991) razonan desde tres puntos de vista los motivos por los cuales muchos estudiantes se resisten a lo visual:

#### I 4.1.1 *Nivel cognitivo*

A nivel cognitivo, lo visual es más difícil. Desde el punto de vista cognitivo, un diagrama es una colección de información muy compleja y concentrada. Mientras que en una expresión analítica la información se encuentra implícita, en un diagrama aparece de forma explícita. Esto es una ventaja de los diagramas que no siempre se percibe, ya que se requiere un conocimiento extra para entender la información que contiene un diagrama. Si no se poseen las claves para descifrar este conocimiento, no se puede aprovechar la ventaja que proporciona.

Guzmán (2002) también señala que la visualización requiere de un sistema de codificación y decodificación en el que intervienen aspectos tanto personales como sociales, y que en muchos casos está enraizado en la historia de la actividad matemática. La capacidad para manipular este sistema de codificación/decodificación es la causa de que muchas veces la representación visual sea compleja para el estudiante, mientras que al profesor, por su experiencia, le parece muy sencilla.

#### I 4.1.2 *Nivel sociológico*

A nivel sociológico, lo visual es más difícil de enseñar: el estudiante tiende a repetir la estructura que le han enseñando en el aula y ésta, en muchos casos, es la de una sucesión de pasos algorítmicos con los que se resuelve la tarea sin necesidad de utilizar otros mecanismos más complejos.

En el contexto de la teoría de la transposición didáctica de Chevallard, es importante destacar la secuenciación y la compartimentación del conocimiento. Por un lado, el conocimiento académico se transmite de forma lineal, por lo que es mejor representarlo secuencialmente y no en forma de diagrama; para el profesor, es más fácil transmitirlo de forma algorítmica y lineal, por lo que el alumno prefiere trabajar de manera analítica, más que procedimental. Por otro lado, la compartimentación del conocimiento ocurre no sólo porque se destruyen los lazos entre conceptos y procedimientos, sino también porque en el aula se separa el conocimiento del contexto.

#### I 4.1.3 *Nivel de creencias sobre la naturaleza de las matemáticas*

A nivel de creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, lo visual no es matemático. Desde el punto de vista de Vinner (citado en Eisenberg y Dreyfus, 1991), en cursos avanzados el enfoque visual debería ser sustituido por el algebraico. Sin embargo, también afirma que se debería terminar con la creencia de que una demostración matemática no es válida si es visual. Son muchos los que consideran que una demostración formal matemática ha de ser aritmética, aunque también otros han comenzado a trabajar sobre las demostraciones sin palabras, que enfatizan la visualización sobre el manejo aritmético y algebraico.

Para Guzmán (2002) esta falta de validez de lo visual es una consecuencia derivada de la historia de la matemática: en la matemática griega el aspecto visual tiene una clara relevancia asociada a la geometría imperante; el siglo XVII hereda esta tendencia que no pierde validez por la naturaleza visual de los problemas geométricos y físicos que engendran sus avances; desde el nacimiento del Análisis Matemático hasta la formalización del siglo XX, los procesos asociados al concepto de infinito provocan polémicas y serias dudas sobre la validez de algunos resultados que la aritmetización del análisis en el siglo XIX erradica; la desconfianza de los resultados asociados a una matemática más geómetra, más visual y la firmeza con la que la formalización resuelve estos trances, hace que la tendencia formal de la matemática trascienda a las aulas fomentando una matemática moderna formal y con un prejuicio heredado hacia lo visual.

### I 4.2 Tendencia actual

Algunos investigadores como Tall, Artigue, Heid, Scwarz, y Ruthven, (citados en Eisenberg y Dreyfus, 1991), hacen hincapié en la representación analítica y visual de un mismo concepto matemático y, la mayoría de ellos, han desarrollado propuestas curriculares en las que han incorporado el uso del ordenador para sacarle partido a la facilidad con la que maneja las representaciones gráficas. En esta misma línea, Fernando Hitt, apoyándose en la teoría de Duval según la cual "para la construcción de conceptos matemáticos no basta trabajar las actividades dentro de un solo sistema de representación, sino también realizar tareas de conversión de una representación en otra, y viceversa" (Hitt, 2003, p. 216), propone el uso de las nuevas tecnologías para la visualización y así reforzar la manipulación coherente de distintas representaciones del mismo concepto que permitan una sólida construcción del concepto (Hitt, Idem).

Llorens y Santonja (1997) se apoyan en la visualización para proponer un cambio curricular que mejore la enseñanza y el aprendizaje del concepto de integral. La tendencia de muchos profesores a presentar los aspectos puramente algebraicos de las matemáticas estimula un aprendizaje algorítmico centrado en el resultado final, que ignora todo el proceso de creación del concepto matemático. El aspecto visual, como describe Guzmán (2002), se encuentra en el origen de muchos conceptos de Análisis Matemático que quedan ocultos por la algebrización. En los libros de texto también se manifiesta esta tendencia a abusar de la formalización que, además de tener un origen histórico, es más sencillo para los matemáticos encargados de redactar los manuales y también para los profesores de matemáticas encargados de diseñar un currículo. Al final, el estudiante reproduce lo que le han enseñado y, como señalan Llorens y Santonja (1997), a la hora de resolver un ejercicio de cálculo de áreas en un contexto gráfico, prefieren el contexto algebraico-formal antes que un contexto visual-geométrico porque no han integrado este modo de representación.

Guzmán (2002), desde el punto de vista del profesor, propone una línea de actuación para devolver a la visualización la relevancia que se merece en la actividad matemática. Según él, el profesor debería fomentar la práctica de la visualización, y enseñar explícitamente cómo codificar y decodificar al lenguaje visual la información que tradicionalmente se expresa en lenguaje formal; con ello, conseguiría que se apreciara el lenguaje visual y se valorara como una forma más de hacer matemáticas. Por otro lado, además de aumentar la frecuencia en el empleo de la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se deberían evaluar el uso que se da a la visualización y las destrezas que involucra su utilización.

## I 5 HISTORIA

Dentro de la didáctica de la matemática, es importante estudiar el uso que se hace de la historia de la matemática en la enseñanza, puesto que su introducción en el currículo tiene como intención mejorar el aprendizaje de los estudiantes (Bagni, 2001a). El uso que se da a la historia de la matemática en los procesos de enseñanza-aprendizaje es muy variado; sin bien nos es grato leer alguna anécdota o conocer algo sobre la vida de algún ilustre matemático que pone su nombre a un teorema, para Bagni esto no es suficiente para garantizar el aprendizaje. Sin embargo, el reclamo es útil desde el punto de vista didáctico por la componente motivadora que aporta (Bagni, 2001a; Kleiner, 2001), ya que puede modificar la imagen que los estudiantes suelen tener de las matemáticas.

Heeffer (2006) sugiere tres argumentos que justifican la relevancia de integrar la historia de la matemática en el currículo de matemáticas. El primero es de carácter filosófico: la historia nos ofrece la posibilidad de contextualizar el desarrollo de la matemática y nos ofrece una visión de ella distinta a la que se presenta en las aulas como productora de una “verdad eterna y absoluta”; conocer los estados por los que ha pasado una teoría antes de formalizarse, con sus períodos de inconsistencias y verdades a medias, desmitifica su naturaleza.

El segundo es de carácter filogenético: el desarrollo de los conceptos a lo largo de la historia nos aporta información acerca de cómo un individuo adquiere esos conceptos. El profesor puede utilizar esta información para relacionar las dificultades que ha atravesado un concepto a lo largo de la historia con las dificultades que muestran los estudiantes para la comprensión de dicho concepto; esta información le da una oportunidad para diseñar una instrucción que permita superar estas dificultades.

El tercero es un argumento histórico: la enseñanza de las matemáticas es tan antigua como las matemáticas, por lo que tantos años de trasmitir conocimiento matemático nos puede ser útil para reflexionar sobre las implicaciones que conlleva la naturaleza de los métodos matemáticos y para proporcionar diversos métodos de enseñanza que sean más acordes con la diversidad de formas de comprender que tienen los estudiantes de nuestras aulas.

Estos tres argumentos están relacionados con los tres bloques que describen los distintos papeles que, según Sierra (2000), ha de jugar la historia de la matemática en la enseñanza. A continuación se describen estos tres bloques con las aportaciones de algunas investigaciones.

### I 5.1 Evolución de los conceptos y procedimientos

Para Durán (1998), la historia de la matemática como apoyo a la enseñanza,

> [puede actuar] como corrector del sistema educativo. (…) La perspectiva histórica de un concepto, problema o teoría, desde sus orígenes hasta su formulación actual, pone a disposición tanto del que enseña como del que aprende una visión dinámica de ese concepto, problema o teoría matemática que rompe la imagen cerrada y estática que presenta cuando se desarrolla mediante el sistema educativo. [Además,] recuperar sus orígenes históricos facilitará por tanto la valoración adecuada de los roles que rigor e intuición deben jugar en los razonamientos matemáticos; y esta mejor ponderación es sin duda una forma de mejorar la enseñanza de las matemáticas. (p.132)

En esta misma línea, para Grugnetti y Rogers (citados en Bagni, 2004):

> el enfoque histórico fomenta y nos permite considerar a las matemáticas no como un producto estático, con una existencia a priori, sino como un proceso intelectual; no como una estructura completa disociada del mundo, sino como una actividad actual de los individuos. (p. 4)

Además, algunas investigaciones como las de (Bagni, 2000, 2004) muestran que existe un paralelismo entre el desarrollo histórico de un concepto y el desarrollo del conocimiento de un individuo. Por ejemplo, Bagni (2000) observó que las justificaciones de los estudiantes cuando estudian la convergencia de la serie $\sum(-1)^n$ son similares a las que se han producido a lo largo de la historia. Este paralelismo se puede utilizar para apoyar el diseño curricular.

Burn (2005) se apoya en la historia para identificar posibles pasos del desarrollo de un concepto que sean acordes con el desarrollo del concepto en un estudiante. Así, propone un enfoque genético para la noción de límite que pospone definir la noción $\varepsilon$-$\delta$ del límite a cambio de utilizar el método de exahusción de la Grecia clásica. Esta fue la manera en la que se gestó el concepto de límite que tardó casi dos mil años en formalizar su definición.

Sfard (1991) también propone una reflexión sobre el proceso de formación de un concepto ya que la historia nos ha dejado muestras de que, como en el caso de la noción de número o de función, primero se da una concepción operacional y más tarde, tras años de estudio y experimentación, se da la concepción estructural que supone un estado más avanzado en el desarrollo del concepto. Esto mismo ocurre en la mente del individuo y la historia de la matemática es el vehículo para conocer estos estados en el desarrollo histórico del concepto.

### I 5.2 Contexto socio-cultural

Bagni (2004) propone un uso de la historia de la matemática basado en la dimensión socio-cultural de la enseñanza y del desarrollo de la ciencia que, como se comentó anteriormente, va más allá de un nivel básico (anécdotas o referencias históricas). Las anécdotas o referencias históricas es lo que más se ve en los libros de texto y también en algunos trabajos de investigación en los que proponen un cambio en el currículo basado en la introducción de notas históricas o problemas clásicos para introducir un tópico. Para Bagni, la historia de la matemática sirve de enlace para conectar la matemática con el resto de la cultura, ya que los procesos de enseñanza-aprendizaje se dan en un contexto socio-cultural como así ha sido también el desarrollo de la matemática y de la ciencia en general.

### I 5.3 Laboratorio para el desarrollo curricular.

Al igual que Bagni, Swetz (1989) considera que para que la historia de la matemática pueda enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, no basta con introducir algunas notas biográficas o contar alguna anécdota, sino que es necesario sumergir al estudiante en el proceso de resolución de un problema matemático planteado en épocas pasadas. Con este planteamiento, los problemas propuestos se convierten en un recurso que favorece el aprendizaje cognitivo y afectivo al hacer al estudiante partícipe del proceso de creación matemática. De este modo, es fácil motivar al estudiante y trasmitirle la belleza de la matemática. En este sentido, la historia de la matemática puede hacer la función de "herramienta metodológica (ya sea para corregir los defectos del método axiomático-deductivo habitualmente usado en la enseñanza de las matemáticas o para promover una ruptura con dicho método hacia planteamientos más endógenos o genéticos)" (Durán, 1998, p. 229). Esto es lo que hace Burn (2005) al proponer un desarrollo genético del concepto de límite inspirado en el desarrollo histórico del concepto.

En un trabajo de Kindt (2005) se encuentra una magnífica presentación de cómo utilizar problemas clásicos para introducir conceptos del análisis infinitesimal con una fuerte componente geométrica. Sin duda, con este tipo de trabajos la historia de la matemática hace "más apreciables las componentes estéticas que tanto abundan en las matemáticas, aunque no siempre sean fáciles de captar" (Durán, 1998, p. 230).

Desde el punto de vista de la teoría de los obstáculos epistemológicos de Brousseau, la historia de la matemática se puede utilizar para apoyar esta perspectiva (Bagni, 2004), ya que la historia puede ayudar al profesor a comprender las dificultades de sus alumnos y a buscar sugerencias para superarlas (Bagni, 2000).

Con especial énfasis en la formación del docente, la historia de la matemática es útil tanto "para el perfeccionamiento didáctico del profesor" (Durán, 1998, p. 229) que ejerce su docencia, como para la formación de profesores. En esta última, Furinghetti (2007) encuentra una herramienta con la que intervenir en el estilo de enseñanza de los futuros profesores para que no repitan patrones que han aprendido siendo estudiantes. Así, la historia de la matemática actúa como mediadora del conocimiento para enseñar, ya que permitirá que los futuros profesores encuentren el significado de los objetos matemáticos que tendrán que trasmitir.

# CAPÍTULO II El problema de investigación

En este capítulo se diferencian tres bloques. En el primero se abordan varios temas relacionados con el problema de investigación. En concreto, se analizan investigaciones que aportan resultados sobre conceptos como límite, infinito, y sucesiones y series numéricas. También se comentan algunas aportaciones al diseño curricular de tópicos del Análisis Matemático, y, por último, se revisan algunos trabajos de especial relevancia relacionados con el entorno computacional.

El segundo bloque recoge un breve repaso al desarrollo histórico del tópico *serie numérica*, en el que se han identificado cinco etapas: la etapa griega, medieval, de desarrollo, de formalización, y la etapa moderna.

En el tercer bloque se expone la descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica, que es uno de los pilares sobre los que se apoya el análisis de los datos de esta investigación.

## II 1 EL CONCEPTO DE LÍMITE

Hablar de la convergencia de una suma infinita es hablar de la existencia del límite de una sucesión (la de las sumas parciales) y, por tanto, es necesario comentar algunas investigaciones en las que tratan diversos aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. Además, no se ha de olvidar que el concepto de límite es uno de los grandes protagonistas del pensamiento matemático avanzado, ya que todo el Análisis Matemático se basa en la noción de límite (continuidad, derivabilidad, integrabilidad, convergencia de desarrollos en serie, aproximación,…).

Williams (2001) distingue tres tipos de investigaciones según cómo aborden el tema de la comprensión por parte de los estudiantes del concepto de límite. Las que utilizan el enfoque de Tall y Vinner (1981) de la definición del concepto y el esquema conceptual; las que centran su atención en los obstáculos a los que se enfrentan los estudiantes durante el aprendizaje, como Cornu (1991) y Sierpinska (1985); y las que siguen la tradición piagetiana de la teoría APOS liderada por Dubinsky (Asiala y otros, 1996; Cottrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendorf, Thomas, y Vidakovic, 1996; Dubinsky, 1991; Dubinsky y McDonald, 2001).

En general, las investigaciones bajo un paradigma constructivista destacan la prevalencia de una imagen dinámica del concepto de límite, que se manifiesta en una concepción de límite como proceso. Para algunos investigadores, esta concepción provoca obstáculos para la correcta adquisición del concepto de límite de una sucesión numérica (Williams, 2001; Mamona-Downs, 2001; Earles, 2000; Monaghan, Sun, y Tall, 1994). Sin embargo, en un trabajo reciente, Roh (2008) encontró un grupo de alumnos que eran capaces de compatibilizar esa imagen dinámica con la definición formal de límite.

Desde la perspectiva del marco teórico APOS, Cottrill y otros (1996) consideran que el concepto formal de límite no es estático, sino que presenta una fuerte componente dinámica que requiere que el individuo haya construido un esquema sólido del concepto de cuantificación. Proponen la siguiente descomposición genética de $\lim_{x\to a} f(x) = l$:

1. Acción de evaluar la función en un punto $a$.
2. Acción de evaluar la función en varios puntos próximos al valor de $a$.
3. Construcción del siguiente esquema coordinado:
   a. Interiorización del paso 2 para construir un proceso en el *dominio* consistente en que $x$ se aproxima al valor $a$.
   b. Construcción de un proceso en el *rango* consistente en que $y$ se aproxima al valor del límite $l$.
   c. Coordinación de los dos pasos anteriores a través de la función, de modo que cuando se aplica el proceso de aproximación de $x$ al valor $a$, se obtiene el proceso por el que de $f(x)$ se aproxima al valor del límite $l$.

4. El esquema que se ha construido en el paso 3 se encapsula en un objeto cuando se llevan a cabo acciones sobre él, como por ejemplo aplicar el límite a una suma de funciones.

5. Reconstrucción del proceso 3c en términos de intervalos y desigualdades, es decir, introduciendo el significado de la notación matemática para la estimación numérica y la proximidad de valores, a través de los símbolos $0 < |x - a| < \delta$ y $|f(x) - l| < \varepsilon$.

6. Aplicación del esquema de cuantificación conectado con el proceso reconstruido en el paso 5, para obtener la definición formal de límite.

7. Una vez completada la concepción $\varepsilon$–$\delta$, aplicación de la misma a situaciones concretas.

Estos investigadores consideran que cuando un individuo realiza una única evaluación de la función para concluir acerca de su límite, posee una preconcepción de límite; una concepción acción implica realizar un número finito de evaluaciones antes de obtener alguna conclusión, mientras que una concepción proceso requiere imaginar qué ocurre cuando se repite la evaluación de manera indefinida.

Przenioslo (2004) distingue seis elementos clave en el esquema conceptual de límite que construyen los estudiantes en cursos universitarios. De estos elementos se fija en su eficiencia, entendiendo por esquema conceptual eficiente aquel que se puede utilizar para resolver problemas correctamente. Estas seis concepciones dominantes son:

- ✓ Esquema conceptual centrado en la idea de *vecindad*: Esta concepción se considera eficiente, a pesar de que en algunas ocasiones conduce a los estudiantes a resultados erróneos porque, en general, los estudiantes con esta concepción entienden y aplican correctamente las propiedades y teoremas del concepto de límite, así como las relaciones entre este concepto y otras nociones.
- ✓ Esquema conceptual centrado en la idea de *aproximación gráfica*: Esta concepción resulta ineficiente porque normalmente no permite resolver los problemas o conduce a soluciones incorrectas.
- ✓ Esquema conceptual centrado en la idea de *aproximación de valores*: Esta concepción resulta bastante eficiente, aunque algunos estudiantes que la manejan manifiestan dificultades.
- ✓ Esquema conceptual centrado en la idea de que la función esté definida en $x_0$: Los estudiantes con esta concepción, suelen identificar el concepto de límite en un punto con el de continuidad de la función en ese punto. Mantiene muchos elementos en común con la concepción centrada en la idea de aproximación gráfica.
- ✓ Esquema conceptual centrado en la idea de que el límite de $f(x)$ en el punto $x_0$ es el valor $f(x_0)$: Esta concepción no resulta eficiente en la resolución de problemas

y, como en el caso anterior, mantiene muchos elementos en común con la concepción centrada en la idea de aproximación gráfica.

- ✓ Esquema conceptual centrado en un *enfoque esquemático de algoritmos*: Esta concepción no resulta eficiente en la resolución de problemas, no sólo en el caso de problemas difíciles, sino tampoco en problemas sencillos cuando varían ligeramente de los más habituales.

Muchas de estas imágenes se formaron cuando los estudiantes cursaban bachillerato, y el paso por la universidad no solo no consiguió que se sustituyeran por la definición del concepto, sino que en algunos casos incluso aumentó el número de asociaciones incorrectas entre los elementos del esquema conceptual. De hecho, en muchos casos ni siquiera el estudiante es capaz de darse cuenta de la contradicción existente entre su esquema conceptual y la definición del concepto. Esto constituye un tipo serio de factor potencial de conflicto (Tall y Vinner, 1981). En muchos casos, los errores que manifiestan los estudiantes son el producto del choque entre dos partes del esquema conceptual que son factores potenciales de conflicto, en concreto, el hecho de que un individuo evoque un esquema conceptual que es un factor potencial de conflicto con la definición del concepto, puede impedir que se produzca el aprendizaje de la teoría formal. Para Tall y Vinner, en el caso de la convergencia de sucesiones numéricas y límites de funciones reales, supone un importante factor potencial de conflictos el hecho de considerar que el límite nunca se alcanza; expresiones del tipo *tiende a*, *tan cerca como* o *acercarse* manifiestan esta concepción de límite inalcanzable.

La comprensión de otros tópicos que resultan imprescindibles para la correcta adquisición del concepto de límite, es un aspecto importante que hay que tener en cuenta. Para Mamona-Downs (2001), la comprensión del concepto de límite demanda la adquisición de ciertas nociones como la de número real, función o continuidad de funciones reales en un contexto gráfico. Un ejemplo de la importancia de estos requerimientos es el hecho de que los estudiantes tiendan a considerar una sucesión como un proceso más que como un objeto matemático, debido a que normalmente no consideran una sucesión como una función cuyo dominio son los números naturales.

Davis y Vinner (1986) proporcionan un listado de nueve ideas equivocadas que salieron a la luz en un test que realizaron acerca del límite de una sucesión o una serie. Estas nueve ideas son:

i) Una sucesión no alcanza su límite, de lo que se deriva que una sucesión constante no tiene límite.

ii) El carácter monótono implícito de una sucesión, que se deriva de considerar literalmente que la sucesión tiende a (va hacia) el límite.

iii) La confusión entre el límite y una cota.

iv) La suposición de que una sucesión tiene un último término, una especie de $a_\infty$.

v) La suposición de que, de alguna forma, uno puede recorrer los infinitos términos de una sucesión.

vi) La confusión entre $f(x_0)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x)$, que en el contexto de las sucesiones se refleja cuando se obtiene el límite de la sucesión evaluando sólo unos cuantos términos de la misma.

vii) La asunción de que una sucesión debe seguir un modelo sencillo, expresado a través de una fórmula algebraica simple.

viii) Descuidar la importancia que conlleva el orden en el que aparecen $\varepsilon$ y $N_0$ en la definición formal de límite cuando se lee de izquierda a derecha.

ix) El desconcierto que produce el hecho de que $n$ no llegue a infinito y sin embargo $a_n$ pueda alcanzar su límite.

Mamona-Downs (2001) sostiene que algunas de estas concepciones erróneas pueden ser el resultado de desconocer la caracterización de una sucesión como una función.

También Earles (2000) destaca la importancia del concepto de función para el aprendizaje del concepto de límite. Tanto es así, que una de las conclusiones que se derivan de su estudio es que la concepción que tienen los estudiantes del concepto de función está asociada con la comprensión del concepto de límite. Esta autora conjetura que las *fuentes de convicción* de los estudiantes son, en ocasiones, el origen de muchas dificultades a las que se enfrentan en el aprendizaje de las matemáticas. A grandes rasgos, se pueden clasificar a los estudiantes entre aquellos que tienen una fuente de convicciones externa y aquellos que tienen una fuente de convicciones internas. Para los primeros, el Análisis Matemático es un conjunto de hechos y procedimientos que han de memorizar y aplicar; los segundos, reconocen su lógica y su consistencia.

Para los estudiantes con una fuente de convicciones externa, la teoría que subyace a los hechos y procedimientos del Análisis Matemático carece de sentido, y están convencidos de que nunca llegarán a entenderla. A estos estudiantes no les convencen los argumentos matemáticos y no reconocen la utilidad de los contraejemplos; para ellos la verdad o falsedad de los argumentos matemáticos provienen de una autoridad externa que suele encarnar el profesor o el libro de texto. Sin embargo, los estudiantes con una fuente de convicciones interna aprecian la lógica y la consistencia del análisis; ellos buscan la verdad de los argumentos matemáticos en la evidencia empírica, la intuición o la lógica.

Los datos obtenidos por Earles para su investigación con estudiantes universitarios, muestran evidencias de la relación entre la comprensión del concepto de límite y la fuente de convicciones. Con las restricciones propias de una investigación cualitativa en cuanto a la representatividad de los datos obtenidos con unos determinados individuos, de su investigación se desprende que los estudiantes con una fuente de convicciones externa no son capaces de dar una definición coherente del límite de una función, o de explicar la validez de los procedimientos con los que resuelven los ejercicios; suelen tener la idea equivocada de límite como algo inalcanzable. Los estudiantes con una fuente de convicciones interna dan definiciones coherentes del límite de una función y, aunque cometan errores, son capaces de reflexionar formalmente sobre ello. Estos estudiantes poseen un esquema conceptual de carácter estático frente al esquema dinámico que poseen aquellos con una fuente de convicciones externa.

Además, la definición formal de límite requiere de ciertas habilidades que en ocasiones se convierten en un obstáculo cognitivo para los estudiantes y entorpecen el aprendizaje. Muestra de ello es la dificultad con la que a veces manipulan los cuantificadores lógicos, el valor absoluto o las desigualdades, que son imprescindibles en la comprensión de los límites de funciones o de sucesiones numéricas (Mamona-Downs, 2001; Tall y Vinner, 1981).

Desde la perspectiva de la noción de procepto (Gray y Tall, 1994), el límite es un caso particular de procepto porque el símbolo $\lim_{n\to\infty} a_n$, o referido a una función cualquiera $\lim_{x\to a} f(x)$, representa tanto el proceso de acercarse a un valor específico, como el valor del límite en sí mismo, y los estudiantes normalmente centran su atención en el límite como proceso (Monaghan, Sun, y Tall, 1994). Además, este proceso no se resuelve de forma algorítmica, sino que es necesario emplear técnicas que requieren cierto nivel de abstracción y que involucran el concepto de infinito, lo cual aumenta la complejidad de este concepto.

Para Monaghan (1991), el lenguaje es una de las fuentes de dificultades asociadas al concepto de límite, debido a que expresiones como *límite*, *converge*, *se aproxima*, o *tiende a*, tienen un significado en la vida cotidiana con distintos matices al significado matemático. Este hecho puede provocar que los estudiantes formen una imagen del concepto asociada al concepto de límite que no se corresponde con la definición matemática formal del mismo.

Roh (2008) contrastó cómo influyen las imágenes que han construido los estudiantes sobre el concepto de límite, con la definición formal de límite de una sucesión, y encontró tres tipos de imágenes que denominó asintótica, de puntos de acumulación y de límite puntual. Estas tres imágenes tienen en común que son dinámicas, pero sólo la última es compatible con la definición formal de límite de una sucesión. Aquellos estudiantes que han construido una imagen de límite asintótica, consideran que una sucesión converge sólo si su gráfica tiene la forma de puntos que se aproximan cada vez más a una línea, la asíntota, que nunca cortan. Estos estudiantes cometen errores con sucesiones convergentes que no son monótonas o con sucesiones en las que el límite coincida con algún término de la sucesión, como es el caso de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ par \\ 1-\frac{1}{n} & si\ n\ es\ impar \end{cases}$, y por tanto sus gráficas no tienen el aspecto de la típica sucesión monótona acotada:

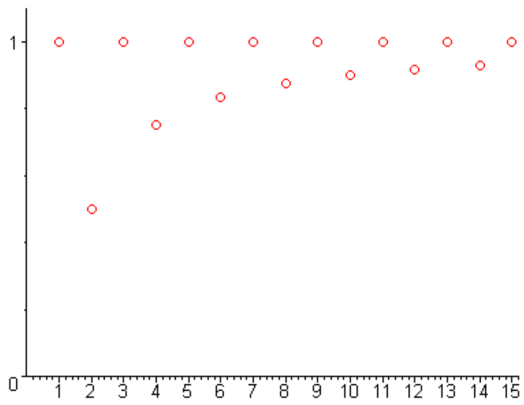


Figura 9. Gráfica de la sucesión no monótona y convergente $a_n = \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ impar \\ 1 - \frac{1}{n} & si\ n\ es\ par \end{cases}$

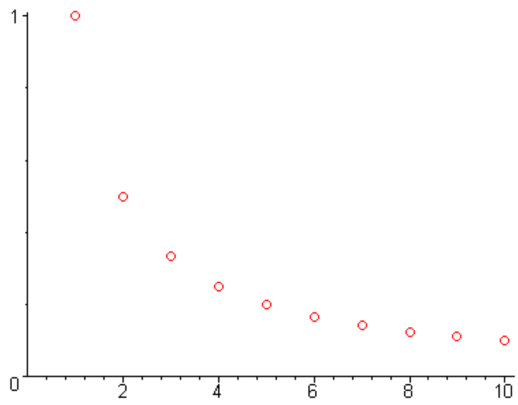


Figura 10. Gráfica de la sucesión monótona acotada $a_n = \frac{1}{n}$

Otro grupo de estudiantes consideraban que una sucesión es convergente si sus términos se aproximan a un valor determinado, el punto de acumulación. En este caso, sucesiones oscilantes con dos puntos de acumulación pueden ser consideradas convergentes con dos límites, como es el caso de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$ que posee dos puntos de acumulación, $1$ y $-1$, pero no tiene límite.

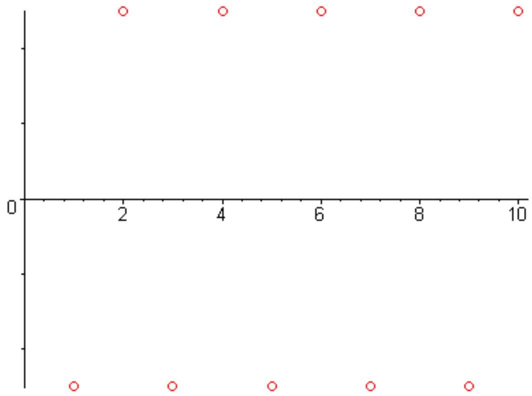


Figura 11. Gráfica de la sucesión oscilante $a_n = (-1)^n$

Estudiantes con una imagen de límite como punto de acumulación sí aceptan que algún término de la sucesión valga lo mismo que el límite, y coinciden con aquellos que poseen una imagen asintótica en no tener problemas con aquellas sucesiones que son monótonas y acotadas.

Un tercer grupo manifestó una imagen de límite puntual, es decir, considera que una sucesión es convergente cuando sus términos se aproximan a un único valor, o son igual a él. La unicidad del límite es lo que marca la principal diferencia entre este grupo y los anteriores, y también es lo que hace que esta imagen sea compatible con la definición formal de límite de una sucesión.

Una de las principales conclusiones a las que llega Roh en su trabajo, es que no hay que cuestionarse la conveniencia o no de inducir con la instrucción una imagen dinámica de límite con expresiones del tipo *acercarse cada vez más* o *aproximarse*, sino más bien qué tipo de imagen dinámica se induce, ya que las tres categorías de imágenes tenían en común que eran dinámicas pero sólo una de ellas era compatible con la definición formal de límite. Roh propone una actividad que denomina $\varepsilon - strip$ que es efectiva para inducir una imagen de límite que no sea incompatible con algún aspecto de la definición formal.

## II 2 EL CONCEPTO DE INFINITO

Desde la antigua Grecia, el concepto de infinito ha suscitado controversias y paradojas que aún se pueden observar en las aulas de primeros cursos de matemática superior. La dicotomía aristotélica de infinito potencial versus infinito actual es, según Fischbein, Tirosh, y Hess (1979), un mecanismo de nuestra inteligencia para sobrellevar la naturaleza contradictoria del concepto de infinito. Este carácter contradictorio intrínseco al concepto de infinito, justifica la versatilidad de la intuición del infinito que se muestra sensible frente a cambios en el contexto (Monaghan, 2001; Tsamir, 2001; Tirosh y Tsamir, 1996). Hace ya treinta años de la experiencia que llevaron a cabo Fischbein y otros (1979) pasando un cuestionario a estudiantes de diferentes cursos para cotejar sus hipótesis acerca de la naturaleza contradictoria del concepto de infinito, y de la permanencia de la intuición del infinito con la edad y la formación académica. En ella, observaron dos tipos de respuestas, las *finitistas*, asociadas a afirmaciones del tipo "el proceso se termina", y las *infinitistas* que se asocian a respuestas del tipo "el proceso es infinito". Una de las conclusiones a las que llegaron, y que hoy en día recogen muchos trabajos relacionados con la comprensión de la noción de infinito (Dienes, 2002; Mamona-Downs, 2001; Garbin, 2000), es que nuestra manera natural de pensar es finitista debido a que nuestros esquemas mentales están adaptados a nuestras experiencias con una realidad finita.

Hace unos años, en un especial de la revista Educational Studies in Mathematics sobre el concepto de infinito, se publicó un trabajo en el que Tommy Dreyfus y los editores de ese número especial, recogen parte del trabajo que Efraim Fischbein dejó tras su muerte (Fischbein, 2001). En él, mantiene su teoría compartida por Tirosh y Hess acerca de que "nuestra lógica, con todas sus leyes, puede manejar consistentemente sólo conceptos que expresan realidades finitas, y alcanza conclusiones bien definidas que concuerden con las premisas dadas sólo si tratan de objetos finitos o conjuntos finitos de elementos" (p. 309). De ahí que aparezcan dificultades y se produzcan contradicciones cuando nos enfrentamos al infinito en sentido actual. Sin embargo, no nos cuesta asumir un concepto dinámico asociado a un proceso finito que se puede repetir indefinidamente, el infinito potencial. La dualidad del concepto de infinito como proceso y como objeto se ha analizado desde distintas perspectivas (Bagni, 2001a; Dubinsky, 1991; Gray y Tall, 1994; Monaghan, 2001; Sfard, 1991; Weller, Brown, Dubinsky, McDonald, y Stenger, 2004).

Monaghan (2001) asegura que la primera idea que desarrollan los estudiantes sobre el concepto de infinito está asociada al infinito como proceso, y el lenguaje que utilizan refleja esta concepción: *Infinity means going on and on, this goes on and on*.

Desde la perspectiva de la teoría APOS, Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown, (2005a) proponen una estrategia para que los estudiantes mejoren la comprensión del concepto de infinito, basada en incitar a que se produzca la interiorización y la encapsulación. Para la interiorización, se han de diseñar actividades que requieran la repetición de acciones, y la reflexión sobre las mismas. Para la encapsulación, se ha de crear la necesidad de ejecutar operaciones sobre los procesos resultantes de la interiorización. Es importante tener en cuenta que el análisis desde la teoría APOS no ofrece una explicación de lo que realmente ocurre en la mente del individuo, lo cual es imposible de conocer, sino que describe los pensamientos para los que puede estar capacitado un individuo. De hecho, el que un individuo posea ciertas estructuras mentales no significa que las aplique en una situación determinada, ya que ello depende de otros factores como puede ser el estado emocional.

Dubinsky y otros (2005a) distinguen tres grandes hitos en el desarrollo histórico del concepto de infinito:

- ✓ La distinción aristotélica entre el infinito potencial y el infinito actual. En esta concepción dual, que ha dominado el panorama filosófico y matemático, el infinito actual se muestra como algo inconcebible, intuitivamente contradictorio y, por tanto, incomprensible y causa de las incoherencias asociadas a las cuestiones que involucren el infinito.
- ✓ La aceptación del infinito actual. Dentro de la corriente filosófica del racionalismo, y con una fuerte componente religiosa, algunos matemáticos como Bolzano o Descartes aceptan la existencia del infinito actual como resultado de un proceso mental que va más allá de lo que podemos experimentar.
- ✓ La formalización del infinito. El trabajo de Cantor sobre los transfinitos formaliza la concepción sobre el infinito, distinguiendo entre dos tipos cognitivos distintos de infinito, el infinito alcanzable, que se corresponde con el concepto aristotélico de infinito actual, y el infinito inalcanzable que es el infinito potencial.

Para Dubinsky y otros (2005a), la teoría de los transfinitos es el producto de que Cantor haya “encapsulado los procesos infinitos involucrados en la construcciones de los números cardinales y ordinales, y haya sido capaz de pensar en ellos como objetos a los cuales podía aplicar acciones y procesos (p.ej. operaciones aritméticas o comparación entre conjuntos)” (p. 346). Según esto, la concepción de infinito potencial es la concepción del infinito como proceso.

Tomando como ejemplo la construcción cognitiva del conjunto de los números naturales, el primer paso consiste en la ejecución de la acción de contar o enumerar algunos de sus elementos, el 1, el 2, el 3; ésta es una concepción *acción* de los números naturales. La repetición de la acción de añadir 1 indefinidamente conlleva la interiorización de esta acción en un proceso, que es la concepción de infinito potencial. La concepción de infinito actual es el resultado de encapsular este proceso en un objeto; este objeto, el infinito actual, es un infinito cognitivamente alcanzable. Así, desde la perspectiva de la teoría APOS, el infinito no alcanzable de Cantor es un ejemplo del infinito como proceso que no ha llegado a ser encapsulado.

Por tanto, el infinito potencial y el infinito actual representan dos concepciones cognitivas diferentes del infinito, que están relacionadas mediante el mecanismo mental de la encapsulación, y que forman parte del esquema de un individuo. Que cognitivamente sea alcanzable o no, depende de si se ha producido o no la encapsulación del infinito como proceso en el objeto infinito actual.

El análisis de las paradojas de Aquiles y la tortuga (Weller y otros, 2004; Dubinsky y otros, 2005a), y la de las pelotas numeradas de tenis (Dubinsky y otros, 2005a), sirven para describir las etapas que conducen a la construcción del concepto de infinito cuando aparecen procesos iterativos infinitos (Brown y otros 2008). Desde el marco teórico APOS, una acción consiste en la ejecución de un número pequeño de iteraciones que, en el caso de Aquiles y la tortuga, se produce cuando la tortuga recorre cierta distancia y Aquiles cubre parte de la distancia que ha recorrido la tortuga; en el caso de las pelotas de tenis, se produce cuando se introducen dos nuevas pelotas en la mesa y se retira la que está numerada con el menor natural. Un individuo puede iterar estas acciones varias veces pensando en ellas explícitamente hasta un punto en el que las interioriza en un proceso y puede imaginarse la repetición de la acción de manera indefinida. En este punto el individuo posee la concepción de infinito potencial.

El mecanismo de encapsulación ocurre cuando un individuo lleva a cabo acciones con y entre procesos, transformándolos en objetos. En el caso de la paradoja de Aquiles y la tortuga, el individuo ha de coordinar dos procesos: uno es el resultado de cubrir la distancia que recorre la tortuga en cada iteración, y el otro es el resultado del avance de Aquiles detrás de la tortuga. Si un individuo realiza la acción de comparar las distancias recorridas por cada uno cuando el proceso continúa indefinidamente, obtendrá la suma de las series correspondientes y podrá comprobar que la distancia recorrida por Aquiles es mayor que la de la tortuga, por lo tanto la paradoja desaparece porque Aquiles logra alcanzar a la tortuga. En el caso de las pelotas de tenis, puesto que en el paso enésimo se elimina la bola enésima, la encapsulación se produce cuando se comparan el conjunto de bolas en la mesa tras completar el proceso, con el conjunto vacío. La encapsulación del proceso iterativo infinito requiere una concepción de infinito actual.

También esta teoría presenta argumentos que justifican los motivos que inducen a muchos estudiantes a contestar que no es cierta la igualdad $0.999\ldots = 1$ (Weller y otros, 2004; Dubinsky, Weller, McDonald, y Brown, 2005b). Una causa posible de esta confusión puede ser el que el individuo no haya construido completamente la concepción proceso de decimal infinito, en cuyo caso puede concebir el decimal infinito $0.999\ldots$ como una cadena finita pero indeterminada de nueves, por lo que siempre existirá una pequeña diferencia con el número 1.

Otra posible explicación puede ser la concepción de un decimal infinito como un proceso y no como un objeto. En ese caso, puesto que el símbolo “1” representa un objeto, no tiene sentido para el individuo igualar un proceso con un objeto, ya que un proceso es el resultado de ejecutar acciones mientras que un objeto es algo sobre lo que se ejecutan acciones. Si el individuo logra encapsular el proceso ejecutando una acción sobre él, en este caso el cálculo del límite de la sucesión $0.9, 0.99, 0.999, \ldots$, entonces puede concebir el decimal infinito $0.999\ldots$ como un objeto y así lo podrá comparar con el objeto $1$, dándose cuenta de que en valor absoluto difieren una cantidad menor que cualquier número positivo, por lo que sólo es posible que esa diferencia sea $0$ y así se cumple la igualdad. Para que se produzca la encapsulación, el proceso ha de entenderse como un todo y así se podrán ejecutar acciones con él.

Fischbein (2001) atribuye la causa de los errores que aparecen en los razonamientos que involucran el infinito a los modelos que actúan en el pensamiento del individuo. Según este autor, "pensamos en términos de modelos que son sustitutos de ciertos conceptos originales; normalmente esos conceptos son demasiado abstractos, o demasiado complejos" (p. 311) para nuestra mente. Así, los modelos mentales son representaciones mentales de un concepto, generalmente abstracto, que ayuda al individuo en los procesos de razonamiento facilitando su manejo; el modelo es un sustituto del concepto, lo reemplaza. Los modelos pueden ser abstractos o simbólicos, analógicos, paradigmáticos o representados por diagramas, tácitos o explícitos. Un mismo modelo de un concepto puede generar conclusiones correctas o erróneas, según el aspecto o la propiedad del concepto sobre la que se aplique tal modelo. En general, el concepto de infinito provoca la aparición de resultados contradictorios, sobre todo cuando nos apoyamos en modelos simbólicos. Otro tipo de modelos que provocan incoherencias, son los modelos tácitos, aquellos actúan en los razonamientos sin que tengamos conciencia de ellos. Estos modelos, aunque se hayan generado de manera consciente en nuestra mente, con el tiempo reemplazan implícitamente ciertas componentes del proceso de razonamiento y se acomodan en nuestra mente sin que seamos conscientes de su influencia. De este modo, soportan razonamientos correctos de una matemática elemental, pero provocan razonamientos incorrectos cuando se introducen conceptos más abstractos propios del pensamiento matemático avanzado, como es el caso del infinito.

Garbín y Azcárate (2002) presentan unos resultados relativos a las inconsistencias e incoherencias en el esquema conceptual de infinito actual en estudiantes de bachillerato. En este trabajo se han clasificado a los estudiantes en tres categorías: coherente y consistente, coherente pero inconsistente, e incoherente. La primera categoría se corresponde con estudiantes que manifiestan un esquema conceptual de infinito actual consistente y además este esquema lo mantiene al resolver problemas que representan la misma noción matemática expresada en diferentes registros de representación semiótica. La segunda categoría se corresponde con estudiantes que manifiestan un esquema conceptual de infinito actual inconsistente, que mantienen al resolver problemas que representan la misma noción matemática expresada en diferentes registros de representación. La última categoría se corresponde con estudiantes que manifiestan un esquema conceptual de infinito actual inconsistente y además incoherente, de modo que "dependiendo de la representación del problema, puede dar una respuesta consistente o no con el concepto, que puede ser coherente o no con otra representación del mismo problema" (p. 100).

Belmonte (2009) amplió los modelos intuitivos observados en anteriores investigaciones[3] con cuatro modelos más, el modelo intuitivo de indefinición, acotado-finito / no acotado-infinito, de divergencia, y de aproximación. Además, concluyó que estos modelos presentaban una dependencia en sus patrones de evolución, aspecto que hasta este momento no se había observado en otras investigaciones. La gran cantidad de datos que obtuvo de estudiantes de cuatro niveles educativos españoles[4], le permitió describir "patrones de evolución nivelar" que muestran las características del esquema conceptual colectivo del concepto de infinito en individuos de la misma edad a lo largo de los cuatro niveles educativos. Belmonte constata el papel clave que desempeña el pensamiento metafórico de los individuos en el aprendizaje del concepto de infinito, y destaca la relevancia del lenguaje en la corporeización de este concepto.

## II 3 SUCESIONES Y SERIES NUMÉRICAS

Las sucesiones y series numéricas constituyen una herramienta muy poderosa para el desarrollo de otros conceptos como el de función, límite o infinito, y para la matematización de la vida cotidiana a partir de la modelización (Weigand, 2004). En particular, el tema de la convergencia de sucesiones y series, es de máxima importancia por su relación con otros tópicos propios de la matemática aplicada a la ingeniería, tales como la aproximación, los desarrollos trigonométricos y en series de potencias o las integrales impropias, por nombrar algunos. A lo largo de toda la historia, han sido objeto de controversia por acarrear consigo conceptos tan complejos como el de límite y el de infinito, por lo que no es de extrañar el interés por facilitar la comprensión de este concepto. En la literatura se encuentran muchos trabajos que pretenden contextualizar problemas que involucren sucesiones y series numéricas para eludir el habitual formalismo de la enseñanza de las matemáticas (Aledo y Cortés, 2000, 2001; Bennett, 1989; Bossé y Faulconer, 2007; Boulton y Rosas, 2003; Hammack y Lyons, 2006; Jaramillo y Campillo, 2000; Lay, 1985; Silvester, 1997; Yarema y Sampson, 2001). En muchas de estas propuestas se hace uso de las representaciones geométricas y de las ventajas que aportan las herramientas informáticas para facilitar las operaciones aritméticas, y la visualización de gráficas y otras representaciones. En el siguiente apartado se comentarán algunos de estos trabajos.

Otro tipo de investigaciones son aquellas que utilizan el contexto de las sucesiones y series numéricas para estudiar otros aspectos de las matemáticas, como el caso de Iannone y Nardi (2001) que utilizan el contexto del estudio de criterios de convergencia de series numéricas, en particular el criterio de comparación en el límite, para analizar la demostración formal en estudiantes de bachiller y primeros cursos de Universidad. Lo más destacado de esta investigación, es la tendencia que observaron en muchos estudiantes a esperar que la aplicación de un criterio de convergencia siempre concluya. La resistencia a aceptar que el criterio no siempre aporta información, se traduce en una mutación del

[3] Modelo de inclusión, infinito = infinito, de inagotabilidad y punto-marca.
[4] Educación Primaria (de 6 a 12 años), Secundaria Obligatoria (de 12 a 16 años), Bachillerato (de 16 a 18) y Universidad (a partir de 18 años).

criterio que desemboca en respuestas erróneas. También estas autoras utilizan el contexto de la definición de convergencia de una sucesión numérica para analizar los errores cometidos por los estudiantes debidos a la utilización o interpretación incorrecta del cuantificador universal. Esto, en parte, se debe a que los estudiantes están acostumbrados a probar los resultados para unos cuantos casos particulares e inferir que se cumple para todos.

Otra vertiente de las investigaciones sobre sucesiones y series numéricas es la que se centra en el estudio histórico. Bagni (2005), estudiando la reacción de los estudiantes ante la serie de Grandi[5], observó que algunos razonamientos son similares a los que se han realizado en épocas anteriores. En este trabajo comprobó que cuando un estudiante considera una suma infinita como una operación aritmética, tiene problemas con la serie de Grandi. Para Bagni, desde el punto de vista epistemológico, el punto clave es el paso de lo finito a lo infinito, cuyo principal problema es cultural. Este mismo autor, en (Bagni, 1999), realiza un breve repaso histórico al concepto de serie: desde los primeros trabajos relacionados con series convergentes (Zenón, Aristóteles, Arquímedes, Gregorio de San Vicente) a los primeros trabajos con series divergentes (Oresme, Jacob Bernoulli) o sobre series indeterminadas (Grandi, Leibniz y Wolf, Lagrange, Euler, Lacroix, Riccati, D'Alembert).

Dentro de la corriente del pensamiento matemático avanzado que considera la dualidad proceso/objeto, Kidron (2002) y Kidron, Zehavi, y Openhaim (2001) analizan la percepción de los estudiantes de las sumas infinitas de funciones a partir de los cuestionarios que se pasaron durante tres años consecutivos a estudiantes del mismo curso académico. Estos estudiantes recibieron una instrucción en un entorno computacional con el software de cálculo simbólico Mathematica, y se les introdujo el concepto de suma infinita desde dos enfoques, el algebraico y el analítico.

En el enfoque analítico la suma infinita se representa como un proceso potencialmente infinito. Los estudiantes han de utilizar el ordenador para representar curvas y para obtener los polinomios de Taylor de distinto grado de dichas curvas. Utilizando animaciones, el estudiante puede observar cómo se aproxima la gráfica del polinomio de Taylor a la de la curva cuando aumenta el grado del polinomio. Así, el estudiante visualiza el proceso de aproximación sucesiva.

El enfoque algebraico se basa en la idea de Euler de expresar funciones no polinómicas como un polinomio con infinitos términos, es decir, una suma infinita. De este modo, la suma infinita representa un objeto que requiere una concepción de infinito actual. El estudiante ha de encontrar un polinomio con un número infinito de términos que verifique la igualdad $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$, reproduciendo el tipo de cálculos que manejó Euler, es decir, asumiendo que tal polinomio existe, se obtienen los valores de los coeficientes multiplicando a ambos lados de la igualdad por $Q(x)$ y se comparan los coeficientes de los polinomios que resultan.

[5] $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.

A partir de las respuestas de los estudiantes, Kidron (2002) observa tres formas de percibir una suma infinita de funciones:

- ✓ Como una aproximación finita, es decir, como una suma con un número muy grande de sumandos pero finito.
- ✓ Como un proceso, no como un producto.
- ✓ Como un límite, es decir, como el producto de un proceso infinito.

Comparando los resultados obtenidos con los de otras investigaciones, hubo un porcentaje relativamente alto de estudiantes que comenzaban a dar muestras de concebir la suma infinita como un límite, esto es, como un objeto. La explicación a este hecho hay que buscarla en la instrucción que recibieron, ya que el uso del ordenador permitió manejar el concepto de suma infinita desde dos puntos de vista, como proceso y como objeto, y facilitó la transición de uno a otro. El software ayuda a distinguir el proceso de añadir infinitos sumandos, que es un proceso divergente, del proceso suma infinita que puede ser convergente; este efecto se consigue tanto con las animaciones de las gráficas, que permiten percibir como concluido un proceso que continúa, como a través de la manipulación algebraica de expresiones con infinitos términos. A pesar de estas facilidades, la instrucción no logró resolver todas las dificultades.

Mamona-Downs (2001) también aporta pistas acerca de cómo favorecer el paso de una concepción proceso a una concepción objeto, cuando apunta que el descubrimiento por parte de un individuo de que con la expresión general de una sucesión se puede obtener cualquier término de la sucesión, le ayuda a pasar de una concepción proceso de sucesión, a una concepción objeto.

Uno de los trabajos más destacados sobre sucesiones numéricas es el que realizaron McDonald y otros (2000) bajo el paradigma APOS. Estos autores plantearon una descomposición genética del concepto de sucesión numérica igual que para el concepto de función, ya que una sucesión es una función con dominio discreto. En este trabajo justifican la importancia que para ellos tiene el concepto de sucesión, ya que el estudiante lo necesitará cuando trabaje otros tópicos del Análisis Matemático como polinomios y series de Taylor, desarrollos en serie de soluciones de ecuaciones diferenciales, o para comprender la equivalencia entre sucesión y la definición $\varepsilon$-$\delta$ de continuidad.

En su investigación, relacionan las concepciones de los estudiantes de las sucesiones numéricas con las concepciones sobre otros tópicos como límites, monotonía y cotas. Señalan que los estudiantes asocian la palabra monotonía al significado usual de hablar en tono monótono y no asocian esta palabra con su significado en el contexto de las sucesiones. En cuanto a la cota, aunque en general entienden su significado, se producen errores debidos a dos motivos principalmente: la creencia de que la cota es única y la vinculación de la cota con el límite.

Una de las aportaciones más importante de este trabajo es la identificación de dos entidades cognitivas que los estudiantes construyen cuando se enfrentan a problemas que involucran sucesiones numéricas, SEQLIST y SEQFUNC.

Un individuo posee una concepción SEQLIST de una sucesión cuando la identifica con una lista de números. Hay dos elementos especialmente importantes en esta concepción, la presencia de las comas que separan los términos de la sucesión, y la existencia de un patrón que siguen los elementos de la lista. Del análisis de datos que realizaron, dedujeron que para los estudiantes resulta relativamente sencillo construir una concepción objeto de SEQLIST por la solidez del objeto cognitivo número natural y porque enumerar es una habilidad que se adquiere en los primeros años de vida de un individuo. Además, esta concepción es productiva porque con ella pueden resolver la mayoría de los problemas a los que se enfrentan.

Una construcción cognitiva más sofisticada consiste en identificar una sucesión con una función cuyo domino es el conjunto de los números naturales, es la concepción SEQFUNC. Uno de los motivos por los que los estudiantes no llegan a alcanzar una concepción objeto de SEQFUNC, es porque poseen un esquema pobre del concepto de función. Este hecho se manifiesta, por ejemplo, cuando un estudiante dibuja una gráfica de una sucesión con un trazo continuo, o cuando manifiesta una concepción de función asociada a un signo igual seguido de una expresión. De ahí la importancia de poseer un esquema rico y coherente de función para poder abordar otros tópicos del Análisis Matemático relacionados con concepto.

Los autores consideran que existe un vínculo entre estas dos estructuras cognitivas que es sencillo de establecer para los estudiantes: una concepción acción de SEQFUNC consiste en evaluar una expresión con números enteros; la interiorización de esta acción en un proceso genera el objeto SEQLIST que, como se comentó anteriormente, es un *objeto cognitivo sólido* para los estudiantes. Así, el objeto SEQLIST aparece como el resultado de una concepción proceso de SEQFUNC.

La comprensión del concepto de sucesión no sólo requiere la construcción de estas dos estructuras, sino que también necesita que se establezcan relaciones entre ellas para desencadenar una construcción más madura del esquema. Cuando un individuo tiene la concepción SEQFUNC de sucesión, se encuentra en un estado más avanzado de comprensión que con la concepción SEQLIST. Conforme aumenta la conexión entre estos dos objetos mentales y la reflexión sobre ellos, un individuo comienza a verlos como dos representaciones de la misma entidad matemática, y así construye un esquema maduro del concepto de sucesión. Los estados de construcción del esquema son los siguientes:

En el estado Intra del desarrollo del esquema de sucesión, no se relacionan las dos concepciones de sucesión SEQFUNC y SEQLIST, es decir, el individuo maneja una u otra concepción para resolver un problema pero no establece ninguna conexión entre las mismas.

En el estado Inter, el individuo aún no ha construido el objeto cognitivo de SEQFUNC y no tiene conciencia de la relación entre las dos concepciones SEQLIST y SEQFUNC. Sin embargo, puede utilizar una sucesión como una lista o como una expresión dependiendo del contexto, aunque no sea capaz de ver la equivalencia entre ambas. Aunque la mayoría de los estudiantes que observaron en el estado Inter mostraban una concepción proceso de SEQFUNC, alguno podía haber logrado una concepción objeto de SEQFUNC y no tener conciencia de la equivalencia entre las dos construcciones SEQFUNC y SEQLIST que le llevarían a un estado del desarrollo más avanzado.

Para un individuo que haya alcanzado el estado Trans del desarrollo del esquema de sucesión, SEQFUNC y SEQLIST son distintas representaciones del mismo concepto, y empleará una u otra según el contexto. En este estado, es necesario, aunque no suficiente, poseer una concepción objeto tanto de SEQLIST como de SEQFUNC.

## II 4 LA INSTRUCCIÓN

Uno de los puntos clave en los procesos de enseñanza y de aprendizaje es la implementación de un buen diseño curricular por parte del profesor que favorezca la adquisición de conocimientos en el estudiante. Son muchas las evidencias que se encuentran en la práctica docente que confirman la existencia de dificultades en el aprendizaje de las matemáticas asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados, y que tienen que ver con la institución, el currículo, y con los métodos de enseñanza (Socas, 1997, 2007). Éste es el caso de Tall y Vinner (1981) que atribuyen al programa del profesor la responsabilidad de crear algunas situaciones de conflicto, como por ejemplo, cuando utiliza ejemplos que sólo evocan una parte del concepto y luego exige al estudiante que evoque otra parte. Otra forma en la que el diseño curricular frena el aprendizaje, es cuando provocan situaciones potenciales de conflicto (véase I 1.2).

En la literatura aparecen numerosos trabajos cuyo objetivo es proponer y evaluar un diseño curricular sobre algún tópico concreto. Muchos de estos trabajos, como los de Przenioslo (2005) y Aldis y otros (1999), están impulsados por el malestar producido en el profesor como consecuencia del fracaso, cada vez más generalizado, en la adquisición de conceptos matemáticos. Algunos, buscan en el desarrollo histórico del concepto objeto de estudio la clave para su propuesta (Bagni, 2005; Burn, 2005; Kindt, 2005; Swetz, 1989), y otros recurren a otros enfoques no tradicionales que dejan de lado el habitual formalismo de la enseñanza de las matemáticas para favorecer la comprensión, a veces apoyándose en las nuevas tecnologías que facilitan la manipulación de distintos enfoques (geométrico, analítico, etc.) o recurriendo a juegos y anécdotas para contextualizar algunos problemas de cálculo (Aldis y otros, 1999; Aledo y Cortés, 2000, 2001; Bennett, 1989; Bossé y Faulconer, 2007; Boulton y Rosas, 2003; Dienes, 2002; Hammack y Lyons, 2006; Jaramillo y Campillo, 2000; Kidron, 2002; Kidron y otros, 2001; Mamona-Downs, 2001; Monaghan y otros, 1994; Sierra, González, y López, 2002; Silvester, 1997; Tsamir, 2001; Williams, 2001; Yarema y Sampson, 2001).

Aledo y Cortés (2001), rompiendo con el tradicional enfoque analítico-algebraico, utilizan un enfoque geométrico para sumar algunas series numéricas. Con su propuesta pretenden, por un lado, estimular el trabajo creativo del estudiante en un entorno poco habitual por conjugar dos partes de la matemática que suelen presentarse por separado: el análisis y la geometría. Por otro lado, su propuesta juega un papel preliminar para la introducción del concepto de serie numérica, por lo que la falta de rigor se verá compensada con un tratamiento posterior más formal desde el punto de vista analítico-algebraico. Anteriormente, ya habían realizaron un trabajo similar con sucesiones trigonométricas (Aledo y Cortés, 2000). También Boulton y Rosas (2003) utilizan argumentos geométricos para sumar series de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{2^n}$, donde $p = 0,1,2,...$, y Bennett (1989) se apoya en el recurso que ofrece la visualización de rectángulos para justificar la convergencia de la serie geométrica. Para valores enteros positivos de la razón utiliza la adicción de rectángulos, y cuando la razón es el inverso de un entero utiliza la división de los rectángulos. Con la representación geométrica de términos de la serie, pretende facilitar al estudiante la comprensión de la convergencia de la serie geométrica.

Yarema y Sampson (2001) utilizan el contexto de las tarjetas de crédito para trabajar el tópico de progresiones geométricas y aritméticas, ofreciendo un buen ejemplo de contextualización; Silvester (1997) utiliza el contexto de un cuento protagonizado por ranas para analizar la serie geométrica de razón ½ y la serie armónica; y Dienes (2002) pretende clarificar al estudiante la comprensión de las sumas infinitas a través de un par de ejemplos en los que contextualiza una suma infinita con un problema geométrico de cuadrar un triángulo y con un problema de reparto.

Otro tipo de propuesta, también contextualizando una suma infinita con un problema geométrico, pero apoyándose en una secuencia que permite a cada estudiante avanzar al ritmo de su capacidad de comprensión, es la que plantea Cynthia Lanius, asesora independiente y codirectora del Empowering Leadership: Computing Scholars of Tomorrow Alliance, grupo apoyado por el National Science Foundation's Directorate for Computer and Information Science (CISE) y el programa Engineering's Broadening Participation in Computing (BPC), a través de su página web. En ella, nos brinda una serie de problemas que denomina "Fun Mathematics Lessons" entre los que se puede encontrar "Visualizing An Infinite Series" (Lanius, 1999-2008).

La lección de Lanius comienza contextualizando la serie geométrica de razón ¼ con un problema geométrico de división de un trapecio (véase el anexo II), y su contenido sigue la línea del trabajo de Lay (1985) y la representación visual de la suma de la serie geométrica de razón ¼ que aparece en (Mabry, 1999).

También Hammack y Lyons (2006) emplean la representación geométrica de áreas de rectángulos para justificar sin formalismos, y haciendo uso de la visualización, el criterio de convergencia de las series alternadas. Con su propuesta, pretenden eludir el obstáculo que supone para los estudiantes algunos elementos matemáticos considerablemente abstractos que se encuentran en la demostración formal de este resultado. La opinión de sus estudiantes de lo clarificador de este enfoque frente a la demostración formal, confirma su éxito.

Desde otro punto de vista, uno de los problemas que afectan a la enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático es el papel del rigor. La enseñanza tradicional de las matemáticas a nivel avanzado ha sido generalmente una enseñanza formal que, en carreras técnicas que requieren conocimientos matemáticos, se puede convertir en una barrera para acceder al significado de los conceptos.

En este sentido, Weigand (2004) sugiere que, para evitar que el estudiante trabaje sólo a nivel simbólico, ejercitando la manipulación algebraica sin llegar a comprender los conceptos, el proceso de formación de un concepto comience de manera no formal, con observaciones empíricas. También en esta línea, Bagni (2001b) afirma que la evolución histórica del concepto de infinito, y en particular la de límite, se produce paralelamente a la evolución del lenguaje y del modo de representación. Esta evolución paralela, y su influencia en el desarrollo del tópico matemático, es parte de la información que nos aporta un análisis detallado de la historia. Así, en la línea de Sfard (1991), Bagni propone que el aprendizaje del concepto de infinito evolucione de un modo similar a como lo ha hecho el concepto en su desarrollo a lo largo de la historia: en una fase inicial el concepto se percibe intuitivamente, y en una segunda fase madura se concibe estructuralmente.

Otro planteamiento es el que propone Earles (2000) que, ante la disyuntiva que se les plantea a los profesores acerca de cómo enseñar los tópicos del Análisis Matemático, informalmente proporcionando al estudiante un entorno que soporte la experimentación o presentando la materia formal y estructuradamente, propone que el profesor tenga en cuenta las dos tendencias y que en cada caso actúe según las necesidades de sus estudiantes.

Kleiner (2001) considera que para responder a la cuestión de qué se debe enseñar y cómo se debe enseñar el Análisis Matemático, hay que tener presente que en éste se integran tanto algoritmos como teoría y aplicaciones, de modo que los estudiantes deberían conocer estos tres aspectos. En su repaso histórico acerca de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño, sugiere algunas aportaciones para la enseñanza y el aprendizaje de estos conceptos:

- ✓ Necesidad de ejemplos: Tras repasar el período del 1400 al 1600 previo a la invención del cálculo por Newton y Leibniz, Kleiner se cuestiona el motivo por el cual los predecesores a Newton y Leibniz no fueron capaces de sintetizar los resultados sobre los que se apoyaron estos dos grandes matemáticos. El motivo que argumenta es la falta de ejemplos. Así, hemos de proporcionar a los estudiantes ejemplos en diferentes contextos antes de definir, generalizar o demostrar un concepto.

- ✓ Notación matemática: Para justificar la relevancia de una buena notación matemática no sólo para demostrar, sino también para comprender los conceptos, recuerda la prevalencia del trabajo de Leibniz sobre el de Newton por el empeño que puso Leibniz por utilizar una notación eficiente.

- ✓ *Cálculo sin funciones*: A mediados del siglo XVII el prolífico Euler fue el primero en centrar el foco de atención del cálculo en las funciones más que en las variables. Sin embargo, motivados por resolver problemas físicos o geométricos en los que estaban involucradas las curvas, los sucesores de Newton y Leibniz siguieron utilizando el cálculo de variables. Kleiner propone la posibilidad de enseñar un cálculo sin funciones utilizando la geometría y la cinemática como motor impulsor del aprendizaje, y las variables y ecuaciones como útiles de trabajo. Por supuesto, esta propuesta no es adecuada para cursos avanzados en los se hace imprescindible el uso de las funciones.

- ✓ Desarrollos en series de potencias: Los desarrollos en series de potencias fueron una herramienta muy poderosa en manos de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII. Kleiner sugiere sacar partido a estos desarrollos para proporcionar herramientas para la aproximación numérica, para extender las definiciones de funciones trascendentes de variable real a variable compleja, para obtener algunos resultados interesantes como la fórmula de Euler-Cotes, y para aprovechar el potencial de la analogía como motor del descubrimiento mostrando con cautela algunas analogías entre los desarrollos en serie y los polinomios.

- ✓ Sacar partido a los errores: A lo largo del desarrollo histórico del Análisis Matemático se han utilizado muchas técnicas que más tarde se han comprobado erróneas. Estas, en muchas ocasiones se reconocían cuestionables para los propios matemáticos que las utilizaban, pero eran aceptadas porque con ellas se alcanzaban resultados correctos. El descubrimiento de muchos resultados importantes ha estado en ocasiones marcado por este camino repleto de confusiones y dudas que casi siempre terminan con la formalización de los conceptos. Pero la matemática que se refleja normalmente en las aulas, y siempre en los libros de texto, muestra sólo el resultado final formalizado sin dejar ocasión para cuestionarlo. Quizá, sería conveniente dar una oportunidad al estudiante para que conozca el camino del descubrimiento que en muchas ocasiones difiere del formalismo al que le somete la matemática escolar.

Respecto a este último comentario, es importante tener en cuenta la observación que realiza Mamona-Downs (2001) cuando propone que al comienzo del aprendizaje del concepto de límite no se introduzcan tareas en las que puedan surgir ciertos conflictos que no ayuden a crear un esquema conceptual sólido, sino más bien a confundir y a crear un ambiente de desconfianza. Un buen diseño curricular evitará este tipo de situaciones.

También relacionado con los conflictos, pero en otra línea de pensamiento, Fischbein (citado en Tsamir, 2001), cree necesario diseñar estrategias que permitan que el estudiante tome conciencia de los conflictos que subyacen en los modelos tácitos que imperan sobre los conceptos formales; éste es el punto de partida del trabajo de Tsamir (2001), proponer unas actividades que provoquen esta toma de conciencia. Las actividades reciben el nombre de IST (it's the same task) y están diseñadas para fomentar la técnica utilizada por Cantor para comparar conjuntos infinitos, que es la correspondencia uno a uno. En ella utiliza diferentes modos de representación para que los estudiantes tomen conciencia de los conflictos que subyacen en su comprensión del concepto de infinito, ya que el modo de representación influye en la respuesta de los estudiantes al evocar diferentes partes del concepto.

Przenioslo (2005) propone y justifica una serie de ejercicios (problemas y cuestiones para discutir) que pueden ayudar a los estudiantes a mejorar aspectos de la definición formal de límite de una sucesión. La revisión de otras investigaciones en las que se ha observado una divergencia entre la definición formal del límite de una función y las concepciones de los estudiantes, y su experiencia como profesora, de la que concluye que muchas concepciones erróneas en cursos universitarios se han formado en secundaria, le inducen a prestar su atención a la enseñanza del concepto de límite de una sucesión y a plantear una propuesta didáctica.

El marco teórico que sustenta la propuesta de Przenioslo es una ecléctica de recursos en la que las representaciones gráficas juegan un papel significante y se presta especial atención al desarrollo del esquema conceptual que se forja con los primeros ejemplos que se muestran al alumno. Además, también considera que las iteraciones sociales juegan un papel importante en la construcción del conocimiento, destacando la relevancia del papel del profesor como guía en el proceso de aprendizaje.

En su propuesta didáctica la actividad se centra en un problema en el que los estudiantes han de señalar qué propiedad no tienen en común una sucesión dada con otras once. En los once enunciados se muestran todo tipo de situaciones para contrarrestar algunas de las concepciones erróneas que se han citado en otros trabajos como los de Monaghan (2001) y Mamona-Downs (2001), entre otros. Algunas de estas concepciones son: la idea de que los términos de una sucesión no pueden alcanzar el valor del límite, que la cota de una sucesión es su límite, o que el límite de una sucesión es su último término.

A través de cuatro actividades más, se presenta a los estudiantes cuatro discusiones sobre el problema principal protagonizadas por personajes ficticios. Los estudiantes han de evaluar estas cuatro situaciones con la peculiaridad de que algunas reflejan razonamientos erróneos y otras, razonamientos correctos. Aunque los personajes son ficticios, las conversaciones son reales ya que están basadas en las trascripciones de las discusiones de la autora con otros grupos de estudiantes.

El papel de Przenioslo en estas discusiones era la de un profesor que participa en la conversación y asiste a los estudiantes, centrando su atención en los puntos importantes y ayudándoles a que se den cuenta de los errores y las contradicciones, a superar las dificultades, y a investigar las conclusiones. Desde luego, los estudiantes han de poseer ciertos conocimientos y destrezas previas como el concepto de función y la idea de que una sucesión es un tipo específico de función.

La autora descompone la secuencia didáctica en tres fases que se corresponden con tres estados en el desarrollo de la comprensión de los estudiantes de la noción de límite de una sucesión. Estos tres estados son:

- ✓ Desarrollo de la concepción relacionada con el significado de la frase "a partir de un cierto $n$".
- ✓ Comprensión de la noción relacionada con la idea de "banda en torno a la recta $y = límite$."
- ✓ Desarrollo de las concepciones relacionadas con la idea de proximidad.

El estudiante que sea capaz de superar estas tres fases, será capaz de entender que para estudiar el comportamiento de una sucesión es necesario fijarse en cómo son los términos a partir de un cierto $n$, y que no basta con fijarse en unos cuantos primeros términos. También, será capaz de desarrollar un esquema mental de convergencia en la que, a partir de un $n$, los valores de la sucesión se encuentren en una banda en torno al valor del límite. Por último, extenderá este esquema mental de convergencia a otro en el que cualquier banda en torno al límite contenga infinitos términos de la sucesión.

Tras superar estas etapas, habría que introducir la definición formal de convergencia de una sucesión numérica. El estudiante que haya alcanzado los tres estados, habrá construido un esquema conceptual de convergencia coherente con la definición formal. Aún cuando un estudiante no sea capaz de alcanzarlos, a pesar de que el salto conceptual de un estado a otro es pequeño, el esquema conceptual parcial de convergencia que haya construido tras el primer o segundo estado estará conectado con la definición formal de convergencia.

Los problemas que plantea Przenioslo en esta y en otra investigación (Przenioslo, 2004), si bien son sencillos, no son convencionales en el sentido de que no son el tipo de problemas que abundan en los libros de texto, en los que se pide comprobar si un cierto valor es el límite de una función o de una sucesión; en un estudio previo, la autora comprobó cómo estos problemas de solución estándar algorítmica, dificultan el proceso de construcción del conocimiento.

Dejando de lado la preocupación por la comprensión por parte de los estudiantes de la definición formal $\varepsilon$-$\delta$ del concepto de límite, Williams (2001) propone un nuevo enfoque centrado sólo en los modelos informales que invocan los estudiantes y dan sentido a este concepto, y en cómo surgen y se desarrollan esos modelos. Del análisis de los modelos que construyen dos estudiantes, destaca la prevalencia de una visión dinámica de límite y del salto cognitivo que existe desde lo finito hasta lo infinito. Esto ayuda a explicar la aparición del infinito actual como un obstáculo enraizado en la comprensión de límite, y la dificultad que esto supuso para comprender la definición formal $\varepsilon$-$\delta$ de límite.

Mamona-Downs (2001) propone modificar la intuición del concepto de límite a partir de las imágenes mentales que surgen desde la definición formal. Así, plantea una secuencia didáctica que permite madurar en los estudiantes las intuiciones del concepto de límite. Estas intuiciones han de ayudar a comprender la definición formal, por lo que la estrategia para crear un esquema coherente y útil en la mente del estudiante se apoya en la definición formal de límite.

Sugiere seguir tres pasos para introducir el concepto de límite:

- ✓ Iniciar y desarrollar intuiciones planteando temas en clase para discutirlas.
- ✓ Introducir la definición formal y analizarla complementándose con lo expuesto en el primer paso. Introducir una representación concreta.
- ✓ Validar o invalidar los argumentos realizados en el primer paso comparándolos con la definición formal y haciendo especial hincapié en la representación elegida en el segundo paso.

Otro tipo de propuesta es la que plantean Sierra y otros (2002) en la que diseñan una unidad didáctica para la enseñanza del límite de una sucesión basada en una aproximación cualitativa sin formalismos. En esta propuesta, las definiciones se introducen a medida que se van necesitando, se emplea con sumo cuidado la simbolización, se manejan calculadoras gráficas, en particular la TI-82, y se plantean situaciones en las que los estudiantes experimentan en un contexto de resolución de problemas.

Tras la experiencia, el profesor que participó en la investigación consideró positivo el uso de problemas contextualizados, destacando la ventaja que ofrecen, frente a los problemas descontextualizados, a la hora de establecer la coherencia entre el problema y el resultado final obtenido. También resultaron positivos el entorno de trabajo colaborativo y el empleo de calculadoras gráficas que ayudaron notablemente en aspectos como el estudio del comportamiento de las sucesiones y la obtención de términos de una sucesión.

Sin embargo, a pesar de que la propuesta promovía en los estudiantes la utilización de procesos mentales que en la enseñanza tradicional no se ponen en juego, como conjeturar, modelizar o comprobar, en los resultados de la investigación se constató que, posiblemente, “la presencia de procesos infinitos difíciles de asimilar” (p. 93) sea la causa de muchas dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

## II 5 ENTORNO COMPUTACIONAL

En el capítulo I de esta memoria se ha analizado, en líneas generales, el impacto de las herramientas de cálculo simbólico (HCS) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En este apartado, se analizarán algunos trabajos de especial relevancia relacionados con esta investigación y se presentará la postura que defiende la autora de esta tesis.

Soto-Johnson (1998) realizó un trabajo de investigación en el que conjugó dos temas relacionados con este trabajo, el de las nuevas tecnologías y el del aprendizaje de las series infinitas. Soto-Johnson analizó la existencia de estudios sobre el impacto de las herramientas de cálculo simbólico en temas de Análisis Matemático. Comprobó que los tópicos que tratan son, principalmente, derivadas e integrales, pero no series infinitas, y aquellos estudios que utilizan el tópico de las series infinitas lo hacen para contextualizar entornos de aprendizaje con HCS, sin prestar demasiada atención a las cuestiones que atañen al aprendizaje de este tópico concreto. Por ello, su trabajo es pionero en estudiar el impacto de las HCS en la comprensión de las series infinitas y es de los pocos en los que las series infinitas tienen un papel central.

En su artículo, la autora analiza cuantitativamente el efecto de tres metodologías distintas de enseñanza para la comprensión del concepto de serie infinita. En concreto, espera determinar si existen diferencias entre los tres métodos de enseñanza en cuanto a la comprensión de los estudiantes del concepto de serie infinita, sus destrezas computacionales, sus actitudes hacia el cálculo y sus actitudes hacia el uso del ordenador en el aprendizaje del cálculo. Estas tres metodologías son:

- ✓ Proyecto CALC (Calculus As a Laboratory Course): enfatiza la conceptualización, la modelización, y la creación de informes escritos y las prácticas en el aula de ordenadores. La mayor parte del tiempo, los estudiantes trabajan en grupos.
- ✓ Proyecto Revised Illinois: enfatiza el aprendizaje por exploración apoyándose en el software de cálculo simbólico *Mathematica* que se emplea como complemento de la clase tradicional. Es una adaptación del proyecto Calculus & Mathematica[6] en el que toda la instrucción se realiza en el aula de ordenadores con el software Mathematica. Aunque ocasionalmente en el aula de ordenadores los estudiantes trabajan en grupo, durante la mayor parte del tiempo el trabajo es individual.
- ✓ Enseñanza tradicional.

Tanto el "Proyecto CALC" como el "Proyecto Revised Illinois", se centran en la comprensión conceptual del Análisis Matemático y utilizan el software de cálculo simbólico Mathematica para crear un entorno en el que el alumno pueda explorar, plantear conjeturas y evaluarlas, y sintetizar los resultados. Además, permite trabajar los conceptos de manera gráfica y analítica.

A pesar de que los promotores de la reforma del cálculo afirman que la comprensión de los conceptos de cálculo aumenta para los estudiantes y así se sienten más satisfechos, y que las herramientas informáticas no suponen un obstáculo, el estudio llevado a cabo no respalda estas ideas para el tópico de las series infinitas. Aunque los estudiantes que recibieron la instrucción con los dos métodos basados en la reforma de la enseñanza del cálculo mostraron una actitud positiva hacia el uso de herramientas informáticas en las clases de Análisis Matemático, no se encontraron diferencias en la comprensión conceptual ni en la actitud hacia el Análisis Matemático entre estos y los que recibieron una enseñanza tradicional.

Bajo el enfoque de la teoría de Gray y Tall (1994), Monaghan y otros (1994) analizan la construcción del concepto de límite en un entorno de sistema de cálculo simbólico. Partiendo de que el límite es un procepto, ya que el símbolo $\lim_{n\to\infty} a_n$ representa tanto el proceso de acercarse a un valor, como el objeto resultante de ese proceso que es el valor

[6] Programa innovador de enseñanza del Análisis Matemático con el software Mathematica de Wolfram, desarrollado por el profesor Bill Davis de la Universidad de Ohio State y los profesores Horacio Porta y Jerry Uhl de la Universidad de Illinois Urbana-Champaign.

del límite, los autores señalan que la capacidad de los sistemas de cálculo simbólico para evaluar internamente un límite, ofrece una gran ventaja al estudiante que puede centrar más su atención en el límite como objeto; así se produce un equilibrio entre las dos concepciones de límite como concepto y como proceso.

Por otro lado, critican los entornos en los que se puede aproximar el valor del límite ejecutando un procedimiento con el que se obtengan sucesivos valores de la sucesión, es decir, evaluando $a_n$ para valores de $n$ grandes. Estos entornos no permiten una visión proceptual del concepto de límite ya que contribuyen a que el estudiante afiance la idea de que el límite es un proceso y no un objeto. Con un software de cálculo simbólico del tipo Maple, Mathematica o Derive, es posible variar el orden en el que se construyen los conceptos: el ordenador permite al estudiante explorar las propiedades del objeto antes, durante o después de estudiar el proceso en sí mismo. Así, le libera de tener que encapsularlo antes de que sus propiedades cobren algún sentido. Éste es el argumento del principio de construcción selectiva descrito en esta memoria en la sección I 2.2.

Aldis, Sidhu, y Joiner (1999), motivados por el fracaso en la comprensión de los temas de Análisis Matemático en la academia de la Armada de Australia, realizaron una experiencia en la que, al igual que hizo Soto-Johnson (1998) como alternativa a la enseñanza tradicional, experimentaron con una adaptación de la metodología promotora de la reforma del cálculo Calculus & Mathematica.

En esta adaptación sustituyeron el software de cálculo simbólico Mathematica por Maple por cuestiones de logística, pero mantuvieron el espíritu de una enseñanza no formal, centrada en la interpretación de los resultados más que en los algoritmos de resolución, y en la que el ordenador se utiliza para involucrar al estudiante en su aprendizaje.

La instrucción se llevó a cabo en un aula de ordenadores con el software de cálculo simbólico, lo cual representó un cambio muy radical para aquellos estudiantes que cursaban su último año de estudios y habían recibido el resto de su formación matemática de forma tradicional.

El análisis de los datos recopilados a partir de cuestionarios, entrevistas y notas de clase, destaca la conveniencia del empleo de grupos colaborativos en el aula y los beneficios que ofrece el entorno informático. A pesar de ello, el poco tiempo con el que contaron los estudiantes para familiarizarse con la sintaxis del software Maple, supuso una fuente de dificultades añadidas a las propias del tópico que estaban aprendiendo. Para evitar esto, los autores proponen introducir el uso de la herramienta informática desde el principio del curso y en la fase de introducción del concepto matemático.

Así, el ordenador juega el papel de instrumento facilitador en un ambiente en el que es posible experimentar, visualizar y escapar de los formalismos. Posteriormente, una vez que el estudiante ha tenido un primer contacto “no formal” con el concepto, el resto de la instrucción puede continuar en un entorno no tecnológico.

Camacho y Depool (2003a) diseñaron un programa de utilidades con el software de cálculo simbólico DERIVE para determinar qué dificultades y qué potencialidades presenta el software DERIVE cuando se utiliza para impartir tópicos del Análisis Matemático a los estudiantes de ingeniería. El fin último de esta investigación es el de mejorar la enseñanza y aprendizaje del tópico de Análisis Matemático *integral definida*.

Una de las aportaciones más relevantes de este trabajo, es que el programa de utilidades diseñado contribuyó a que los estudiantes formaran una imagen más flexible del concepto de integral definida. Además, los autores destacan las posibilidades que brinda el software DERIVE para facilitar una instrucción en la que no sólo se utilicen procedimientos algorítmicos, y la ventaja que ofrece, frente a los métodos tradicionales, en los procesos de resolución paso a paso, tanto en los sistemas de representación gráfico como numérico.

## II 6 DESARROLLO HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE CONVERGENCIA DE SERIE NUMÉRICA

Ya se mencionó en el capítulo I que el análisis teórico del concepto que se pretende investigar incluye un análisis histórico del desarrollo del tópico matemático. Es en este punto, donde la historia de la matemática juega un papel crucial para esta investigación, ya que se utilizará para dos de los cometidos que según Sierra (2000) puede cumplir la historia de la matemática en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estos son los de ofrecer conocimiento sobre la evolución de los conceptos y procedimientos, y servir de laboratorio para el desarrollo curricular.

Respecto al papel de la historia de la matemática como elemento que pone a nuestra disposición la evolución de los conceptos y procedimientos, y recordando el argumento de carácter filogenético que sugiere Heeffer (2006) para justificar la integración de la historia de la matemática en el currículo de matemáticas (véase apartado I 5), en este trabajo se utiliza la historia de la matemática para identificar puntos clave en el desarrollo del concepto de convergencia de serie numérica, que servirán de cimientos para la descomposición genética del concepto que se propone. Esto facilitará el modelo teórico sobre el que se ha diseñado la instrucción y sobre el que se apoya el análisis de los datos.

Al igual que les ocurre a Burn (2005) y Sfard (1991), la historia de la matemática proporciona a esta investigación el vehículo para conocer los estados en el desarrollo histórico del concepto de convergencia de serie numérica que provocan la primera reflexión sobre cómo ha de ser el proceso de formación de este concepto en la mente del estudiante.

Respecto al papel de la historia de la matemática como laboratorio para el desarrollo curricular, éste cubre tres aspectos de esta investigación. Por un lado, es una herramienta metodológica que ayuda a romper con el método axiomático-deductivo utilizado habitualmente en la enseñanza de las matemáticas y a desarrollar un planteamiento más genético (Durán, 1998). Además, la historia justifica los obstáculos de origen epistemológico que provocan que los estudiantes cometan algunos errores y causan dificultades en su aprendizaje. Por último, la historia ayuda a comprender estas dificultades y a buscar sugerencias para superarlas (Bagni, 2000).

Para llevar a cabo estos cometidos se han revisado, principalmente, libros sobre historia de las matemáticas que ofrecen un panorama completo del desarrollo histórico del Análisis Matemático y muestran el contexto en el que se ha ido desarrollando. Si bien la lectura minuciosa de textos originales aporta un incalculable valor, el objetivo de esta investigación se ve cumplido con el examen de los libros que se citan en las referencias bibliográficas. Tras esta revisión, se han identificado cinco etapas en la evolución del concepto de serie (Codes y Sierra, 2004).

Durante la *etapa griega*, la matemática se mueve en un contexto geométrico en el que se pueden encontrar series numéricas en algunos trabajos sobre cuadraturas. El manejo implícito de las mismas, se lleva a cabo con un hábil uso del principio de Eudoxo y la reducción al absurdo.

A los problemas sobre cuadraturas, en la *etapa medieval* se les unen los relativos al movimiento para contextualizar las series numéricas. El manejo sin recelos de procesos infinitos propicia el cálculo de algunas sumas infinitas y sirve de abono para el posterior nacimiento del cálculo infinitesimal.

A finales del siglo XVI y a lo largo del XVII, se produce un rápido desarrollo de técnicas de cálculo. En esta *etapa de desarrollo*, los trabajos sobre mecánica celeste o navegación, hacen que se sumen series numéricas y de funciones para aproximar las soluciones de estos problemas. La concepción de Newton de los desarrollos en serie de funciones, afianza el uso de las series infinitas en los problemas de cálculo.

Tras el manejo indiscriminado de las series, tanto convergentes como no convergentes, en el siglo XVIII y primera mitad del XIX, conviven dos posturas enfrentadas, la de los que intuyen las aplicaciones de las series no convergentes, y la de los que rechazan de plano el uso de las series. Esto se produjo por la desconfianza que crearon los resultados obtenidos por el mal uso de las series no convergentes. En la *etapa de formalización*, se trató de dotar al recién estrenado cálculo de un rigor que había estado casi ausente durante el período anterior.

A finales del siglo XIX y principios del XX, los trabajos sobre ecuaciones diferenciales suscitan el desarrollo de una teoría de series divergentes. En la *etapa moderna*, surgen nuevas definiciones de sumabilidad, distintas a la noción de suma de Cauchy.

De las cinco etapas que se han detallado para describir los avances en el estudio de las series numéricas, las más interesantes para esta investigación son las primeras. La última etapa, que comienza a mediados del siglo XIX, se caracteriza por los avances en el estudio de series divergentes de funciones. A pesar de la importancia de este tópico, su estudio detallado se aleja del interés de esta investigación que se centra en el estudio y comprensión de la convergencia de series numéricas.

Sin pretender describir exhaustivamente el largo período de desarrollo de la matemática desde que aparecen las primeras series numéricas, en los siguientes apartados se dan unas pinceladas que describen las cinco etapas que se han identificado, haciendo referencia sólo a aspectos que atañen directamente al tópico de las series numéricas.

### II 6.1 Etapa griega

La confrontación de dos corrientes filosóficas, la de los pitagóricos y los eleáticos, influyó notablemente en el desarrollo de la matemática griega. Los discípulos de Parménides, contrarios a la idea de multiplicidad y cambio que defendía la escuela pitagórica, adoptaron el principio de unidad y permanencia del Ser que dio lugar a las famosas paradojas de Zenón (Boyer, 1986/1994).

A pesar del "horror al infinito" manifestado en la matemática griega, del que hablan los historiadores, la figura de Demócrito siembra la duda acerca del rechazo total de procesos infinitos. Algunas obras conocidas, como las de Aristóteles o Arquímedes, permiten describir cómo se enfrentaron los matemáticos de esta época a los procesos infinitos.

#### II 6.1.1 *Las series en la etapa griega*

En la época griega, las series numéricas no aparecen tal y como las entendemos actualmente. Las primeras manifestaciones de sumas infinitas aparecen en las paradojas de Zenon y en el trabajo de Arquímedes.

Respecto a las paradojas de Zenon, cuando en el siglo XVII Saint Vincent demostró la convergencia de la serie geométrica, añadió un comentario a la paradoja de Aquiles afirmando que Zenón no había considerado que la distancia total es la suma de una serie geométrica convergente, por lo que su suma es finita.

También en la proposición XXIII de la *Cuadratura de la parábola* de Arquímedes, se vislumbra un cálculo relacionado con la suma de la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$, camuflado entre el principio de exhausción y la reducción al absurdo, que es como Arquímedes se enfrentó a los procesos infinitos.

#### II 6.1.2 *Personajes de la etapa griega*

Zenón de Elea (490-425 a.C.): defendía la filosofía de Parménides que rechazaba el pluralismo y la realidad de cualquier tipo de cambio, defendiendo la creencia de que todo es un indivisible, realidad inmutable, y la razón descarta cualquier presunción de lo contrario. Zenón pretendía demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y divisibilidad de la escuela platónica mediante el método dialéctico, consistente en suponer cierto lo contrario de lo que se pretende demostrar y llegar así a una contradicción o a un argumento absurdo.

Una de las paradojas más conocidas es la de la Dicotomía, en la que aparece una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$:

> Antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer en primer lugar la mitad de esa distancia, pero aún antes de recorrer ésta deberá recorrer el primer cuatro de la distancia inicial, y antes aún el primer octavo, y así indefinidamente a través de una cantidad infinita de subdivisiones. (…) Por lo tanto, el mismísimo comienzo del movimiento es imposible. (Boyer, 1986/1994, p. 109)

Otra, quizá más familiar, es la de Aquiles y la tortuga, en la que también aparece una progresión geométrica. Aquiles compite con una tortuga en una carrera, dejándole una ventaja inicial.

> Cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, ésta habrá avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña, y cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos, y así el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga. (Boyer, 1986/1994, p. 109)

Demócrito de Abdera (460-370 a.C.): inspirado quizá en el atomismo geométrico de los pitagóricos, defiende una teoría física atomista que no encontró herederos. Sin que se tenga certeza de la existencia de técnicas infinitesimales, se cree, por el tipo de problemas que abordó, que pudo intuir un proceso de descomposición de una figura en una cantidad infinita de secciones transversales infinitamente delgadas (Boyer, 1986/1994, p. 115).

Eudoxo (408-355 a.C.): en un intento de proporcionar rigor al cálculo del área de una figura curvilínea, realizó esta operación formando una secuencia de polígonos hasta llenar o agotar (dejar exhausto) la figura de la cual se quiere calcular su área. (Edwards, 1979). Este procedimiento, llamado principio de exhausción, es el precursor del cálculo de un límite en nuestro actual cálculo infinitesimal. Aparece en la proposición 1 del libro X de los “Elementos” de Euclides. En la traducción de María Luisa Puertas Castaño, se puede leer:

> Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una [magnitud] mayor que su mitad, y de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada. (Euclides, trad. 1996, p. 12)

Arquímedes realiza un razonamiento similar en el corolario de la proposición XX de la *Cuadratura de la parábola*:

> Si en un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo se inscribe un triángulo que tenga la misma base que el segmento y la misma altura, el triángulo inscrito será mayor que la mitad del segmento. (…)
>
> Corolario: Demostrado esto, es evidente que es posible inscribir en este segmento un polígono de tal manera que los segmentos que quedan en torno sean menores que cualquier área propuesta. Por ello está claro que, restada continuamente un área que sea mayor que la mitad, al disminuir continuamente los segmentos restantes, llegaremos a hacerlos menores que cualquier área propuesta. (Arquímedes, trad. 2009, pp. 181-182).

Aristóteles (384-322 a.C.): rechazó la existencia del infinito actual, limitando el uso del término infinito sólo para referirse al infinito potencial (Boyer, 1959) porque pensaba que si algo es desconocido, existe sólo potencialmente. Distinguió dos tipos de infinito potencial, el que se deriva de añadir sucesivamente, lo infinitamente grande, y el que se deriva de la división o resta sucesiva, lo infinitamente pequeño.

Euclides de Alejandría (325-265 a.C.): a pesar de que se conocen varios textos de este autor, se suele asociar su nombre a los “Elementos”. El talante de esta obra es la de un libro de texto, ya que Euclides destacó en la Universidad de Alejandría más por su labor docente que por su capacidad investigadora. Por ello, los “Elementos” han formado parte de la instrucción de los científicos a través de los siglos.

Para esta investigación, el interés de esta obra reside en la proposición 35 del libro IX en la que aparece una fórmula para sumar los $n$ primeros términos de una progresión geométrica. Esta fórmula, fue utilizada en los siglos XVI y XVII para sumar la serie geométrica. De hecho, actualmente es la fórmula que se utiliza para estudiar la convergencia de esta serie. Esta proposición enuncia:

> Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan el segundo y del último [números] iguales al primero, entonces, como el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último será a todos los anteriores a él. (Euclides, trad. 1994, p. 236).

Con la notación actual viene a expresar:

Si $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}$ es una progresión geométrica, es decir, $\frac{a_{j+1}}{a_j} = r\ \forall j$, se verifica:

$$\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1}$$

Despejando $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ de la expresión anterior, se obtiene la fórmula de la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica,

$$S_n = \frac{a_1 - r \cdot a_n}{1 - r}$$

Euclides prueba esta proposición utilizando otros resultados obtenidos sobre proporciones de cantidades, en concreto, utiliza las proposiciones 11, 12 y 13 del libro VII. Actualmente, este resultado se prueba restando a $S_n$ la cantidad $r \cdot S_{n-1}$ y despejando $S_n$:

$$S_n - r \cdot S_{n-1} = a_1 - a_{n+1}$$

$$S_n(1 - r) = a_1 - r \cdot a_n$$

$$S_n = \frac{a_1 - r \cdot a_n}{1 - r}$$

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.): algunos lo consideran el padre de la física matemática, otros el predecesor del cálculo infinitesimal, pero nadie discute su ingenio. No en vano, el contenido de la obra de Arquímedes es vital para el nacimiento del cálculo en el siglo XVII.

Sin menospreciar la brillantez de su obra, Edwards (1979) señala tres *ingredientes indispensables* que, según él, le faltaron a los métodos arquimedianos para ocupar esta posición de fundador. A saber:

- ✓ La introducción explícita del concepto de límite, que los griegos sustituyeron por una doble reducción al absurdo y la aplicación del principio de exhausción.
- ✓ Un algoritmo general para el cálculo de áreas y volúmenes, debido en parte a la falta de una notación algebraica adecuada que posibilitara la identificación de similitudes en los cálculos. Por ello, en general, cada problema se abordaba con un planteamiento particular y distinto al de otros problemas análogos.
- ✓ El reconocimiento de la relación existente entre los problemas de áreas y de tangentes. Esta relación nada trivial, marca la fundación del cálculo infinitesimal con Newton y Leibniz.

Bourbaki (1976) afirma que Arquímedes es la principal fuente sobre la que se apoyan los primeros resultados del cálculo infinitesimal.

Uno de los resultados más destacados es el cálculo del área de la región limitada por un arco de parábola y una recta perpendicular al eje de la parábola. En la proposición XXIV de la *Cuadratura de la parábola*, demuestra que este área es cuatro tercios del área del triángulo con la misma base y altura que dicha región.

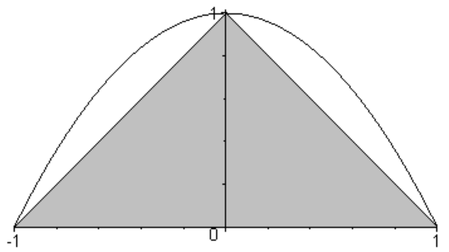



Figura 12. Arco de parábola.

Para probarlo, utiliza la reducción al absurdo comprobando que el área del arco de parábola no puede ser ni mayor ni menor que la del triángulo. Se apoya también en otros resultados que ha ido obteniendo en proposiciones anteriores. En algunos de estos resultados utiliza el método de exahusción que, como afirma Mugler (1970), en las manos de Arquímedes se convierte en un instrumento con una potencia y una flexibilidad que le conduce a las primeras integraciones de la historia de la matemática.

En una de las proposiciones previas que utiliza, la proposición XXIII, aparece implícitamente la suma de una serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

> Si se disponen sucesivamente magnitudes en la razón de cuatro a uno, todas las magnitudes más la tercera parte de la menor sumadas en una sola serán cuatro tercios de la mayor. (Arquímedes, trad. 2009, p. 185)

Con la notación actual, lo que Arquímedes demuestra es que si

$$a_2 = \frac{1}{4}a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{4}a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{4}a_3$$

$$a_5 = \frac{1}{4}a_4$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{5} a_j + \frac{1}{3}a_5 = \frac{3}{4}a_1$$

Utilizando las cantidades correspondientes a una tercera parte de las cuatro cantidades menores, deduce fácilmente este resultado que, interpretado con los conocimientos actuales sobre series, equivale a la suma de la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

Una lectura detenida de la obra de Arquímedes corrobora su genialidad y cómo se anticipó al cálculo del siglo XVII. En “El Método”, expresa que un área está formada por una suma de segmentos rectilíneos. Véase, por ejemplo, el capítulo 14 de la traducción de María Luisa Puertas y Luis Vega:

> … Así pues, llenado el paralelogramo $\Delta H$ por restas paralelas a $KZ$, y llenado el segmento comprendido entre la sección de cono rectángulo y el diámetro por las partes de esas rectas intersecadas por el propio segmento
>
> …[7]
>
> a las paralelas $KZ$ trazadas en el paralelogramo $\Delta H$; (…).
>
> Ahora bien, el prisma está compuesto por triángulos que se hallan en el prisma; el segmento del cilindro por los triángulos que están en el segmento cortado del cilindro; el paralelogramo $\Delta H$ por las paralelas a $KZ$ en el paralelogramo $\Delta H$ y el segmento de la [parábola] por las rectas comprendidas entre la sección de cono rectilíneo y la recta $EH$. Luego el prisma es al segmento del cilindro como el paralelogramo $\Delta H$ es al segmento $EZH$ comprendido entre la sección de cono rectángulo y la recta $EH$. (Arquímedes, trad. 1986, p. 88)

[7] Nota de los traductores Mª Luisa Puertas y Luis Vega: laguna de varias líneas que no se han sabido cubrir.

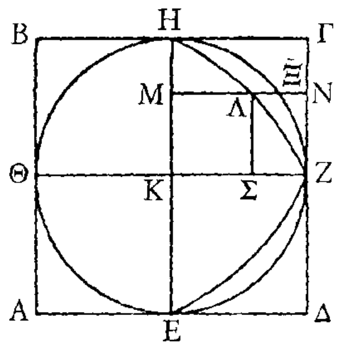



Figura 13. (Arquímedes, trad. 1986, p. 86)

"El Método" ha sido una obra desconocida hasta el siglo XX, por lo que no se tiene evidencia de que esta técnica la conociesen los matemáticos de siglos posteriores a Arquímedes. En 1906, se localizó un palimpsesto del siglo X del que se había borrado su contenido para que unos monjes escribieran encima una colección de textos litúrgicos y plegarias. El texto borrado reveló "El Método" de Arquímedes.

Luis Vega (Arquímedes, trad. 1986) afirma que, a pesar de la utilización del método de exhausción, no se ha de confundir el trabajo de Arquímedes, basado en una teoría de razones y proporciones, con el análisis infinitesimal basado en la noción de límite, ya que en ningún momento Arquímedes sugiere este concepto. A pesar de que con los conocimientos actuales interpretamos la proposición XXIV de la *Cuadratura de la parábola* con una suma infinita, Arquímedes no asocia el valor $\frac{4}{3}$ a la suma

$$1+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots,$$

sino que suma hasta el quito sumando y utiliza su teoría de proporciones para deducir el valor del resto de los sumandos.

### II 6.2 Etapa medieval

Este amplio período que engloba la Edad Media y antecede al Renacimiento, se produce un cambio en la concepción del infinito que, junto con las investigaciones acerca del movimiento, hace posible que se acepten procesos infinitos. Sin que se consigan grandes avances, algunos trabajos sirvieron de caldo de cultivo para el posterior desarrollo del cálculo infinitesimal.

Destacan la obra de Leonardo de Pisa (Fibonacci) y un siglo más tarde la de Swineshead (Calculator) y Oresme. El primero, no realizó ningún trabajo conocido con series numéricas, pero tiene interés nombrarlo porque introdujo la famosa sucesión de Fibonacci que posee propiedades notables relacionadas con las series numéricas. Los otros dos, se interesaron por los problemas relativos al movimiento. En este contexto, estudiando las variaciones de cantidades (nuestras variables) y calculando áreas, Swineshead y Oresme suman algunas series numéricas.

La introducción por parte de Oresme de las gráficas para representar las variaciones que se producen por el movimiento, proporciona un método geométrico para sumar algunas series numéricas. Además, transmite la idea de que una superficie está formada por la adición de segmentos. Esta concepción, se materializará a finales del Renacimiento en la técnica de los indivisibles de Cavalieri.

### II 6.2.1 *Las series en la etapa medieval*

En esta época las series infinitas aparecen asociadas al concepto de la *latitud de las formas* y se ponen de manifiesto en la resolución de problemas suscitados por el estudio del movimiento. Se manejan a través de argumentaciones verbales o geométricamente a partir de la representación gráfica, más que mediante consideraciones aritméticas basadas en el concepto de límite (Boyer, 1959). Edwards (1979) sostiene que, apoyados en la idea aristotélica de *cualidad* (atributo que admite distintas intensidades), durante la edad media floreció un grupo de filósofos y logicistas en el Merton Collage de Oxford que se plantearon cuestiones relativas a *variaciones en la intensidad de una cualidad*.

Distintos autores destacan de este período la pérdida del miedo al infinito que caracterizó la época griega. Apoyando esta idea, Boyer (1986/1994) sostiene que

> Los matemáticos del Occidente europeo mostraron durante el siglo XIV imaginación y notable claridad de pensamiento, pero lo que les faltaba era habilidad tanto algebraica como geométrica, y así sus contribuciones no consistieron en una extensión de la obra de los clásicos, sino en la exploración de nuevos puntos de vista. (p. 341)

Así, mientras que la tradición griega había mostrado un rechazo al infinito actual, los filósofos escolásticos de la baja Edad Media recurrieron frecuentemente al infinito, tanto en el sentido potencial como actual. De este modo, salvo por algún algoritmo iterado de la antigüedad y por la suma de la progresión geométrica de Arquímedes, el tema de las series numéricas infinitas es original y novedoso en esta época, según cita Boyer (Idem). Edwards (1979) afirma que los estudios de series infinitas continuaron a lo largo de los siglos XV y XVI al estilo de Oresme y Swineshead, sin lograr avances significativos en las técnicas argumentativas verbal y geométrica. No se obtuvieron grandes resultados salvo la suma de algunas series numéricas, pero lo más importante de este período es el cambio de mentalidad al aceptar los procesos infinitos en matemáticas. Esto sirvió para preparar “el camino para trabajos más significantes en series infinitas y procesos del siglo XVII, cuando se disponía de un potente arsenal de técnicas algebraicas y aritméticas” (p. 93).

Kline (1992) también destaca el carácter de transición de esta etapa entre la Edad Media y el Renacimiento, en general sin resultados brillantes, pero que sirvió para difundir y asimilar la herencia griega. En esta época, se fusionó nuevamente la matemática a la ciencia y la tecnología, como en la época de Alejandría, asegurando así su posterior desarrollo.

### II 6.2.2 *Personajes de la etapa medieval*

Leonardo de Pisa (1170?-1250?): se interesó principalmente por la aritmética. En su obra "Liber abaci" aparece un problema que da lugar a la conocida sucesión de Fibonacci:

> ¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

La sucesión de parejas de conejos es $1,1,2,3,5,8,\cdots$. Esta sucesión, aparte de sus aplicaciones, tiene interesantes propiedades como la de que el límite del cociente entre dos términos consecutivos es igual al número áureo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

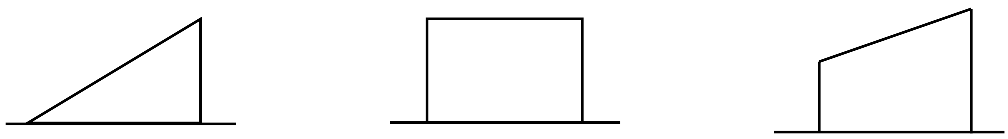
Robert Swineshead (1350): fue un filósofo logicista del Merton Collage de Oxford. A él se debe la primera suma de una serie (sin contar con la serie geométrica) ante el problema planteado en un contexto de velocidades:

> Si un punto se mueve durante la primera mitad de un intervalo de tiempo a una velocidad constante, durante el siguiente cuarto de intervalo de tiempo a una velocidad el doble que la inicial, durante el octavo al triple que la velocidad inicial, y así hasta infinito; entonces la velocidad media durante el intervalo de tiempo total será el doble de la velocidad inicial.

Con la notación actual, la conclusión a la que llega tras una larga demostración verbal es:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=2$$

Nicolás Oresme (1323-1382): influenciado por la corriente del Merton Collage, en 1350 publica su "Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum" en el que introduce por primera vez[8] la *configuración geométrica de magnitudes continuas*, su latitud de las formas que encarna nuestras actuales representaciones gráficas.



Magnitud uniformemente "deforme" finalizada con una altura nula.

Magnitud uniforme de igual intensidad en todas sus partes.

Magnitud uniformemente "deforme" con una cierta altura a ambos lados.

Figura 14. Representación de magnitudes.

Utilizó rectángulos, triángulos y trapecios, para representar magnitudes y así representó las variaciones en la intensidad de la magnitud velocidad, nuestra actual $f(t)$, con respecto al

[8] Aunque esta no es la primera representación gráfica que se conoce, se le atribuye a Oresme su primacía por ser la suya más clara e influyente, según cita Boyer (1986/1994). De hecho, es posible que este trabajo influenciara en la obra de Descartes.

tiempo, como se muestra en el dibujo anterior (Dhombres, Dahan-Dalmedico, Bkouche, Houzel, y Guillemot, 1987).

Con estas representaciones confirmó el resultado conocido como la regla de Merton acerca del movimiento uniformemente acelerado:

> La distancia recorrida en un intervalo establecido de tiempo por un cuerpo con movimiento uniformemente acelerado, es igual a la que tendría el cuerpo si se moviera a velocidad uniforme igual a la velocidad que lleva en la mitad del intervalo de tiempo.

La demostración dada por Oresme es la primera que se conoce para este resultado:

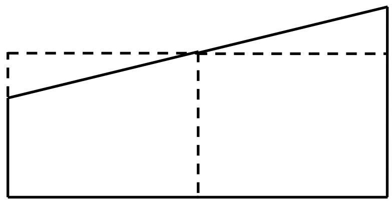


Figura 15. Representación gráfica de la regla de Merton

Oresme obtuvo en su tratado de 1350 una fórmula general para la suma de series geométricas escrita como sigue (Edwards, 1979, pp. 91-92):

> Si a una cantidad a se le quita una k-ésima parte, y a lo que resta se le quita otra k-ésima parte, y así hasta infinito, tal cantidad será extinguida.

Es decir,

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]^2+\cdots+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]^n+\cdots=a$$

Una interpretación actual de la demostración es como sigue:

> Si se resta a la cantidad $a$ una k-ésima parte queda
>
> $$a-\frac{a}{k}=a\left[1-\frac{1}{k}\right]$$
>
> A esta cantidad se sustrae una k-ésima parte, resultando:
>
> $$a\left[1-\frac{1}{k}\right]-\frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]}{k}=a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2$$
>
> Nuevamente se sustrae una k-ésima parte a lo que queda, resultando
>
> $$a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2-\frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2}{k}=a\left[1-\frac{1}{k}\right]^3$$
>
> Tras la enésima sustracción, la cantidad que quede será

$$a\left[1-\frac{1}{k}\right]^n$$

Así,

$$a=\frac{a}{k}+\ a\left[1-\frac{1}{k}\right]=\frac{a}{k}+a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2+\ \frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]}{k}=$$

$$=\frac{a}{k}+\ \frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]}{k}+\frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2}{k}+a\left[1-\frac{1}{k}\right]^3=$$

$$=\frac{a}{k}+\ \frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]}{k}+\frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]^2}{k}+\cdots+\frac{a\left[1-\frac{1}{k}\right]^{n-1}}{k}+\ a\left[1-\frac{1}{k}\right]^n$$

Como el límite de $\left[1-\frac{1}{k}\right]^n$ es $0$ cuando $n\to\infty$, la suma

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]^2+\cdots+\frac{a}{k}\left[1-\frac{1}{k}\right]^{n-1}$$

vale $a$ cuando $n\to\infty$.

También obtuvo la primera prueba de que la serie armónica no converge en sus “Cuestiones super geometricam Euclidis”.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\infty$$

Para ello reunió sumandos consecutivos en grupos cuya suma es mayor que $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}=\frac{533}{840}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}=\frac{95549}{144144}>\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+2^{n-1}}+\frac{1}{2+2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}}>\frac{1}{2}$$

De modo que

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\cdots=1+1+1+\cdots=\infty$$

Mediante su método gráfico de representación de las "variaciones de la intensidad de una magnitud", facilitó un procedimiento gráfico para sumar algunas series. Por ejemplo, la suma de la serie $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$ se puede obtener de manera más sencilla de como lo hizo Swineshead gracias a la representación gráfica. Edwards (1979, pp. 92-93) lo expresa así:

La figura 16 muestra dos disecciones de la representación gráfica del movimiento de un cuerpo que lleva velocidad 1 durante la primera mitad del intervalo de tiempo, velocidad 2 durante la siguiente cuarta parte, velocidad 3 durante la octava parte, y así sucesivamente. El área de cada sección es, respectivamente,

$$\mathcal{A}(A_n)=\frac{n}{2^n}$$

$$\mathcal{A}(B_n)=\frac{1}{2^n}$$

Puesto que la suma de las áreas de las secciones $B_n$ es una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y su suma es 2, se verifica:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}(B_n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$$

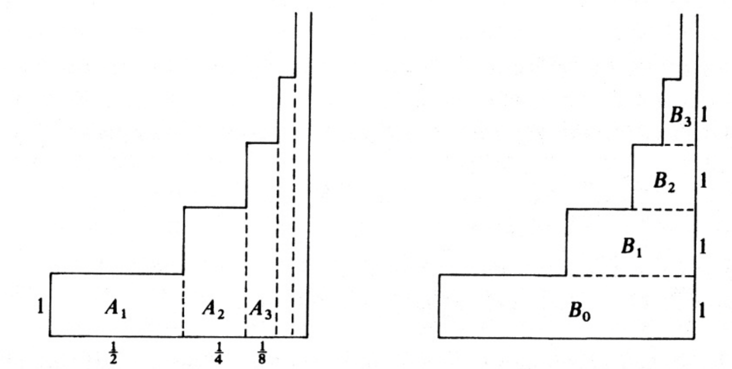



Figura 16. Representación gráfica del movimiento de un cuerpo (Edwards, 1979, p. 92).

Las sumas infinitas que realiza Swineshead se basan en su intuición sobre la razón de cambio, utilizando la retórica y sin aclarar en exceso las definiciones que utiliza de velocidad, intensidad y otros términos que maneja en su discurso. Sus demostraciones son verbales, sin que se pueda encontrar un atisbo de geometría en ellas. Oresme, sin embargo, recurre a las representaciones de gráficas, dotando a su discurso de una fuerte componente geométrica. Hoy en día se ha perdido este vínculo entre la representación geométrica y el análisis matemático (Boyer, 1959).

### II 6.3 Etapa de desarrollo

Los trabajos sobre logaritmos iniciados por Napier y Briggs, cobran especial importancia cuando en 1647 Gregory St. Vincent publica su descubrimiento sobre la relación entre el logaritmo natural y el área bajo la hipérbola rectangular $x \cdot y = 1$ en su obra “Opus Geometricum”. A. A. Sarasa observa, a partir de la lectura del “Opus Geometricum” de Gregory, que la función que define el área bajo la hipérbola $x \cdot y = 1$ posee propiedades aditivas que son características de los logaritmos (Edwards, 1979).

Según afirma Edwards (1979),

> el carácter logarítmico de las áreas de funciones hiperbólicas (…), sirvió para estimular el estudio de las áreas hiperbólicas, y estas investigaciones jugaron un papel significante en la introducción de las series infinitas y técnicas algorítmicas de cálculo, a comienzo de los años 1650 y 1660. (p. 158)

A finales del siglo XVI, se continúa considerando una superficie compuesta por segmentos indivisibles. Esta línea de pensamiento, que fue secundada por Oresme, es la que cuatro siglos más tarde se descubrió en “El Método” de Arquímedes. Algunos matemáticos, como Galileo y su discípulo Cavalieri, refinaron este planteamiento que desembocó en la técnica de los indivisibles de Cavalieri. Boyer (1986/1994) sitúa a Cavalieri en el período de transición del Renacimiento a la Época Moderna.

Las técnicas infinitesimales estaban lo suficientemente avanzadas como para enunciar el teorema fundamental del cálculo. Este hecho, que marca el nacimiento del cálculo infinitesimal, fue la consecuencia del trabajo de muchos hombres durante varios siglos. Se le atribuye a Newton y Leibniz su creación por ser ellos los primeros que generalizaron la relación existente entre los problemas de cálculo de áreas y de tangentes.

La matemática no era entonces lo formal que es ahora. A pesar de los grandes éxitos que se habían alcanzado, aun les quedaba la asignatura pendiente de su justificación formal, con rigor.

#### II 6.3.1 *Las series en la etapa de desarrollo*

En el siglo XVII se suman series infinitas, numéricas y de funciones, para resolver problemas de aproximación. Estamos en el despuntar del cálculo infinitesimal y el rigor en las demostraciones cede protagonismo a la intuición, permitiendo que los procesos infinitos tomen protagonismo en el cálculo de cuadraturas. A finales de siglo, los trabajos de Newton y Leibniz conducen a un nuevo concepto de serie infinita: no es sólo una herramienta para hacer cálculos aproximados sino que es otra manera en la que se manifiesta una función. Se demuestra la divergencia de algunas series y se comienza a cuestionar el uso de series cuando estas no convergen.

Los problemas que suscitan en este siglo la aparición de series, bien sean numéricas o de funciones, son normalmente problemas en los que se ha de aproximar una cantidad. Estos, suelen aparecer en el cálculo de distancias o de áreas, en el contexto de cálculos astronómicos, de mecánica celeste o de navegación. Por ejemplo, suscitados por las necesidades de los cálculos en alguno de estos campos, Gregory y Newton realizaron paralelamente investigaciones sobre la interpolación y las series de potencias para resolver problemas de aproximación.

Se realizaron muchos cálculos y se obtuvieron muchos resultados sin tener en cuenta el carácter convergente de las series. Newton, por ejemplo, era consciente de la necesidad de demostrar la convergencia de las series, a pesar de que él no lo consiguió. Aún así, reconocía que casi siempre las series de potencias introducidas por él, eran convergentes para valores pequeños de la variable (Bourbaki, 1976).

En esta época coexisten dos tendencias: la de aquellos que, como Newton, reconoce que les falta “algo” para acreditar los resultados que obtienen sumando series y se contentan comprobando que los resultados físicos avalan los cálculos, dejando en un segundo plano la justificación teórica formal; y la de aquellos que esperan una prueba formal, dudan de los resultados obtenidos al sumar series e insisten en la inconsistencia de estos trabajos (Berkeley, 1734/2002).

Este tira y afloja entre lo que funciona en la realidad física y lo que se espera que funcione formalmente, ha producido algunos resultados incorrectos a los que muchas veces se les ha llamado paradojas o se han atribuido a propiedades extrañas del infinito. Con una profunda aceptación de los procesos infinitos, en este siglo conviven las primeras sumas de series de funciones y la utilización sistemática de los desarrollos en serie.

### II 6.3.2 *Personajes de la etapa de desarrollo*

François Viéte (1540-1603): en 1593 obtuvo la fórmula para la suma de una progresión geométrica utilizando la fórmula de Euclides para la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica (Durán, 2000).

Gregorio de Saint Vincen**t** (1584-1667): En su obra de 1647 sumó la serie geométrica e incluyó como aplicación una discusión sobre la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga, en la que argumentaba que Zenón no tuvo en cuenta que el tiempo formaba una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y, por tanto, aunque el número de términos es infinito, su suma es finita (Durán, 2000).

Bonaventura Cavalieri (1598-1647): discípulo de Galileo, continuó con la idea de Arquímedes y Oresme de considerar una superficie formada por la suma de segmentos y la materializó en su obra más reconocida, “Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota”, publicada en 1635 aunque escrita con anterioridad, hacia 1626. Su idea se refleja claramente en lo que se conoce como el teorema de Cavalieri:

> Si dos cuerpos sólidos tienen la misma altura y si las secciones que determinan planos paralelos a las bases y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los dos sólidos están también en esa misma razón. (Smith, citado en Boyer, 1986/1994, p. 417)

Cavalieri utilizó un razonamiento geométrico que pronto quedó en desuso por el desarrollo de otras técnicas basadas en los infinitésimos. Boyer (1986/1994) describe esta demostración:

> Cavalieri compara potencias de segmentos que son paralelos a la base de un paralelogramo, con las correspondientes potencias de los segmentos en uno cualquiera de los triángulos en que una diagonal divide al paralelogramo. Sea AFDC el paralelogramo dividido en dos triángulos por la diagonal CF (fig. 17) y sea HE un

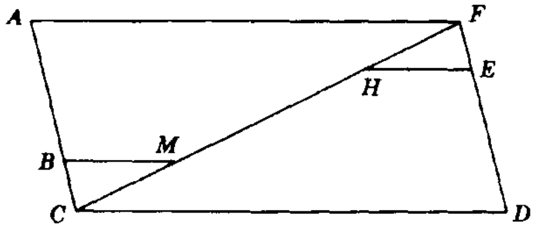



Figura 17. Representación de un razonamiento geométrico de Cavalieri según C. Boyer.

> indivisible del triángulo CDF que es paralelo a la base CD. Entonces, tomando BC=EF y trazando BM paralela a CD, es fácil ver que el indivisible BM en el triángulo ACF será igual al HE en el CDF. Por lo tanto, podemos poner en correspondencia biunívoca los indivisibles del triángulo CDF con indivisibles iguales dos a dos del triángulo ACF, y en consecuencia los dos triángulos son iguales. Y como el paralelogramo es la suma de los indivisibles en los dos triángulos, resulta claramente que la suma de las primeras potencias de los segmentos en uno de los triángulos es la mitad de la suma de las primeras potencias de los segmentos en el paralelogramo; dicho en otras palabras,
>
> $$\int_0^a x dx = \frac{a^2}{2}$$
>
> (pp. 417-418)

Nicolaus Kaufmann (Mercator) (1620-1687): en 1668 publica *Logarithmotechnia*. En la tercera parte se encuentra su famosa serie (utilizada previamente por Newton)

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

para el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$ en el intervalo de $0$ a $x$.

El cálculo de este área lo realizó utilizando una técnica basada en los indivisibles de Cavalieri. Aunque Mercator no dio muchos detalles de su prueba, se puede leer una exposición más clara en la obra de Wallis de 1668 "Philosophical Transactions", fruto de la revisión de la obra "Logarithmotechnia" de Mercator.

Comienza dividiendo el intervalo $[0, x)$ en $n$ subintervalos de igual longitud $h$, de modo que $h = \frac{x}{n}$, y construyendo rectángulos cuya base la forman los subintervalos citados, y de alturas:

$$1, \frac{1}{1+h}, \frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+3h}, \cdots, \frac{1}{1+(n-1)h}$$

El área es aproximadamente:

$$A = h + h \cdot \frac{1}{1+h} + h \cdot \frac{1}{1+2h} + h \cdot \frac{1}{1+3h} + \cdots + h \cdot \frac{1}{1+(n-1)h} =$$

$$= h \cdot \left[1 + \frac{1}{1+h} + \frac{1}{1+2h} + \frac{1}{1+3h} + \cdots + \frac{1}{1+(n-1)h}\right]$$

Teniendo en cuenta que por división larga

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot h^k$$

$$\frac{1}{1+2h} = 1 - 2h + 4h^2 - 8h^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2h)^k$$

$$\frac{1}{1+3h} = 1 - 3h + 9h^2 - 27h^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (3h)^k$$

…

El área se puede calcular como

$$A = h + h \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot h^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2h)^k + \cdots + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \left((n-1)h\right)^k\right]$$

Agrupando términos con la misma potencia de $h$,

$$A = n \cdot h - h^2\big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big) + h^3(1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) + \cdots +$$

$$+ (-1)^k \cdot h^k(1 + 2^k + \cdots + (n-1)^k) + \cdots$$

Teniendo en cuenta que $h = \frac{x}{n}$, el área

$$A = x - \frac{x^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1} i + \frac{x^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \cdots + (-1)^k \frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{i=1}^{n-1} i^k + \cdots$$

Wallis había probado en su “Aritmética Infinitorum” de 1656 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

De modo que tomando límites en la suma anterior, se tiene la serie de Mercator:

$$A = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Para la convergencia de esta serie, Wallis considera que es necesario que se cumpla la desigualdad $x < 1$ (Edwards, 1979).

Este cálculo deja bien patente el impulso que recibió el manejo de sumas infinitas por su aplicación en el cálculo de logaritmos y áreas.

Pietro Mengoli (1625-1686): discípulo de Cavalieri, usó las series infinitas como instrumento para atacar los problemas relativos a los indivisibles y al área bajo las hipérbolas. A él se debe la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Probó con éxito la convergencia de la serie de los inversos de los números triangulares, pero fracasó al intentar sumar la serie de los inversos de los cuadrados y de otras potencias. Hubo de trascurrir casi un siglo hasta que Euler consiguiera sumarla. También razonó que la serie armónica no es convergente con el siguiente argumento (Durán, 2000):

Utilizando la desigualdad entre la media armónica y la aritmética,

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} < \frac{x+y}{2}$$

O lo que es lo mismo,

$$\frac{2xy}{x+y} < \frac{x+y}{2},$$

Y que cada término de la serie armónica es la media armónica de los contiguos, es decir,

$$\frac{1}{n} = \frac{2}{(n-1)+(n+1)}$$

Se tiene que

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right)$$

Y así se deduce fácilmente que

$$\frac{3}{n} < \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

Aplicando esta desigualdad a agrupaciones de tres sumando consecutivos de la serie armónica se tiene,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} > \frac{1}{3}$$

Y así,

$$1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + [\cdots]\right]\right]\right] > 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

Si la serie fuera convergente, llamemos $S$ a su suma, tendríamos $S = 1 + S$ lo cual es una contradicción.

James Gregory (1638-1675): fue el primero que utilizó la palabra convergencia. Boyer (1986/1994) considera que tenía todas las herramientas para descubrir el cálculo pero su modo geométrico de trabajar, en vez de analítico, impidió que esto se produjera. Gregory, influenciado por Mengoli, descubrió el potencial de los desarrollos en series infinitas y de los procesos infinitos en general.

Se basó en la técnica arquimediana de inscribir y circunscribir polígonos en una superficie curva para obtener aproximaciones de su área (Arquímedes, trad. 1986). Creaba así dos sucesiones, la de las áreas circunscritas y la de las áreas inscritas que se aproximaban cada vez más al área de la curva; en este contexto utilizó la palabra convergencia. Con esta técnica intentó probar que el número $\pi$ no se podía expresar algebraicamente, aunque no lo consiguió.

Conoció el teorema binomial para exponentes racionales antes de que Newton lo publicara, y los desarrollos en serie de Maclaurin para algunas funciones. Hoy en día sólo recibe el nombre de serie de Gregory el desarrollo:

$$\int_0^x \frac{1}{1+k^2}\,dk = arctag(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Gregory posiblemente conoció en Italia que el área bajo la curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ entre $0$ y $x$ es $arctag(x)$. A partir de este resultado, y transformando por división larga $\frac{1}{1+x^2}$ se obtiene la serie:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Aplicando después la fórmula de Cavalieri

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

obtiene la serie que lleva su nombre.

Esta técnica, la de expresar funciones en términos de series infinitas, la utilizaron Gregory y Newton simultáneamente, sin conocer el uno el trabajo del otro.

Isaac Newton (1643-1727): el interés por los problemas de la velocidad de cambio de magnitudes y por el desarrollo de funciones en forma de sumas infinitas, lo que él denominó "mi método", le llevó a la serie binomial que utilizó incesantemente en sus cálculos. Aunque ya era conocida para potencias enteras, y Wallis utilizó potencias racionales, nadie antes había conseguido generalizarla quizá por el manejo de una notación que no era la adecuada. El teorema binomial, publicado por Wallis en 1685, fue anunciado por primera vez en una carta a Leibniz en 1667. Newton llegó a esta fórmula a partir de un problema de cuadraturas y mediante la interpolación de Wallis.

$$\overline{P+PQ}\Big|\frac{m}{n} = P\frac{m}{n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + etc.$$

A partir de este descubrimiento, Newton pensó que "podría operar con series infinitas más o menos de la misma manera que con expresiones polinómicas finitas" (Boyer, 1986/1994, p. 496). Comprobando con algunos ejemplos que sus desarrollos con series infinitas daban el mismo resultado que operando por división larga, descubrió que:

> El análisis mediante series infinitas tenía la misma consistencia interna que el álgebra de cantidades finitas y que estaba regido por las mismas leyes generales. Las series infinitas no debían ser consideradas más como recursos de aproximación, sino que eran formas alternativas de las funciones que representaban. (Boyer, 1986/1994, p. 497).

Esta idea la expresa Wallis al describir el teorema binomial diciendo que:

> Estas series infinitas, o series convergentes 'sugieren la designación de alguna cantidad particular mediante una progresión regular o sucesión de cantidades que se aproximen a

ella de una manera continua y que, si se prolonga infinitamente, debe terminar por ser igual a ella'. (Boyer, 1986/1994, p. 497).

Las series de potencias adquieren especial protagonismo por su aplicación a la hora de resolver los problemas denominados "imposibles". Algunos de estos problemas consistían en encontrar la cuadratura de alguna función cuya expresión venía dada por una fracción algebraica. Otros, tenían su origen en los cálculos aproximados que se debían realizar para resolver problemas de navegación, física, mecánica celeste ó astronomía.

Newton utiliza la expansión binomial y la integración término a término para resolver problemas de cuadraturas de funciones circulares e hiperbólicas tales como:

$$\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ó } \frac{a}{b + cx}$$

Edwards (1979) lo ilustra con los siguientes ejemplos:

Si

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{b + cx} = \frac{a}{b} - \frac{acx}{b^2} + \frac{ac^2x^2}{b^3} - \cdots,$$

entonces

$$y = \frac{ax}{b} - \frac{acx^2}{b^2} + \frac{ac^2x^3}{b^3} - \cdots$$

Y de igual modo, si

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \sqrt{a^2 - x^2} = a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{8a^3} - \cdots,$$

entonces

$$y = ax - \frac{x^3}{6a} + \frac{x^5}{40a^3} - \cdots$$

Aproximadamente a mediados de 1660, antes del descubrimiento del teorema binomial, Newton publica un manuscrito en el que calcula el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$ siendo $x > -1$, integrando término a término la serie infinita que produce el mecanismo de división larga de 1 entre $1 + x$.

$$y = \frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Así obtiene que el área entre $0$ y $x$ de la hipérbola es:

$$A(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Edwards (1979) sostiene que Newton no se refiere a este área como el logaritmo natural de $1+x$, aunque sí “reconoce su carácter logarítmico” (p. 159). Utilizando unos cuantos sumandos de la fórmula anterior, calcula una pequeña tabla de logaritmos de enteros.

En 1671 publicó “De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas”, obra que había escrito en 1669 a modo de breve recapitulación de sus resultados, aunque sólo contiene parte del trabajo realizado entre los años 1664 y 1666 (cuando regresó a su casa por una plaga que tuvo lugar en Cambridge). Esta obra comienza con una descripción de su método general para calcular el área encerrada bajo una curva, que resume en tres reglas que no prueba ya que, “as Newton says, rather briefly explained than narrowly demonstrated” (Edwards, 1979, p. 201). Las dos primeras describen cómo calcular el área encerrada bajo una curva cuando está definida mediante una expresión polinómica. En la tercera regla resuelve el dilema que surge si la curva viene dada por una expresión más compleja: reducirla a una suma infinita y aplicar las reglas anteriores. Para realizar estas reducciones, utiliza la expansión binomial.

En esta obra obtiene la primera expresión en serie de la función exponencial aplicando el método de aproximaciones sucesivas llamado de inversión de series (Edwards, 1979):

> Partiendo de la conocida serie de Mercator, el desarrollo en serie de la función logaritmo que para Newton era el área bajo la hipérbola $y = \frac{1}{1+x}$
>
> $$z = \log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots,$$
>
> Newton trata de buscar una serie de potencias para $x$, expresando $x$ en función de $z$:
>
> $$x = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \cdots$$
>
> Opta por quedarse con los cinco primeros sumandos de la serie original y resolver la ecuación:
>
> $$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$$
>
> Despreciando los términos no lineales en $x$, obtiene una primera aproximación
>
> $$x \cong z$$
>
> En la ecuación $x = z + p$ sustituye este valor y, despreciando de nuevo los términos no lineales en $p$, logra una aproximación para este valor:
>
> $$p \cong \frac{1}{2}z^2 + q$$
>
> De este modo, la segunda aproximación es

$$x \cong z + \frac{1}{2}z^2$$

Repitiendo estas sucesivas aproximaciones, obtiene la serie

$$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots$$

Como $z = \log(1 + x)$, despejando la $x$ se tiene $x = e^z - 1$, de donde

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots$$

Utilizando este método, obtiene los desarrollos en serie de las funciones seno y coseno:

$$sen(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots$$

$$cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots$$

Estas series del seno y del coseno, las utiliza Newton para calcular el área bajo el cicloide y la quadratrix.

En 1736, nueve años después de su muerte, se publicó “De Methodis Serierum et Fluxion” en la que amplía los trabajos que escribió en su obra “De Analysi”, e incluye una elaborada discusión de técnicas de series infinitas para resolver ecuaciones algebraicas y diferenciales (Edwards, 1979).

Leibniz (1646-1716): Leibniz comenzó a trabajar con series numéricas infinitas a raíz de un problema que le propuso Huygens. Se trataba de encontrar la suma de los inversos de los números triangulares, es decir, de la forma $\frac{2}{n(n+1)}$:

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots$$

Dividiendo todo entre dos se obtiene:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \cdots$$

Descomponiendo cada sumando de la forma $\frac{2}{n(n+1)}$ en fracciones simples

$$\frac{2}{n(n+1)} = 2\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

se tiene:

$$\frac{S}{2} = \left[1 - \frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right] + \cdots$$

Eliminando los paréntesis, se tiene que la mitad de la suma vale 1, por lo que el valor de la suma ha de ser 2:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\cdots=2$$

Relacionó la suma de algunas series con el triángulo aritmético y armónico. A partir del triángulo diferencial de Barrow y Pascal, y de la raíz cuadrada y la división larga, Leibniz obtuvo el desarrollo en serie de la función seno, coseno y arcocoseno, también conocidos por Newton. Al igual que Newton, obtuvo la serie para la función exponencial utilizando el método de inversión de series a partir de la serie de Mercator.

Se le atribuye a Leibniz la suma

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

que aparece en su cuadratura del círculo, aunque es sólo un caso particular del desarrollo del arco tangente que había dado anteriormente Gregory.

Observó que una serie alternada de términos decrecientes en valor absoluto y tendiendo a $0$ es convergente, resultado que hoy en día se conoce como criterio de las series alternadas.

Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705): entre 1682 y 1704 publicó cinco tratados sobre series infinitas. Uno de los primeros, “Proporciones arithmeticae de seriebus infinitis earumque summa finita” de 1689, contiene la demostración de la divergencia de la serie armónica que ya había probado Mengoli unos años antes, aunque esto lo ignoraba Jacob. La demostración de Jacob es más complicada que la de Mengoli o la de Oresme. Demostró que, a partir de cualquier término, se pueden encontrar grupos de términos que suman más que la unidad, lo que implica la divergencia de la serie:

A partir de un término cualquiera, por ejemplo $\frac{1}{n}$, considera la progresión geométrica de razón $\frac{n}{n+1}$ que tiene por primer término $\frac{1}{n}$. Sumando esta progresión hasta el último término menor que $\frac{1}{n^2}$, se tiene:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n^2}{(n+1)^3}+\cdots+\frac{n^k}{(n+1)^{k+1}}=\frac{\frac{1}{n}-\frac{n^{k+1}}{(n+1)^{k+2}}}{1-\frac{n}{n+1}}$$

donde $k$ verifica $\frac{n^k}{(n+1)^{k+1}}<\frac{1}{n^2}$, o lo que es lo mismo,

$$\frac{n^{k+2}}{(n+1)^{k+2}}<\frac{1}{n+1}$$

Es fácil observar que la suma anterior es mayor que 1, ya que

$$\frac{\frac{1}{n}-\frac{n^{k+1}}{(n+1)^{k+2}}}{1-\frac{n}{n+1}}=\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{n^{k+2}}{(n+1)^{k+2}}\right]>\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1$$

Además, cada término de esta progresión es menor o igual que el correspondiente en la suma $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+k}$, ya que aplicando el desarrollo del binomio de Newton, se tiene que

$$\frac{n^t}{(n+1)^{t+1}}=\frac{1}{n+t+\frac{1}{n}\frac{t(t+1)}{2}+\cdots+\frac{1}{n^t}}<\frac{1}{n+t}$$

De donde se tiene la desigualdad

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{n^k}{(n+1)^{k+1}}>1$$

Jacques Bernoulli no tuvo éxito en encontrar una expresión cerrada para la suma $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, aunque sí logró probar que convergía a una cantidad finita menor que 2. Fue Euler, en 1737, quien dio la suma de esta serie.

Johann Bernoulli (1667-1748): fue instructor del marqués de l'Hopital, que plasmó en su obra "Analyse des infiniment petits" publicada en 1696 las lecciones del joven Bernoulli. Johann Bernoulli sumó también algunas series y probó la divergencia de la serie armónica utilizando una ingeniosa descomposición en fracciones simples:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{4}{4\cdot 5}+\cdots=$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right]+\left[\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right]+\left[\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right]+$$

$$+\left[\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right]+\cdots=1+\left[1-\frac{1}{2}\right]+\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right]+\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right]+\cdots=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

De manera análoga a como lo hizo Mengoli, si la serie fuera convergente y su suma fuese $S$, se tendría $S=S+1$.

### II 6.4 Etapa de formalización

En el siglo XVIII y la primera mitad del XIX, muchos matemáticos se esforzaron por dotar de rigor al recién creado Análisis Infinitesimal. Hubo quien recurrió a la matemática clásica griega y lo redujo a geometría; otros lo algebrizaron. No todos quisieron enfrentarse al concepto de límite que tan íntimamente aparece vinculado a los procesos del cálculo infinitesimal pero, con sus errores y sus dudas, todos aportaron algo para fundamentarlo. A lo largo de estos años, hubo que definir conceptos tan básicos para el Análisis Matemático como función, derivada, continuidad, o número real.

A pesar de que se conocía la idea de la integral como el límite de una suma o como el área encerrada bajo una curva, en el siglo XVIII se manejó la integral como el procedimiento inverso de la derivada (la antiderivada), y sólo cuando no se podía calcular una integral con el teorema fundamental del cálculo se utilizaron las series para aproximar su valor. Suscitado por las integrales de los coeficientes de las series de Fourier, Cauchy reformuló la definición de integral como límite de una suma y Riemann completó este trabajo definiendo la integral como aparece actualmente en los libros de texto.

#### II 6.4.1 *Las series en la etapa de formalización*

Hasta este momento se han dado a conocer muchas series numéricas convergentes y muchos matemáticos han utilizado los desarrollos en serie de funciones sin estudiar su convergencia, aunque ya algunos intuían que no se podía prescindir de este asunto. Las funciones que se manejaban en el siglo XVIII admitían desarrollos en series de potencias, por lo que no se plantearon qué condiciones habrían de verificarse para que una función admitiera un desarrollo en serie.

La no convergencia de algunas series provocó controversias acerca de la legitimidad de los resultados que se obtenían manipulándolas. Muchos matemáticos de renombre se mostraron ambiguos en su posicionamiento respecto a la validez de resultados que se derivaran de procesos divergentes, ya que por un lado aceptaban los resultados de series no convergentes, y por otro lado rechazaban trabajos de otros matemáticos que utilizaban series no convergentes. Tal fue la confusión que crearon las series divergentes, que algunos ilustres matemáticos como Cauchy y Abel, censuraron su uso. Los científicos menos formales, sacaron partido de las series en aproximaciones numéricas, admitiendo que aún faltaban cosas por descubrir sobre ellas. Uno de los grandes retos que dejaron en herencia al siglo XX fue definir y manipular series no convergentes. Sirva de ejemplo para ilustrar este desconcierto, la serie no convergente $\sum(-1)^n$, conocida como serie de Grandi:

> Según Kline (1992), en 1703 Guido Grandi (1671-1742) sustituyó $x$ por 1 en el desarrollo en serie de la función
>
> $$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$
>
> obteniendo así

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Puesto que agrupando los términos de dos en dos se consiguen infinitas sumas parciales iguales a cero,

$$(1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots$$

Grandi concluyó que había probado que el mundo puedes ser creado de la nada.

Leibniz, de acuerdo con el primer resultado de Grandi, realizó sumas parciales obteniendo los resultados

$$1$$

$$1 - 1 = 0$$

$$1 - 1 + 1 = 1$$

$$1 - 1 + 1 - 1 = 0$$

$$\cdots$$

Concluyó que la suma debía valer $\frac{1}{2}$ por ser la media aritmética de $0$ y $1$, ambos valores equiprobables. En Kline (1992) se puede leer tanto Jacques, Daniel y Jean Bernoulli como Lagrange, aceptaron este resultado, que según el propio Leibniz era más metafísico que matemático. También asegura Kline que este razonamiento de la equiprobabilidad no convencía en el fondo a Leibniz, ya que él mismo puso objeciones a una extensión de su razonamiento que llevó a Christian Wolf (1678-1754) a sumar

$$1 - 2 + 4 - 8 + \cdots = \frac{1}{3}$$

y

$$1 - 3 + 9 - 27 + \cdots = \frac{1}{4}$$

Anteriormente, Jacques Bernoulli en 1696 publica

$$\frac{t}{2m} = \frac{t}{m} - \frac{t}{m} + \frac{t}{m} - \frac{t}{m} + \cdots$$

consecuencia de considerar $m = n$ en la expresión

$$\frac{t}{m+n} = \frac{t}{m}\left[1 + \frac{n}{m}\right]^{-1} = \frac{t}{m}\left[1 - \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} - \frac{n^3}{m^3} + \cdots\right]$$

Para J. Bernoulli este resultado es una paradoja, de la cual, sustituyendo $t$ y m por 1, igualmente se obtiene la suma

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

También Euler sumó esta serie. Su argumento es similar al de Grandi, ya que sustituye $x$ por $-1$ en el desarrollo en serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Sustituyendo $x$ por $-2$, se obtiene la suma de Wolf

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots$$

Siguiendo estos pasos suma otras muchas series, obteniendo en muchos casos resultados erróneos. Nicolás II Bernoulli, repitiendo este razonamiento en los desarrollos en serie

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

y

$$\frac{1}{1-x-x^2} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots$$

llega a que

$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

y

$$-1 = 1 + 1 + 2 + 3 + \cdots$$

concluyendo que no es posible que dos series distintas den el mismo valor porque entonces se podrían igualar. Euler contestó que sólo era posible sustituir $x$ por aquellos valores que hicieran a las series convergentes, pero él mismo no tuvo en cuenta este argumento cuando dedujo que

$$\cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = 0$$

A partir de sumar las series

$$\frac{x}{1-x} = x + x^2 + x^3 + \cdots$$

y

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \cdots$$

Las investigaciones sobre las posiciones de los planetas, la propagación del sonido o del calor, o la vibración de una cuerda, dieron paso a las series trigonométricas. El principal personaje en este terreno es Fourier, si bien otros como Euler, Lagrange o Daniel Bernoulli, sumaron también alguna serie trigonométrica. Uno de los problemas que se plantearon fue la viabilidad de desarrollar en serie trigonométrica funciones que no fueran periódicas.

### II 6.4.2 *Personajes de la etapa de formalización*

Colin Maclaurin (1698-1756): en 1742, en su "Treatise of fluxions", dio la forma geométrica del criterio integral para la suma de una serie. Afirmó que para que una serie converja, sus términos han de hacerse pequeños y bastará con elegir los primeros sumandos para aproximar la suma total. Utilizó las series para integrar funciones que no podían expresarse algebraicamente.

Euler (1707-1783): muchos consideran que es el gran impulsor de las series. Las manipuló como si de polinomios se trataran, y pensó que todas las funciones admitían un desarrollo en serie. Caracterizó las funciones como algebraicas y trascendentes, siendo la diferencia entre unas y otras, que las trascendentes vienen dadas por series infinitas, es decir, se pueden expresar combinando un número infinito de veces operaciones algebraicas (Kline, 1992).

En relación a las series no convergentes, se mantuvo impreciso ya que tan pronto admitía que sólo se podían aceptar los desarrollos en serie de funciones cuando estas fueran convergentes, como admitía un resultado de una serie divergente.

En muchas ocasiones utilizó un razonamiento como el que sigue:

Como $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, sustituyendo $x$ por $-1$ o por $-2$, se obtiene:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

$$\frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + \cdots$$

Queda patente que unas veces le condujo a resultados ciertos, y otras a falacias.

Observando regularidades al trabajar con series armónicas, aproximó el valor $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ obteniendo la conocida constante de Euler, $\gamma$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(1+n) + \gamma$$

A partir del desarrollo en serie de Taylor de la función seno, y tras manipular esta serie infinita como si de un polinomio finito se tratara, sumó la serie de los inversos de los cuadrados de los números naturales:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

En Dunham (2004) se pueden leer los pasos que siguió. A partir de esta suma, obtuvo otras como:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{\pi^2}{24}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

Lagrange (1736-1813): en un intento por dotar de rigor al cálculo infinitesimal sin recurrir al concepto de límite, redujo todo al álgebra y basó su teoría en que todas las funciones admiten desarrollos en serie de potencias. Por supuesto, las series se manejan como polinomios y a pesar de proponer la fórmula del resto de Lagrange para el desarrollo de Taylor, no trató con rigor el problema de la convergencia (Kline, 1992).

En sus estudios sobre la propagación del sonido, sumó la serie trigonométrica

$$\frac{1}{2} = 1 \pm \cos x \pm \cos 2x \pm \cos 3x \pm \cdots$$

Fourier (1768-1830): en 1822 publicó la “Théorie analytique de la chaleur”, en la que, utilizando la serie de Taylor, obtuvo el desarrollo en serie trigonométrica de una función arbitraria. La falta de rigor en su demostración hizo que perdiera credibilidad entre sus contemporáneos, aunque actualmente tiene una importante aplicación en el área de teoría de la señal. Su trabajo hizo que se replantearan algunos conceptos como el de integrabilidad o el de función.

Gauss (1777-1855): fue el primero en publicar un trabajo riguroso sobre la convergencia de una serie (Kline, 1992). Lo hizo en 1812, en el artículo “Disquisitions Generales Circa Seriem Infinitam”, en el que estudió la serie hipergeométrica. En este artículo, rectificó su definición de serie convergente que había dado hasta entonces en sus trabajos ya que había considerado que una serie era convergente si, a partir de un término, los restantes decrecen hacia cero. Puesto que la serie hipergeométrica representa distintas funciones según los valores de los parámetros, pensó que en cada caso se podría dar o no la convergencia. Utilizó para ello el criterio del cociente, que ya había sido utilizado con anterioridad por Edward Waring (Boyer, 1986/1994).

Se limitó a estudiar la convergencia de series concretas, por lo que no enunció una teoría general de convergencia. Tampoco tuvo en cuenta el error cometido al aproximar el valor de una función tomando los primeros sumandos de su desarrollo en serie; se limitaba a desestimar los sumandos a partir de uno cuyo valor numérico fuera pequeño (Kline, 1992).

Bolzano (1781-1848): preocupado por la convergencia de las series, obtuvo algunos resultados interesantes que hoy en día se conocen con el nombre de otros matemáticos, como Cauchy, por la falta de divulgación de sus trabajos.

Cauchy (1789-1857): como buen seguidor de la tradición de la École Polytechnique, publicó en abundancia. En su obra "Cours d'analyse", incluye un capítulo en el que estudia formalmente las series infinitas. Enuncia y demuestra varios criterios de convergencia y adjunta algún resultado erróneo. El cálculo de Cauchy es el que hemos heredado en nuestros libros de texto.

Es el autor de varios criterios de convergencia de series, aunque, como se ha comentado anteriormente, algunos de ellos fueron descubiertos por otros matemáticos. Éste es el caso, por ejemplo, del criterio del cociente que lo usó Gauss para demostrar la convergencia de su serie hipergeométrica, o del criterio integral que lo publicó Maclaurin en 1742.

Abel (1802-1829): junto con Cauchy, fue uno de los que prohibieron el uso de series divergentes. Enunció algunos criterios de convergencia y fue el primero en demostrar por completo el teorema binomial en 1826.

### II 6.5 Etapa moderna

Desde el siglo XVII, la convergencia de las series ha suscitado desacuerdos sobre la validez de muchos resultados en los que intervenía series infinitas. Basta recordar la polémica suma $\sum(-1)^n$. La falta de una estructura teórica firme sobre sumas de series infinitas provocó muchos resultados contradictorios.

Una de las razones que produjeron conclusiones erróneas, muchas veces denominadas paradójicas, fue el uso del álgebra de las sumas finitas aplicada a las sumas infinitas. Se llegaron a muchos de estos resultados tras manipular sin restricciones expresiones que contenían sumas infinitas. Esto es consecuencia de la falta de una teoría de cálculo infinitesimal consolidada que aún debía esperar dos siglos para asentarse.

De los trabajos realizados en los siglos XVII y XVIII, heredó el siglo XIX aspectos fundamentales para trabajar coherentemente con sumas infinitas:

- ✓ Concepto de función: Las series trigonométricas, utilizadas por algunos matemáticos anteriores a Fourier, como Lagrange, D. Bernoulli o D'Alembert, aparecieron en muchas ocasiones en cálculos de astronomía, principalmente para aproximar distancias. Estas series plantearon la cuestión, no resuelta hasta el siglo XIX, de si cualquier función podría desarrollarse como una serie trigonométrica. El trabajo de Fourier sobre la trasmisión del calor impulsó diversas investigaciones en las que se cuestionaron las concepciones sobre continuidad, derivabilidad, diferenciabilidad e incluso el significado de función.
- ✓ Ideas relativas al infinito: Cuando Dedekind definió un conjunto infinito como aquel que es semejante a una parte de él mismo, dotó al concepto de infinito de entidad lógica que hasta entonces no había tenido. A lo largo de los siglos, ha estado rodeado de confusión y tanto matemáticos como filósofos han opinado sobre su naturaleza. Desde el infinito potencial de Aristóteles, pasando por la idea de Eular de situarlo en una frontera entre los números positivos y los negativos (Kline,

1992), ha sido una de las dificultades a las que se ha enfrentado la ciencia a lo largo de los siglos, y lo sigue siendo para los estudiantes de cálculo superior.

Aunque a finales del siglo XIX el trabajo de Cantor sobre los números transfinitos clarifica muchos aspectos de este concepto, aún permanecen las dificultades inherentes a la noción de infinito.

- ✓ Herramientas de cálculo potentes: La imaginación y el ingenio de todos los que trabajaron distintos aspectos del cálculo infinitesimal, forjaron un sistema para operar cada vez más potente y efectivo. El enfoque puramente geométrico de la matemática, fue cediendo paso a los desarrollos analíticos que facilitaron el avance y consolidación del Análisis Matemático.
- ✓ Teoría de cálculo infinitesimal: Tras el estallido de ideas e intuiciones del siglo XVII, el cálculo infinitesimal se formaliza a partir del siglo XVIII y emerge como una teoría consolidada en el siglo XIX. Con el paso de los años, se consolidan algunos conceptos esenciales del Análisis Matemático como el de función o límite.

Paradójicamente, tras la prohibición del uso de series no convergentes, se formaliza una teoría de series divergentes que justifica su empleo para aproximar valores de una función. En esta nueva teoría aparece el concepto de sumabilidad. Es posible definir la suma de una serie con otro significado distinto del habitual, en el que se asocia a un proceso de acumular, y así se puede definir una suma para una serie divergente.

Las investigaciones en astronomía promueven los trabajos sobre ecuaciones diferenciales y ecuaciones en derivadas parciales, que requieren de la teoría de series divergentes. A pesar de lo artificial de las nuevas definiciones de suma, la validez de su interpretación física justifica su aceptación.

## II 7 DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA Y NIVELES DE DESARROLLO

El análisis del desarrollo histórico del concepto de serie numérica y la experiencia de la autora de este trabajo como estudiante y profesora, dieron lugar a una descomposición genética inicial en la que se esbozaron las primeras ideas acerca de cómo podían ser las construcciones mentales que debía desarrollar un individuo para comprender el concepto de convergencia de serie numérica. Su estructura es la siguiente (Codes y Sierra, 2004):

Prerrequisitos (función)

- Representación gráfica de funciones algebraicas.
    - Reconocimiento del comportamiento de una función a partir de su gráfica, en cuanto a monotonía y cotas.
    - Representación gráfica de funciones algebraicas discretas.
- Límites.
    - Significado gráfico del límite de una función.
    - Significado del comportamiento de una función con asíntotas.

Prerrequisitos (sucesión)

– Definición informal (intuitiva) de una sucesión numérica.
    - Números ordenados con un criterio.
    - El orden viene dado por los naturales, hay un primero, un segundo, etc., y cada uno de ellos tiene un valor según una ley.
– Definición formal de una sucesión numérica
    - Función con dominio discreto que a cada natural $n$ le asigna un valor real $a(n) = a_n$.
– Representación de una sucesión numérica.
    - Como función (a trozos, etc.) o de manera recursiva.
    - Obtención del término general.
– Comportamiento de una sucesión numérica desde el punto de vista gráfico.
    - Monotonía.
    - Cotas.
– Comportamiento de una sucesión numérica desde el punto de vista analítico.
    - Monotonía.
    - Cotas.
    - Convergencia.

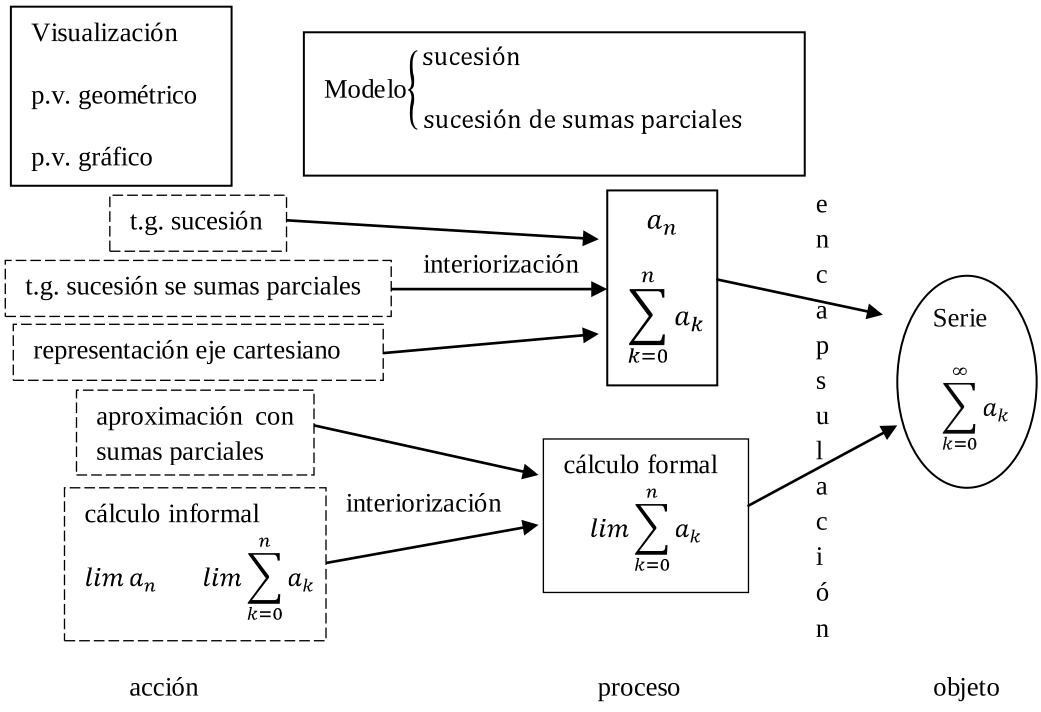



Figura 18. Descomposición genética inicial.

Problema contextualizado.

I. Visualización del problema.
   - Punto de vista geométrico: dibujo, esquema,…
   - Punto de vista gráfico.

II. Reconocimiento de la sucesión de las sumas parciales.
   - Identificación de dos partes en el modelo matemático que representa el problema, una general (sucesión) y otra creada añadiendo sucesivos términos de la anterior (sucesión de sumas parciales).

III. Obtención del modelo matemático:
   - Acción de obtener el término general de una sucesión.
   - Acción de obtener el término general de una sucesión de sumas parciales.
   - Acción de representar en un eje cartesiano los términos de una sucesión cualquiera, por ejemplo, $a_n$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

IV. Interiorización de las dos partes del modelo en un proceso que diferencia las dos partes del modelo, $a_n$ y $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
   - La parte general se modela con una sucesión, expresada como una función, $a(n) = a_n$.
   - La otra, con una sucesión cuyo término general es la suma de los $n$ primeros términos de la anterior, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

V. Intuición acerca del comportamiento.
   - El comportamiento de la sucesión $a_n$ condiciona el comportamiento de la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
   - La sucesión $a_n$ puede ser convergente y no serlo la sucesión $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

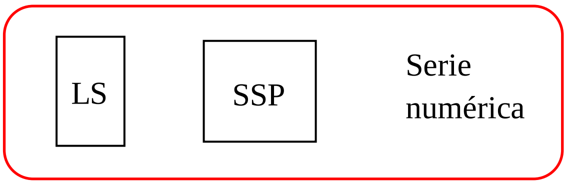
VI. Acciones sobre el comportamiento:
   - Acción de aproximar un valor utilizando la sucesión de sumas parciales.
   - Acción de calcular $lim\, a_n$ y $lim\, S_n$ sin utilizar los algoritmos habituales de cálculo de límites, es decir, con gráficas, representaciones geométricas, etc.

VII. Interiorización de las acciones anteriores en un proceso que consiste en el cálculo formal del límite $lim\, S_n$.

VIII. Encapsulación de los procesos IV y VII en el objeto serie numérica, $lim\, S_n$.

Posteriormente, tras un primer examen de las grabaciones y el estudio de los trabajos de Brown y otros (2008) y Dubinsky y otros (2005a, 2005b), la descomposición genética se modificó añadiendo la coordinación de los esquemas de sucesión de sumas parciales y límite de sucesión. El resultado es como sigue:

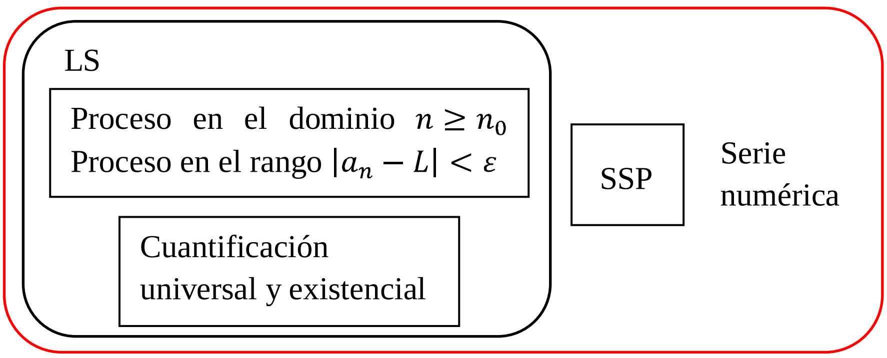
Una serie numérica es el límite de una sucesión de sumas parciales a la que se llamará normalmente $S_n$. Por tanto, el esquema de serie numérica es el resultado de coordinar el esquema de sucesión de sumas parciales (SSP) con el esquema de límite de una sucesión (LS).




Coordinar los dos esquemas supone tener conciencia de que el límite de la sucesión de sumas parciales es lo que se llama la suma de la serie y su carácter define el carácter de la serie, convergente o divergente (a infinito o por oscilación). Lo que ocurre en la práctica, es que es posible coordinar estos esquemas aunque no estén adecuadamente construidos, bien porque sean inconsistentes o porque sean incoherentes (en el sentido de Garbín y Azcárate, 2002). En ese caso se dirá que el individuo ha encapsulado el pre-objeto serie numérica y ha construido un esquema de serie numérica inconsistente, o incoherente, según el caso.

### II 7.1 Esquema de límite de una sucesión

El trabajo de Cottrill y otros (1996) propone una descomposición genética del concepto de límite en la que la comprensión formal de límite no tiene un carácter estático sino más bien todo lo contrario. En su propuesta, la construcción del esquema de límite requiere haber construido un esquema de cuantificación que permita operar en dos niveles (para todo..., existe....) y aplicarlo al objeto resultante de haber encapsulado la coordinación de dos procesos, uno en el dominio de la función ($0 < |x - a| < \delta$) y otro en el rango de la función ($0 < |f(x) - L| < \varepsilon$). En el caso de las sucesiones numéricas, el proceso en el dominio es $n \geq n_0$ y el proceso en el rango es $|a_n - L| < \varepsilon$, mientras que los dos niveles de cuantificación que se han de aplicar son: para todo $\varepsilon$ existe un $n_0$.




Tanto la coordinación de estos dos procesos como la construcción de la cuantificación, justifican sobradamente las dificultades que encuentran los estudiantes en el concepto de límite.

Del trabajo de Breidenbach y otros (1992), Cottrill y otros (1996) adoptan las tres formas (que pueden coexistir por no ser mutuamente inconsistentes) de pensar en una función, como prefunción, como acción o como proceso, y describen tres formas de pensar en un límite. Estos investigadores consideran que cuando un individuo realiza una única evaluación de la función para concluir acerca de su límite, posee una preconcepción de límite; una concepción acción implica realizar un número finito de evaluaciones antes de obtener alguna conclusión, mientras que una concepción proceso requiere imaginar qué ocurre cuando se repite la evaluación de manera indefinida.

### II 7.2 Esquema de sucesión de sumas parciales

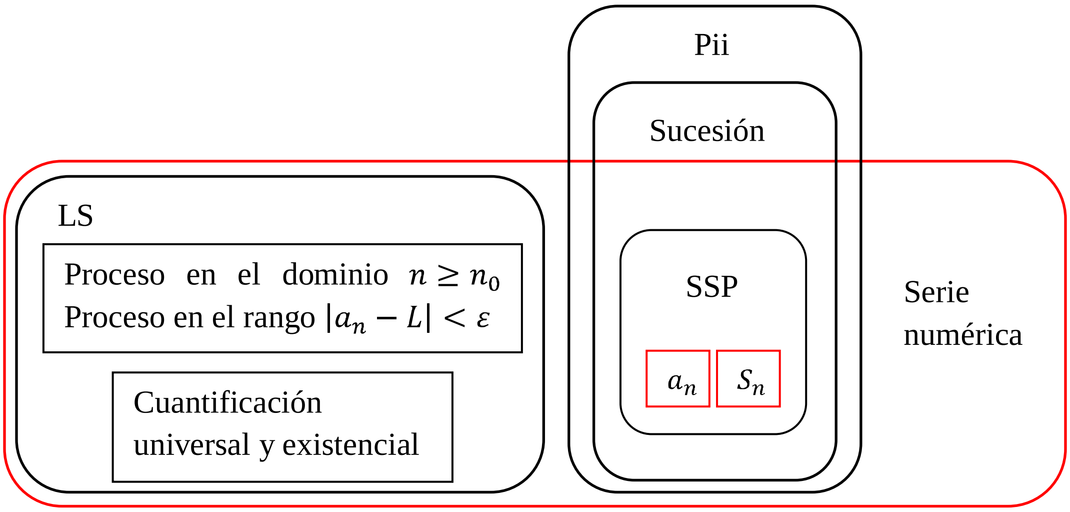
Una sucesión de sumas parciales admite siempre dos formas para expresar su término general, como un sumatorio o de forma recursiva:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \qquad \begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_{\mathrm{n}} = S_{\mathrm{n}-1} + a_n, \quad n > 1 \end{cases}$$

siendo $a_n$ el término general de una sucesión numérica cualquiera.

En cualquiera de los dos casos, la expresión general de una sucesión de sumas parciales deja patente que cada término de la sucesión es el resultado de sumar al término anterior el enésimo término de la sucesión $a_n$. Esto muestra dos características fundamentales de las sucesiones de sumas parciales:

- ✓ La presencia de dos sucesiones, $a_n$ y $S_n$.
- ✓ Su carácter iterativo y recursivo.




#### II 7.2.1 *$S_n$: Sucesión de sumas de términos de otra sucesión*

En el trabajo de McDonald y otros (2000) se destaca la presencia de dos entidades cognitivas que construyen los estudiantes cuando se enfrentan a problemas que involucran sucesiones numéricas: SEQLIST y SEQFUNC.

Respecto a la concepción SEQFUNC, McDonald y otros (2000) consideran que dar la expresión algebraica del término general de una sucesión (*closed form*)[9], junto con la habilidad para manejar sus propiedades y operar con esa expresión, es una manifestación de una concepción objeto de SEQFUNC. También puntualizan que una concepción inconsistente o incoherente de función obstaculiza la comprensión de ideas matemáticas más elaboradas como las series numéricas, y en general sobre cualquier tópico del Análisis Matemático que se fundamente en el concepto de función.

Por tanto, en esta investigación se considera que es necesario que un individuo posea un estado de desarrollo TRANS del esquema de sucesión como requisito mínimo para construir el concepto de serie numérica. Un estado de desarrollo inferior conducirá a una construcción del esquema de serie numérica inconsistente.

Al margen de estas cuestiones propias de las sucesiones, la noción de sucesión de sumas parciales es un caso particular de una sucesión recursiva que conlleva un mayor nivel de complejidad por la propia recursividad y por integrar dos sucesiones:

$$a_n \qquad y \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Para coordinar estos dos conceptos matemáticos, $a_n$ y $S_n$, es necesario establecer vínculos entre los elementos matemáticos que los conforman. Así, la existencia o no de vínculos y los elementos matemáticos que intervengan en los mismos, determinarán el nivel de desarrollo del esquema de sucesión de sumas parciales. De ese modo, los niveles de desarrollo del esquema de sucesión de sumas parciales se caracterizan como sigue:

- ✓ INTRA: se caracteriza porque no se establecen relaciones entre los elementos matemáticos de la sucesión $a_n$ y de la sucesión $S_n$. Esto puede ocurrir, por ejemplo, cuando en un problema contextualizado se obtiene una expresión algebraica para la sucesión de sumas parciales que no está escrita como una suma. Otra característica de este estado es la confusión entre los símbolos “+” y las comas, que convierten al término general de la sucesión $S_n$ en la lista de los $n$ primeros términos de la sucesión $a_n$.

  $$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad \rightsquigarrow \quad a_1, a_2, \cdots, a_n$$

  También es propio de este estado tratar cualquier sucesión cuyo término general esté escrito con una suma de $n$ términos como si fuera una sucesión de sumas parciales, como es el caso de la sucesión

  $$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$

  En este caso, el término general se puede escribir como un sumatorio, aunque no se ajusta al patrón de sucesión de sumas parciales:

[9] La traducción literal *forma cerrada* o *fórmula cerrada*, presenta matices que no son pertinentes en este discurso.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+1}$$

- ✓ INTER: se caracteriza porque en algunos contextos se establecen vínculos entre las dos sucesiones, pero no en todos. Los vínculos consisten en operaciones o representaciones matemáticas, o manipulaciones algebraicas en las que se diferencian las dos sucesiones, bien de forma explícita, como por ejemplo cuando se expresa el término general de una sucesión de sumas parciales con una fórmula del tipo $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, o de forma implícita cuando por ejemplo se aplica el criterio del término enésimo para estudiar la convergencia de la sucesión $S_n$.
- ✓ TRANS: se caracteriza por la total distinción entre las dos sucesiones que se evidencia a través de los vínculos que se establecen entre las mismas. Un individuo con este nivel de desarrollo, salvo por un despiste, distingue una sucesión de sumas parciales de otra que no lo es, aunque su término general esté escrito con un sumatorio, y es capaz de utilizar características de $a_n$ para argumentar sobre el carácter de $S_n$.

#### II 7.2.2 *Carácter iterativo*

Según el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española (Real Academia Española, 2001), un proceso es el conjunto de las fases sucesivas de un fenómeno natural o de una operación artificial, el término iterativo es un adjetivo que indica que algo se repite y el adjetivo infinito indica que no tiene ni puede tener fin ni término. Estas definiciones de las palabras *proceso*, *iterativo* e *infinito* fuera del ámbito de la matemática, se ajustan al significado que se da en matemáticas a un proceso iterativo infinito (Pii) y que Brown y otros (2008) definen como "la aplicación repetida y sin fin de una trasformación mental o física de objetos, que involucra la variación de uno o más parámetros en cada repetición" (p. 118). Teniendo en cuenta que, según estos autores un Pii requiere de un "tipo de construcción mental que se ajusta a la categoría de proceso según la teoría APOS" (p. 125), las sucesiones de sumas parciales son un caso particular de Pii que además es recursivo.

Por tanto, en esta investigación se considera que la construcción del esquema de sucesión de sumas parciales se puede analizar desde la perspectiva de Brown y otros (2008) teniendo en cuenta que en el esquema conceptual de las sucesiones de sumas parciales coexisten dos Pii, las sucesiones $a_n$ y $S_n$.

Siguiendo los argumentos del trabajo de estos autores, se considera que poseer una concepción acción de SSP consiste en obtener los primeros valores de la sucesión $S_n$ aplicando sucesivamente la transformación consistente en añadir al término anterior de la sucesión un nuevo sumando. Este sumando es a su vez el resultado de la trasformación consistente en obtener un término de la sucesión $a_n$, para lo cual analíticamente es necesario evaluar la expresión general de la sucesión $a_n$ para un valor concreto de la variable $n$.

Así, la acción de obtener un término de la sucesión $S_n$ es el resultado de dos evaluaciones: una primera, que normalmente no conlleva mucha dificultad porque consiste únicamente en sustituir el valor de la variable $n$ en una expresión algebraica, y una segunda más compleja[10] porque involucra al término anterior de la sucesión y al nuevo sumando resultante de la evaluación anterior.

La complejidad de estas transformaciones encadenadas provoca que, en ocasiones, el individuo se fije solamente en la primera evaluación que es más sencilla. Por ello, éste es un punto clave para la construcción del esquema de sucesión de sumas parciales ya que llevar a cabo las dos evaluaciones es una forma de establecer un vínculo entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$.

Cuando el individuo repite varias veces la transformación de obtener nuevos términos de la sucesión $S_n$, coordinando un proceso de iteración a través de un segmento finito de $\mathbb{N}$ con la transformación consistente en obtener un nuevo término de la sucesión $S_n$, se construye el proceso mental infinito al que Brown y otros (2008) llaman *proceso iterativo infinito*. Con una concepción proceso de sucesión de sumas parciales, el individuo puede imaginarse la repetición de la transformación de manera indefinida.

Para poseer una concepción objeto de sucesión de sumas parciales, se ha de encapsular el proceso iterativo infinito en un objeto aplicando una trasformación sobre dicho proceso. Dicha trasformación está encaminada a obtener el límite de la sucesión de sumas parciales. En este punto es donde entra en juego el esquema de límite de una sucesión.

### II 7.3 Elementos matemáticos de los esquemas SSP y LSSP

Cada uno de los esquemas de LS y de SSP, como conceptos matemáticos, están formados por elementos matemáticos que se relacionan para dar sentido al concepto. Se entiende que un elemento matemático es “el producto de una disociación o de una segregación en el interior del concepto o la noción matemática (vinculado a la definición del concepto y a sus propiedades)”, definición adaptada por Sánchez-Matamoros (2004, p. 79) de la definición dada por Piaget.

Los elementos matemáticos de los conceptos de sucesión de sumas parciales (SSP) y límite de una sucesión de sumas parciales (LSSP) son los que siguen:

[10] La complejidad resulta de tener que realizar dos evaluaciones, en vez de una.

| | Sucesión | SSP | LSSP |
|---|---|---|---|
| Registro analítico | Comportamiento:<br>Monotonía<br>Cotas | Comportamiento:<br>Monotonía<br>Cotas<br>Sucesión de sumas | Carácter<br>Convergente<br>Divergente a infinito<br>Divergente por oscilación |
| Registro algebraico | Término general<br>Razón del término general<br>Términos de la sucesión<br>Comportamiento<br>Monotonía<br>Cotas<br>Razón de la sucesión geométrica | Término general<br>Sumatorio<br>Términos de la sucesión<br>Comportamiento<br>Monotonía<br>Cotas | Aproximación al límite<br>Criterios de convergencia<br>Criterio del término enésimo<br>Criterio de las serie geométricas<br>Cálculo del límite<br>Convergente<br>Divergente a infinito<br>Divergente por oscilación |
| Registro gráfico | Puntos del plano cartesiano<br>Rectángulos<br>Comportamiento<br>Monotonía<br>Cotas<br>Asíntota de la función discreta $a(n) = a_n$ | Puntos del plano cartesiano<br>Unión de rectángulos<br>Comportamiento<br>Monotonía<br>Cotas<br>Asíntota de la función discreta $S(n) = S_n$ | Aproximación al límite<br>Rectángulo $2 \times 1$ |

Tabla 1. Elementos matemáticos de SSP y LSSP.

Estos elementos matemáticos se relacionan a través de operaciones, entendidas como manipulaciones analítico-algebraicas o gráficas que derivan resultados, correctos o no, sobre los conceptos matemáticos.

La coordinación de los dos esquemas se medirá en relación a las operaciones que involucren elementos de ambos conceptos. Por ejemplo, se dirá que coordinan los dos esquemas cuando en el registro gráfico se aproxime el valor del límite de la sucesión de sumas parciales a partir de la asíntota de la función discreta $S(n) = S_n$.

### II 7.4 Niveles de desarrollo

Los niveles de desarrollo en la comprensión de un concepto matemático (el mecanismo de la triada) se introdujeron para facilitar la descripción de cómo construyen los estudiantes su conocimiento (Clark y otros, 1997). Sánchez-Matamoros (2004) añadió dos niveles más a los tres que propusieron Clark y otros (1997), (véase I 1.5.2), atenuando así el paso de un nivel a otro.

En base a los resultados del análisis teórico del concepto de serie numérica y su convergencia, y según la experiencia de la investigadora como profesora, se ha considerado que para construir este concepto es necesario coordinar dos esquemas, el de

SSP y el de LS. Así, se considerará si el individuo no coordina los dos esquemas, los coordina en algunos contextos, o los coordina siempre. Además, la coherencia y la consistencia de estos esquemas afectan directamente a la construcción del concepto de serie. Por tanto, cuando un individuo coordine los esquemas, en todos o en algún contexto, el estado de desarrollo de los mismos determinará un nivel, superior o inferior, en el desarrollo del concepto de serie numérica. Por otro lado, la coordinación de estos esquemas y de las dos sucesiones implícitas en el esquema de SSP, está relacionada con la concepción que posee el individuo de Pii.

En un trabajo anterior (Codes y Sierra, 2007a) se propuso una primera aproximación a los niveles de comprensión. Éstos, se han modificado tras un análisis más detallado de los datos y una reflexión más profunda sobre los mismos. Así, la caracterización de los niveles de desarrollo del concepto de convergencia de serie numérica propuesta en esta investigación es como sigue:

Nivel Intra: un individuo en el nivel Intra no coordina los esquemas de SSP y LS, de modo que puede resolver ejercicios rutinarios aplicando algoritmos sin relacionar la convergencia de una sucesión de sumas parciales con la suma de su serie numérica.

Nivel Intra avanzado: un individuo en el nivel Intra avanzado es capaz de coordinar en algún contexto los esquemas de SSP y LS, pero posee un nivel Intra o Inter de desarrollo del esquema de SSP.

Nivel Inter: un individuo en el nivel Inter es capaz de coordinar los dos esquemas de SSP y LS en algunos contextos, pero en otros no. Por ejemplo, un individuo en el nivel Inter de desarrollo del esquema de convergencia de serie numérica puede reconocer el límite de la sucesión de sumas parciales como la suma de su serie en un contexto analítico-algebraico, pero tener dificultades en un contexto gráfico-cartesiano. Además, posee un nivel Trans de desarrollo del esquema de SSP.

Nivel Inter avanzado: un individuo en el nivel Inter avanzado coordina los dos esquemas de SSP y LS, pero esa coordinación se ve afectada por las concepciones previas de conceptos como límite e infinito, es decir, las inconsistencias e incoherencias asociadas a estos conceptos producen resultados inconsistentes o incoherentes, a pesar de que se coordinen los esquemas de SSP y LS. Estas concepciones previas pueden, por ejemplo, provocar que un individuo reconozca la suma de una serie como el límite de una sucesión de sumas parciales, pero concluya que la suma de la serie “se acerca” a un valor por su concepción de límite como algo inalcanzable.

Nivel Trans: un individuo en el nivel Trans coordina los dos esquemas de SSP y LS sin dificultad, independientemente del contexto en el que se desarrolle la actividad matemática. Además, es capaz de sumar una serie numérica aplicando criterios de convergencia o calculando directamente el límite de su sucesión de sumas parciales sin que aparezcan inconsistencias o incoherencias provocadas por las concepciones de límite o de infinito.

# CAPÍTULO III Diseño de la investigación

Una vez concretados el marco teórico y el problema de investigación, en este capítulo se tratarán aspectos relativos al diseño de la investigación.

En primer lugar se documentará detalladamente el proceso de recogida de datos. Entre otros aspectos, se describirá el cómo y el porqué del tipo de datos que se han obtenido. El porqué está asociado al marco teórico desde el que se desarrolla este trabajo y a las preguntas de investigación. El cómo tiene que ver con los instrumentos que se han utilizado, que aportan un aspecto innovador a esta investigación. La elección de los participantes no sólo tiene que ver con el porqué y el cómo, sino también con limitaciones ajenas a la investigación.

En la segunda parte de este capítulo se describe la actividad con la que se obtuvieron los datos.

## III 1 RECOGIDA DE DATOS

El proceso de recogida de datos para esta investigación se llevó a cabo durante el curso académico 2005-2006 con estudiantes de primer curso de la Escuela de Informática de la Universidad Pontificia de Salamanca (UPSA). Los datos provienen de tres fuentes distintas:

- ✓ Los apuntes y las notas de clase de la profesora, y los apuntes de clase de los estudiantes. De toda esta información se disponen de los originales o de fotocopias de los mismos.
- ✓ Las grabaciones de audio y video de las sesiones, tanto de aquellas en las que los estudiantes realizaban ejercicios, como de aquellas en las que la profesora impartía clase.
- ✓ La captura de todo lo que acontecía en el escritorio del ordenador con el que trabajaron los estudiantes.

El propósito de las grabaciones fue reunir información acerca de cómo los estudiantes construyen su conocimiento sobre la convergencia de las series numéricas mientras trabajaban en clase resolviendo diversas tareas.

Uno de los logros que se ha conseguido en este trabajo, es el de disponer de toda la información en formato digital. Las ventajas que ofrece el soporte digital se aprovechan tanto en el proceso de obtención de datos como en su manipulación, análisis y almacenamiento.

En la obtención de los datos ha aportado flexibilidad por el reducido tamaño de los instrumentos, y dinamismo por la posibilidad de utilizarlos en diversos entornos; en la manipulación y el almacenamiento se aprovechan la rapidez que ofrece el formato digital para acceder a la información y el reducido espacio en el que se pueden almacenar grandes cantidades de datos; en el análisis, facilita la disponibilidad de los datos en cualquier momento y en un formato de fácil acceso, fiable y fácilmente reproducible.

La única exigencia que requiere este tipo de formato es la de disponer de suficiente espacio de memoria para almacenar todos los datos, y de ordenadores con los que obtener las grabaciones. Las exigencias de almacenamiento de datos se ha resuelto fácilmente con dispositivos tecnológicos de bajo coste y fácil manejo, como discos duros externos y memorias (pendrive); en cuanto a la utilización de dispositivos para obtener las grabaciones, se ha contado con los ordenadores de sobremesa del laboratorio y los ordenadores portátiles que están a disposición de los profesores para utilizarlos en las clases. Teniendo en cuenta que las herramientas informáticas se han convertido en un medio indispensable de trabajo y que cada vez se están imponiendo más en las aulas en todos los niveles educativos, estas necesidades de material no han supuesto demasiado esfuerzo.

### III 1.1 Las grabaciones de video

En el campo de la didáctica de las matemáticas las grabaciones de video se utilizan con distintos propósitos según se emplee en la investigación o en la práctica docente.

En concreto, en la formación de maestros tiene una gran utilidad como recurso didáctico. Por ejemplo, el profesor Salvador Llinares de la Universidad de Alicante tiene una amplia experiencia en el uso de las grabaciones de video como apoyo a la docencia en la formación de maestros (Callejo, Valls, y Llinares, 2007; Llinares, 2008; Llinares y Olivero, 2008; Llinares y Sánchez, 1998; Llinares y Valls, 2007; Valls, Llinares, y Callejo, 2006). Llinares, Valls, y Roig (2008) sostienen que:

> el uso de registros de video de las clases de matemáticas, como material didáctico para la formación, es una alternativa que se ha mostrado pertinente, ya que los videos en los programas de formación han demostrado su potencial como un medio que permite que los estudiantes para profesor tengan acceso a situaciones reales de clase, haciendo más fácil el análisis de la enseñanza de las matemáticas. (p. 48)

También en la Universidad de Extremadura, el profesor Lorenzo Blanco utiliza las grabaciones en video de algunas sesiones de estudiantes para profesor de Educación Primaria en prácticas, para estudiar su conocimiento didáctico en relación a algún tópico propio de este nivel educativo (Blanco, 1996). Además este autor también ha utilizado las grabaciones en video como instrumento de investigación (Blanco, Guerrero, Caballero, Brígido, y Mellado, 2009).

Sherin (2003) utiliza las grabaciones de video en formación de maestros, y ofrece un repaso histórico sobre las aplicaciones que se han dado a las grabaciones en video desde que se introdujeron en los años sesenta en la formación de maestros: microteaching, análisis de interacciones, ejemplificar con la práctica de un experto, estudio de casos y programas hypermedia. También en formación de maestros, se ha desarrollado el *videopaper* como una “herramienta alternativa para la producción, utilización y difusión de investigación educativa. (…) El videopaper es un documento multimedia que integra y sincroniza diferentes formas de representación, tales como texto, video e imágenes, en un solo documento integrado no lineal” (Lazarus, 2006, transp. 13). Es algo así como la versión moderna del portafolio.

En el ámbito de la investigación las grabaciones de video son un arma poderosa para la obtención de datos en estudios de carácter cualitativo. Lesh y Lehrer (2000) advierten que se ha de tener en cuenta cuatro aspectos cuando se obtienen datos mediante grabaciones de video. En primer lugar, las consideraciones teóricas marcarán los tipos de eventos y de relaciones que forman el centro de interés de la investigación. Todos los demás aspectos que se han de valorar en las grabaciones, vienen determinados por la perspectiva teórica desde la que se analizarán los datos. De ahí la necesidad de hacer explícito el marco teórico desde el que se analizarán los datos que se obtengan de las grabaciones, así como el propósito y la función de las mismas. El propósito es fundamental en la planificación de las grabaciones, mientras que el marco teórico es imprescindible en el análisis ya que, como señalan Lesh y Lehrer, "cada vez que la información se filtra, selecciona, simplifica o se organiza, se está sometiendo a una interpretación" (p. 672).

En las consideraciones prácticas, el propósito de las grabaciones determinará el cómo y dónde se llevan a cabo las grabaciones. La consideraciones físicas atienden a las necesidades materiales para las grabaciones: el número de cámaras que se necesitarán, hacia dónde se enfocarán, la necesidad de utilizar micrófonos, etc. Por último, las consideraciones temporales responden a cuestiones como el período de tiempo durante el que se grabará, cómo se definirán las unidades de análisis o cuál es el intervalo temporal con más relevancia.

Por otro lado, Hall (2000) considera que uno de los problemas que surge cuando en una investigación los datos provienen de grabaciones de video, es que en los informes de investigación se suprimen los procesos de recogida y selección de grabaciones de video como datos. Para que esto no ocurra en esta memoria, a continuación describimos cómo se ha realizado este proceso de recogida de datos, atendiendo a los cuatro aspectos que proponen Lesh y Lehrer.

#### III 1.1.1 *Consideraciones teóricas*

En los capítulos I y II de esta memoria están detallados el marco teórico sobre el que se apoya esta investigación, y los objetivos que pretende cubrir.

La teoría APOS proporciona el marco teórico desde el que se ha planteado el modelo teórico que guiará el análisis de los datos (véase II 7). Estos datos han de determinar qué relaciones establecen los estudiantes entre los elementos del modelo teórico que se ha propuesto. Estas relaciones ayudarán a describir cómo los estudiantes, a los que se ha grabado, comprenden el concepto de serie numérica. Así, el centro de interés de las grabaciones se sitúa en los estudiantes mientras resuelven tareas en clase y, puesto que para resolver ciertas tareas utilizan el ordenador, también todo lo que acontece en el escritorio del ordenador forma parte del interés de las grabaciones. La mayor parte de esta información se ha obtenido mediante grabaciones de dos tipos:

- ✓ Audio y video de los estudiantes mientras resuelven en clase tareas relativas al tópico de sucesiones y series numéricas; estas grabaciones contienen las reflexiones y los argumentos con los que resuelven cada tarea.
- ✓ Captura de todo lo que sucede en el escritorio del ordenador mientras utilizan el software Maple para resolver algunas tareas; con ello, se ha podido seguir paso a paso cada movimiento que han realizado los estudiantes con el ratón, los errores de sintaxis que han corregido y no se aprecian en el fichero final, la destreza con la que manejan la herramienta y otras cuestiones relativas al uso de esta herramienta informática. El tipo de información que aporta esta herramienta es muy variada.

Además, se han grabado todas las sesiones en las que se impartía clase magistral para conservar un registro con la información que facilitó la profesora. Estas grabaciones tienen especial interés para la triangulación de los datos, ya que la autora de esta tesis juega el papel de profesora-investigadora.

### III 1.1.2 *Consideraciones prácticas*

Las grabaciones se han llevado a cabo en dos escenarios, el aula habitual y el aula de ordenadores.

En el aula habitual se han obtenido las grabaciones de la profesora impartiendo clase magistral y las grabaciones de los estudiantes mientras resolvían algunos ejercicios tradicionales con lápiz y papel.

En el aula de ordenadores se han grabado a los estudiantes mientras resolvían tareas que requerían el uso del software Maple, y también se ha grabado todo lo que acontecía en el escritorio del ordenador con el software CamStudio.

Las grabaciones del audio y video se han obtenido con cámaras web y micrófonos conectados a ordenadores (portátiles o de sobremesa según el escenario).

Las intervenciones de la profesora en el aula de ordenadores aparecen en las grabaciones de los tres grupos, principalmente en las del grupo S1 que estaba situado junto a la pizarra portátil que se utilizó en ese aula.

### III 1.1.3 *Consideraciones físicas*

Para grabar las clases magistrales de la profesora se necesitó una única cámara web conectada a un ordenador portátil que se situaba en la primera fila de bancos de la clase. La cámara enfocaba a la pizarra, de modo que con estas grabaciones y con los apuntes de la profesora, es posible reproducir el contenido de estas sesiones. El micrófono de la cámara web fue apropiado para recoger el audio.

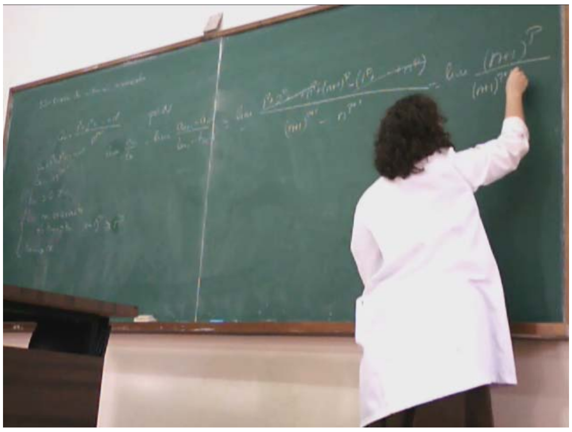


Figura 19. Clase magistral grabada en el aula de pizarra.

Para grabar a los estudiantes en el aula habitual, hubo que triplicar el número de cámaras web y de portátiles para grabar a los tres grupos. La cámara web conectada al ordenador portátil enfocaba a la mesa donde trabajaban los estudiantes; estas grabaciones sólo recogieron el audio porque la disposición de la cámara no permitía captar el papel en el que escribían. Para minimizar en las grabaciones el ruido que se genera en el aula mientras los estudiantes trabajan en grupo, se tomaron dos medidas: repartir convenientemente a los estudiantes por todo del aula, de manera que los grupos a los que se grababa estuvieran alejados de otros compañeros, y obtener la señal de audio utilizando micrófonos estéreos de solapa conectados al ordenador portátil. Estos micrófonos, al disponer de dos componentes separables para el audio de cada canal (izquierdo y derecho), permitían registrar a dos o tres participantes con un solo micrófono.

Para las grabaciones en el aula de ordenadores se sustituyeron los ordenadores portátiles por los ordenadores de sobremesa del aula. Para cada grupo se utilizaron dos ordenadores debido a las necesidades de memoria, almacenamiento y velocidad de proceso de CPU. Para obtener la grabación del escritorio del ordenador, se instaló el software CamStudio en el ordenador asignado para trabajar en clase. La cámara web se conectó a otro ordenador para que no hubiera problemas con los recursos que requieren este tipo de grabaciones, y se situó en la pantalla del ordenador en el que trabajaban los estudiantes, de modo que se captó al grupo de frente. Así, queda constancia del lenguaje gestual y de los movimientos que realizaban con las manos, lo cual ha sido muy útil a la hora de sincronizar la grabación de audio y video, con la que recoge los movimientos en la pantalla del ordenador.

También en este aula se situó a los grupos lo suficientemente distantes como para que el audio no se viera demasiado afectado por el ruido de fondo. Teniendo en cuenta que la mayor parte de la sesión en este aula se dedicaba el trabajo de los estudiantes en grupo, y que los ventiladores de los ordenadores emiten un zumbido constante, el nivel de ruido del aula era superior al de una sesión en la que se imparte una clase tradicional. Por ello, se utilizaron los micrófonos externos para recoger el audio del grupo. Estos micrófonos también recogieron las intervenciones de la profesora con cada grupo y con toda la clase.

#### III 1.1.4 *Consideraciones temporales*

Las grabaciones se llevaron a cabo en el curso académico 2005-06 durante las dieciséis sesiones de clase que duró la instrucción. La duración habitual de cada clase fue de cincuenta minutos. Además, se grabaron las sesiones de los días previos en los que se impartió el tópico de sucesiones numéricas y que sirvió de prueba piloto. De las dieciséis sesiones en las que se impartió el tópico de series numéricas, nueve se realizaron en el aula habitual y siete en el aula de ordenadores.

Las unidades de análisis no vienen dadas por cada sesión, sino por la tarea que resolvían los estudiantes, de modo que para resolver algunas tareas, como la *actividad rectángulos*, se tuvo que invertir más de una sesión de clase, mientras que en otras ocasiones, en una sesión de clase se resolvían varias tareas.

### III 1.2 Participantes

Los participantes en las grabaciones fueron catorce estudiantes de la Escuela de Informática de la UPSA, repartidos en seis grupos, cuatro parejas y dos tríos. Los estudiantes voluntarios aceptaron que se les grabara durante las clases y firmaron la correspondiente autorización. De los seis grupos, la mitad pertenecen a la titulación de

Ingeniero Técnico en Informática de Gestión y la otra mitad a la de Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas.

Los grupos S2 y S3 están formados por tres individuos porque habitualmente estudiaban juntos en ésta y otras asignaturas, y cuando se ofrecieron como voluntarios pidieron trabajar también los tres en el aula. Puesto que los medios técnicos permitían esta opción, se les concedió su petición. Además, se pensó que el hecho de que el grupo ya funcionara trabajando en equipo garantizaba su participación mientras se les grababa en clase.

| | | |
|---|---|---|
| Ingeniero Técnico en Informática de Gestión | G1 | Dos estudiantes |
| | G2 | Dos estudiantes |
| | G3 | Dos estudiantes |
| Ingeniero Técnico en Informática de Sistemas | S1 | Dos estudiantes |
| | S2 | Tres estudiantes |
| | S3 | Tres estudiantes |

Tabla 2. Participantes en las grabaciones.

Tras una primera revisión de las grabaciones, se han elegido a dos de los seis grupos para aportar los datos en esta investigación, los grupos S1 y S3, principalmente por dos motivos. Por un lado, participaron muy activamente en las clases, lo que permite tener más información sobre cómo construyen el conocimiento, respecto de otros grupos en los que los integrantes prácticamente no dialogaban cuando resolvían los ejercicios, o los resolvían de manera individual. El hecho de que al menos uno de los integrantes verbalizara casi todo lo que iba pensando confiere mucha más riqueza a la grabación. Además, estos dos grupos manifestaban distintos niveles en el desarrollo del concepto de serie numérica y se pensó que la heterogeneidad entre los dos grupos compensaba el hecho de haber excluido a los otros cuatro grupos.

Si bien el reducido número de estudiantes no da opción para hablar de resultados estadísticos, la experiencia de la investigadora como profesora de la asignatura ratifica que estos estudiantes no se salen de la normalidad. Además, el interés de esta investigación no es de carácter cuantitativo.

Los dos grupos estaban formados por estudiantes que cursaban por primera vez la asignatura Fundamentos Matemáticos I en la Escuela de Informática de la UPSA, si bien uno de los integrantes del grupo S1 había estudiando anteriormente en otra Universidad un primer curso de ingeniería informática sin aprobar las asignaturas de matemáticas.

El grupo S1 está compuesto por dos estudiantes, José María (Chema) y Daniel. Chema cursa su primer año en la Universidad y Daniel ha cursado dos veces un primer curso de Ingeniería Informática en otra Universidad sin aprobar la asignatura de matemáticas (en esos dos años sólo aprobó tres asignaturas). No son compañeros habituales en clase, pero se sientan próximos y han accedido con agrado a trabajar juntos para que se les grabara en la clase.

El grupo S3 está compuesto por tres estudiantes, Manuel, Carlos y Ricardo. Los tres cursan su primer año universitario y pertenecen al mismo grupo de amigos de clase; habitualmente quedan fuera de clase para estudiar y realizar las prácticas de otras asignaturas de la carrera. Por este motivo pidieron colaborar en la experiencia los tres juntos.

### III 1.3 Instrumentos

Como se ha comentado anteriormente, se ha introducido el empleo de instrumentos digitales para recoger la información, lo cual confiere a este proceso cierto grado de innovación. Después de hacer una breve referencia a estos instrumentos, se comentará este aspecto innovador.

Se han utilizado diferentes instrumentos en función del tipo de datos recogidos. Los apuntes y las notas de clase de los estudiantes están en papel, original o fotocopiado, al igual que las notas de la profesora y sus apuntes; estos últimos también se encuentran en formato electrónico. Parte de este material se ha escaneado para adjuntarlo en la presente memoria.

Las intervenciones orales de los estudiantes, al igual que las explicaciones de la profesora en clase, se han grabado en formato digital mediante el uso de cámaras web (modelo Logitech QuickCam Communicate STX) y micrófonos de solapa (modelo AIWA CM-P11) y ambiente.

Figura 20. Micrófono utilizado en las grabaciones.

En el aula de pizarra la cámara web enfocaba al papel en el que los estudiantes desarrollaban los ejercicios que debían resolver; en el aula de ordenadores, la cámara web enfocaba directamente a los estudiantes para recoger información del lenguaje gestual.

Figura 21. Cámara web utilizada en las grabaciones.

Es importante destacar dos ventajas del uso de las cámaras web para las grabaciones de video: por un lado, no requieren baterías ni cintas, y por otro lado confiere a los datos un carácter de inmutabilidad que no se consigue con las grabaciones analógicas.

La misma cámara web puede recoger también el audio, aunque para los estudiantes se ha utilizado adicionalmente un micrófono externo de solapa para optimizar la calidad del sonido. Estas cámaras y los micrófonos, estaban conectados a los ordenadores donde se almacenaban las grabaciones.

El trabajo de los estudiantes con el ordenador se ha recogido mediante el empleo del software CamStudio (CamStudio.org) que graba todo lo que se visualizaba en la pantalla del ordenador. Existen otras aplicaciones software que realizan esta tarea, como Bulent's Screen Recorder. Aunque ambos cumplen los requisitos exigidos, se utilizó el primero por su facilidad de uso y estabilidad (véase el anexo III)

Con esta herramienta se consigue un registro digital con todas las ejecuciones que realizaron los estudiantes con Maple, y otras aplicaciones como la calculadora de Windows. Además de su sencillez en la instalación y manejo, su carácter gratuito lo hace idóneo para esta investigación.

Para almacenar toda la información digital se necesitó un disco duro externo de 160 GB y se utilizaron discos DVD para guardar una copia de seguridad de todos los datos recogidos.

**Innovación**

La obtención de datos en formato digital es natural en aquellas investigaciones en las que se trabaja en un entorno computacional.

Hoy en día existen algunos programas software, como Cabri, que incluyen una opción que almacena en un archivo cualquier cambio que se produzca en la pantalla del ordenador donde se ejecuta el software, e incluso es posible reproducir la secuencia de cambios como si de una proyección de diapositivas se tratara (Gutiérrez, 2005). Esto amplía el tipo y la calidad de información que tradicionalmente se obtiene con los archivos digitales que sólo dan cuenta del resultado pero no permiten observar el proceso.

En esta investigación, utilizando el software CamStudio se ha innovado en el proceso de obtención de datos derivados del trabajo del estudiante con el ordenador, ya que permite el empleo de cualquier software y capta cualquier evento que se refleje en el escritorio del ordenador. Así, utilizando una herramienta similar a CamStudio, es posible obtener este tipo de información sin las restricciones de utilizar un software concreto, como es el caso de Cabri (Gutiérrez, 2005). Además, esto se hace extensivo a otro tipo de investigaciones en didáctica de las matemáticas u otras disciplinas, en las que el uso del ordenador no está limitado al empleo de un software matemático sino que implica el uso de otros programas o de páginas web.

Una de las grandes ventajas que se aporta con el empleo de esta herramienta, es el poder seguir paso a paso cada movimiento que han realizado los estudiantes con el ratón, los errores de sintaxis que han corregido y no se aprecian en el fichero final, la destreza con la que manejan la herramienta y otras cuestiones relativas al uso de esta herramienta informática. El tipo de información que aporta esta herramienta es muy variado:

- ✓ Para la triangulación: al visualizar simultáneamente el video con los participantes y el video con el trabajo en el ordenador se complementan ambas informaciones. Además, suple la figura del observador externo necesaria en una investigación en la que el profesor de la asignatura toma también el papel de investigador.
- ✓ Para conocer algunos aspectos de la herramienta, tales como las prestaciones que ofrece a los estudiantes o la sencillez o dificultad de su manejo.
- ✓ Para conocer cómo el estudiante maneja la herramienta: el tipo de búsquedas que realiza, el uso que hace del copy-paste[11] o los errores sintácticos que comete, entre otros.
- ✓ Para conocer cómo actúa la herramienta informática en el desarrollo conceptual del estudiante, lo que le aporta y lo que le obstaculiza.

También el uso de las cámaras web para grabar el audio y el video aporta cierto grado de innovación en la fase de recogida de datos, ya que habitualmente las grabaciones de video y audio se llevan a cabo con cámaras de video tradicionales y con grabadoras de voz. La facilidad para disponer hoy en día de un ordenador portátil amplía el campo de posibilidades para la obtención de datos.

### III 1.4 Datos

Los datos obtenidos para esta investigación no provienen sólo de las grabaciones digitales. Se dispone también de los apuntes de clase de los participantes y de las hojas donde resolvían las tareas, de los apuntes de la profesora-investigadora, y de las notas que tomó la profesora en las clases. Cada uno de ellos aporta un tipo diferente de información:

- ✓ Los apuntes de la profesora y las grabaciones de las clases magistrales permiten reproducir la instrucción que recibieron los estudiantes. Así, los archivos digitales con las clases magistrales son un elemento fundamental para la triangulación, ya que todo lo que aconteció en el aula está grabado.
- ✓ Las notas que tomó la profesora en clase sirven para crear una imagen general de cada sesión y para localizar algunas intervenciones relevantes de los estudiantes.
- ✓ Los apuntes de clase de los participantes y las hojas donde resolvían las actividades contienen detalles que no aparecen en las grabaciones, como fórmulas y expresiones matemáticas utilizadas por los estudiantes.
- ✓ El archivo digital con la captura del escritorio del ordenador en el que trabajan los estudiantes permite que en la fase de análisis se puedan visualizar al mismo tiempo

[11] El término “copy-paste” es una forma extendida de referirse a las acciones de copiar y pegar un párrafo de texto, un archivo, líneas de código, u otro objeto digital. En este trabajo se utiliza para indicar la acción de copiar líneas de instrucciones del software Maple y pegarlas en el mismo archivo o en otro diferente.

el archivo de audio-video y el que contiene las interacciones de los participantes con el ordenador. Con esto, además de completar la información que la cámara no registra, se obtiene una información más rica acerca de cómo trabajan los estudiantes en un entorno computacional.

- ✓ El archivo digital que contiene todos los diálogos entre los integrantes de cada grupo cuando resolvían las tareas en clase y las intervenciones que requerían de la profesora. Aunque estos diálogos constituyen la mayor fuente de información con la que se realizará el análisis, el resto de las fuentes que se han mencionado juegan un papel relevante en algún momento, bien por contener información que no quedó registrada de otro modo, bien por fortalecer información que contienen otras fuentes.

## III 2 DISEÑO DE LA UNIDAD

La instrucción que se ha diseñado persigue el objetivo de que el estudiante construya el modelo cognitivo propuesto en el análisis teórico. Aunque la propuesta tiene algunos elementos en común con el ciclo ACE (ver apartado I 1.5.1), no lo sigue al pie de la letra, fundamentalmente por dos motivos: el uso del ordenador y las discusiones en clase.

En esta propuesta, el ordenador se utiliza para sacarle partido en aspectos tales como el enfoque geométrico y gráfico del concepto matemático de serie numérica, o estimular el trabajo intuitivo del alumno e introducirle en el quehacer matemático: observar, experimentar, conjeturar y probar. Para ello, en ocasiones es necesario que el estudiante programe un pequeño bloque de instrucciones Maple, en el que hace uso de instrucciones que ejecutan algunos cálculos matemáticos, como la suma de una serie, un límite, o una aproximación numérica, de forma trasparente para el usuario. Algunas de éstas, son operaciones matemáticas que en una propuesta del ciclo ACE los estudiantes tendrían que programar.

En cuanto a las discusiones en clase, los estudiantes tuvieron libertad para realizar las tareas en pequeños grupos (dos o tres personas) o individualmente, si bien se considera ventajoso el trabajo en pequeños grupos cooperativos. Las discusiones en clase se han producido entre los integrantes de estos grupos y la profesora.

Uno de los aspectos en los que incide la instrucción es en el papel que juega la visualización. Se ha hecho hincapié en proporcionar al estudiante un soporte que permita trabajar el enfoque geométrico y gráfico (representación gráfica en el plano cartesiano), sin excluir el analítico. Para ello, se ha utilizado el ordenador como herramienta que facilita la visualización de representaciones gráficas y dibujos geométricos, de manera similar a como lo hizo Bennett (1989), mediante un lenguaje de programación sencillo. En este sentido, Kidron (2002) destaca la facilidad con la que el ordenador pone al alcance del estudiante distintas representaciones del mismo concepto. En su investigación sobre sumas infinitas, utilizó animaciones gráficas para que el estudiante centrara su atención en el proceso en sí y no en el proceso divergente de añadir términos de una sucesión. Así es como se espera que perciban los estudiantes una suma infinita con la instrucción diseñada, como un límite, es decir, como un objeto.

Como ya argumentaron Eisenberg y Dreyfus (1991) (véase apartado I 4.1), existe cierta resistencia al uso de la visualización en matemáticas. En esta investigación, esas dificultades se han plasmado de la forma siguiente:

- ✓ A nivel cognitivo, la visualización se utiliza para facilitar al estudiante la comprensión del tópico de convergencia de serie numérica. Esto no excluye el tratamiento analítico, sino que lo complementa. Por tanto, no se exige al estudiante que domine el registro visual, sino que más bien se le ofrece como una alternativa al tratamiento institucional clásico de las matemáticas. A pesar de ello, es posible que el estudiante se muestre, cuanto menos, sorprendido y receloso por la novedad, lo cual puede, en algún momento, entorpecer el proceso de aprendizaje instrucción. Como contrapartida, se espera que la herramienta informática sea lo suficientemente atractiva como para disipar esta dificultad.
- ✓ A nivel sociológico, el diseño de las representaciones geométricas de las actividades ha supuesto un esfuerzo adicional para la profesora, ya que ha tenido que desarrollar un fragmento de código con una herramienta que le era desconocida a nivel de programación. Este trabajo es transparente para el estudiante ya que él se limita a ejecutar el código y observar el resultado. El esfuerzo se ve ampliamente compensado por el resultado obtenido y por la posibilidad, como ocurre siempre en programación, de reutilizar el código para otros fines, como representar un problema similar.
- ✓ A nivel de creencias sobre la naturaleza de las matemáticas, la profesora cree firmemente que se puede trabajar la matemática sin necesidad de recurrir a demostraciones formales. Un factor que influye notablemente en este convencimiento, es la creencia de que no se pueden enseñar las mismas matemáticas a cualquier estudiante universitario, ni de otro nivel, sin tener en cuenta el futuro empleo que le van a dar a los conocimientos matemáticos. Se ha de tener en cuenta que la mayoría de los alumnos universitarios que cursan análisis matemático o álgebra en su primer año en la Universidad, no son futuros matemáticos, sino ingenieros, economistas o biólogos, por lo que no se les puede exigir el mismo nivel de formalidad ni de abstracción que se exige en un aula de una facultad de matemáticas. De hecho, ni en ese aula está justificada la exclusión de otros métodos, como el visual, para demostrar algún resultado. Es más, se deberían proporcionar estos otros métodos para complementar el conocimiento analítico formal propio de las matemáticas.

A continuación se presenta la secuencia didáctica que se llevó a cabo cuando se recogieron los datos, en la que se alternan las clases tradicionales en la pizarra con clases que se desarrollan en un aula de ordenadores. El tiempo estimado para completar la unidad es de quince sesiones de cincuenta minutos cada una. Debido a una disfonía que sufrió la profesora en los últimos días en los que se impartió el tópico de serie numérica, hubo que prolongar un día más las grabaciones en el aula de pizarra en la que los estudiantes realizaron ejercicios de refuerzo. Así, se retrasó el comienzo del siguiente tema y la profesora pudo recuperar la voz para impartir la clase magistral.

Todo el contenido, y en especial las actividades que se han diseñado para que los alumnos las resuelvan en el aula de ordenadores (Rectángulos, Reordenación, Triángulos, Cuadrados), pretenden fomentar la adquisición, por parte del estudiante, de las construcciones mentales que se derivan del análisis teórico y que se plasman en la descomposición genética.

| Día | Aula | Contenido |
|---|---|---|
| 1º | Ordenadores | Actividad Rectángulos. |
| 2º | Pizarra | Introducción del concepto de serie numérica como el límite de una sucesión de sumas parciales. |
| 3º | Ordenadores | Finalizan la Actividad Rectángulos. |
| 4º | Ordenadores | Actividad Reordenación. |
| 5º | Pizarra | Estudio la convergencia de la serie geométrica en función de la razón, utilizando la fórmula de Euclides para la suma de los $n$ primeros términos de una progresión geométrica. |
| 6º | Pizarra | Operaciones con series. Estudio de la convergencia de la serie armónica aplicando el criterio integral de las integrales impropias. Ejemplo. Series alternadas. Criterio del término enésimo. |
| 7º | Ordenadores | Actividad Triángulos. Ejemplos de series armónicas. |
| 8º | Ordenadores | Ejercicios para introducir el uso de una serie convergente para aproximar un valor:<br>¿Cuántos sumandos de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ son necesarios para aproximar el valor de e con 5 cifras decimales?<br>¿Con cuál de estas dos series te quedarías para aproximar el valor de ln(2)? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$<br>Comienzan la Actividad cuadrados. |
| 9º | Pizarra | Criterios de convergencia. Ejemplos. |
| 10º | Pizarra | Ejercicios de refuerzo. |
| 11º | Ordenadores | Actividad Cuadrados. |
| 12º | Pizarra | Ejercicios de refuerzo. |
| 13º | Pizarra | Ejercicios y Actividad La Torre. |
| 14º | Pizarra | Ejercicios de refuerzo. |
| 15º | Pizarra | Ejercicios de refuerzo. |
| 16º | Ordenadores | Finalizan la actividad Cuadrados. Ejercicios de refuerzo. |

Tabla 3. Secuencia didáctica.

### III 2.1 Actividad Rectángulos

Bajo el nombre de Actividad Rectángulos, Actividad Reordenación, Actividad Cuadrados y Actividad La Torre, se han diseñado una serie de ejercicios con el propósito de que el estudiante establezca relaciones entre los elementos del modelo teórico, y así favorecer la construcción del concepto de serie numérica. Cada una de ellas incide en distintos aspectos, como el desarrollo histórico del concepto de serie numérica, la relación entre la suma de una serie y la sucesión de términos que suman, o la visualización de los términos de una sucesión de sumas parciales (fig. 22).

En esta investigación sólo se describirá y analizará la primera de ellas, que tiene una relevancia especial porque con ella el estudiante tiene el primer contacto con las series numéricas. Uno de los objetivos que se plantean con esta actividad, es mostrar al estudiante que una suma infinita no siempre “da infinito porque siempre se suma algo”, que es la respuesta habitual de muchos estudiantes de primer curso cuando se les pregunta por el valor de una suma infinita. Para ello, se ha elegido el contexto del cálculo de áreas de rectángulos por su sencillez y por la posibilidad de visualizar el proceso de añadir más y más sumandos. Otro aspecto que caracteriza a esta actividad, es que los apartados están inspirados en las etapas del desarrollo histórico del concepto de serie numérica.

Esta actividad consta de nueve apartados en los que se van introduciendo diversos aspectos relacionados con las series numéricas aumentando paulatinamente el nivel de abstracción. El contenido es el siguiente:

#### III 2.1.1 *Enfoque geométrico*

La actividad comienza vinculando el nacimiento de un tópico de cálculo infinitesimal con un sencillo problema geométrico de cálculo de áreas, retrocediendo en el tiempo hasta la época de la matemática griega. En este apartado el alumno tiene ocasión de visualizar el resultado de iterar una suma de términos de una sucesión.

Desde el punto de vista geométrico, los dos procesos iterativos infinitos que coexisten en la *actividad rectángulos* son, el de generación de nuevos rectángulos y el de la construcción de la figura a la que se añaden rectángulos. Estos procesos simbolizan, respectivamente, las sucesiones $a_n = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$ y $S_n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{1}{2^{\mathrm{k}}}$.

A continuación se describe el modo en que pueden manifestarse, en este apartado, una concepción acción, una concepción proceso y una concepción objeto, del concepto matemático SSP como proceso iterativo infinito.

Un individuo manifiesta una concepción acción cuando, por ejemplo, es capaz de generar unas cuantas figuras añadiendo a la anterior un nuevo rectángulo. Ese rectángulo es el resultado de dividir por la mitad el que se ha generado en el paso anterior. Si un individuo es capaz de considerar la sucesión de las áreas coloreadas a partir de la unión del nuevo rectángulo a la figura creada en el paso anterior, establece un vínculo entre los dos conceptos matemáticos sucesión ($a_n$) y sucesión de sumas parciales ($S_n$).

También manifiesta una concepción acción, cuando es capaz de asociar a cada paso el número de rectángulos que conforman la figura, es decir, en el primer paso hay una figura, en el segundo paso dos figuras, y así sucesivamente. Igualmente, puede asociar a cada paso el área de la figura que queda sin colorear.

***Enfoque geométrico***

Observa cómo se generan nuevos rectángulos a partir de un cuadrado de lado 1.

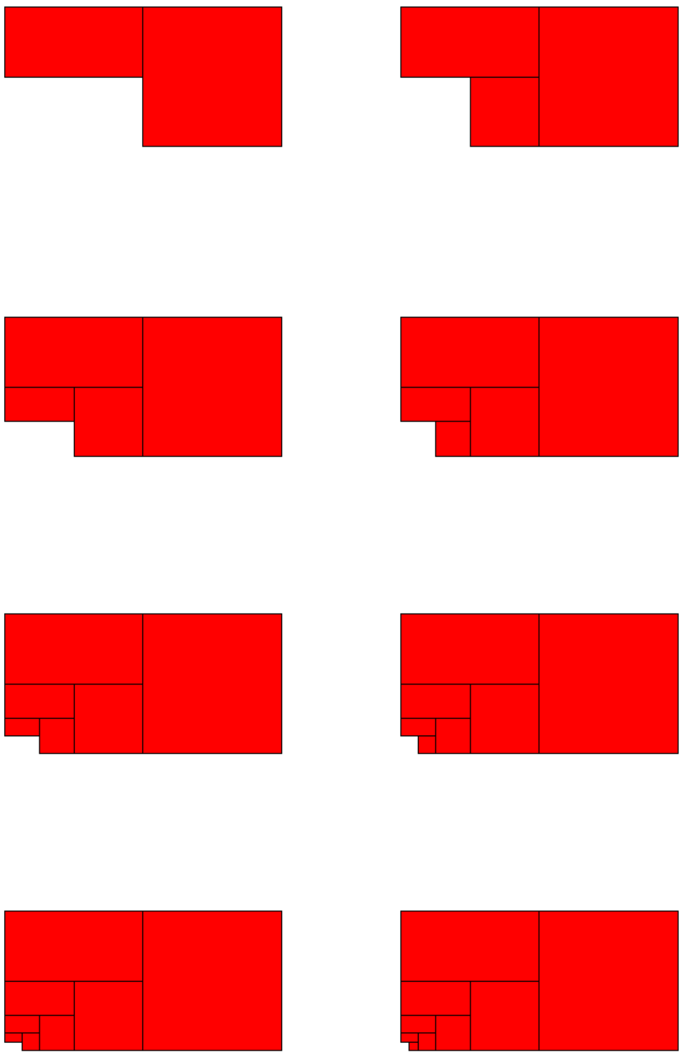


Figura 22. Apartado Enfoque Geométrico.

Un individuo manifiesta una concepción proceso cuando, tras repetir varias veces los pasos de generación de nuevos rectángulos y adhesión de los mismos a la figura coloreada, los coordina con un proceso de iteración a través de un segmento finito de $\mathbb{N}$ y puede imaginarse cómo es la figura resultante de iterar los pasos $n$ veces, siendo capaz de identificar esta figura con el número natural $n$. Otro modo de manifestar una concepción proceso ocurre cuando, por ejemplo, es capaz de identificar un número natural $n$ grande, por un lado con un rectángulo de pequeñas dimensiones y, por otro lado, con una figura coloreada cuya forma se asemeja al rectángulo de dimensiones $2 \times 1$. Brown y otros (2008) sostienen que en este punto el individuo ha construido completamente el proceso iterativo infinito. El proceso de iteración a través de un segmento finito de $\mathbb{N}$ se materializa a partir del registro gráfico con la secuencia de dibujos en la que cada nuevo dibujo es una representación de un número natural.

La encapsulación de este proceso iterativo infinito en un objeto, en el sentido de APOS, se produce cuando se realiza una evaluación sobre el mismo. En el caso del enfoque geométrico de la *actividad rectángulos*, esto se produce cuando se compara el área del rectángulo de dimensiones $2 \times 1$ con el área de la figura resultante de añadir nuevos rectángulos de manera indefinida. Cuando se realiza esta comparación se coordinan los esquemas de SSP y LS de donde deriva el objeto trascendente (Brown y otros, 2008).

Cuando un individuo ha construido completamente el proceso iterativo infinito pero no lo ve como una totalidad, es decir, no lo ha encapsulado, no es capaz de concebir que el resultado de infinitas iteraciones sea un rectángulo completo, sin que le falte un "trocito" para completar la figura del rectángulo de dimensiones $2 \times 1$.

En este apartado aparecen explícitamente las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$ en el registro geométrico, la primera en los dibujos de los rectángulos que se añaden, y la segunda en la figura coloreada resultante de unir estos rectángulos. El esquema de LS aparece sólo en la mente del individuo que es capaz de encapsular alguno de los procesos iterativos infinitos (Pii), el que representa a la sucesión $a_n$ y el que representa a la sucesión $S_n$.

### III 2.1.2 *Calcula*

Tras el énfasis en la visualización y en desarrollar la intuición a través de la geometría, se introduce la manipulación algebraica junto con las representaciones geométricas para el cálculo del área de los rectángulos.

En la sección calcula hay implícita una traducción del registro geométrico al numérico, y de éste al algebraico.

Desde el punto de vista numérico-algebraico, los dos procesos iterativos infinitos que coexisten son el del cálculo del área de los nuevos rectángulos y el del cálculo del área de la figura coloreada resultante de añadir esos rectángulos. Al igual que en el apartado anterior, son representaciones de las sucesiones $a_n = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$ y $S_n = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{1}{2^{\mathrm{k}}}$, respectivamente.

Un individuo manifiesta una concepción acción de SSP cuando, por ejemplo, es capaz de calcular las áreas de los nuevos rectángulos que se generan en los primeros pasos, y de calcular numéricamente las áreas de las figuras resultantes de añadir esos rectángulos a la figura coloreada del paso anterior. También, cuando es capaz de asociar a cada paso el número de sumandos que ha de calcular para obtener el área de la figura coloreada, es decir, en el primer paso hay un sumando, en el segundo paso dos sumandos, y así sucesivamente. El cálculo del área coloreada en el paso enésimo, se puede escribir como una suma de $n + 1$ fracciones, u obteniendo el valor de esa suma como una única fracción, en cuyo caso pierde la característica de sucesión de sumas parciales. En el primer caso, se establece un vínculo entre las nociones matemáticas de sucesión $(a_n)$ y sucesión de sumas parciales $(S_n)$; en el segundo caso se pierde ese vínculo.

***Calcula***

Calcula el área de la figura coloreada y de cada nuevo rectángulo que se añade:

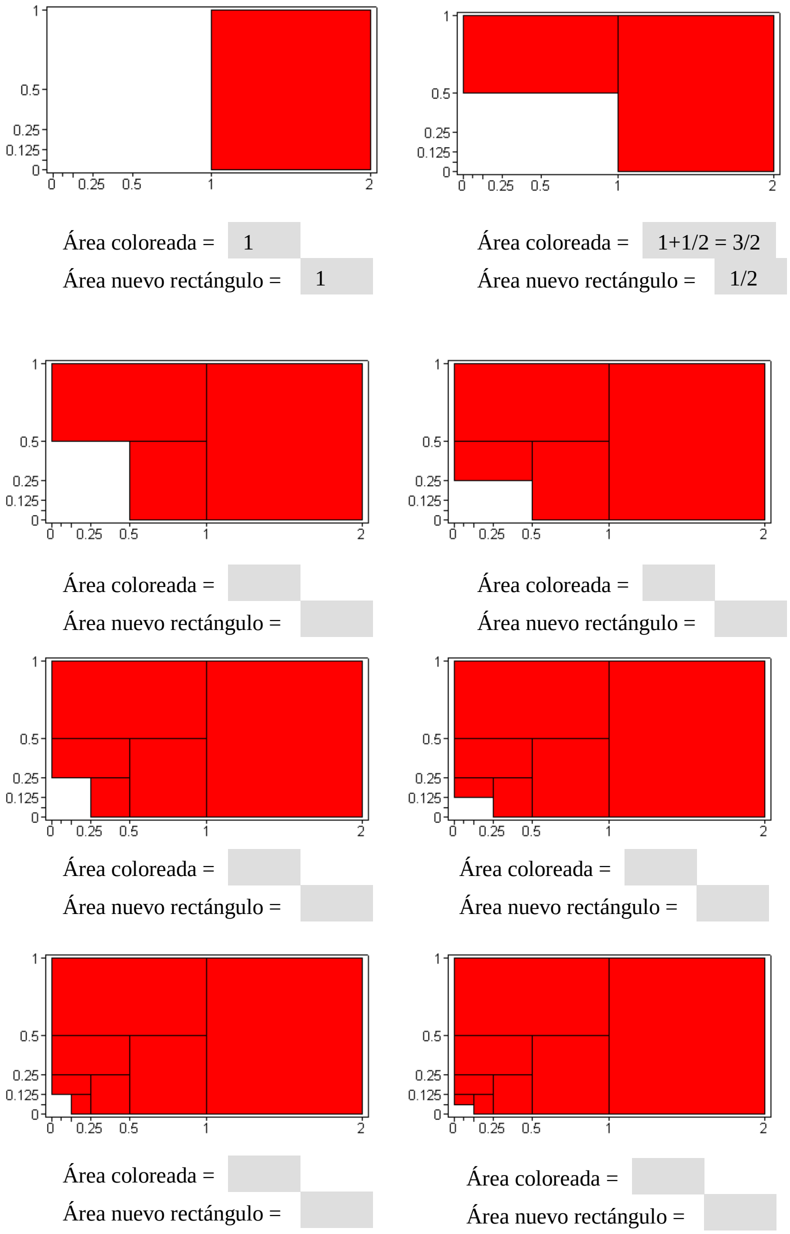



Figura 23. Apartado Calcula

Un individuo manifiesta una concepción proceso de SSP cuando, tras repetir varias veces los cálculos de las áreas de los nuevos rectángulos y de la figura coloreada en cada paso, es capaz de dar una expresión general, tanto para el área del nuevo rectángulo, como para el área de la figura coloreada en cada paso. El resultado de este segundo cálculo lo puede expresar algebraicamente con una suma de fracciones, en este caso $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ , o con una única fracción, $\frac{2^{n+1}-1}{2^n}$ , en cuyo caso desaparece el matiz de sucesión de sumas parciales y se pierde el vínculo entre las sucesiones $a_n$ y $S_n$.

También un individuo manifiesta una concepción proceso de SSP cuando, por ejemplo, es capaz de identificar un número natural $n$ grande, por un lado con la inversa de la potencia enésima de $2$ y por otro lado, con la suma de las primeras $n$ potencias inversas de $2$. El primer valor aproximado es un decimal positivo cercano a $0$, y el segundo es un decimal cercano inferiormente a $2$. Brown y otros (2008) sostienen que en este punto el individuo ha construido completamente el proceso iterativo infinito.

La encapsulación de este proceso iterativo infinito en un objeto (en el sentido APOS) se produce cuando se realiza una evaluación sobre el mismo. En el caso del registro algebraico, esto se produce cuando se calcula el límite de la SSP, que es sencillo si se maneja una expresión general de la sucesión $S_n$ con una sola fracción, pero que resulta bastante más complejo si se maneja una expresión con un sumatorio. En contrapartida, es posible aproximar el valor del límite. El resultado de esta evaluación es lo que Brown y otros (2008) llaman el objeto trascendente para el proceso iterativo infinito que, según ellos, “se sobreentiende que va más allá de los objetos que se corresponden con los números naturales y así no es el resultado directo del proceso” (p. 126), sino que es el resultado de una transformación que no tiene porqué conservar las mismas características que los objetos resultantes de una iteración finita, como por ejemplo que sea un número que admita una expresión entera, en vez de un numero cuya expresión decimal es un uno seguido de varios nueves (algo del tipo $1{,}999$).

Cuando un individuo reconoce el objeto resultante de la encapsulación, aunque no sea capaz de expresarlo algebraicamente, posee una concepción objeto de serie numérica. En ese caso, ha coordinado los esquemas de SSP y de LS, aunque tenga dificultades con la manipulación algebraica de los mismos.

En este apartado las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$ aparecen explícitamente en dos registros diferentes: el geométrico, en los dibujos de los rectángulos y de la figura coloreada resultante de unir rectángulos, y el numérico en el cálculo de las áreas de los rectángulos y de la figura coloreada. El esquema de LS aparece sólo en la mente del individuo que es capaz de encapsular el Pii del cálculo de las áreas.

Es posible que un individuo que interiorice las acciones del cálculo de las áreas en el Pii, utilice el registro algebraico para expresar el término general de las dos sucesiones. En ese caso, si la expresión de la sucesión de las áreas coloreadas está expresada en forma de sumatorio, se establece un vinculo implícito entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$. En otro caso, ese vínculo desaparece.

### III 2.1.3 *Enfoque gráfico*

El enfoque gráfico evoca la época de la Edad Media introduciendo las representaciones gráficas en el plano cartesiano. En esta sección hay una traducción explícita entre los modos de representación tabular-numérico y gráfico, y otra implícita del tabular-numérico al algebraico y de éste al gráfico.

Un aspecto importante de este apartado es que la representación en el plano cartesiano de los primeros términos de una sucesión fortalece la concepción de sucesión como función con dominio discreto.

***Enfoque gráfico***

Dibuja en el plano cartesiano los valores de las sucesivas áreas, tanto de cada rectángulo como de toda la figura coloreada. Ayúdate de una tabla de valores como la que tienes a continuación:

| n | área rectángulo | área coloreada | valor aproximado del área coloreada |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 1.5 |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{4}$ | 1.75 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{15}{8}$ | 1.875 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{31}{16}$ | 1.9375 |
| 5 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{63}{32}$ | 1.96875 |

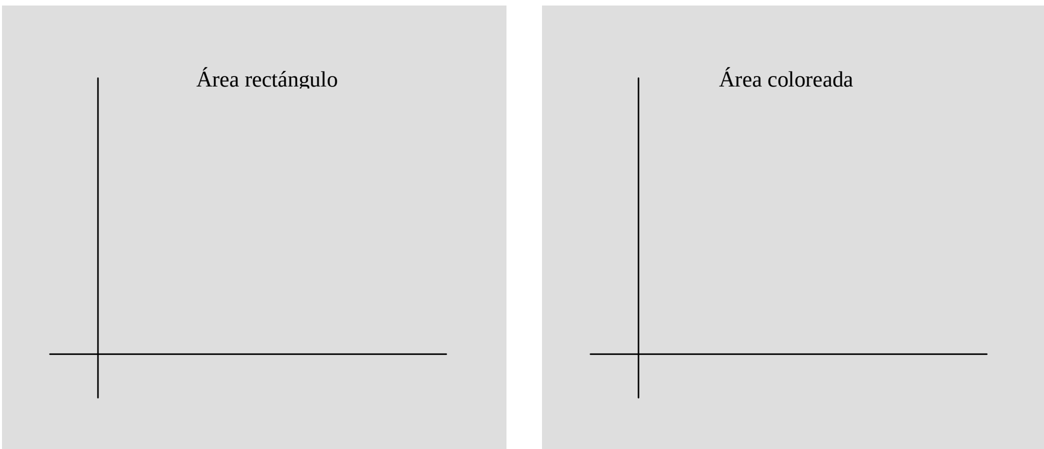



Figura 24. Apartado Enfoque gráfico

Aunque no es necesario el empleo de la herramienta de cálculo simbólico para realizar este apartado, su uso puede reforzar varios aspectos:

- ✓ La concepción SEQFUNC de sucesión, al impulsar la necesidad de obtener una expresión algebraica para que la herramienta represente en el plano cartesiano las sucesiones. Diversos autores han destacado la importancia del esquema que posee un individuo cuando construye otros conceptos del Análisis Matemático que se apoyan en el de función.
- ✓ La coordinación de los esquemas SSP y LS, implícita en la representación gráfica en el plano cartesiano.
- ✓ La relación entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$, implícita en la expresión algebraica de la sucesión de sumas parciales sólo en el caso en que se utiliza un sumatorio.

Desde el punto de vista gráfico, los dos procesos iterativos infinitos que coexisten son el de representación en el plano cartesiano de las sucesiones $a_n$ y $S_n$, cuyos primeros términos se listan en una tabla de valores.

En el registro gráfico, un individuo manifiesta una concepción acción de Pii cuando, por ejemplo, dibuja los puntos de coordenadas $(n, a_n)$ y $(n, S_n)$, respectivamente, en el plano cartesiano para los primeros números naturales.

Tras dibujar varias veces estos puntos en el plano cartesiano apoyándose en los valores listados en la tabla, manifiesta una concepción proceso de Pii cuando es capaz de dibujar aproximadamente más puntos sin necesidad de consultar los valores de la tabla. El individuo puede imaginarse cómo es la gráfica para valores grandes de $n$ a través de la asíntota horizontal que, en el primer caso, es la recta $y = 0$, y en el segundo la recta $y = 2$. Cuando esto ocurre, el individuo ha construido completamente el proceso iterativo infinito (Brown y otros, 2008).

La encapsulación de este proceso en un objeto se produce cuando se realiza una evaluación que puede consistir, por ejemplo, en comparar los puntos de la gráfica con las asíntotas. De esta evaluación se deriva el objeto trascendente. En el segundo caso, esa evaluación es el resultado de coordinar los esquemas de SSP y de LS.

Cuando un individuo ha construido completamente el Pii de SSP pero no lo ve como una totalidad, es decir, no lo ha encapsulado, no es capaz de concebir que el resultado de infinitas iteraciones se represente en el plano cartesiano con la ordenada 2.

En este apartado aparecen explícitamente las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$ en los puntos de las gráficas, y el esquema de LS puede aparecer en la aproximación gráfica al límite de la sucesión $S_n$ o en la representación de la asíntota $y = 2$.

#### III 2.1.4 *Reflexiona*

El apartado Reflexiona invita a meditar sobre el resultado de las experiencias de los apartados anteriores. A la vez, se verbaliza por primera vez el comportamiento de una suma infinita. Con este apartado finaliza la parte más intuitiva de la actividad, avanzando en el desarrollo histórico hasta la transición entre la Edad Media y la etapa de desarrollo.

Este apartado requiere un nivel de abstracción mayor que los anteriores puesto que el enunciado se presenta sólo en el registro numérico. Si en los apartados anteriores, a través de los distintos modos de representación, se han coordinado los esquemas de SSP y LS y se han establecido vínculos entre las dos sucesiones, se habrá construido una parte importante del concepto de serie numérica; esa construcción se puede reflejar contestando correctamente a este apartado.

Para ello, la principal dificultad que se ha de vencer es el paso de operar con una cantidad finita de sumandos a realizar una suma infinita, es decir, el paso al límite. Para superar este trance, es crucial ser capaz de no atribuir ciertas características de los objetos que proceden de iteraciones finitas, al objeto derivado de un estado en el $\infty$, el objeto trascendente de Brown y otros (2008). Las experiencias en los modos de representación geométrico, gráfico, tabular algebraico y numérico, favorecen la encapsulación por ser un vehículo para construir distintas partes del concepto de serie numérica.

***Reflexiona***

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=$

Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumandos puede estar acotada y por tanto tener un valor finito.

Los términos $1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\cdots$,... forman una progresión geométrica porque para obtener un término a partir del anterior hay que multiplicar por una cantidad constante llamada razón. Normalmente llamaremos a este valor r. En este proceso de construcción de rectángulos, la razón es $r=\frac{1}{2}$. En el apartado **Resultados** tienes más información a cerca de las progresiones geométricas.

Figura 25. Apartado Reflexiona

La respuesta esperada, 2, se obtiene tras encapsular el proceso iterativo infinito $S_n$ en un objeto derivado de los apartados anteriores, en los que se ha promovido la encapsulación desde la manipulación de diversos registros de representación y la traducción entre ellos. Esta respuesta se deriva de coordinar los esquemas de SSP y LS.

Cuando un individuo ha construido completamente el proceso iterativo infinito de añadir indefinidamente los inversos de las potencias de dos, pero no lo ve como una totalidad, es decir, no lo ha encapsulado, no es capaz de concebir que el resultado de esa suma infinita sea el número 2.

También es posible, pero menos probable después de haber realizado los apartados anteriores, que la respuesta sea “infinito”, por la típica creencia de que una suma infinita "*da infinito porque siempre se suma algo*"[12]. En este caso, la ejecución de los apartados anteriores no habría conseguido el objetivo de facilitar la construcción del concepto de serie numérica a partir de manejar distintas representaciones de los conceptos matemáticos que lo integran.

En este apartado aparecen implícitamente los esquemas de LS y de SSP.

### III 2.1.5 *Experimenta*

Una vez que se ha mostrado que una suma infinita puede dar como resultado un número, se proponen experiencias en las que se muestran cómo influye el comportamiento de la sucesión $a_n$ en la suma de la serie $\sum a_n$ (experiencias 1, 2 y 3) y cómo, cuando la serie converge, se puede utilizar un término de la sucesión de sumas parciales para aproximar la suma de la serie (experiencia 4).

Para favorecer la reflexión sobre estos puntos, sin que el manejo algebraico suponga una barrera para obtener los resultados, se propone realizar las experiencias con la herramienta de cálculo simbólico Maple. Con un uso adecuado de la misma se puede llegar a las conclusiones con poco esfuerzo, reutilizando una simple línea de comandos.

Para las tres primeras experiencias, es posible obtener los resultados de las diferentes sumas (convergente, divergente a infinito o divergente por oscilación, según el valor de la razón), o una aproximación de los mismos, según el tipo de instrucciones que se utilicen.

Por ejemplo, utilizando el comando *sum* de Maple para sumar la serie, se obtendrán o bien el valor finito cuando sea convergente, o $\pm\infty$ cuando diverja a infinito, o la respuesta *undefined* cuando diverja por oscilación:

```
> restart:
  sum(1/3^n,n=0..infinity);
                                3/2
> restart:
  sum((2)^n,n=0..infinity);
                                ∞
> restart:
  sum(-(2)^n,n=0..infinity);
                                -∞
> restart:
  sum((-1)^n,n=0..infinity);
                                undefined
```

Figura 26. Respuestas de Maple para las sumas de distintas series.

[12] La experiencia docente de la autora de este trabajo constata que todos los años algún estudiante de primer curso de Universidad responde con esta afirmación cuando se le pregunta por el resultado de una suma infinita.

Utilizando el bloque de instrucciones con el que han aprendido a dibujar los primeros términos de una sucesión y a aproximar su límite, los estudiantes se han de apoyar en la representación en el plano cartesiano de la función discreta $f(n) = S_n$ y en la posibilidad de conocer el valor de la función para un determinado valor de la variable ene, para aproximar su límite.

***Experimenta***

**experiencia 1**

Comprueba cuánto vale la suma $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots$ para otros valores de r, por ejemplo, $r = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{4}$. Ayúdate del comando sum de Maple.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{3^r} =$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{4^r} =$$

**experiencia 2**

Prueba ahora con otros valores de r, por ejemplo $r = 1$, $r = 2$.

$$1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} 1^r =$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} 2^r =$$

Como puedes comprobar, los sumandos son cada vez mayores. $r^n$ no está acotado si $|r| > 1$.

**experiencia 3**

¿Qué ocurre si $r < 0$? Prueba con $r = -1$, $r = -2$, $r = -\frac{1}{2}$.

$$1 - 1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r =$$

$$1 - 2 + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-2)^r =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r =$$

Figura 27. Apartado Experimenta. Experiencias 1, 2 y 3.

Las cuatro experiencias ofrecen al estudiante un espacio donde, apoyándose en la instrucción de Maple para sumar sumas infinitas, podrá realizar sumas geométricas con distintos valores de la razón. Estas sumas, han de servir de base para realizar conjeturas relativas a las series en general y, en particular, a la convergencia de la serie geométrica. Continuando con la analogía entre el desarrollo histórico del tópico serie numérica y las secciones de la *actividad rectángulos*, nos situamos en la etapa de desarrollo, en la que se suman series sin formalizar aún las cuestiones relativas a la divergencia de algunas de ellas.

### Experiencias 1, 2 y 3

La experiencia 1 es un caso de series geométricas convergentes similares a la geométrica de razón $\frac{1}{2}$ que se ha trabajado en los apartados anteriores. La experiencia 2 es un caso de series geométricas divergentes a infinito para las que Maple devolverá infinito y realizará unas gráficas en las que claramente se observa este comportamiento. La experiencia 3 es un caso de series geométricas alternadas: las dos primeras divergen por oscilación y la última converge. Para los casos divergentes, Maple devolverá la respuesta *undefined* y, en cualquier caso, realizará unas gráficas en las que claramente se observe el comportamiento de alternancia, convergente en un caso y divergente en los otros.

En estas experiencias aparecen explícitamente los elementos $\sum a_n$ y $a_n$, e implícitamente $S_n$ como sucesión cuyo límite es el resultado que se ha de calcular.

### Experiencia 4

En la experiencia 4 se hace hincapié en la sucesión de sumas parciales y en el papel que desempeñan sus términos para aproximar la suma de una serie convergente:

**experiencia 4**

Suma sólo una cantidad finita de términos de la progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por ejemplo 10 sumandos. Ayúdate del comando sum de Maple y utiliza el comando evalf para aproximar con 15 decimales.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} = \sum_{r=0}^{9} \frac{1}{2^r} =$$

Ahora suma más términos, por ejemplo 20.

$$\sum_{r=0}^{19} \frac{1}{2^r} =$$

Figura 28. Apartado Experimenta. Experiencia 4

En esta experiencia aparecen explícitamente los elementos $S_n$ y $a_n$, e implícitamente $\sum a_n$ como valor al que se aproximan los resultados que se piden.

#### III 2.1.6 *Conjeturas*

Prosiguiendo con la analogía entre el desarrollo histórico del tópico serie numérica y las secciones de la *actividad rectángulos*, como transición entre la etapa de desarrollo y la etapa de formalización, en la sección Conjetura se pide al estudiante que conteste acerca de tres cuestiones: la convergencia de la serie geométrica, el uso de los primeros términos de una suma infinita para aproximar el valor de dicha suma, y el significado del límite de una sucesión, vinculado con la suma de una serie. Este apartado exige un nivel de abstracción mayor que los anteriores y se espera que en él hayan coordinado los esquemas de SSP y LS para entender que la suma de la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales, es decir, es necesario poseer una concepción objeto de SSP.

Con las tres conjeturas se consolida el objeto serie numérica que se ha construido en los apartados anteriores. Esta consolidación se produce cuando se des-encapsula el objeto serie numérica para actuar sobre los elementos matemáticos $a_n$ o $S_n$, coordinando los esquemas de SSP y LS.

***Conjetura***

**conjetura 1**

¿Para qué valores de r la suma $\sum_n r^n$ es finita? En esos casos, ¿cuál es su valor?

**conjetura 2**

¿Cuántos rectángulos se necesitan generar para que la suma de sus áreas sea al menos 1.999 $u^2$?

**conjetura 3**

¿Cuál es la diferencia entre el área de la figura 1 y el área de la figura coloreada, resultante de iterar el proceso 7 veces? ¿Y 10 veces? ¿A qué valor se acerca la diferencia entre el área total y el área de los cuadrados generados tras n iteraciones?

Figura 29. Apartado Conjetura

## Conjetura 1

En la primera conjetura aparecen explícitamente los elementos $a_n$ y $\sum a_n$, pero según cómo se plantee la resolución también puede aparecer el elemento $S_n$ como aproximación al límite:

La herramienta de cálculo simbólico facilita el que se manejen diversos registros, como el analítico, el gráfico-cartesiano o el tabular, favoreciendo la construcción del conocimiento cuando se traduce de uno a otro. Por ejemplo, se pueden representar en el plano cartesiano los primeros términos de la sucesión de sumas parciales y aproximar su límite con la gráfica, o con el cálculo de unos cuantos términos de esta sucesión para valores grandes de la variable $n$.

En esta conjetura se dan dos hitos importantes para la construcción del concepto de serie numérica. Por un lado, es necesario poseer un concepto de límite de una sucesión consistente y, por otro, es necesario caracterizar el comportamiento del límite según ciertas propiedades de la sucesión $a_n$. Para ello, es conveniente que el individuo distinga el papel que juega el elemento matemático $a_n$ dentro del concepto de serie numérica, por lo que se debería poseer una concepción objeto de SSP (los apartados anteriores de la actividad ofrecen una oportunidad para construir esa concepción objeto de SSP).

En cuanto a la concepción de límite, en este apartado ya se debería haber coordinado este esquema con el de SSP, por lo que las peculiaridades del esquema de LS que posea cada individuo se reflejarán en particularidades del esquema de serie numérica: concepción estática o dinámica, el limite se alcanza o no, etc.

En este apartado se consolida el objeto serie numérica que se ha construido en los apartados anteriores. Esta consolidación se produce cuando se des-encapsula para actuar sobre el elemento matemático $a_n$: se ha de encontrar una dependencia entre el elemento $a_n$ y el límite de la sucesión de sumas parciales (LS). Para ello, un individuo puede asignar distintos valores a la razón y comprobar cómo es el límite de la sucesión de sumas parciales o la suma de la serie para esos valores. Cuando se repiten esas acciones, se interiorizan en un proceso que consiste en entender que el carácter del límite depende del valor del parámetro $r$. En este punto un individuo es capaz de adelantar el carácter del límite según los valores de la razón sin necesidad de realizar ningún algoritmo para calcular el límite de la sucesión de sumas parciales. Estas ejecuciones forman parte de la coordinación de los esquemas de SSP y LS.

**Conjetura 2**

La segunda conjetura incide en los elementos del modelo $a_n$ y $S_n$. El cálculo de diversos términos de la sucesión de sumas parciales refuerza el vínculo entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$; la herramienta de cálculo simbólico facilitará esta labor.

**Conjetura 3**

En este apartado se sintetiza la relación entre los elementos matemáticos del esquema de serie numérica convergente.

Las tres preguntas simulan algunos de los pasos que se han repetido en la *actividad rectángulos* y que incitan a ejecutar acciones que se interioricen en procesos que, posteriormente, se encapsularán en el objeto serie numérica. Las dos primeras preguntas se refieren a las acciones y la última, a construir completamente el proceso infinito, paso previo para verlo como una totalidad (Brown y otros, 2008).

Las dos primeras preguntas plantean un par de iteraciones del ejercicio de comparar el área del rectángulo $2 \times 1$ y el área resultante de iterar el proceso de añadir nuevos rectángulos un número finito de veces, es decir, un par de términos de la sucesión de sumas parciales.

La última pregunta propone la misma cuestión para un número de veces finito pero indeterminado, de modo que contestar a esta pregunta resulta evidente habiendo construido totalmente el proceso iterativo infinito.

## III 3 HERRAMIENTA DE CÁLCULO SIMBÓLICO MAPLE

En este trabajo el entorno computacional aporta una herramienta de la que hay con considerar sus ventajas, para aprovecharlas, e inconvenientes, para intentar evitarlos. De ésta se espera que:

- ✓ proporcione un entorno que atraiga a los estudiantes;
- ✓ favorezca la visualización y la interpretación de las representaciones gráficas y geométricas, proporcionando las condiciones necesarias para que el estudiante maneje distintos registros: analítico, geométrico y gráfico;
- ✓ contribuya a la experimentación y libere al estudiante de tediosos cálculos y de los errores asociados a ellos;

La ventaja de llevar a cabo la instrucción con alumnos que estudian ingeniería informática, es el interés que manifiestan frente a un ordenador y la familiaridad con la que se desenvuelven en este entorno. A pesar de ello, es inevitable que se sientan incomodados por un software novedoso y que aparezcan ciertas dificultades (inherentes a este entorno) que se han puesto de manifiesto en algunas investigaciones, como la correcta interpretación de los resultados que se obtienen por pantalla y la adaptación al entorno para saber qué se tiene que ordenar al programa para que realice aquello que uno espera.

Balderas (1999) cita una clasificación de siete tipos distintos de productos directos de software matemático (los productos indirectos, son aquellos entornos, como los editores de fórmulas o las páginas de internet de contenido matemático, que se utilizan en la actividad matemática, pero no resuelven problemas matemáticos). A su vez, distingue entre aquellos específicos para la educación matemática y los que no tienen ningún propósito didáctico. El software que se ha utilizado, Maple de Maplesoft, se encuentra en este último grupo de programas, en los que es esencial el papel del profesor para establecer una estrategia didáctica que guíe la instrucción.

# CAPÍTULO IV Análisis de datos

En este capítulo se describen las tres etapas del análisis de los datos.

La primera etapa consiste en la descripción de cómo han resuelto los distintos apartados de la actividad cada uno de los dos grupos. Cada hito que de algún modo contribuya a caracterizar cómo construyen el conocimiento, se comentará para hacer referencia a él en la segunda etapa del análisis. Por tanto la primera etapa es descriptiva e interpretativa.

La segunda es interpretativa, al igual que la tercera. En la segunda etapa se caracterizará, para cada grupo, los modos de conocer las series numéricas cuando realizaron la *actividad rectángulos*. Esto aportará una visión individual del producto de cada grupo.

En la tercera etapa se elaborará una visión global del producto de cada grupo, y se podrá comparar el desarrollo de los dos grupos con el fin de caracterizar los elementos comunes y los que los diferencian en el proceso de construcción del concepto de serie numérica. En esta etapa se tratará de dar respuesta a lo que caracteriza el desarrollo del esquema.

## IV 1 PRIMEROS PASOS

Antes de comenzar formalmente el análisis de los datos, se visionaron todas las sesiones de los seis grupos que se grabaron para recoger la primera impresión del contenido de las grabaciones. Esto permitió seleccionar los dos grupos que se han utilizado para esta investigación. Posteriormente, se volvieron a visionar y se generaron tres documentos, el primero con las transcripciones de cada sesión (DOC1), posteriormente, otro con un resumen de lo que realizaron los estudiantes cada día en la sesión de clase (DOC2) y finalmente un tercer documento con los pantallazos de las ejecuciones que realizaron con la herramienta de cálculo simbólico (DOC3).

El segundo documento recoge un resumen de cómo se desarrolla cada sesión, destacando algunas intervenciones en las que se hace referencia a cuestiones relacionadas con ciertos conceptos matemáticos como límite o infinito, o suceden hitos relevantes como la consumación de errores. El tercer documento describe brevemente cada ejecución con la herramienta Maple.

Con la elaboración de estos documentos se pudo esbozar una idea acerca de cómo trabaja cada grupo el concepto de convergencia de serie numérica y se perfilaron las principales diferencias.

Un posterior visionado de las grabaciones, apoyado continuamente por estos documentos, es el que da lugar al análisis que se detalla más adelante. En él se ha tratado de encontrar evidencias de la existencia de vínculos entre algunos de los elementos matemáticos que aparecen en la *actividad rectángulos* con los que se construye el concepto de convergencia de serie numérica, según la herramienta teórica que se ha descrito en el apartado II 7.

La elección de la *actividad rectángulos* para realizar el análisis de los datos, conlleva que no se contemplen ciertos elementos matemáticos relacionados con la convergencia de series numéricas. Esto es así porque no aparecen en esta actividad que ha sido diseñada para que el estudiante tenga el primer contacto con las series numéricas. Sin embargo, sí se hallan algunos de los que se consideran (según la autora de este trabajo) relevantes para comprender este concepto, como las dos sucesiones implícitas en una serie numérica y el cálculo ineludible de un límite.

Aceptando que “cada vez que la información se filtra, selecciona, simplifica o se organiza, se está sometiendo a una interpretación” (Lesh y Lehrer, 2000, p. 672), hay que asumir que la interpretación bajo la que se realiza este análisis no es la única, pero en cualquier caso ofrece elementos para una reflexión (Furinghetti y Marselli, 2009) siempre necesaria para avanzar en nuestro conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje del Análisis Matemático.

| | Min. | Resumen |
|---|---|---|
| | | … |
| E. geométrico | 05:58-06:13 | Cuando Daniel observa el proceso de generación de rectángulos inmediatamente afirma:<br>(05:58)(D) Que nunca llega a llenar, vamos.<br>José María ya empieza a calcular las áreas de la sección 'Calcula' y también afirma rotundamente:<br>(06:03)(JM) Nunca llega a dos. Nunca va a llegar a dos. |
| | | En el minuto 06:22 intervengo diciéndole a toda la clase que utilicen fracciones para dar los resultados, no aproximaciones decimales. Lo hago para forzar que utilicen en los cálculo ½, ¼,… y reconozcan el término general de la sucesión. |
| | | … |
| Reflexiona | 16:42-18:07 | En la sección de 'Reflexiona', José María afirma contundentemente:<br>(16:42)(JM) Que siempre va a más, pero nunca llega a dos. O sea, tiende a dos. La suma… casi dos.<br>Daniel enuncia la fórmula de '*sumatorio desde ene igual cero…*'<br>Cuando tienen que escribir la respuesta a:<br>*¿Cuánto vale la suma* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ *?*<br>$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=$<br>Les surge un conflicto por el signo '='<br>(17:53)(JM) Si, pero aquí,… es que sería dos.<br>(17:??)(D)Mm<br>(17:57)(JM) ¿Sería dos o no?<br>(18:00)(D) No<br>(18:??)(JM) No, nunca llega a dos.<br>(18:07)(D) Nunca llega a dos, o sea que… Tiende a dos pero nunca es dos.<br>En la hoja tachan el igual y escriben '*tiende*'. |
| | | … |
| Experiencia 2 | 32:43-37:43 | Reutilizan las instrucciones de Maple que han utilizado anteriormente y deciden dibujar dos gráficas porque en una sola no aprecian bien el comportamiento:<br>(34:??)(D) Yo lo haría en dos plots separados.<br>Parece claro que '*los dos sumatorios tienden a infinito*', aunque Daniel puntualiza que '*el dos a la erre es un infinito mucho más bruto*'.<br>Vuelve a salir el asunto relacionado con el 'tiende' y la igualdad '=':<br>(37:03)(D) Esto es igual a …<br>………..<br>(37:10)(JM) Tiende, pero… no puede ser igual a infinito. Algo tiende a infinito.<br>…………….<br>(37:20) (D) Es que tiende es cuando es límite de tal tiende a tal. Pero aquí no te pregunta por el límite. Te pregunta por el sumatorio de tal hasta infinito, ¿cuánto vale? Infinito.<br>(37:??)(JM) Claro, porque da por hecho que ya tienes infinito ahí<br>Sin más, siguen con la experiencia tres. |

Tabla 4. Ejemplo de DOC2

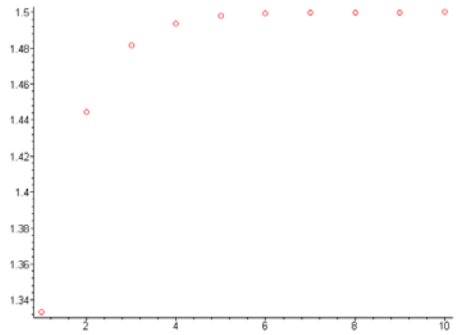
<table>
<tr><th>Min.</th><th>Resumen</th></tr>
<tr><td>04:50</td><td>Copia un trozo de código de otro archivo y lo pega.<br>
<code>> restart:</code><br>
<code>n:=10:</code><br>
<code>a:=array: #esta asignación no es necesaria.</code><br>
<code>for k to n do a[k]:=sum(1/(2^j),j=0..k) end do; #comienza en k=1.</code><br>
<code>A:=[[i,a[i]] $i=0..k];</code><br>
<code>plot(A, style=point);</code></td></tr>
<tr><td></td><td>Modifica la expresión de los a[k], cambiando ½ por 1/3, y ejecuta. Con este código visualiza y dibuja en el plano cartesiano del segundo al décimo primer término de la sucesión $\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(3)^j}$<br>
<code>> restart:</code><br>
<code>n:=10:</code><br>
<code>a:=array: #esta asignación no es necesaria.</code><br>
<code>for k to n do a[k]:=sum(1/3^j,j=0..k) end do; #comienza en k=1.</code><br>
<code>A:=[[i,a[i]] $i=0..k];</code><br>
<code>plot(A, style=point);</code><br>
$a_1 := \frac{4}{3}$<br>
$a_2 := \frac{13}{9}$<br>
$a_3 := \frac{40}{27}$<br>
…<br>
$a_{10} := \frac{88573}{59049}$<br>
$A :=$<br>
$\left[[0, a_0], \left[1, \frac{4}{3}\right], \left[2, \frac{13}{9}\right], \left[3, \frac{40}{27}\right], \left[4, \frac{121}{81}\right], \left[5, \frac{364}{243}\right], \left[6, \frac{1093}{729}\right], \left[7, \frac{3280}{2187}\right], \left[8, \frac{9841}{6561}\right], \left[9, \frac{29524}{19683}\right], \left[10, \frac{88573}{59049}\right], [11, a_{11}]\right]$<br>

</td></tr>
<tr><td></td><td>…</td></tr>
<tr><td>11:20</td><td>Suma $\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{(3)^j}$<br>
<code>> restart:</code><br>
<code>sum(1/(3^j),j=0..k);</code><br>
$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{(k+1)}+\frac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td>12:00</td><td>Luego suma hasta infinito<br>
<code>> restart:</code><br>
<code>sum(1/(3^j),j=0..infinity);</code><br>
$\frac{3}{2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>…</td></tr>
</table>

Tabla 5. Ejemplo de DOC3

Uno de los puntos clave que en cierto modo afectan a los resultados de cualquier investigación, en especial a aquellas de carácter social, es el tipo de datos que se manejan. Las ambiciones que tiene un investigador sobre el tipo de información que desea estudiar, no siempre se logran por las limitaciones institucionales y personales que se dan en cada caso. En esta investigación se ha querido estudiar cómo construyen los estudiantes su conocimiento en el entorno del aula y para ello ha sido necesario fijarse en la construcción del conocimiento grupal. Por ello, en el análisis de los datos se hablará de grupo y, por tanto, del matiz que globalmente ha destacado en el mismo.

Casualmente, las características de los integrantes de los dos grupos han hecho de ellos dos grupos internamente homogéneos, lo cual ha favorecido el tipo de análisis por grupo que se ha llevado a cabo.

## IV 2 VÍNCULOS

La caracterización de la construcción del conocimiento se realizará en base a la existencia o no de vínculos o relaciones entre los elementos matemáticos del esquema de convergencia de serie numérica. Las relaciones pueden ser de dos tipos según se establezcan entre dos elementos matemáticos desde diferentes puntos de vista (analítico-algebraico, gráfico,…), o entre distintos puntos de vista de un mismo elemento matemático.

Estas relaciones, se explicitan a través de la traducción entre diferentes modos de representación, de modo que, por ejemplo, cuando se obtiene la expresión algebraica de una sucesión $a_n$ a partir de la representación gráfica de los primeros términos de la misma, se establece una relación entre el punto de vista gráfico y el punto de vista algebraico del elemento matemático sucesión; es decir, se ha efectuado una traducción del modo de representación gráfico al algebraico en la que se manifiesta la relación entre distintos modos de entender una sucesión. También se establece una relación entre distintos elementos cuando, por ejemplo, se expresa el término general de una sucesión de sumas parciales, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, como suma de los $n$ primeros términos de una sucesión $a_n$. En este caso, se establece un vínculo desde el punto de vista algebraico entre las dos sucesiones implícitas en una serie.

Algunas relaciones que se pueden establecer con el elemento sucesión, $a_n$, son:

*Suc1.* Modelizar un suceso con la expresión algebraica de una sucesión $a_n$.

*Suc2.* Obtener la expresión algebraica del término general de una sucesión $a_n$ a partir de la representación gráfica de sus primeros términos.

*Suc3.* Obtener la expresión general del término general de una sucesión $a_n$ a partir de la expresión numérica de sus primeros términos.

*Suc4.* Obtener la representación gráfica de unos cuantos términos de una sucesión $a_n$ a partir del término general de la misma.

*Suc5.* Obtener los primeros términos de una sucesión a partir del término general.

*Suc6.* Inferir características de la sucesión $a_n$ a partir de su representación gráfica (monotonía y acotación).

*Suc7.* Inferir características de la sucesión $a_n$ a partir de su expresión analítico-algebraica (monotonía y acotación).

*Suc8.* Inferir el comportamiento de la sucesión $a_n$ a partir de su representación gráfica (existencia o no de su límite).

*Suc9.* Inferir el comportamiento de la sucesión $a_n$ a partir de su expresión analítico-algebraica (existencia o no de su límite aplicando criterios de convergencia).

Algunas relaciones que se pueden establecer con el elemento SSP, $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, son:

*Ssp1.* Modelizar un suceso con la expresión algebraica de una sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

*Ssp2.* Obtener la expresión algebraica del término general de una sucesión $S_n$ a partir de la representación gráfica de unos cuantos términos.

*Ssp3.* Obtener del término general de una sucesión $S_n$ a partir de sus primeros términos.

*Ssp4.* Obtener la representación gráfica de unos cuantos términos de una sucesión $S_n$ a partir de la expresión algebraica del término general.

*Ssp5.* Obtener los primeros términos de una sucesión $S_n$ a partir del término general.

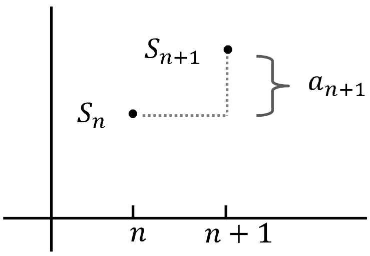
*Ssp6.* Inferir características de la sucesión $S_n$ a partir de su representación gráfica (monotonía y cotas).

*Ssp7.* Inferir características de la sucesión $S_n$ a partir de su expresión analítico-algebraica (monotonía y cotas).

Algunas relaciones que se pueden establecer entre los elementos del modelo $a_n$ y $S_n$ son:

*SspSuc1.* Distinguir los dos tipos de sucesiones: $a_n$ y $S_n$.

*SspSuc2.* El término enésimo de la sucesión $S_n$ es la suma de los $n$ primeros términos de la sucesión $a_n$. Desde el punto de vista cartesiano, se explicita cuando se representa en el plano cartesiano la sucesión $S_n$ del siguiente modo: el término $S_{n+1}$ se dibuja sobre la ordenada $n+1$ con la altura resultante de añadir a la altura de $S_n$ el término $a_{n+1}$.



Desde el punto de vista algebraico, se explicita cuando se escribe el término general de la sucesión $S_n$ como suma de los $n$ primeros términos de la sucesión $a_n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

*SspSuc3.* Inferir características de la sucesión $S_n$ (monotonía, existencia o no de su límite) a partir de otra característica (monotonía, convergencia) de la sucesión $a_n$ (por ejemplo, aplicación del criterio de término enésimo).

Algunas relaciones que se pueden establecer entre los elementos del modelo $\sum a_n$ y $S_n$ son:

*SSsp1.* $\sum a_n$ representa el límite de la sucesión $S_n$.

*SSsp2.* Inferir el comportamiento de la sucesión $S_n$ a partir de su representación gráfica (existencia o no de su límite).

*SSsp3.* Inferir el comportamiento de la sucesión $S_n$ a partir de su expresión analítico-algebraica (existencia o no de su límite aplicando criterios de convergencia).

*SSsp4.* Aproximar la suma $\sum a_n$ con un término de la sucesión $S_n$.

$$\sum a_n \approx S_{20}$$

Algunas relaciones que se pueden establecer entre los elementos del modelo $\sum a_n$ y $a_n$ son:

*SSuc1.* El carácter de la suma depende de $a_n$.

*SSuc2.* Criterio del término enésimo.

*SSuc3.* Otros criterios de convergencia (de comparación, del cociente, etc.)

Estas relaciones no son las únicas que se pueden establecer, y además no todas se tiene porqué dar en la *actividad rectángulos*.

## IV 3 PRIMERA ETAPA DEL ANÁLISIS: DESCRIPCIÓN

A continuación se describe cómo han resuelto cada uno de los apartados de la *actividad rectángulos* los dos grupos de estudiantes que aportan los datos de esta investigación.

Cuando se produce un hito relevante para caracterizar cómo construyen el concepto de serie numérica, se incluyen los comentarios oportunos que añaden un matiz interpretativo a esta etapa del análisis. Para facilitar la lectura, se ha incluido el enunciado de cada apartado.

## IV 3.1 Descripción del apartado Enfoque geométrico

Los dos grupos dedican un minuto a comentar los dibujos de este apartado.

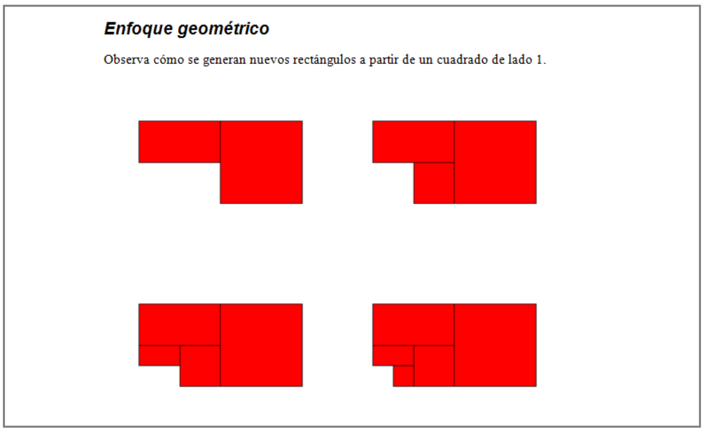



Figura 30. Extracto del enunciado del apartado Enfoque geométrico.

### IV 3.1.1 *Grupo S1: Enfoque geométrico*

El grupo S1 se fija sólo en el resultado del proceso iterativo de construcción de la figura coloreada que es un ejemplo de $S_n$.

Daniel: *A ver, observado. Que nunca llega a llenarse, vamos. Se acerca pero no se llena.*
Chema: *(…) No llega nunca a dos. Nunca va a llegar a dos.*

Además, al referirse explícitamente al límite de esta sucesión pone de manifiesto que coordina los esquemas de SSP y LS (*SspSuc3*), aunque el resultado no sea el objeto trascendente de Brown y otros (2008), sino el pre-objeto serie numérica. Esto es así porque Daniel y Chema no son capaces de concebir que el resultado de infinitas iteraciones sea un rectángulo completo, sin que le falte un "trocito" para completar la figura del rectángulo de dimensiones $2 \times 1$. Ésta es su primera manifestación de límite como algo inalcanzable.

### IV 3.1.2 *Grupo S3: Enfoque geométrico*

El grupo S3 se fija solamente en el proceso iterativo de generación de nuevos rectángulos (ejemplo de $a_n$), pasando por alto el proceso iterativo de construcción de la figura coloreada (ejemplo de $S_n$).

Ricardo: (lee el enunciado) …*generan nuevos rectángulos a partir de un cuadrado de lado dos. De un cuadrado, es decir, este. Pues es: la mitad. Vale. Esto sí es… Ah observa. Myriam. Esto de observa es observa.*
Profesora: *Sí, observa*
(…)
Ricardo: *La mitad, esto va a ser la mitad…* (está leyendo)… *nuevos rectángulos.*
*Este es la mitad de esto que luego va la mitad y luego… La mitad, la mitad de la… (…) Mira, este, la mitad, este; la mitad, este; la mitad, este (señalando a los dibujos).*
Carlos: *Claro, la mitad de la mitad*
Manuel: *La mitad este, la mitad ese. Claro tío.*
Ricardo: *Fuera, observado.*

Por ello, pierde una oportunidad para establecer alguna relación entre las dos sucesiones $S_n$ y $a_n$, y construir el esquema de SSP.

Por otro lado, los tres integrantes del grupo reiteran la frase "*la mitad de la mitad…*" haciendo referencia al Pii de generación de nuevos rectángulos. Esto permite adelantar que han interiorizado la acción de obtener un nuevo rectángulo coordinando esta transformación con el proceso de iteración a través de un segmento finito de $\mathbb{N}$. El grupo S3 entiende que en cada paso, es decir, para cada natural, se obtiene un nuevo rectángulo elaborando una secuencia infinita contable de objetos; cada objeto es el resultado de aplicar la transformación de "dividir por la mitad el objeto anterior".

Sin embargo, no dejan constancia de poseer una concepción objeto de Pii porque no se plantean ninguna evaluación que les pudiera llevar al objeto transcendente del proceso. Una evaluación que les permitiera encapsular el Pii podría consistir en obtener el objeto final del Pii que, en este caso, no sólo es finito sino que además es nulo. Por tanto, una concepción objeto supondría concluir que el objeto transcendente resultante del proceso es la inexistencia de rectángulos. Puesto que no hay ninguna referencia a este objeto, sólo se puede decir que poseen una concepción proceso de proceso iterativo infinito.

### IV 3.2 Descripción del apartado Calcula

Para realizar las operaciones que requiere contestar al apartado Calcula, el grupo S1 apenas necesita tres minutos para obtener resultados aceptables, mientras que el grupo S3 necesita seis minutos sólo para aclarar el significado de los dibujos.

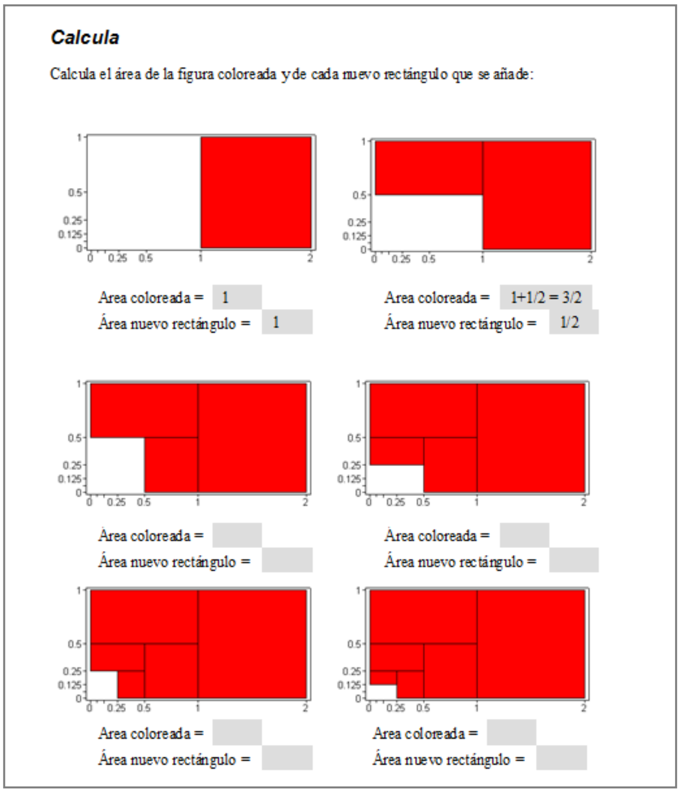



Figura 31. Extracto del enunciado del apartado Calcula.

### IV 3.2.1 *Grupo S1: Calcula*

Chema responde correctamente, haciendo caso a la profesora que les avisó de que no era necesario "*hacer las cuentas, con ponerlo indicado basta*".

Cuando aumenta el número de sumandos, Chema manifiesta un vínculo entre las dos sucesiones, $a_n$ y $S_n$, al indicar con una flecha que el último sumando de la sucesión de las áreas coloreadas es el área del nuevo rectángulo (*SspSuc2*).

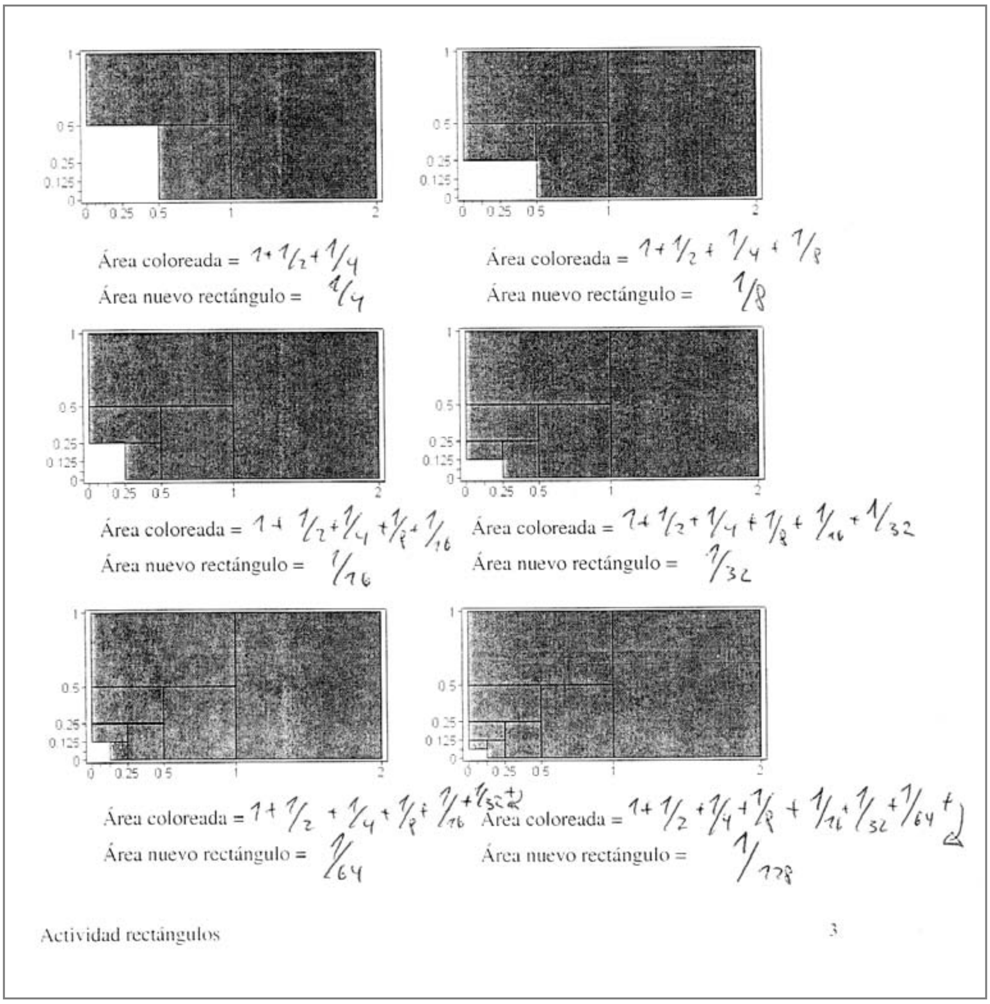



Figura 32. Respuesta de Chema al apartado Calcula.

Daniel también responde de forma correcta, aunque parcial, ya que sólo escribe el área del nuevo rectángulo y no se toma la molestia de escribir los sucesivos sumandos del área coloreada cuando el número de sumandos se incrementa:

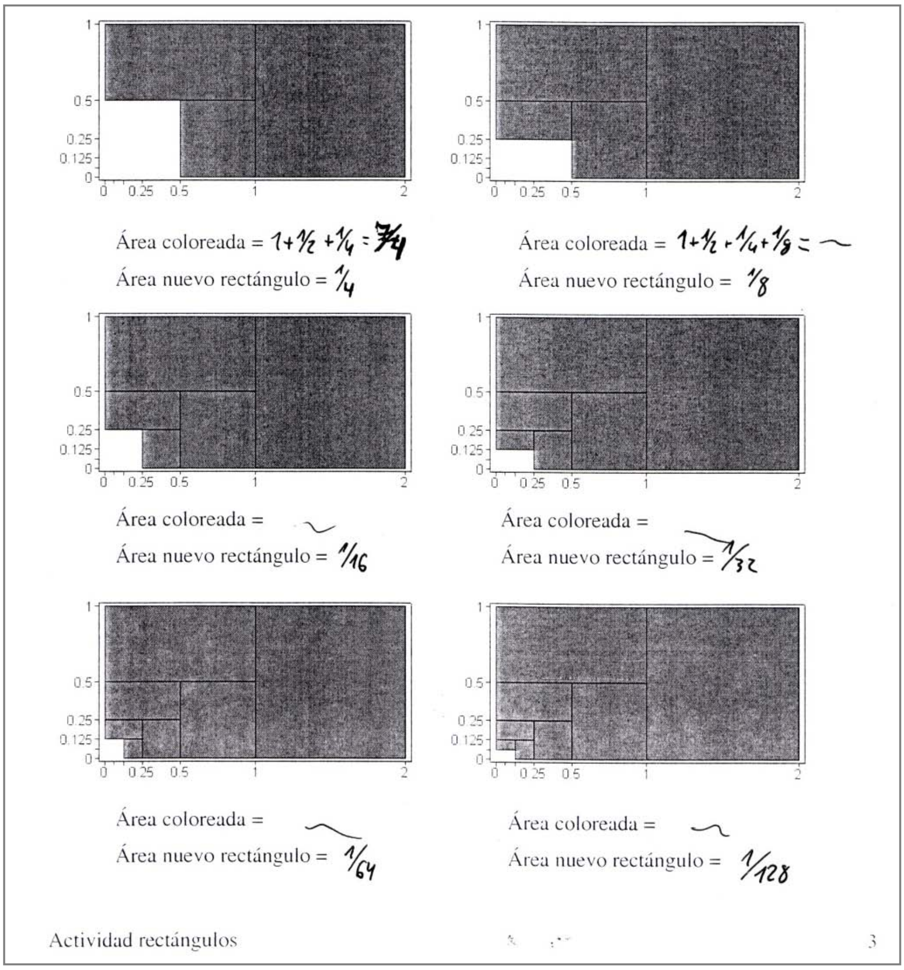



Figura 33. Respuesta de Daniel al apartado Calcula.

Después de obtener los valores de las áreas, trata de expresar el término general de la sucesión de áreas coloreadas, la SSP:

Daniel: *Bueno, vamos a… esto es dos a la… uno partido de dos a la n ¿no?*
Chema: *¿Qué? No. Un octavo, un dieciseisavo, un... claro.*
Daniel: *Eso es dos a la ene.*
Chema: *Sí, eso es.*
(…)
Daniel: *Es desde n igual a cero ¿no?* (no hay respuesta). *Bueno.*
Chema: *Ahora… ¿qué hay que hacer?* (busca en las hojas)
Daniel: *No bueno, yo he puesto la fórmula.*

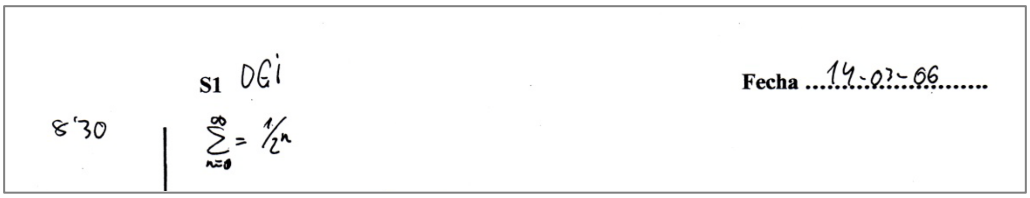



Figura 34. Apunte de Daniel sobre el apartado Calcula.

Aunque la fórmula que utiliza es incorrecta, según el trabajo de McDonald y otros (2000), utilizar una expresión algebraica para dar el término general de una sucesión es un resultado de poseer una concepción objeto de SEQFUNC. Además, la expresión que utiliza para la SSP está escrita en forma de sumatorio, lo cual describe un vínculo entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$ (*SspSuc2*). La rapidez con la que Daniel escribe la expresión general de la SSP con notación de sumatorio puede estar impulsada por los conocimientos previos de Daniel (él ya había cursado, aunque no aprobado, unas matemáticas de primer curso de Universidad).

El error en la fórmula se debe a dos motivos. Por un lado, el uso del símbolo de igualdad; por otro lado, que sume hasta infinito y no hasta la variable de la SSP, por ejemplo $n$.

En cuanto al símbolo de igualdad, podría ser una muestra de un vínculo inconsistente entre $a_n$ y $S_n$ que se traduciría en: la sucesión $a_n$ juega un papel en este proceso iterativo infinito, pero no se sabe expresar matemáticamente de forma correcta; algo así como un estado INTER de desarrollo del esquema porque se reconoce un vínculo entre los elementos $a_n$ y $S_n$, pero no es lo suficientemente fuerte (o consistente) como para manifestarlo en el registro analítico-algebraico. También podría estar relacionado con que el sujeto escriba literalmente lo que le pasa por la cabeza, algo así como "se está sumando algo igual a uno partido de dos a la $n$".

En cuanto a la suma no acotada, se podría justificar como un error debido a un despiste producido al adelantarse a escribir el límite en el que está pensando al observar el proceso iterativo infinito. Es decir, Daniel podría estar realizando una acción sobre el proceso iterativo infinito SSP consistente en calcular su límite, que está expresado en la suma hasta infinito. La falta de atención sobre la notación matemática es suficiente para conducirle a este error.

Así, respecto a la concepción de Pii, Daniel manifiesta una concepción proceso porque las acciones iterativas finitas de obtener el valor de los primeros términos de la sucesión las ha interiorizado en el proceso sucesión, a través de la abstracción que supone encontrar la regla que rige la transformación y, si la hipótesis de la causa del error fuera cierta, estaría dando un paso más en la construcción del conocimiento con una concepción objeto de Pii. Chema sólo manifiesta una concepción acción de Pii porque no va más allá de realizar la acción de obtener los primeros términos de la sucesión $S_n$.

#### IV 3.2.2 *Grupo S3: Calcula*

Este apartado comienza con una pequeña confusión referente a la entidad del nuevo rectángulo que se va generando:

> Manuel: *No lo sé, porque ahora... Sí, el área coloreada sí. O sea, en el área coloreada lo que vamos a hacer es irle sumando todo el rato un medio, ¿no?*
> Ricardo: *Claro, es una sucesión.*
> Manuel: *A lo que nos dé le sumamos un medio, a lo que nos dé le damos un medio. Pero luego, al área del nuevo rectángulo, ¿qué le vamos a hacer, le vamos a ir restando un medio o cómo?*
> Ricardo: *(…) Uno más cero cinco más cero veinticinco… cero setenta y cinco, que son tres cuartos. ¿No?*
> Manuel: *Cuatro medios*

Ricardo: *¿Cómo va a ser cuatro medios, esto más esto, más esto?*
Manuel: *¿Un cuarto le sumas? ¿Por qué? ¿Con cuál lo coges? ¿Respecto a cuál? Respecto a éste …* (señala en la hoja)
Ricardo: *A ver, si esto es uno. Si esto es uno más un medio,… es un medio de esto. Pues esto es uno más un medio más un cuarto. Que sí, tres cuartos*
(…)
Ricardo: *El área del nuevo rectángulo es respecto del blanco. Myriam, una duda.*
Carlos: *Pero del nuevo rectángulo ¿Qué es?*
Manuel: (susurrando, está escribiendo en su hoja) *Dos cuartos*
Carlos: *No, sería un cuarto.*
Manuel: *Un medio menos un cuarto.*

El grupo solicita la intervención de la profesora que aclara cuál es el nuevo rectángulo en cada paso:

Ricardo: (a la profesora) *El área del nuevo rectángulo, es respecto…*
Profesora: *El nuevo rectángulo respecto del caso anterior. Mira, el …*
Manuel: *O sea, respecto del caso anterior o a este.*
Profesora: *En este caso, respecto este, el nuevo rectángulo es este, ¿no?, que tiene área…*
Carlos: *Un medio*
Profesora: *… un medio*
Manuel: *Sí*
Profesora: *En este caso es este con respecto a este, ¿cuál es el nuevo rectángulo? Este cuadrado, que tendrá área pues mira por donde llega.*
Ricardo: *¿Y área coloreada?*
Profesora: *El área coloreada es el área total. La de ésta más la de esta, más la de esta*
Ricardo: *Ah, yo es que pensaba que el área coloreada era todo y área del nuevo rectángulo, el blanco que queda.*
Profesora: *No, no, claro. No, no, el nuevo rectángulo, el que generas de esta parte a esta.*
Manuel: *Claro, era…*
Ricardo: *Vale, vale, pues es un cuarto sólo.*
Manuel: *… a un medio le quitas un cuarto, ¿no? A un medio le quitas un cuarto.*
Ricardo: *No, área del nuevo rectángulo es sólo este.*
Profesora: *Este.*
Ricardo: *Pues es un cuarto.*
(…)
Manuel: *Pero ahora le tendrás que restar un cuarto al área del nuevo rectángulo. Tienes uno, le has quitado un medio, ahora le quitas un cuarto. Le quitas un cuarto. Igual que le has añadido un cuarto, le tendrás que meter otro cuarto, quitar otro cuarto*
Profesora: *¿Cómo estás contando el área tú?*
Ricardo: *Claro, es que estamos diciendo cosas distintas. (…) No, pero él está diciendo que si esto es uno, esto es un medio, esto es el un medio de este un medio que será un cuarto*

Una vez aclarada la duda, responden correctamente al área de cada nuevo rectángulo con una fracción numérica. Para el cálculo del área coloreada, Ricardo se confunde al realizar el primer cálculo:

Operación incorrecta: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Operación correcta: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$

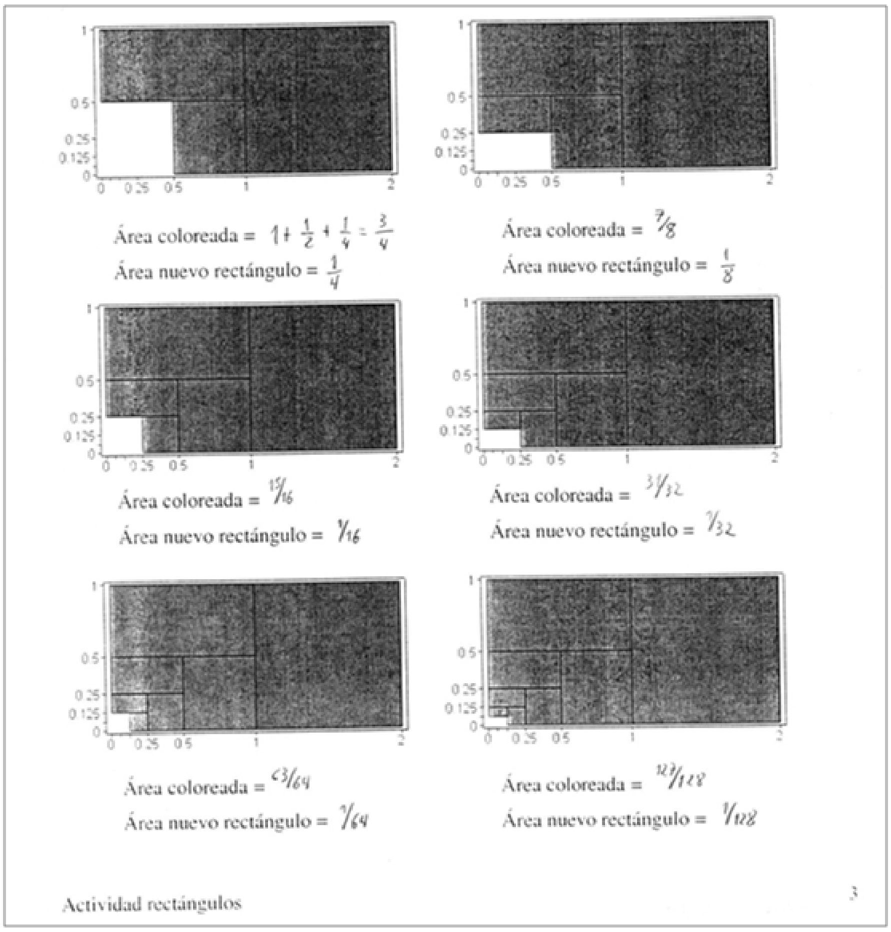



Figura 35. Respuesta de Ricardo al apartado Calcula.

Cuando le consulta a la profesora para comprobar si ha hecho bien el cálculo, ésta tampoco se da cuenta del error y aprueba la operación mal hecha:

Ricardo: *¿Está bien esto así, área coloreada tres cuartos?*
Profesora: *Sí.*

Por otro lado, Manuel calcula correctamente los sucesivos términos de $S_n$ pero se deja llevar por Ricardo:

Ricardo: *Área coloreada es uno más un medio más un cuarto más un octavo.*
(…)
Manuel: *¿Quince octavos os da?*
Ricardo: *Pues es tres cuartos más un octavo*. (Hace cuentas)
Manuel: *Y ahora es un octavo ¿no? lo que hay, del área del nuevo rectángulo. ¿No?*
Ricardo: *¿Cuánto has dicho que te da?*
Manuel: *Quince octavos*
Ricardo: *Siete octavos. Porque si es tres cuartos lo anterior, todo esto, más un octavo.*
Manuel: *(…) sí, que he puesto siete cuartos. Estoy bobo.*

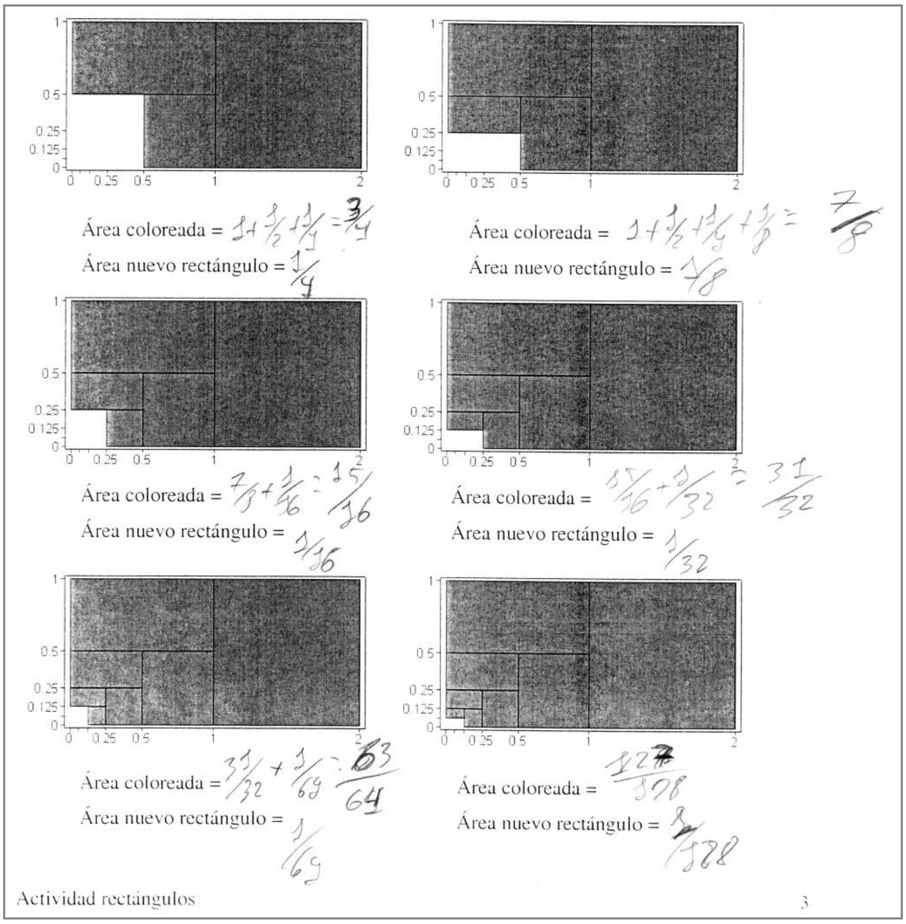



Figura 36. Respuesta de Manuel al apartado Calcula.

Enseguida Ricardo y Manuel obtienen una expresión general (incorrecta) para la SSP utilizando una única fracción numérica:

Manuel: *Que sí, que no es a ojo. Que es simplemente es una sucesión, ¿no? Esto siempre va… el de arriba es uno menos que el de abajo, siempre, en el área coloreada. Siendo potencia de dos. O sea, una potencia de dos menos uno partido una potencia de dos.*

$$\frac{2^n - 1}{2^n}$$

Según el trabajo de McDonald y otros (2000), se podría considerar que el grupo S3 posee una concepción objeto de SEQFUNC que manifiesta al obtener el término general de una sucesión (que en este caso es la de sumas parciales) con una expresión algebraica (*Suc1*). Esta concepción objeto la manifiestan para una sucesión cualquiera sin el matiz de SSP. De haber sido así, la expresión tendría que estar escrita en forma de suma de los $n$ primeros términos de otra sucesión. Sin embargo, al sumar el total de las fracciones numéricas, en vez de dejar indicada la suma, se pierde la conexión entre la SSP $S_n$ y la sucesión $a_n$:

$$S_k = S_{k-1} + a_k$$

Así, la SSP pierde la característica de ser una sucesión en la que el término enésimo es el resultado de sumar al término anterior el término enésimo de otra sucesión. De ese modo, manejan la noción matemática de sucesión, pero no la de SSP.

En cuanto a la concepción de Pii, la obtención de una expresión algebraica que modeliza el Pii supone una concepción proceso porque las acciones iterativas finitas de obtener el valor de los primeros términos de la sucesión, se interiorizan en el proceso sucesión a través de la abstracción que supone encontrar la regla que rige la transformación.

Respecto al error de cálculo, se debe a un despiste que se ve reforzado por la intervención, también errónea, de la profesora que no se fija en el resultado de la operación y la da por válida. Si bien este error no está directamente relacionado con la concepción de sucesión, ni de Pii, es cierto que los integrantes del grupo podrían haberse dado cuenta de que el límite de la sucesión que ellos plantean no coincide con la figura límite que ellos visualizan. Esta falta de atención evidencia una ausencia del vínculo entre los esquemas de SSP y LS (no como sucesión de sumas parciales y su límite, sino como una sucesión cualquiera y su límite) que, de haber existido, les hubiera ayudado a reflexionar sobre la conveniencia de la expresión algebraica que proponen. Sólo más tarde, cuando introducen la expresión en Maple y listan los valores de la sucesión, toman conciencia de su equivocación, aunque en ningún momento manifiestan conocer el origen del error.

Es posible que Ricardo cometiera este error por no sumar el primer término. De hecho, los valores que obtiene coinciden con los correspondientes a no sumar el primer sumando. A continuación, se muestran en la columna izquierda los primeros términos de la sucesión de sumas parciales $S_n$ que se debían haber obtenido, y en la columna derecha, los que calculó Ricardo:

| $S_k = \frac{2^{k+1}-1}{2^k}$ | $S_k = \frac{2^k-1}{2^k}$ |
|---:|---:|
| $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ |
| $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$ |
| ... | ... |

Efectivamente, sin contar con el primer rectángulo de área 1 la expresión que obtiene el grupo S3 es correcta:

$$\frac{2^{k+1}-1}{2^k}-1=\frac{2^{k+1}-1-2^k}{2^k}=\frac{2^k(2-1)-1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$$

Carlos se da cuenta de que, con la fórmula que han dado, no se obtienen los valores de $1+\frac{1}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, …, pero sus compañeros no le prestan atención y continúan:

Carlos: *En el de arriba no sale.*
Manuel: *Es verdad, macho. (…) El de abajo sí. Sí hijo. En todos sale.*
Carlos: *¿Sale el de abajo también? ¿No sale el de arriba en este? Tres medios sale otra vez.*
Ricardo: *Yo qué sé, si ese ya está hecho, tío.*

En este apartado se pone de manifiesto una actitud del grupo que se repite a lo largo de otras sesiones y siempre tiene el mismo efecto: uno de los integrantes del grupo se da cuenta de que algo es incorrecto pero los otros compañeros ignoran su observación y continúan sin percatarse del error y por tanto pierden una oportunidad para aprender.

Si el grupo se hubiera planteado el error, habría buscado otra expresión y con ello, sus integrantes no sólo habrían dejado de lado una expresión incorrecta que más adelante les puede confundir, sino que además hubieran tenido otra oportunidad para establecer un vínculo entre las dos sucesiones, $a_n$ y $S_n$, al haber reflexionado nuevamente sobre ellas.

Atendiendo a las causas que según Socas (1997) provocan los errores, se podría justificar la aparición de este error por una dificultad asociada a actitudes afectivas y emocionales. En este caso, la actitud poco reflexiva del grupo en general, y el papel que juega cada individuo dentro del grupo, provocan que el despiste inicial de Ricardo (y de la profesora) no se corrija. (En otro tipo de investigación se podrían discutir los roles dominante/subordinado que encarnan Ricardo y Carlos, respectivamente, y cómo influyen en la construcción del conocimiento).

### IV 3.3 Descripción del apartado Enfoque gráfico

El grupo S1 realiza este apartado en aproximadamente siete minutos, sin utilizar la herramienta de cálculo simbólico para realizar las representaciones gráficas en el plano cartesiano. El grupo S3 emplea casi cuarenta minutos utilizando Maple y necesitando en varias ocasiones la intervención de la profesora.

**Enfoque gráfico**

Dibuja en el plano cartesiano los valores de las sucesivas áreas, tanto de cada rectángulo como de toda la figura coloreada. Ayúdate de una tabla de valores como la que tienes a continuación:

| n | área rectángulo | área coloreada | valor aproximado del área coloreada |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | 1.5 |
| 2 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{4}$ | 1.75 |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{15}{8}$ | 1.875 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{31}{16}$ | 1.9375 |
| 5 | $\frac{1}{32}$ | $\frac{63}{32}$ | 1.96875 |

Figura 37. Enunciado del apartado Enfoque gráfico.

#### IV 3.3.1 *Grupo S1: Enfoque gráfico*

Daniel comienza fijándose en la columna de la tabla en la que se muestran los valores decimales de las sucesivas áreas coloreadas para hacer referencia al límite de esa sucesión;

su compañero respalda su comentario. Estas referencias inmediatas al límite muestran la buena coordinación de los esquemas SSP y LS, al margen de cómo es su concepción de límite (*SspSuc3*).

Daniel: *Vamos que se acerca a uno. Esto... a dos. Se acerca a dos, a dos todo el rato, ¿no?*
Chema: *(…) Sí, se va acercando a dos cada vez más. Lógico.*

Para realizar las representaciones graficas en el plano cartesiano de las dos sucesiones, Chema pretende utilizar Maple, lo cual le lleva a obtener una expresión algebraica para el término general de las dos sucesiones, la de los nuevos rectángulos y la de las áreas coloreadas (Daniel ya las había calculado en el apartado anterior). Así, muestra por primera vez su concepción objeto de SEQFUNC (McDonald y otros, 2000). Además, Chema fortalece esta concepción objeto cuando en dos ocasiones se refiere a los términos de las dos sucesiones como “las funciones”, o habla de “sacar la función” refiriéndose a obtener la expresión algebraica que describe el término general de la sucesión.

Para la sucesión $S_n$ Chema no llega a obtener el término general, pero el hecho de tratar de expresarlo como un sumatorio muestra el vínculo que establece entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$ (*SspSuc2*).

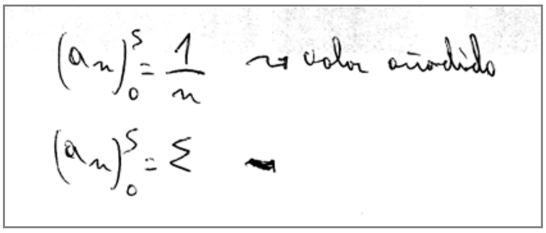



Figura 38. Apunte de Chema sobre el Enfoque geométrico.

Chema: *Sería el sumatorio… Desde a sub…¿Cómo era? ¿Cómo se hacía esto? (…) Sumatorio…desde… Sí, pero las gráficas estas las hacemos en Maple. ¿Eh Dani? Las gráficas estas las hacemos en Maple, ¿no? (…) (susurrando) es el sumatorio entre …*
(…)
Profesora: *¿Habéis pasado ampliamente de meteros directamente en Maple ¿no?*
Chema: *Yo sí lo estaba haciendo, sacando la función para meterlo en Maple, pero claro, es que para meterlo en Maple tienes que sacar…*

También, con la información de la tabla, el grupo S1 establece un vínculo casual entre las sucesiones $a_n$, $S_n$ y el límite de la SSP:

Daniel: *Que sumas esto más esto y te da siempre dos.*
Chema: Claro, siempre sumando las dos te da dos, con lo cual si sumas las dos funciones te va a dar dos. Ya está (se ríen)

Como se ha comentado al principio de este apartado, la representación gráfica en el plano cartesiano la realizan sin utilizar la herramienta de cálculo simbólico, lo cual deja entrever cierta destreza en la manipulación de funciones.

Daniel: *Y ahora, cada vez la mitad de la distancia de aquí*
Chema: *Uno, dos, tres, cuatro y cinco. Vale. Para el uno es uno y medio. Para el dos es…*

Daniel: *Hazte una línea en el dos, ¿sabes?… y vas haciendo la mitad y ya está.*

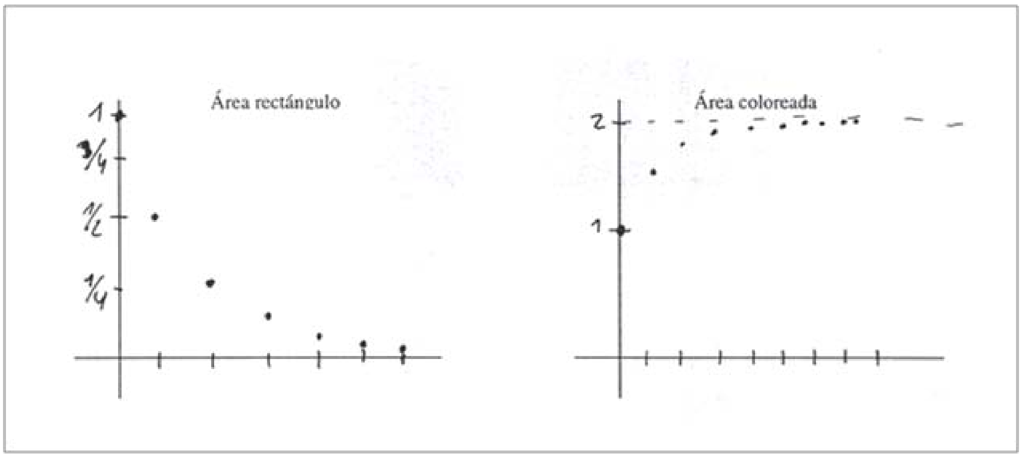



Figura 39. Respuesta de Daniel al apartado Enfoque gráfico.

Para la gráfica de la sucesión de los rectángulos Daniel propone marcar la ordenada del primer término, $y = 1$, y a partir de ahí marcar "*cada uno la mitad del otro*". Para la gráfica de las áreas coloreadas, propone marcar la ordenada del primer término, $y = 1$, y marcar "*la mitad de la distancia*" a la recta $y = 2$. En ambos casos, establece una relación entre el registro numérico y el registro gráfico-cartesiano del elemento sucesión (*Suc3*).

Además, la representación en el plano cartesiano de los valores de la función discreta $f(n) = S_n$ , se interpreta como un vínculo entre las dos sucesiones ya que el siguiente punto que dibujan en la gráfica, $f(n+1) = S_{n+1}$ , se obtiene siguiendo la ley de sumar al anterior el correspondiente término de la sucesión $a_n$, es decir, $S_{n+1} = f(n) + \frac{1}{2^{n+1}}$ (*SspSuc2*). Además, la "línea" con la que representa la asíntota horizontal de la función discreta $f(n) = S_n$ es una evidencia de la coordinación, por parte de Daniel, de los esquemas de SSP y LS (*SSsp2*).

También en el registro gráfico-cartesiano hacen referencia al límite cuando realizan una trasformación sobre el Pii que consiste en comparar los valores de la función discreta que han dibujado en el plano cartesiano con la recta horizontal $y = 2$:

Daniel: *La manera más fácil de dibujarlo… Dibujas este, luego la mitad, luego la mitad. No sé, cada uno la mitad del otro y ya está.*
Chema: *(…) la mitad y la mitad. Ya está, vale. Área coloreada.*
Daniel: *Y ese es justo lo contr... lo mismo pero en dos.*
Chema: *Que sale así, ¿no?*
(…)
Daniel: *Uno más… ¿sabes? Haces ahí una flecha en dos, otra en uno y ya está.*
(…)
Daniel: *Y ahora, cada vez la mitad de la distancia de aquí.*
Chema: Uno, dos, tres, cuatro y cinco. Vale. Para el uno es uno y medio. Para el dos es…
Daniel: *Hazte una línea en el dos, ¿sabes?… y vas haciendo la mitad y ya está.*

El apartado finaliza con una reflexión de Chema en la que vuelve a hacer referencia al límite de la sucesión de sumas parciales como algo inalcanzable:

Chema: *Ahí tiene una mitad. Ahí… la mitad. Ahí la mitad y ahí la mitad. Ya está. Que siempre va a más, pero nunca llega a dos. O sea, tiende a dos. La suma… casi dos.*

En esta última intervención, Chema vuelve a mostrar una evaluación sobre el Pii para encapsularlo en el objeto límite de la sucesión. Queda clara la coordinación de los dos esquemas de SSP y LS por la que construye totalmente el Pii (*SSsp2*), pero no lo ve como una totalidad por la concepción proceso de límite que impide que se encapsule correctamente en el objeto serie numérica. Manifiesta, por tanto, una concepción pre-objeto de serie numérica.

#### IV 3.3.2 *Grupo S3: Enfoque gráfico*

Para representar las gráficas de las dos sucesiones, el grupo S3 utiliza la herramienta de cálculo simbólico y, haciendo uso del copy-paste, reutiliza unas instrucciones que había utilizado en clases anteriores para dibujar los primeros términos de una sucesión. A partir de la tabla de valores, obtiene la expresión general $a_n = \frac{1}{2^n}$ para las áreas de los nuevos rectángulos (*Suc3*), manifestando de nuevo una concepción objeto de SEQFUNC (McDonald y otros, 2000):

Ricardo: *Entonces qué es, ¿sacar la sucesión?*
Profesora: *Con el mismo código del otro día.*
Ricardo: *¿Sacar la sucesión? Del rectángulo, del cuadrado.*
Carlos: *Sí, ¿no ves? Es que es igual que lo de antes pero al revés.*
(…)
Ricardo: *Si es igual que esta.*
Carlos: *Claro, si es lo que te he dicho yo.*
Ricardo: *Es igual*
Carlos: *Es igual pero al revés.*
Ricardo: *Es uno partido n al cuadrado. No, dos elevado a ene. Uno partido dos, no.*
Carlos: (niega con la cabeza)
Ricardo: *Sí, uno partido dos a la ene. Sí, uno partido dos a la ene. Es esta.*
Manuel: *Vale, tenemos una que hay que dibujar que es área de rectángulo, que esa es fácil*
Ricardo: *Sí, esa es uno partido de dos a la ene. Es dos a la cero uno, uno partido de uno, uno. Dos a la uno dos, un medio. Dos a la dos, dos a la tres, dos a la cuatro.*
Carlos: *Sí, sí, sí, sí.*
Ricardo: *Hala, fuera. Esto es uno partido dos a la ene, desde cero hasta infinito.*

Cuando Carlos y Ricardo afirman que "es igual a lo de antes", se refieren al ejercicio anterior que habían realizado en el aula de ordenadores antes de comenzar la *actividad rectángulos*; en ese caso habían trabajado con la sucesión $\frac{1}{n^2}$. El hecho de que en ambos casos, $\frac{1}{n^2}$ y $\frac{1}{2^n}$, las expresiones algebraicas sean similares (fracciones de numerador la unidad, y una potencia en el denominador que contiene una letra $n$ y el número 2), provoca que aflore la dificultad que tienen en identificar la variable de la sucesión: en el primer caso es la base de la potencia y en el segundo caso, el que concierne a la *actividad rectángulos*, es el exponente de la potencia.

Una vez que han obtenido la expresión general de la sucesión de nuevos rectángulos, se disponen a sustituir en las instrucciones de Maple que reutilizan la expresión general de la sucesión cuyos términos listan y representan en el plano cartesiano; al hacerlo, no se percatan de que la variable de la sucesión ahora es la letra $k$, en vez de la letra $n$ que en el bloque de instrucciones de Maple es un valor constante que indica el número de términos de la sucesión que se van a calcular:

```
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=(1/2^n) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=0..n];
  Plot(A, style=point);
```

$$a_1 := \frac{1}{1024}$$

$$a_2 := \frac{1}{1024}$$

Figura 40. Primera ejecución de S3 para responder al Enfoque gráfico.

De ese modo, no son conscientes de que no están representando los diez primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$, sino los diez primeros términos de la sucesión constante $a_n = \frac{1}{2^{10}}$.

Se dan cuenta del error que han cometido cuando la profesora, al pasar por su lado y ver la gráfica en la pantalla, resalta el papel del parámetro $n$:

> Profesora: *Hala, mil veinticuatro. ¿Qué habéis puesto? Estáis elevando dos a la n y a n le habéis dado el valor diez.*
> Carlos: *Ah, vale. Sí, sí, sí, sí.*
> Manuel: *Entonces hay que darle k.*

En este episodio aparece por primera vez el error E(nk) (error debido a utilizar la misma letra como la variable de la sucesión y como parámetro) cuyo origen tiene dos componentes. Por un lado, una debida a un despiste asociado al empleo de copiar y pegar sin prestar demasiada atención al nuevo significado que adquieren las variables y los parámetros en la nueva línea de código. Por otro lado, la tendencia a utilizar la letra $n$ como variable independiente de la función discreta $f(n) = a_n$ provoca que, en ocasiones, se asocie a esa letra el significado de variable independiente y se desestime el empleo de esta letra para otros usos. Este error es consecuencia de la dificultad, comentada anteriormente, que les produce identificar la variable de la sucesión.

Antes de la intervención de la profesora, Carlos ya había avisado del peligro que supone el empleo de la letra $k$, pero el resto del grupo, y principalmente Ricardo, no hacen caso de su advertencia provocando la consecución del error y la falta de atención de Carlos, que ni insiste en su propuesta, ni es capaz de verla como la causa del error:

> Carlos: *Cuidado con la ka, tú.*
> (…)
> Carlos: *Pon jota directamente tío y ya está.*
> Ricardo: *… espacio end do. E n d espacio do, punto y coma*
> Carlos: *Pero que es, lo que se había que cambiar era eso.*
> (…)
> Carlos: *Quita lo de la ka, tú*

Ricardo: *For ka to ene, a de ka. Ah, espera. Esto para empezar lo tenemos mal. Esto hay que poner…*
Manuel: *For jota*
(…)
Ricardo: *(…)* (a Carlos) *Qué más da ka que jota que ache. Eso era lo de ayer porque eran dos valores distintos, tío.*

De nuevo vuelve a darse una situación en la que un integrante del grupo, Carlos, advierte de que algo es incorrecto pero los otros compañeros ignoran su observación y continúan sin percatarse del error y por tanto pierden una oportunidad para aprender. Aunque ésta no es la causa del error, de no haberse dado esta situación, es decir, si el grupo hubiera reflexionado sobre la observación de Carlos, habrían tenido una oportunidad para reforzar el esquema de sucesión como función discreta.

Tras la intervención de la profesora, modifican la letra de la variable y ejecutan las instrucciones con las que representan correctamente los diez primeros términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Manuel: *Entonces hay que darle k.* (Lo cambia y ejecuta). *Ahora sí.*
Ricardo: *Ahora sí.*

```
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=(1/2^k) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n];
  plot(A, style=point);
```

$$a_1 := \frac{1}{2}$$

$$a_2 := \frac{1}{4}$$

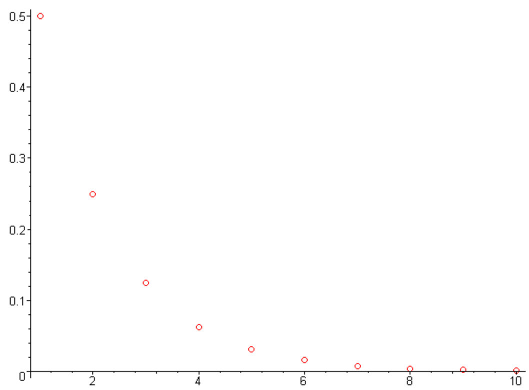



Figura 41. Ejecución correcta del grupo S3.

Con estas instrucciones, representan también la sucesión de las áreas coloreadas modificando sólo la expresión general de la sucesión. Para obtenerla, observan la tabla de valores y se fijan en la relación entre el numerador y el denominador (*Suc3*):

Ricardo: *Por dos más uno.*
Manuel: *Son potencias de dos, tío, las de abajo*

Ricardo: *Uno por dos, dos más uno tres. Tres por dos seis más un siete. Siete por dos catorce más uno quince. Quince por dos treinta más uno treinta y uno. Treinta y uno… Sí, ¿no lo ves?*
Manuel: *Mmmm. El primero por el …*
Ricardo: *Dos a la n más… dos ene… no, a ver. Sí.*
Manuel: *Dos a la n más uno*
Ricardo: *No, no dos n más uno partido dos elevado a ene. A ver, dos por cero, cero más uno, uno. Uno partido uno, uno. Dos por una dos más uno tres.*

El planteamiento inicial de Ricardo es correcto, al observar que los términos del numerador siguen la relación del doble del anterior más uno.

$$1, 3, 7, 15, 31, \ldots$$

Sin embargo, no son capaces de expresar esta relación con una fórmula algebraica correcta. De este modo, utilizan la fórmula $a_n = \frac{2\cdot n+1}{2^n}$ para la sucesión de áreas coloreadas.

Antes de introducir esta información en las instrucciones de Maple, dan unos valores a la variable $n$ para comprobar que es correcta; no detectan el error porque sólo lo comprueban para los dos primeros valores que, casualmente, coinciden con los que observan en la tabla de valores del enunciado:

Datos del enunciado

| $n$ | **Área coloreada** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{3}{2}$ |
| 2 | $\frac{7}{4}$ |

Primeros valores de la sucesión

| $n$ | $\frac{2\cdot n+1}{2^n}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | $\frac{3}{2}$ |
| 2 | $\frac{5}{4}$ |

Cuando introducen en Maple esta expresión, comprueban que es incorrecta por los valores que listan de la sucesión. Además, por un error en la escritura de un paréntesis, la fórmula que introducen en Maple no es la propuesta $a_n = \frac{2\cdot n+1}{2^n}$, sino $a_n = 2\cdot n + \frac{1}{2^n}$:

```
for k to n do a[k]:=((2*k)+1/(2^k)) end do;
```

$$A := \left[\left[1, \frac{5}{2}\right], \left[2, \frac{17}{4}\right], \left[3, \frac{49}{8}\right], \left[4, \frac{129}{16}\right], \left[5, \frac{321}{32}\right], \left[6, \frac{769}{64}\right], \left[7, \frac{1793}{128}\right], \left[8, \frac{4097}{256}\right], \left[9, \frac{9217}{512}\right], \left[10, \frac{20481}{1024}\right]\right]$$

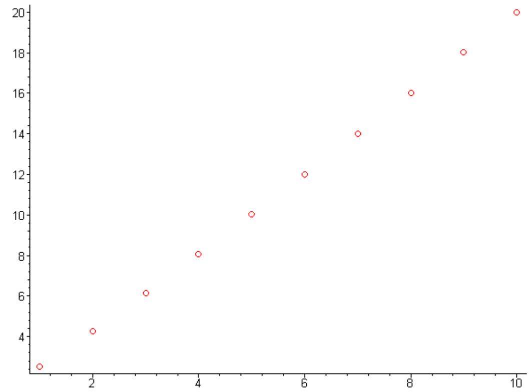



Figura 42. Respuesta de Maple para una sucesión inadecuada.

Después de repasar los valores de la tabla del enunciado, Manuel verbaliza una expresión correcta, pero Ricardo tiene dificultades para expresarla en el registro algebraico:

Manuel: *El de abajo, o sea el de de arriba es el doble del de abajo menos uno. Más uno. Menos uno, menos uno. El doble del de abajo más uno.*
(…)
Ricardo: *Ya, pero esa expresión no la puedes poner así tampoco. ¿Cómo pones que es el doble del de abajo?*
Manual: *Simplemente poniendo el mismo de abajo pero multiplicado por dos.*
Ricardo: *¿Y cómo llamas a lo de abajo?*
Carlos: *Claro.*
Manuel: *Dos a la ene. ¿Cómo lo voy a llamar? Dos a la n por dos menos uno.*
Ricardo: *Es decir, cuatro elevado a la n menos uno. Que no es.*

Manuel le corrige el error:

$$2 \cdot 2^n \neq 4^n$$

Ricardo: *Tú al de abajo le llamas dos a la ene, ¿no? Vale. Y el de arriba es el doble de dos a la n menos uno. Es decir,…*
Manuel: *Dos por dos a la ene…*
Ricardo: *Espera.*
Manuel: *…menos uno. No cuatro a la ene, si no dos por dos a la ene…*
Ricardo: *No es cuatro a la ene. Claro.*
Manuel: *Claro hijo. Es dos, paréntesis, dos a la ene, menos uno.*

De nuevo introducen la expresión en Maple y comenten dos errores distintos:

- ✓ Otra vez el error E(nk), al utilizar la misma letra como parámetro y como variable de la sucesión:

  Este error lo descubre la profesora cuando solicitan su ayuda.

Ricardo: *Myriam.*
Profesora: *Sí.*
Ricardo: *Que yo creo que está mal la expresión, vamos no, la expresión no, la expresión está bien. Los paréntesis o algo.*

- ✓ Escribir incorrectamente un paréntesis en la expresión del término general de la sucesión que introducen en Maple. Así, listan y dibujan la sucesión

$$(2 \cdot 2^n) - \frac{1}{2^n},$$

  en vez de

$$\frac{(2 \cdot 2^n - 1)}{2^n}$$

  Este error puede deberse a un simple despiste, pero no son capaces de rectificarlo.

```
Éste es el área coloreada
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=((2*2^n)-1/2^n) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n];
  plot(A, style=point);
```

$$a_1 := \frac{2097151}{1024}$$

$$a_2 := \frac{2097151}{1024}$$

Figura 43. Respuesta de Maple a unas instrucciones incorrectas.

Aunque se pueden justificar los errores que han cometido atribuyéndoselos a un despiste, el hecho de que no sean capaces de corregir el error E(nk) después de que la profesora les advierta de él, y de que tampoco sean capaces de localizar un paréntesis mal puesto, denota algo más que un despiste. Para Socas (2001, 2007), la utilización incorrecta de los paréntesis puede tener su origen en una ausencia de sentido, en ocasiones por problemas en la aritmética que no se han superado, o en un obstáculo didáctico ocasionado por el modo de enseñar el uso de los paréntesis. Pero además, estos errores tienen una componente afectiva debida a la actitud que manifiestan hacia las matemáticas.

Cuando Ricardo reconoce que tienen problemas con los paréntesis y llama a la profesora, ésta les induce a expresar el término general de la sucesión de sumas parciales utilizando un sumatorio, y a relacionar este apartado con lo que habían hecho previamente en la actividad:

Profesora: *¿Por qué tanto follón? A ver…*
Ricardo: *Sí, dos a la ka.*
Profesora: *…pensad. No, no, no. Vamos a pensar un poquito. A ver, un segundo, ¿qué habéis hecho aquí, en la página anterior? ¿Qué habéis hecho aquí?*
Ricardo: *Ir sumando lo anterior.*
(…)
Manuel: *Ya te digo, así se ve mucho más claro. Puf, pues hay que sumarle la mitad del anterior. Cada vez le vas sumando la mitad del anterior.*

Al escribir el término general como un sumatorio con la instrucción *sum* de Maple, vuelven a utilizar la misma letra como parámetro y como variable de la sucesión, de modo que reinciden en el error E(nk):

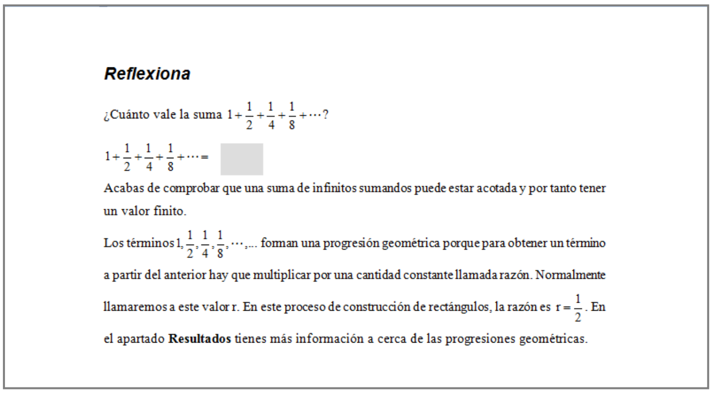
```
Éste es el área coloreada
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=((2*2^n)-1/2^n) end do;
```

Figura 44. Código de Maple con el error E(nk)

Como la profesora está presente, les dicta la expresión correcta.

### IV 3.4 Descripción del apartado Reflexiona

El grupo S1 no invierte más de dos minutos en reflexionar acerca de la suma infinita que se plantea por primera vez utilizando el registro analítico. El grupo S3 dedica los dos últimos minutos de clase para comentar este apartado.



**Reflexiona**

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=$

Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumandos puede estar acotada y por tanto tener un valor finito.

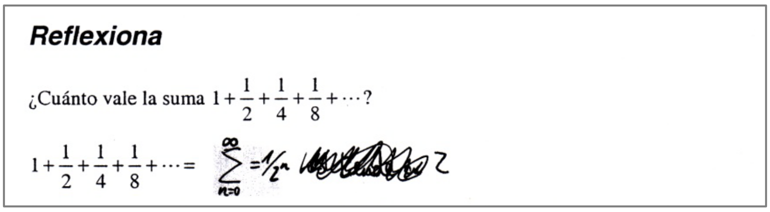
Los términos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$,... forman una progresión geométrica porque para obtener un término a partir del anterior hay que multiplicar por una cantidad constante llamada razón. Normalmente llamaremos a este valor r. En este proceso de construcción de rectángulos, la razón es $r=\frac{1}{2}$. En el apartado **Resultados** tienes más información a cerca de las progresiones geométricas.

Figura 45. Enunciado del apartado Reflexiona.

#### IV 3.4.1 *Grupo S1: Reflexiona*

Daniel comienza escribiendo al otro lado de la igualdad la misma fórmula incorrecta con la que expresó en el apartado Calcula el término general de la SSP:

Daniel: *¿Cuánto vale? Pues…vale el sumatorio de… Esto es verdad, ¿no?. Desde n igual a cero hasta infinito de uno partido de dos a la ene. Eso es lo que vale.*



**Reflexiona**

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots= \sum_{n=0}^{\infty} = 1/2^n$ 2

Figura 46. Respuesta de Daniel al apartado Reflexiona.

En este apartado Daniel expresa correctamente en el registro verbal la fórmula para la suma de la serie, pero comete el mismo error que en el apartado Calcula, lo cual apoya la tesis de que este error se debe a que el vínculo entre las sucesiones $a_n$ y $S_n$ no es lo suficientemente fuerte (o consistente) como para manifestarlo en el registro analítico-algebraico. Así, Daniel manifiesta un estado INTER de desarrollo del esquema de SSP.

Chema se plantea que la suma infinita pueda ser igual a 2, pero Daniel rechaza esta propuesta a favor del argumento de que “no llega a dos”, lo cual corrobora Chema refiriéndose al límite:

Chema: *… la suma de infinito…* (está leyendo). *Sí, pero aquí,… es que sería dos.*
Daniel: *¿Mm?*
Chema: *¿Sería dos o no?*
Daniel: *No.*
Chema: *No, nunca llega a dos.*

Daniel: *Nunca llega a dos, o sea que… tiende a dos pero nunca es dos.*

Esta alusión al límite es otra prueba de la coordinación de los esquemas de LS y SSP que se ha trabajado en los apartados anteriores y que se hace explícita con la suma de la serie (*SSsp1*). También, una vez más el esquema inconsistente de límite de una sucesión como algo inalcanzable se materializa con la frase “*nunca llega a dos*”.

Chema escribe correctamente la suma con un sumatorio, pero no escribe el valor numérico de la suma:

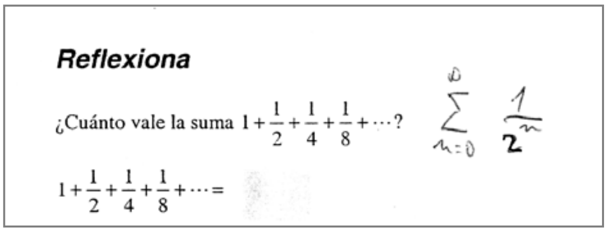



Figura 47. Respuesta de Chema al apartado Reflexiona.

Esta ausencia del registro numérico para el valor de la suma infinita es una muestra de la solidez de la concepción de límite como algo inalcanzable.

### IV 3.4.2 *Grupo S3: Reflexiona*

Ricardo se fija sólo en la expresión general de la sucesión de los sumandos y comienza escribiendo al otro lado de la igualdad la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{2^n}\right)_0^\infty$$

Ricardo: *¿Cuánto vale la suma uno más…? Es igual a uno partido dos a la ene, desde cero hasta infinito, ¿no? ¿Se pone así?*

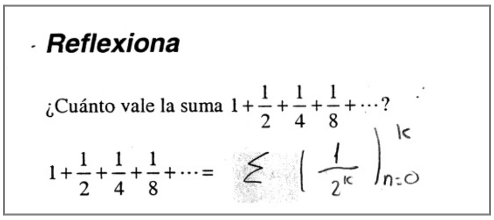
A pesar de que este despiste de Ricardo no trasciende, es importante tener en cuenta que una de las primeras acciones que se han de llevar a cabo para construir el concepto de serie numérica es la de distinguir las sucesiones $a_n$ y $S_n$.

Carlos corrige a Ricardo para que se fije en que los términos de la sucesión $a_n = \frac{1}{2^n}$ están separados por símbolos de suma y no por comas. De ese modo, al diferenciar las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$, establece un vínculo entre ambas (*SspSuc1*) y, al corregir a Ricardo, contribuye a que éste se fije también en la relación entre estas sucesiones:

Carlos: *Pero que esto sigue siendo sumatorio, tío.*
(…)
Ricardo: *Uno partido dos a la ene, desde cero hasta infinito. Que sí, tío. Dos a la cero es uno, uno.*
Carlos: *Que tiene que ser un sumatorio. No ves que te lo va sumando, tío.*

Ricardo se refiere al valor de la suma como *el resultado final*, y vuelve a utilizar incorrectamente la variable índice del sumatorio y la variable de la sucesión cuando trata de contestar al valor de la suma con una expresión para la suma infinita sin puntos suspensivos, cometiendo de nuevo el error E(nk):

Ricardo: *¿Cuánto vale la suma?* (leyendo). *Pero la suma es el resultado final. Vale.*
Carlos: *Claro.*
Ricardo: *Sumatorio de uno partido dos a la k desde n igual a cero hasta k.*



**Reflexiona**

¿Cuánto vale la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$?

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots = \sum \left( \frac{1}{2^k} \right)_{n=0}^{k}$

Figura 48. Respuesta de Ricardo al apartado Reflexiona.

Además, con esta expresión (*SspSuc2*) suma una cantidad finita de términos, por lo que se corresponde más con la SSP que con su límite, la suma infinita (debiera haber sumado hasta infinito). Este error está originado por una mala coordinación entre los esquemas de SSP y LS, por lo que se puede atribuir su origen a una ausencia de sentido debida a la complejidad del concepto de serie numérica como resultado de coordinar los esquemas de SSP y de LS.

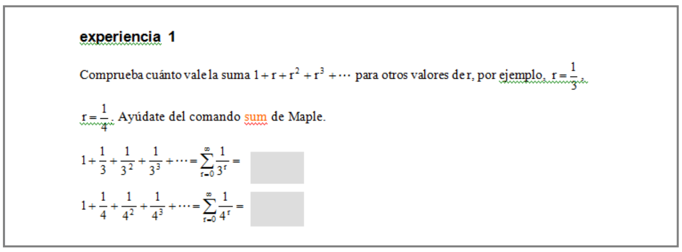
Por último, cuando Carlos lee la aclaración del enunciado "*Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumandos puede estar acotada y por tanto tener un valor finito*", confunde la suma de la serie con un término de la sucesión de sumas parciales, que es un valor fijo "finito" y así justifica la finitud de la suma infinita.

Ricardo: (leyendo) *Acabas de comprobar que una suma de infinitos sumando puede estar acotada y por tanto tener un valor finito.*
Carlos: *Claro, si a k le das un valor fijo, está acotada y… Yo creo, vamos, que es así*

Este error vuelve a ser consecuencia de la mala coordinación entre los esquemas de SSP y LS.

### IV 3.5 Descripción del apartado Experiencia1

El grupo S1 realiza las operaciones de la primera experiencia de forma desenvuelta, pero la intervención de la profesora provoca un debate que prolonga la resolución de este apartado durante quince minutos. El grupo S3 dedica trece minutos y requiere de la ayuda de la profesora.



**experiencia 1**

Comprueba cuánto vale la suma $1+r+r^2+r^3+\cdots$ para otros valores de r, por ejemplo, $r=\frac{1}{3}$, $r=\frac{1}{4}$. Ayúdate del comando sum de Maple.

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{3^r}=$

$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{4^r}=$

Figura 49. Enunciado del apartado experiencia 1.

### IV 3.5.1 *Grupo S1: Experiencia 1*

El grupo S1 utiliza por primera vez la herramienta de cálculo simbólico, y lo hace para representar en el plano cartesiano los cien primeros términos de las sucesiones de sumas parciales $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^k}$ y $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{4^k}$.

```
> restart:
  n:=100;
  for k to n do a[k]:=sum((1/(2^t)) ,t=0..k) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  for k to n do b[k]:=sum((1/(3^t)) ,t=0..k) end do:
  B:=[[i,b[i]] $i=1..n]:
  for k to n do c[k]:=sum((1/(4^t)) ,t=0..k) end do:
  C:=[[i,c[i]] $i=1..n]:
  plot([A,B,C], style=point, legend=["a","b","c"]);
```

$n := 100$

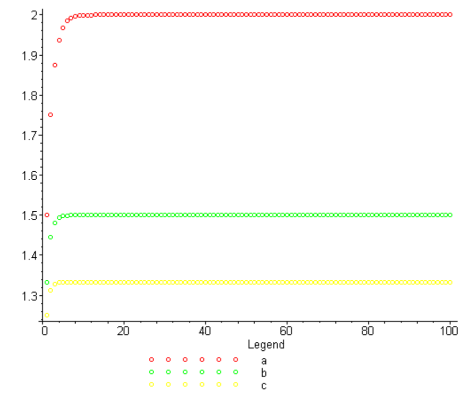



Figura 50. Ejecución de S1 para contestar a la Experiencia 1.

Para obtener estas gráficas, realizan los cambios pertinentes en unas líneas de código que recuperan haciendo copy-paste a unas instrucciones con las que días anteriores habían dibujado tres sucesiones en el mismo plano cartesiano. Las sumas de las respectivas series geométricas del enunciado las obtienen aproximándolas a partir de las asíntotas que observan en el registro cartesiano (*SSsp2*):

> Daniel: *Uno tiende a dos, el otro hasta uno con cinco. (…) Vale. El tres y el cuatro a cuánto tiende. La del tres…*(miran a la pantalla)
> Chema: *La del tres tiende a uno y medio.*
> Daniel: *A uno con cinco.*
> Chema: *Claro, porque siempre tiende a… a uno y medio y la de cuatro tiende a… ¿A cuánto tiende? Fíjate, voy a dar cien valores.*

Sólo para la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$ recurren a obtener el valor numérico del término 100 de la sucesión, el $\sum_{k=0}^{100}\frac{1}{4^k}$, para cerciorarse de que el límite es $1,\widehat{3}$ (*SSsp4*):

> Daniel: *(…) Y el otro tiende a…*
> Chema: *A uno con treinta y cinco, una cosa así ¿Cuánto es eso?*
> Daniel: *Será uno con tres período, supongo, ¿no?*
> Chema: *Claro, es decir, a… Uno con tres período….*
> Daniel: *Mira a ver el valor del último…*
> (…)
> Chema: *Es que no estoy entendiendo qué estás…*

(…)
Daniel: *Estás mostrando b cien y c cien.*
(…) (JM escribe en el ordenador y ejecuta)
Chema: *Uno con cinco y uno con tres, tres, tres. Lo que decimos.*

Cuando escriben en las hojas el resultado de las sumas infinitas, se refieren al valor de la suma como “el límite” y reemplazan la igualdad por el símbolo “→”o la frase exacta de “tiende a”:

Chema: *¿Cómo lo pones?* (mirando a la hoja de Daniel) *Ah, tiende*
Daniel: *Tiende a… lo que sea.*
Chema: *Sí, con una flechita también se puede. (…)*

Chema Daniel

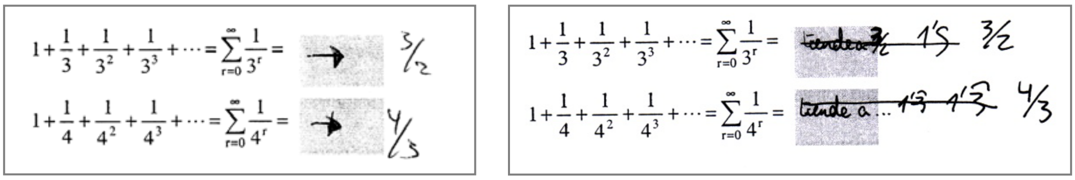



Figura 51. Respuesta de Chema y Daniel a la Experiencia 1

Cuando la profesora ve lo que han escrito les incita a que justifiquen el porqué de sustituir la igualdad por la frase “tiende a” o por el símbolo “→”. Se produce una conversación en la que los dos integrantes manifiestan su postura:

Profesora: *Si ya os he puesto yo un igual, ¿por qué ponéis tiende a?*
Chema: *Es que esto…*
Daniel: *Porque no es un igual…*
Chema: *No es igual, no es igual. Es. O sea, no llega a ser… nunca el valor…Claro, o sea… es como con el cuadrado, nunca llega a dos.*
Profesora: *¿Por qué?*
Daniel: *¿Cómo que por qué? No llega a dos.*
Chema: *Siempre le falta…*
Daniel: *¿Cuándo llega a dos? Cuando n es infinito, como no llega a infinito, porque no hay infinito, pues…*

Daniel, que ha comenzado mostrando problemas con el concepto de infinito, es capaz, de aceptar que el límite se alcance cuando deja de lado sus conflictos con este concepto:

Daniel: *(…) si es el sumatorio hasta infinito, teniendo en cuenta que se pudiera llegar hasta ese número, entonces sí que sería igual a dos, ¿no?*
*(…) aquí dice que cuando llega a infinito, es dos. Sí, ¿no?, bueno. Otra cosa es que no llegue.*

Chema, por su parte, tiene muy arraigada la idea de que nunca se llega a alcanzar el límite:

Chema: *Es que nunca llega a dos, ni en infinito, nunca llega a tocar (gesticula), nunca llega cortar…*
*(…) Claro, que no llega nunca. Por muy alto que sea el valor que das (señala a la pantalla) a la ene, nunca vas a llegar a encontrar un valor que valga…*
*(…) Que siempre falta un trocito.*
*Sí, pero es que nunca va a llegar a valer tres medios (…) porque falta un cuadrito infinitísima… infinitésimamente pequeño para llegar.*

*Vamos a ver, si tu a esa pared te vas acercando, primero te acercas a la mitad, después te acercas a la mitad de la mitad, a la mitad de la mitad, nunca llegas a tocar la pared.*

Estas intervenciones dejan de manifiesto las dos posturas que mantienen los integrantes del grupo S1 frente a la concepción de límite: para Chema el proceso iterativo infinito nunca termina, por tanto, el límite no llega a alcanzarse y lo manifiesta sustituyendo el símbolo de igualdad por "→"; para Daniel, el conflicto que presenta el concepto de infinito ("es un número al que no se puede llegar") provoca que sustituya la igualdad por la expresión "tiende a". Sin embargo, esta respuesta la tacha cuando admite que es posible alcanzar el límite "sólo en el mundo de las matemáticas".

A pesar de las inconsistencias en los conceptos de límite e infinito, las dos posturas coinciden en comprender que la suma de la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales, por lo que continúan coordinando los esquemas de SSP y LS (*SSsp1*) y manifestando una concepción pre-objeto de serie numérica, por insistir en la concepción de límite inalcanzable.

En cuanto a las instrucciones de Maple que emplean para encontrar la respuesta, mantienen las que han utilizado para listar y representar los primeros términos de una sucesión de modo que con ellas no obtienen la suma de la serie sino el término $S_{100}$ de la SSP. Este modo de obtener la suma de la serie se puede interpretar como la desencapsulación del pre-objeto serie numérica que han construido en los apartados anteriores, para actuar sobre el proceso SEQFUNC, aproximando el límite de la SSP a partir de la visualización de su asíntota (*SSsp2*), y sobre la acción de obtener el término $S_{100}$ (*SSsp4*).

#### IV 3.5.2 *Grupo S3: Experiencia 1*

El grupo S3, siguiendo la indicación del enunciado de utilizar el comando *sum* de Maple, reutiliza unas líneas de código con las que días antes habían dibujado los primeros términos de la sucesión de sumas parciales de la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$, y sustituye el valor de $\frac{1}{2}$ por el de $\frac{1}{3}$.

Ricardo: *(…) Pon ahí uno partido tres a la jota. O tres a la i. No, tres a la… jota. No, espérate. Esto ¿qué coños es? Esto no lo hemos puesto.*
Manuel: *No, no, no. A ver. Cuál estamos haciendo, ¿este?.*
Ricardo: *Sí. Tres a la erre.*
Manuel: *Uno partido…*
Ricardo: *Tres a la erre. Jota, yo creo. O a la i.*
Manuel: *Espera.*
Ricardo: *Jota, jota. Tres a la jota, ¿no?*
Manuel: *Tres a la k.*
Carlos: *Sí. Sí, porque si hemos puesto…*
Manuel: *Tres a la k, ¿no?.*
Carlos: *Que no. Tres a la jota.*
Ricardo: *A la jota, a la jota. Porque es desde jota igual a cero.*
Manuel: *Ahí va.*
Ricardo: *Sí, sí. Está bien, tres a la jota. A ver, sube.*

```
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=sum(1/3^j, j=0..k) end do; #comienza en k=0.
  A:=[[i,a[i]] $i=0..k];
  plot(A, style=point);
```

$$a_1 := \frac{4}{3}$$

$$a_2 := \frac{13}{9}$$

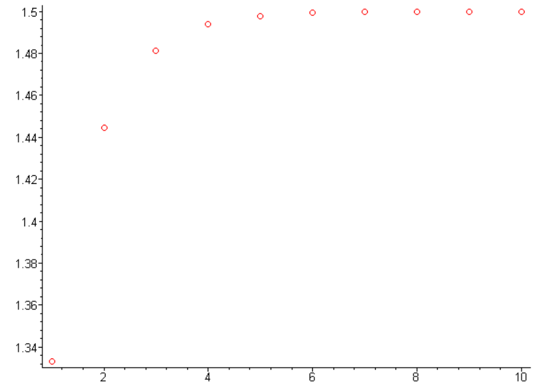



Figura 52. Sucesión de sumas parciales de una serie geométrica.

Tanto el registro numérico, con los valores $\frac{4}{3}, \frac{13}{9}, \frac{40}{27}, \ldots$, como el registro gráfico con la asíntota de la gráfica, confunden al grupo S3 que espera ver representados los términos de la sucesión $a_k = \frac{1}{3^k}$, en vez de los de la sucesión $S_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{3^j}$. Por ello, a pesar de que el resultado es correcto, el grupo considera que la respuesta de Maple es incorrecta porque cree haberse confundido con los nombres de los parámetros del sumatorio y del bucle *for*:

Carlos: *Hala.*
Ricardo: *No puede estar bien. No*
Manuel: *No.*
Ricardo: *… uno partido… Cuatro, trece, uy, uy, uy. Es por esto, ¿eh?* (señala la pantalla y lee de la pantalla) *For k to ene, a de k. Prueba ahí a poner k.* (Ejecutan) *No.*

Como el día anterior el grupo había tenido problemas con el nombre de la letra para la variable índice del sumatorio, cambia aleatoriamente su valor por k ó i:

```
> restart:
  n:=10:
  a:=array: #esta asignación no es necesaria.
  for k to n do a[k]:=sum(1/3^i, j=0..k) end do; #comienza en k=1.
  A:=[[i,a[i]] $i=0..k];
  plot(A, style=point);
```

$$a_1 := 2\,\frac{1}{3^i}$$

$$a_2 := 3\,\frac{1}{3^i}$$

Figura 53. Ejecución incorrecta del grupo S3 en el apartado Experiencia 1.

Así continua ejecutando instrucciones incorrectas con las que obtienen resultados que nada tienen que ver con la solución que espera: $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$.

Este modo de proceder modificando aleatoriamente el nombre de las variables es propio de individuos que manifiestan una actitud matemática poco reflexiva.

Manuel es el que se da cuenta del error y establece un vínculo entre las dos sucesiones (*SspSuc1*) cuando se percata de que se trata de una SSP por el carácter recursivo de la suma:

> Manuel: *Es que se nos… este uno. Ah, que está sum. Claro tío que no. (…) Claro, es que va sumando. Le suma el anterior.*

Sin embargo, al igual que ocurre en otros momentos, la determinación de Ricardo arrastra al resto de los compañeros e impide que Manuel siga con su argumento, que es correcto:

> Ricardo: *Sí, pero está mal.*
> Manuel: *No, no. No está nada bien.*
> Ricardo: *Es que por qué ponía dos por tal, ¿no? Espera, pon i y pon aquí uno* (señala la pantalla). *Pon ahí uno. Y allí pon i.*

En la última intervención, Ricardo desestima el argumento de Manuel porque un mal uso de la herramienta de cálculo simbólico ocasiona que confunda la respuesta de Maple en el caso correcto, con la que obtienen cuando escriben incorrectamente la variable índice del sumatorio:

```
for k to n do a[k]:=sum(1/3^j, j=0..k) end do;
A:=[[i,a[i]] $i=0..k];
plot(A, style=point);
```

$$a_1 := \frac{4}{3}$$
$$a_2 := \frac{13}{9}$$
$$a_3 := \frac{40}{27}$$
$$a_4 := \frac{121}{81}$$

Figura 54. Ejecución correcta (min. 06:10)

```
for k to n do a[k]:=sum(1/3^i, j=0..k) end do;
A:=[[i,a[i]] $i=0..k];
plot(A, style=point);
```

$$a_1 := 2\frac{1}{3^i}$$
$$a_2 := 3\frac{1}{3^i}$$
$$a_3 := 4\frac{1}{3^i}$$
$$a_4 := 5\frac{1}{3^i}$$

Figura 55. Ejecución incorrecta (min. 07:19)

Este mal uso de la herramienta tiene lugar cuando se ejecutan repetidas veces el mismo código variando una pequeña parte del mismo sin darle sentido a ese cambio. En este caso, el nombre de la variable índice del sumatorio. Así, Ricardo sólo recuerda la respuesta de Maple cuando escribieron incorrectamente la variable índice del sumatorio, y no tiene en cuenta que esa respuesta se corresponde con un código diferente al que hace referencia Manuel.

Según la clasificación de Drijvers (2002), el grupo S3 se encuentra con el obstáculo global de la herramienta de cálculo simbólico debido a la dificultad para interpretar la respuesta que ofrece la herramienta. Este obstáculo, como afirma Drijvers (2002), no está provocado por la herramienta, sino que es un obstáculo cognitivo que se manifiesta más intensamente en el entorno de la herramienta de cálculo simbólico. En este caso, este obstáculo pone de manifiesto la dificultad que entraña para los integrantes del grupo S3 el significado en el álgebra de las letras como parámetros y variables; la incapacidad para reconocer el papel de los índices está relacionada con la dificultad que ya han mostrado en apartados anteriores, para identificar las variables en expresiones algebraicas. Además, en este episodio dejan constancia de su actitud matemática que se refleja en el trabajo mecánico y poco reflexivo.

Cuando piden ayuda a la profesora, ésta les sugiere que utilicen sólo el comando *sum* de Maple para obtener la suma de la serie:

> Profesora: *Entonces olvidaros del for y de todo, ¿no? Escuchadme, ahí queréis calcular el valor de esa suma, no representar unos cuantos términos, ni dibujarlos, ni nada de eso. Entonces, pasad de todo y utilizad solamente el comando sum… y ya está. Y así os quitáis muchos índices.*

Entonces Manuel y Ricardo escriben en Maple:

```
> restart:
  sum(1/(3^j),j=0..k);
```

$$-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{(k+1)}+\frac{3}{2}$$

Figura 56. Utilización errónea del comando *sum* de Maple.

La instrucción correcta hubiera sido sumar hasta infinito, en vez de hasta $k$, pero de nuevo la falta de reflexión produce resultados erróneos. En este caso la profesora corrige el error y una vez que el grupo consigue la instrucción correcta, la copian y pegan modificando únicamente el valor de la razón:

```
> restart:
  sum(1/(3^j),j=0..infinity);
```

$$\frac{3}{2}$$

```
> restart:
  Sum(1/(3^j),j=0..infinity);
```

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{3^j}$$

```
> restart:
  sum(1/(4^j),j=0..infinity);
```

$$\frac{4}{3}$$

Figura 57. Ejecución de S3 para responder a la experiencia 1.

> Carlos: *Tres medios. Si ya está.*
> (…)
> Ricardo: *¿Ese es el resultado? Tú ahora pon sum, la primera con mayúscula.*
> Manuel: *¿Aquí? ¿O aquí?*
> Ricardo: *(…) Haz el siguiente, bueno copia-pega este*
> Carlos: *Y le cambias la función y ya está*
> Ricardo: *Y es uno parti… Sólo tienes que cambiar…*
> Manuel: *El tres.*

Ricardo: *…el tres por el cuatro.*
Carlos: *Simple y llanamente.*

Aunque las respuestas son correctas, el modo de llegar a ellas muestra que no se producen las conexiones suficientes entre los elementos del modelo para construir el concepto de convergencia de serie numérica.

### IV 3.6 Descripción del apartado Experiencia2

La similitud de la segunda experiencia con la primera, reduce su resolución a cinco minutos en el caso del grupo S1 y a dos minutos en el caso del grupo S3.

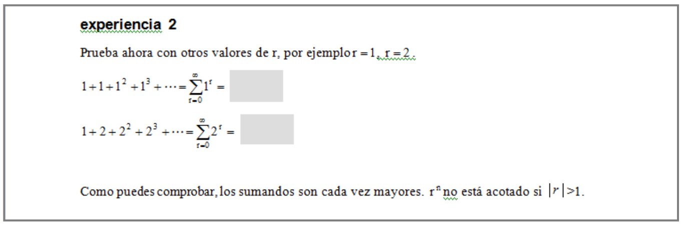



Figura 58. Enunciado del apartado experiencia 2.

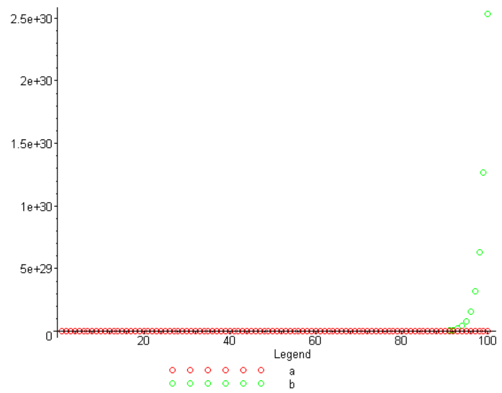
#### IV 3.6.1 *Grupo S1: Experiencia 2*

El grupo S1 reutiliza el bloque de instrucciones de la Experiencia 1, modificando correctamente el valor de la razón.

```
> restart:
  experiencia_2;
  n:=100;
  for k to n do a[k]:=sum((1^t), t=0..k) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  for k to n do b[k]:=sum((2^t), t=0..k) end do:
  B:=[[i,b[i]] $i=1..n]:
  plot([A, B], style=point, legend=["a","b"]);
  evalf(a[n]); evalf(b[n]);
```

*experiencia_2*

$n := 100$




101.

$.2535301200\ 10^{31}$

Figura 59. Primera ejecución de S1 para contestar al apartado experiencia 2.

Como la sucesión $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ toma valores muy grandes respecto a los de $\sum_{k=0}^{n} 1^k$, en la gráfica no se aprecian bien los valores de esta última y las representan por separado:

Daniel: *Yo lo haría en dos plots separados*
Chema: *Sí, casi va a ser mejor, ¿verdad?*

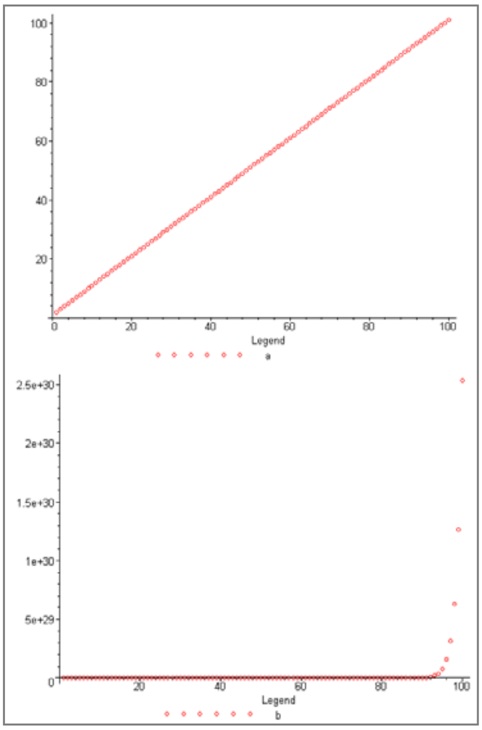



Figura 60. Segunda ejecución de S1 para contestar al apartado experiencia 2.

Cuando contemplan las gráficas de las dos sucesiones vuelven a utilizar la expresión “tiende a” para referirse a la suma de las series que en estos casos diverge a infinito.

Chema: *Entonces los dos tienden a infinito, cuando… Los dos sumatorios tienden a infinito.*

Al utilizar un lenguaje propio de límites para sumar las series, muestran de nuevo la coordinación de los esquemas de SSP y LS (*SSsp2*) para construir el pre-objeto serie numérica.

La concepción inconsistente de límite se sigue manifestando, en este caso, cuando al escribir el resultado de la suma de las series divergentes dudan si poner a continuación del símbolo de igualdad del enunciado la frase “tiende a”. De hecho, Daniel comienza a escribir esta frase aunque luego la tacha:

Daniel: *Esto es igual a… bueno.*
Chema: *Ps, igual…*

$$1+1+1^2+1^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}1^r = \infty$$

$$1+2+2^2+2^3+\cdots=\sum_{r=0}^{\infty}2^r = \infty$$

Figura 61. Respuesta de Daniel al apartado experiencia 2.

El símbolo de igualdad después de la suma infinita que muestra el enunciado les incomoda y reflexionan sobre su conveniencia:

> Chema: *Tiende, pero… no puede ser igual a infinito. Algo tiende a infinito.*
> Daniel: *Bueno*
> Chema: *Sí, bueno*
> Daniel: *Es que tiende es cuando es límite de tal tiende a tal. Pero aquí no te pregunta por el límite. Te pregunta por el sumatorio de tal hasta infinito, ¿cuánto vale? Infinito*
> Chema: *Claro, porque da por hecho que ya tienes infinito ahí.*

La reflexión sobre el símbolo de igualdad desencadena una breve discusión en la que vuelve a registrarse la diferente postura frente a la concepción de límite que manifiestan los dos integrantes del grupo S1, con la connotación de que en este caso el límite diverge a infinito. Aparece así otra forma de entender el infinito como el resultado de un límite que diverge.

La postura de Chema ("*Tiende, pero… no puede ser igual a infinito*") es el resultado de una concepción proceso de límite divergente a infinito que no llega a encapsularse en el objeto resultante del límite que es $\infty$.

La intervención posterior de Daniel ("*Pero aquí no te pregunta por el límite. Te pregunta por el sumatorio de tal hasta infinito*") parece incoherente con lo que realizaron en la experiencia anterior, en la que las sumas de las series habían sido finitas. Esta desconexión puede ser fruto de la dificultad a la que se enfrenta cuando ha de lidiar con cuestiones relativas al concepto de infinito, por lo que se considera que el concepto de infinito se manifiesta como un obstáculo, con una fuerte componente epistemológica, para la construcción del concepto de convergencia de serie numérica.

El hecho de que en el contexto de las series numéricas convergentes Daniel sea capaz de encapsular y des-encapsular el pre-objeto serie numérica y que en el contexto de las series numéricas divergentes a infinito tenga problemas para coordinar los esquemas de SSP y LS, deja clara la dificultad que acarrea el concepto de infinito. Esa falta de coordinación queda patente cuando diferencia el límite de la suma infinita.

### IV 3.6.2 *Grupo S3: Experiencia 2*

El grupo S3 continúa copiando y pegando la instrucción que le facilitó la profesora para sumar series:

```
> restart:
  sum((1^j),j=0..infinity);
                                                  ∞
> restart:
  sum((2^j),j=0..infinity);
                                                  ∞
```

Figura 62. Ejecución de S3 para responder a la experiencia 2.

Carlos se sorprende notablemente de la respuesta de Maple para la suma de una serie divergente a infinito:

Ricardo: *Infinito.*
Carlos: *Pero ¿cómo?*
Ricardo: *Sí.*
Manuel: *Sí, si no dejas de sumarle uno y uno y uno y uno y uno, ¿no?*
Carlos: *(…), y los demás también.*

Un argumento que explica esta sorpresa se puede encontrar en el principio de extensión genérica (Tall, 1991) que se produce cuando el profesor utiliza ejemplos que representan sólo un aspecto del concepto y luego exige al estudiante que evoque otro aspecto; el estudiante es incapaz de hacerlo porque no se le ha entrenado para ello. Sin embargo, en este caso aún no se han dado situaciones en las que tenga sentido el principio de extensión genérica, porque esta actividad se utiliza para introducir el concepto de serie numérica y los estudiantes aún no han recibido una instrucción sobre este tópico.

Desde la perspectiva teórica de esta investigación, la respuesta de Carlos se puede justificar por dos motivos. Por un lado, la falta de un vínculo entre las dos sucesiones, $a_n$ y $S_n$, que permita argumentar sobre el carácter de $S_n$ a partir de el de $a_n$; por otro lado, la inconsistencia del esquema de LS de Carlos, provoca que no considere todos los posibles resultados para el límite de una sucesión.

El razonamiento con el que Manuel justica que la suma dé infinito ("*Sí, si no dejas de sumarle uno y uno y uno y uno y uno, ¿no?*") está relacionado con el criterio del término enésimo. Puesto que a estas alturas de la instrucción aún no conocen este criterio, puede que Manuel manifieste una intuición acerca de este resultado. Esta intuición representa un vínculo entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$, y es un primer paso para coordinar los esquemas de SSP y LS.

En esta misma línea, más tarde Ricardo justifica que la suma no sea finita porque el valor de la razón no es del mismo tipo que en los casos anteriores; antes era "uno partido de algo" y ahora es "uno".

Ricardo: *Ah, espera que es que esto tú no, no va… ¿Sabes por qué?, porque es partido, tío. (…)También infinito. ¿No ves? Es que no ves que en estos anteriores era uno partido, uno partido. No es lo mismo.*

Este comentario de Ricardo, en el que argumenta sobre el carácter de la sucesión $S_n$ a partir de características de la sucesión $a_n$, manifiesta también un vínculo entre las dos sucesiones (*SspSuc3*).

### IV 3.7 Descripción del apartado Experiencia3

La aparición de valores de la razón negativos, provoca de nuevo un debate entre el grupo S1 y la profesora que prolonga la resolución de esta experiencia a diez minutos. El grupo S3 no invierte más de dos minutos en resolver la tercera experiencia copiando y pegando la instrucción que ha utilizado en los apartados anteriores.

**experiencia 3**

¿Qué ocurre si $r < 0$? Prueba con $r = -1$, $r = -2$, $r = -\frac{1}{2}$.

$$1 - 1 + (-1)^2 + (-1)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r =$$

$$1 - 2 + (-2)^2 + (-2)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} (-2)^r =$$

$$1 - \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots = \sum_{r=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^r =$$

$\sum_n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ es un ejemplo de una serie alternada que converge. $\sum_n (-2)^n$, $\sum_n (-1)^n$ son ejemplos de series alternadas que no convergen.

Figura 63. Enunciado del apartado experiencia 3.

### IV 3.7.1 *Grupo S1: Experiencia 3*

Antes de dibujar las sucesiones con Maple, reflexionan acerca de lo que esperan obtener cuando la razón de la serie geométrica es un número negativo. En el caso de la serie geométrica de razón $-1$, los dos integrantes del grupo son poco coherentes con su concepción de límite y de infinito, porque en sus discursos coexisten argumentos contradictorios tales como la unicidad, la no existencia del límite frente a que el valor del límite sea al mismo tiempo $1$ ó $0$, o la paridad de infinito, como si se tratase de un número entero del cual se puede decidir si es par o impar:

Daniel: *No, si es… si no fuera sumatorio, si fuera una sucesión de estas… sería el uno menos uno, uno menos uno (oscila el brazo en el aire) entonces… pero como es sumatorio…*
Chema: *No puede tender a infinito y a menos infinito a la vez.*
Daniel: *…suma…Es uno, uno (señala en el aire),…*
Chema: *Va a tender a cero.*
Daniel: *…menos uno, cero, más uno…*
Chema: *Claro, porque lo que tiende por un lado…*
Daniel: *Es decir, cero, uno.*
Chema: *… menos lo que tiende por el otro.*
Daniel: *Es uno, cero, uno, cero, …*
Chema: *Va a tender a cero*
Daniel: *… uno, cero,…No, no tiende a nada.*
Chema: *A cero*
Daniel: *¿Cómo va a tender a cero?*
Chema: *Sí, porque va siendo… va sumándolo*
Daniel: *Ah, sí, sí, sí, sí.*
Chema: *Claro, ¿Sabes lo que te digo? O sea es, por ejemplo, en un lado uno, en otro lado cero con nueve, en el otro lado uno con uno.*
Daniel: *No, no, no. Aquí es uno, menos uno.*
Chema: *Ya, bueno. Te lo estoy diciendo de…* (gesticula como diciendo “de cualquier manera”) *Te lo estoy diciendo como…*
Daniel: *Ya, ya, ya. Aquí sí que lo hará el dibujo este tal, pero éste será una…*
Chema: *Y con este igual*
Daniel: *No, en este tiende a… No tiende a nada.*
Chema: *Tiende a cero*
Daniel: *No, no tiende a cero, porque está cambiando de cero a uno todo el rato. Esto es uno menos uno, cero…*
Chema: *Claro, depende de si…*
Daniel: *…más uno, uno*

Chema: *…de si este infinito es par o es impar, para que te dé algo positivo…*
Daniel: *Vale, infinito es igual a qué, igual a nada.*
Chema: *Claro*
Daniel: *Igual a…*
Chema: *Es que esto no tiene…*
Daniel: *… cero, uno, cero, uno. No tiende a nada.*
Chema: *De todas formas…*
Daniel: *Igual a… A cero o uno (lo escribe y se ríe)*
Chema: *Espérate que lo meto aquí (Maple)*

Cuando la profesora se interesa por lo que están haciendo, Chema defiende la no existencia del límite porque oscila:

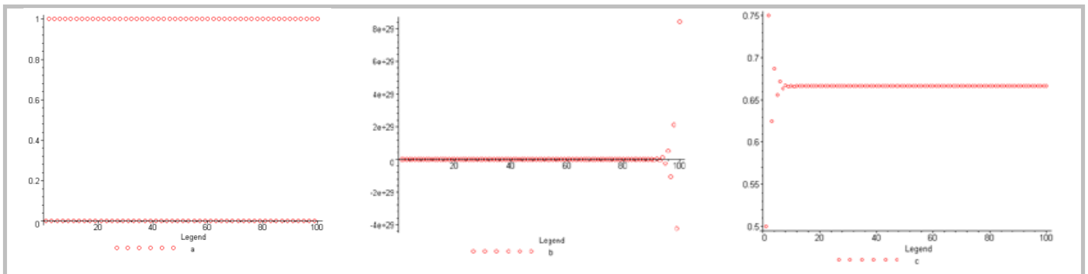
Profesora: *Bien, a ver ahora la tres qué os da. Que tenéis términos negativos.*
Chema: *Hemos visto que este no nos puede dar nada porque… Cero o uno, según sea… fuera par o impar, pero como es infinito, no… (…) Es que no se puede dar un resulta…*

Sin embargo, Daniel mantiene la no unicidad del límite asignándole el valor $0$ ó $1$. Aunque la profesora insiste en que eso no es un resultado admisible, en ningún momento expresa explícitamente la unicidad del límite.

Daniel: *Cero o uno, ¿no? (…)*
Profesora: *No, pero tenéis que dar algo. ¿Qué dais?*
Daniel: *Cero o uno.*
Profesora: *Vale, bueno*
Daniel: *Ese es el resultado.*
Profesora: *¿Cero o uno?, ¿es eso un resultado?*
Daniel: *Sí*
Profesora: *¿No dais un resultado?*
Daniel: *Cero o uno. Ese es nuestro resultado.*
Profesora: *Cero o uno, vale (se ríen) El siguiente.*

El empleo de la herramienta de cálculo simbólico con la que representan unos cuantos términos de las sucesiones de sumas parciales, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k$, $S_n = \sum_{k=0}^{n}(-2)^k$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k$, y obtienen el término $S_{100}$ de las mismas, no resuelve estas incoherencias. Ejecutan un solo bloque de instrucciones con el que obtienen los resultados para las tres series del enunciado, de modo que visualizan en la pantalla las tres gráficas y los tres valores de los términos $S_{100}$ de las respectivas sucesiones. Con esta información estudian el comportamiento de las sucesiones de sumas parciales y concluyen las sumas de las respectivas series (*SSsp2* y *SSsp4*).

A continuación se muestran las respuestas de Maple, las sucesiones de sumas parciales que dibujan en el plano cartesiano y el valor que obtienen del término $100$ de dicha la sucesión:




`evalf(a[n]);` 1.  `evalf(b[n]);` .8451004002 $10^{30}$  `evalf(c[n]);` .6666666667

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

$$S_{100} = 1 \qquad S_{100} = 0{,}8451 \cdot 10^{36} \qquad S_{100} = 0{,}666666667$$

Figura 64. Ejecución de S1 para contestar al apartado experiencia 3.

Como hicieron anteriormente, cuando la serie converge calculan su suma aproximando con el término cien de la sucesión de sumas parciales (*SSsp4*):

Chema: *En el tercero, sí.*
Daniel: *El tercero tiende a… ¿a qué tiende? Mira a ver…*
Chema: *A cero con seis, seis, seis, seis, seis.*
Daniel: *Pon cien otra vez, a ver qué valor te da en… (ejecuta) Sí.*
Chema: *Que eso es…*
Daniel: *Eh… dos tercios*
Chema: *Dos tercios. Sí, dos tercios.(…)*

Sin embargo, cuando la sucesión de sumas parciales no converge, este modo de proceder provoca el error consistente en confundir el valor $S_{100}$ de la sucesión con su límite:

Daniel: *Ah, tiende a uno*
Chema: *No, no, da uno porque n es cien*
Daniel: *Ah, vale, vale*
Chema: *Si ahora pongo aquí …*
Daniel: *Ciento uno*
Chema: *Ciento uno… pues ya da (ejecuta) que cero*
Daniel: *Cero, pues cero o uno, lo que decíamos. Para infinito igual a… par (se ríen)*
Chema: *Éste no, pero estos sí están determinados, porque estos se van…*

Corrigen inmediatamente este error y, aunque Chema mantiene la no existencia del límite haciendo referencia a que no está determinado, Daniel continúa sosteniendo la no unicidad del límite, asignándole el valor 0 ó 1.

En el caso de la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-2)^k$ en el que la sucesión diverge por oscilación, Chema sigue defendiendo la no existencia del límite y Daniel continúa proponiendo dos valores distintos del límite, tanto en el caso convergente como en el divergente:

Daniel: *Ese tiende a infinito y el otro… a más menos infinito…*
Chema: *Es que esto tampoco tiende a nada, porque eso es otra.*
Daniel: *Pues en el otro era cero-uno y en este más-menos infinito. ¿No?*

Las soluciones que Daniel anota en su hoja de trabajo son las siguientes:

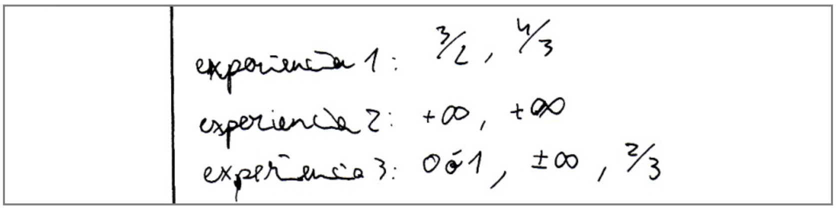

experiencia 1: $3/2$, $4/3$
experiencia 2: $+\infty$, $+\infty$
experiencia 3: 0 ó 1, $\pm\infty$, $2/3$

Figura 65. Respuesta de Daniel a las experiencias 1, 2 y 3.

Chema: *Dos tercios. Sí, dos tercios. Dos tercios y los otros no están determinados, es que no.*
Daniel: *Cero-uno y el otro más-menos infinito. Tiende a más infinito y a menos infinito.*
Chema: *(mientras escribe) cero o uno. Más infinito o menos infinito. (no parece convencido). Venga, si te lo dice aquí abajo que no converge.*
Daniel: *Ya, pues eso.*

Al final, Chema anota en sus hojas la solución de Daniel, aunque no está convencido de ello porque continúa afirmando que, en los dos casos en que no existe el límite, éste no está "determinado". La última intervención de Daniel, confirmando que su solución es análoga a la no convergencia, muestra una incoherencia en el concepto de límite.

Las respuestas incorrectas para la suma de las series que divergen por oscilación ($\pm\infty$ y 0 ó 1) tienen su origen en un esquema de límite inconsistente e incoherente, relacionado con la unicidad del límite. Sin embargo, al igual que ocurrió en situaciones anteriores, se produce la coordinación de los esquemas de SSP y LS (*SSsp1*) por lo que mantienen una concepción pre-objeto de SSP.

### IV 3.7.2 *Grupo S3: Experiencia 3*

El grupo S3 continúa copiando y pegando la instrucción que les facilitó la profesora en la primera experiencia para sumar series, pero en esta ocasión, a causa del signo de la razón, escriben incorrectamente en Maple un paréntesis que produce un resultado que les lleva a sumar la serie $\sum -1^k$, en vez de la serie $\sum(-1)^k$ y así obtienen como resultado $-\infty$, en vez de *undefined*:

Ricardo: *Venga, el siguiente. Copia y pega y es menos uno a la jota.*
Manuel: *Menos infinito.*
Ricardo: *Menos infinito. El otro también menos infinito. Haz el de menos un medio a la erre.*

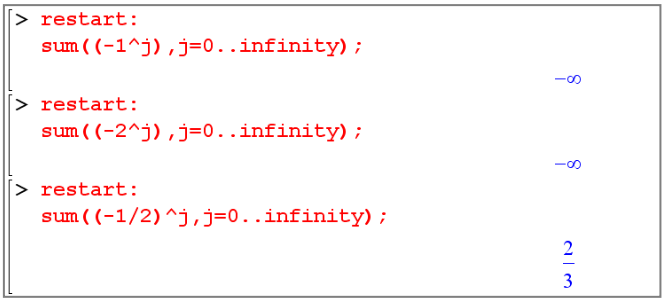

```
> restart:
  sum((-1^j),j=0..infinity);
                                        -∞
> restart:
  sum((-2^j),j=0..infinity);
                                        -∞
> restart:
  sum((-1/2)^j,j=0..infinity);
                                        2/3
```

Figura 66. Ejecución de S3 para responder a la experiencia 3.

Este resultado afectará más adelante a la respuesta de la conjetura 1. En este caso, se ratifica la idea de Tall (1989) acerca de la posición contradictoria del ordenador en el proceso de aprendizaje cuando su autoridad más que facilitar, entorpece el proceso de aprendizaje. Si el grupo S3 reflexionara sobre las respuestas de Maple, por ejemplo, dando los primeros valores de la SSP antes utilizar el ordenador para conjeturar sobre el comportamiento del límite, se habría dado cuenta de que la respuesta de Maple no se corresponde con la esperada y se hubiera podido plantear revisar la sintaxis de la instrucción.

Aunque el grupo no conoce cómo es la respuesta de Maple cuando un límite diverge por oscilación, si hubiera previsto que el comportamiento es oscilante, no habrían tenido ningún problema en interpretar la respuesta de Maple en este caso: *undefined*.

Cuando suman la serie para un valor de la razón negativo pero mayor que $-1$, Ricardo espera que sea convergente, pero se extraña de que el resultado sea positivo. El resto de sus compañeros copian el resultado sin más:

> Ricardo: *Ya. No, antes de leerlo lo he dicho, he dicho esto va a dar distinto. Sin saberlo, claro luego te pone aquí esto. Es una alternada, converge.*
> Carlos: *Uy, tarda mucho, tarda mucho, tarda mucho. ¡Paranoia!*
> (escriben lo que ven en la pantalla)
> Ricardo: *Espera, ¿cómo va a ser constante? ¿Cómo va a salir positivo? Sí.*

La predicción del comportamiento de la serie para $r = -\frac{1}{2}$ por parte de Ricardo, sólo se puede explicar por una intuición acerca de cómo afecta la sucesión $a_n$ a la suma de la serie. Esto es un primer paso para establecer un vínculo entre la sucesión $a_n$ y la SSP, que a su vez ha de coordinarse con el esquema de LS para concluir el carácter del mismo. Empero, Ricardo no da muestras claras de ese vínculo (*SspSuc3*).

En cuanto a que se extrañe porque la suma sea positiva, si hubiera representado gráficamente la sucesión de sumas parciales, o hubiera listado los primeros términos de la misma, no le extrañaría que la suma infinita fuera positiva porque podría haber comprobado gráfica y numéricamente cómo son las sumas parciales. Estas acciones hubieran justificado la coordinación de los esquemas de SSP y LS y podrían contribuir a construir el esquema de SSP.

### IV 3.8 Descripción del apartado Experiencia4

El grupo S1 realiza la cuarta experiencia en los últimos seis minutos de clase. El grupo S3, al igual que en las dos experiencias anteriores, resuelve ágilmente este apartado en cuatro minutos.

**experiencia 4**

Suma sólo una cantidad finita de términos de la progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Por ejemplo 10 sumandos. Ayúdate del comando sum de Maple y utiliza el comando evalf para aproximar con 15 decimales.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^9}=\sum_{t=0}^{9}\frac{1}{2^t}=$$

Ahora suma más términos, por ejemplo 20.

$$\sum_{t=0}^{19}\frac{1}{2^t}=$$

Figura 67. Enunciado del apartado experiencia 4.

### IV 3.8.1 *Grupo S1: Experiencia 4*

El grupo S1 realiza correctamente la experiencia 4, pero no comentan el resultado debido a que se acerca el final de la clase y tienen premura por terminar. Cuando Chema hace uso del copy-paste incurre en el error de no modificar adecuadamente los parámetros y los nombres de las variables. Este error lo comete no por desconocimiento, sino por un despiste asociado a copiar y pegar líneas de código sin reflexionar previa y posteriormente sobre la información que contiene dicho código para adaptarla a las nuevas necesidades. Daniel advierte de estos errores y los corrige.

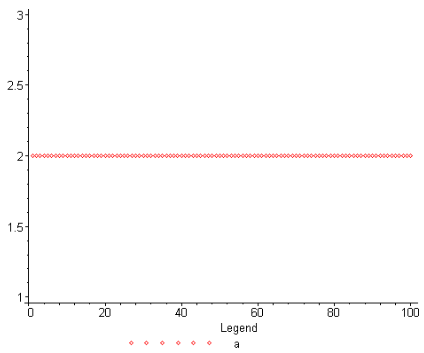
El primer código que ejecutó Chema dibuja la sucesión constante $S_k = \sum_{t=0}^{9}\frac{1}{2^t}$ y visualiza el valor de $S_{100}$:

```
> restart:

  experiencia_1;
  n:=100;
  for k to n do a[k]:=sum(1/(2^t), t=0..9) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  for k to n do a[k]:=sum(1/(2^t), t=0..19) end do:
  B:=[[i,b[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["a"]);
  plot(B, style=point, legend=["b"]);
  evalf(a[n]); evalf(b[n]);
```

$experiencia\_1$

$n := 100$




```
Plotting error, empty plot
```

1.999998093

$b_{100}$

Figura 68. Primera ejecución de S1 para responder a la experiencia 4.

Como olvida cambiar el nombre de la sucesión con la que calcula la segunda suma en el bucle *for*, el array “b” queda sin definir y Maple no puede dibujar su gráfica. Tras corregir este error, dibuja en dos gráficas separadas los primeros 9 y 19 términos, respectivamente, de la sucesión $S_k = \sum_{t=0}^{k} \frac{1}{2^t}$.

```
experiencia_4;
n:=100;
for k to 9 do a[k]:=sum(1/(2^t), t=0..k) end do:
A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
for k to 19 do b[k]:=sum(1/(2^t), t=0..k) end do:
B:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
plot(A, style=point, legend=["a"]);
plot(B, style=point, legend=["b"]);
evalf(a[n],15); evalf(b[n],15);
```

Figura 69. Segundo código de S1 para responder a la experiencia 4.

Puesto que sólo calcula esos primeros términos, Maple no tiene ningún valor asignado al término $S_n$ para el valor de $n = 100$:

Figura 70. Respuesta vacía de Maple.

Finalmente ejecuta un código en el que visualiza $S_9$ y $S_{19}$:

```
evalf(a[9],16); evalf(b[19],16);
                                        1.998046875000000
                                        1.999998092651367
```

Figura 71. Respuesta de S1 para la experiencia 4.

Respecto a la utilización de la herramienta de cálculo simbólico, en esta experiencia hay que destacar que para obtener los valores de $S_9$ y $S_{19}$, sólo necesitan ejecutar la instrucción *sum* de Maple dos veces, pero ellos ejecutan todo el bloque de instrucciones que han reutilizado:

```
evalf(sum(1/2^t,t=0..9),15);
evalf(sum(1/2^t,t=0..19),15);
```

Figura 72. Instrucciones con las que se puede contestar a la experiencia 4.

Si hubieran sido más selectivos en la reutilización de las instrucciones, quizá no hubieran cometido los errores que se acaban de comentar porque las instrucciones necesarias son más sencillas y requieren el empleo de menos variables.

#### IV 3.8.2 *Grupo S3: Experiencia 4*

El grupo S3 realiza esta experiencia sin contratiempos reutilizando la instrucción que emplearon en las experiencias anteriores.

Ricardo: *…sumas una cantidad finita de… cuatro… ah… sumas una cantidad finita de términos de la progresión geométrica de razón… evalf… Con quince decimales... Vale. Hala, venga. Lo mismo, copia-pega.*
Carlos: *Y hay que utilizar el comando evalf.*
Manuel: *Nada más que… sólo hasta el nueve, ¿no? En vez de infinity nueve.*

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j),j=0..9),15);
                                                  1.99804687500000
> restart:
  evalf(sum((1/2^j),j=0..19),15);
                                                  1.99999809265137
```

Figura 73. Ejecuciones de S3 para responder a la experiencia 4.

La ausencia de comentarios en este apartado no permite derivar ninguna conclusión sobre la construcción del conocimiento de los estudiantes que integran el grupo S3.

### IV 3.9 Descripción del apartado Conjetura 1

El grupo S1 comienza este apartado el segundo día que trabaja en el aula de ordenadores con la *actividad rectángulos,* y dedica más de media hora a reflexionar sobre esta conjetura. El grupo S3 contesta parcialmente a la primera conjetura en sólo seis minutos.

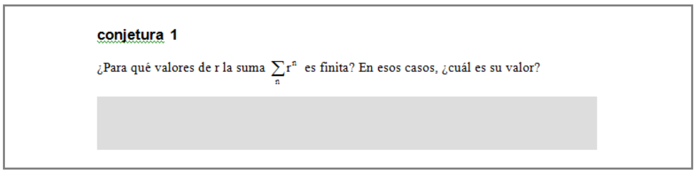



Figura 74. Enunciado del apartado conjetura 1.

#### IV 3.9.1 *Grupo S1: Conjetura 1*

Daniel comete un error que en ocasiones se observa en el aula (según la experiencia docente de la profesora), que consiste en confundir una serie geométrica con una serie armónica por las similitudes que presentan el término general de estas dos series en su expresión algebraica:

$$\sum n^{\alpha} \qquad\qquad \sum r^{n}$$

Serie armónica de orden $\alpha$ Serie geométrica de razón $r$

A estas alturas de la instrucción, otros estudiantes no conocen aún la serie armónica, pero Daniel ya cursó el año anterior una asignatura de matemáticas en la Universidad, por lo que recordaba ciertas nociones sobre series numéricas. En esta intervención, se observa que no sólo confunde estas dos series sino que además se refiere a una serie de funciones, no a una serie numérica:

Daniel: *Para erre igual a uno partido de equis cuadrado sabemos que es convergente. (…) Para uno partido de equis no es convergente.*

Aunque esta confusión no produce ningún resultado incorrecto, pone de manifiesto este error producido por una ausencia de sentido debida a la complejidad del álgebra. Estas expresiones, en las que la letra $n$ ocupa dos posiciones distintas en una potencia, en un caso en la base y en el otro en el exponente, inducen a que el estudiante piense en que la variable $n$ está involucrada en una potencia sin prestar atención a la base y el exponente de la misma. Este error también puede deberse a un despiste, pero no hay más información que permita discernir qué componente tiene más peso, el despiste o la ausencia de sentido.

También aparece el error E(aS) (error debido a la incapacidad para distinguir las dos sucesiones, $a_n$ y $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$) cuando Chema, al confundir la sucesión $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k$ con la sucesión $a_n = 1^n$, duda de la divergencia de la serie geométrica de razón 1. Este error lo corrige rápidamente Daniel de modo que no llega a entorpecer produciendo resultados incorrectos o estados de confusión; al corregirlo deja claro un vínculo entre las dos sucesiones (*SspSuc1*):

Chema: *Cuando erre vale uno …*
Daniel: *También va aumentando.*
Chema: *No, si vale uno erre.*
Daniel: *Uno, más uno, más uno, más uno.*
Chema: *También va aumentando, eso es. (…) Claro, es que es sumatorio no es sólo exponencial, es también…*

Por el modo en que contesta Chema a Daniel cuando éste le corrige, parece que este error se debe sólo a un despiste y no es consecuencia de ignorar el símbolo del sumatorio.

Cuando buscan la característica que diferencia a las series geométricas que convergen de las que no convergen, se apoyan en el ejemplo de la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ desde el punto de vista geométrico:

Daniel: *Cuando se suma algo menos de lo que… ¿no?*
Chema: *Cuando se va sumando algo que es inferior a lo que ya hay.*
Daniel: (asiente)
Chema: *No.*
Daniel: *Inferior a lo que le queda por rellenar de huecos, ¿sabes?*

El hecho de recurrir a la imagen de los rectángulos de la actividad, pone de manifiesto uno de los roles que juega la visualización en los procesos de aprendizaje como soporte e ilustrador de resultados (Arcavi, 2003), en este caso en el ámbito del Análisis Matemático.

Ante la imposibilidad de contestar analíticamente, recurren a la herramienta de cálculo simbólico:

Daniel: *¿Hacemos un programita de estos nuevo?*

Primero reutilizan unas instrucciones con las que anteriormente (antes de la a*ctividad rectángulos*) habían generado y representado en el plano cartesiano, los primeros términos de una sucesión cualquiera; posteriormente, reutilizan otras en las que la sucesión es de sumas parciales:

Daniel: *Aquí tenemos que hacer un sumatorio, no un factorial.*
(…)
Chema: *Pero el sumatorio del factorial que teníamos antes.*
(…)
Daniel: *(…) Es que estamos haciendo copy-paste de otros…*
Chema: *De otros y claro, se arma la de…*

Daniel ejecuta tres versiones incorrectas del código hasta que en el cuarto intento acierta con el nombre de cada variable. La respuesta que devuelve Maple le advierte del error en las instrucciones:

- ✓ Comienza escribiendo correctamente la variable índice del sumatorio, pero luego no utiliza esta letra en el cuerpo del sumatorio, de manera que lo que suma no depende del contador. Además, el límite del contador no es la variable de la sucesión de sumas parciales sino la constante $n$ que en este caso no se utiliza como variable de la sucesión sino como parámetro que determina el número de términos de la sucesión que se calculan y se dibujan en el plano cartesiano:

```
> restart:
  n:=10:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(((-1)^(k)),t=0..n)) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
```

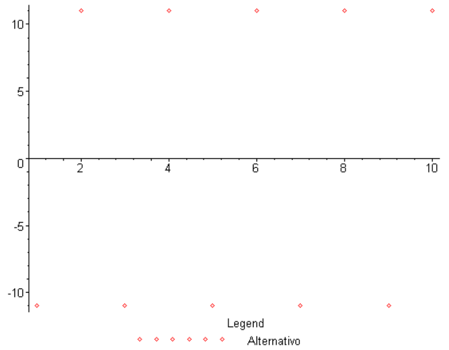



Figura 75. Primera ejecución incorrecta de Daniel para contestar a la Conjetura 1.

Con esta instrucción la expresión general de la sucesión de sumas parciales es:

$$a_k = \sum_{t=0}^{n} (-1)^k,$$

de modo que representa la sucesión: $-11, 11, -11, 11, -11, \cdots$

- ✓ Después corrige la letra del contador del sumatorio para hacerla coincidir con la variable de la expresión que suma, lo cual es correcto, pero utiliza la misma letra que la del contador del bucle *for* que es la variable de la sucesión de sumas parciales. En este caso no se pueden ejecutar las instrucciones de Maple y devuelve un error:

```
> restart:
  n:=10:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(((-1)^(k)),k=0..n)) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
Error, (in sum) summation variable previously assigned, second argument evaluates to 1 = 0 .. 10

Plotting error, empty plot
```

Figura 76. Segunda ejecución incorrecta de Daniel para contestar a la Conjetura 1.

Con esta instrucción la expresión general de la sucesión de sumas parciales es:

$$a_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- ✓ Vuelve a corregir la letra del contador del sumatorio y de la variable de la expresión que suma para que no coincidan con la letra que la variable de la sucesión de sumas parciales, pero mantiene como límite del contador del sumatorio la letra $n$ que no es la variable de la sucesión de sumas parciales.

```
> restart:
  n:=10:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(((-1)^(t)),t=0..n)) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
```

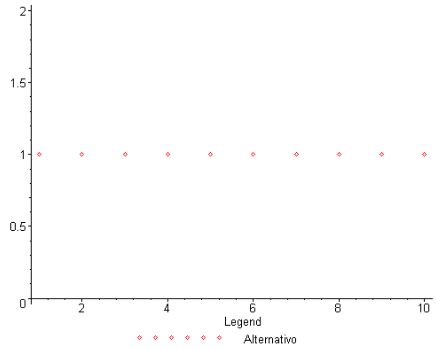



Figura 77. Tercera ejecución incorrecta de Daniel para contestar a la Conjetura 1.

Con esta instrucción la expresión general de la sucesión de sumas parciales es:

$$a_k = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t,$$

de modo que representa la sucesión constante: $1,1,1,\cdots$

Finalmente escribe correctamente la instrucción:

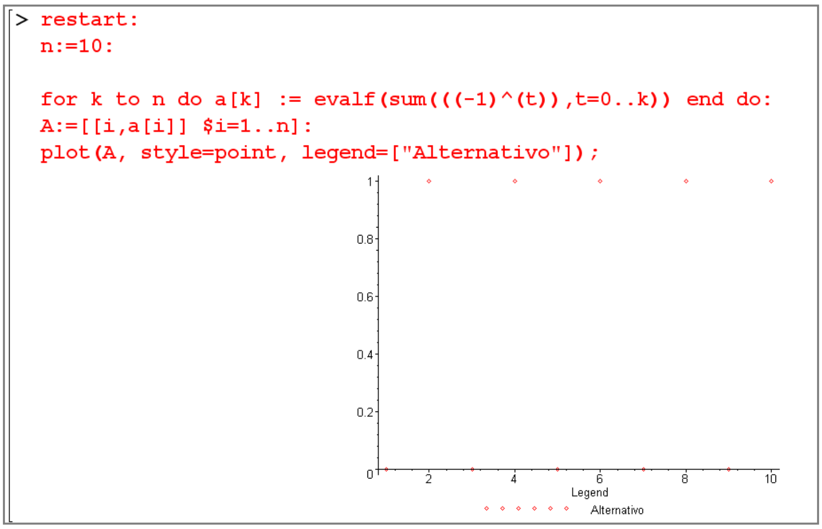



Figura 78. Ejecución correcta de Daniel para contestar a la Conjetura 1.

Con esta instrucción se define la sucesión de sumas parciales:

$$a_k = \sum_{t=0}^{k} (-1)^t,$$

de modo que representa la sucesión: $0,1,0,1,0,1,\cdots$

La falta de reflexión previa sobre las variables que manejan, provoca pérdida de tiempo y un estado de confusión que ellos mismos reconocen y que se manifiesta en el error E(nk) (error debido a utilizar la misma letra para la variable de la sucesión y como parámetro). La aparición de este error puede justificarse por un despiste o una falta de atención que subsanan sin desviar la atención de su objetivo (dibujar los primeros términos de sucesiones de sumas parciales de series geométrica variando el valor de la razón), aunque también puede estar ocasionado por la dificultad que acarrea un esquema conceptual de función inadecuado o el significado de las expresiones algebraicas. El hecho de que no comentan este error habitualmente, hace pensar que se deba a una falta de atención, más que a un obstáculo cognitivo. Esa falta de atención estaría justificada porque están al comienzo de la clase y desde hacía seis días no habían vuelto a trabajar con la herramienta de cálculo simbólico.

Otro hecho que explica la falta de atención, es que son capaces de detectar que la instrucción es incorrecta por la representación en el plano cartesiano que devuelve Maple. La falta de atención la manifiestan modificando aleatoriamente los parámetros, pero no se puede decir que presenten un esquema conceptual inadecuado porque entonces no serían capaces de interpretar la información de las gráficas.

El grupo S1 es capaz de encontrar el criterio de convergencia de la serie geométrica:

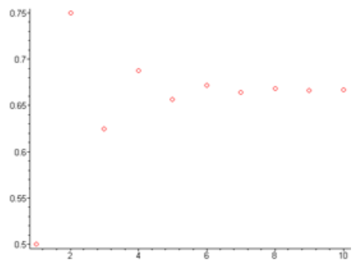


Figura 79. Respuesta de Maple cuando $r = -\frac{1}{2}$

Chema: *Vale, y se va haciendo a cero y pico, vale. Y si ahí pones un tres, ¿qué? ¿Qué haces?*
Daniel: *Sólo por ver.*

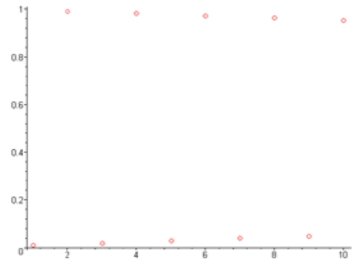


Figura 80. Respuesta de Maple cuando $r = -\frac{1}{1,01}$

Daniel: *Mira, ya empieza ahí a juntarse un poquito. Si pongo un cien aquí.*
Chema: *Se lo piensa. Ah, dices si…*
Daniel: *Si es menor que… o sea si es…si está entre menos uno y cero, ¿no?*
Chema: *Se aburre el ordenador. Ah sí.*

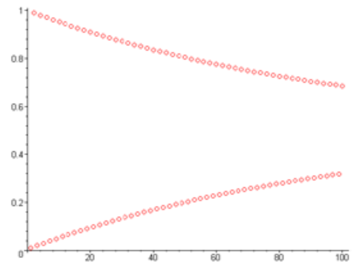


Figura 81. Representación de 100 términos cuando $r = -\frac{1}{1,01}$

Chema: *Tiende a… converge. Y si es. Pero menos uno entre…*
Daniel: *Vamos a poner cincuenta.*

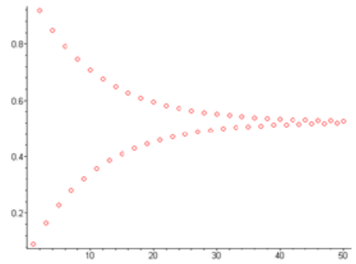


Figura 82. Representación de 50 términos cuando $r = -\frac{1}{1,1}$

Chema: *Ya, converge. Y si es mayor que uno, o sea, entre menos uno y?*
Daniel: *Y cero, ¿no?*
Chema: *Y cero. Sí, eso es. Sí, entre menos uno y cero. Entonces cambia, cambia eso y pones menos uno con nueve. Y si es...*
Daniel: *Menos cero con nueve está entre menos uno y cero*

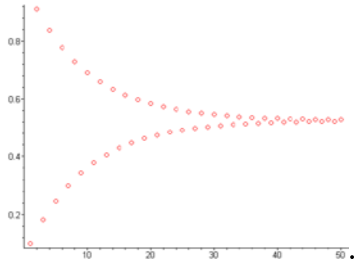


Figura 83. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}9$

Chema: *Claro, por eso te decía, por verlo mejor.*
Daniel: *Sí, sí.*
Chema: *¿Y si le pones menos uno con uno? A ver qué te sale.*
Daniel: *Menos uno con uno ya lo…*

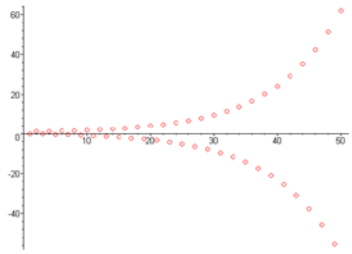


Figura 84. Respuesta de Maple cuando $r = -1{,}1$

Chema: *Ya diverge, eso es. Pero y para los positivos?*
Daniel: *¿Mm?*

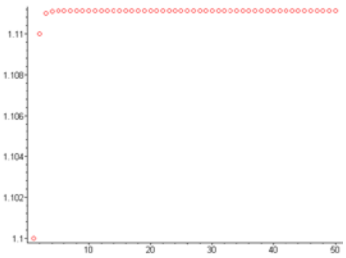


Figura 85. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}1$

Chema: *También. Pero te lo hace… A ver. Sigue subiendo.*

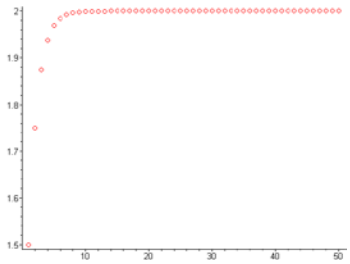


Figura 86. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}5$

Chema: *No, pero estás dando valores positivos.*
Daniel: *Sí.*
Chema: *Vamos a ver…*
Daniel: *Para los positivos también converge, entonces.*
Chema: *Sí, hasta uno. A ver, prueba hasta uno. Cero… va, uno con uno, por ejemplo.*

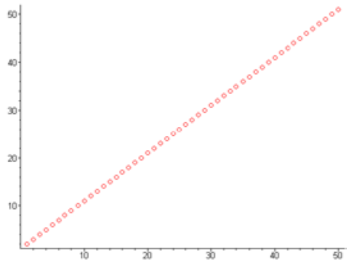


Figura 87. Respuesta de Maple cuando $r = 1$

Chema: *No, uno sí te va a…*
Daniel: *Cero con nueve, a ver.*
Chema: *Cero con nueve.*

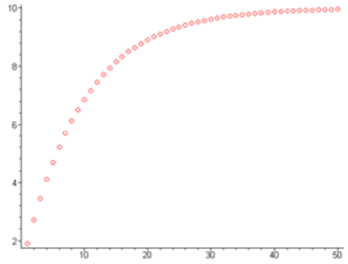


Figura 88. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}9$

Daniel: *Y en uno ya se hace…*
Chema: *En uno ya se hace…*
Daniel: *Cero con nueve, nueve, ya…*

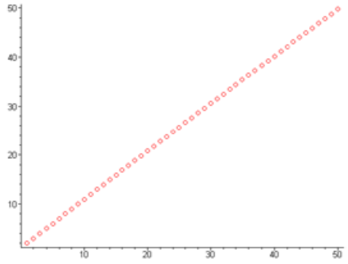


Figura 89. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}999$

Chema: *Ah, bueno porque ya lo toma… pero va*
Daniel: *Sí, sí, sí. Va.*
Chema: *O sea va entre uno y menos uno.*

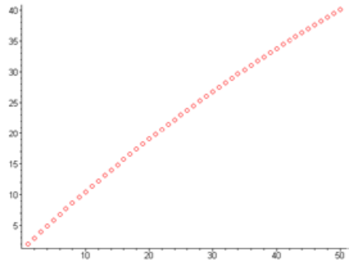


Figura 90. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}99$

Chema: *Pon cero con ocho, que se va a ver mejor.*

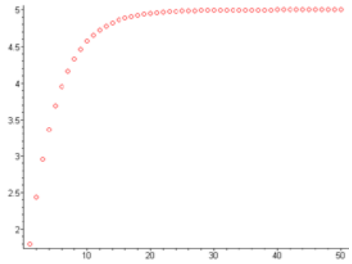


Figura 91. Respuesta de Maple cuando $r = 0{,}8$

Daniel: *Entre uno y menos uno, entonces…, excluyéndolos, vamos.*
Chema: *Claro, excluyéndolos.*
Daniel: *¿Para qué valores es finito?, pues eso.*

Cuando al comienzo de este episodio dibujan más términos de la sucesión para distinguir mejor su comportamiento, se aprecia muy bien el impacto de la visualización de la asíntota horizontal. También en la penúltima intervención se confirma la influencia de las representaciones gráficas.

Después de concluir correctamente los valores de la razón para que la serie geométrica converja, buscan una justificación de este resultado:

Chema: *¿Por qué? Porque… Pero no encuentro una razón… Porque lo que va sumando…*
Daniel: *Es menor a la unidad.*
Chema: *Va siendo, es menor a lo que ya has sumado.*
Daniel: (asiente)
Chema: *A lo que has, a la última suma. A la suma anterior.*
Daniel: *Sí, sí, sí, sí.*
Chema: *Entonces llega un momento que eso va tendiendo a cero, y entonces… Eso es, claro.*

La explicación la encuentran en la condición necesaria, aunque no suficiente, para que una serie converja: el criterio del término enésimo.

> Para que la serie $\sum a_n$ sea convergente es necesario (pero no suficiente) que $\lim a_n = 0$ (o sea, que su término general sea un infinitésimo) (Burgos, 2002, p. 437).

Aunque la convergencia a cero de la sucesión $a_n$ no basta para que la serie $\sum a_n$ converja, para ellos es suficiente ya que no han tenido más experiencias con series numéricas y en el caso de la serie geométrica se cumple que si $|a_n|$ converge a $0$, entonces la serie $\sum a_n$ converge. Por tanto, en este contexto este resultado puede considerarse válido. A lo largo de la instrucción, se les mostrará este criterio y el caso de la serie armónica que ejemplifica la condición de que sea necesario, pero no suficiente, el que $a_n$ converja a $0$ para que la serie $\sum a_n$ sea convergente.

Por último, cuando la suma de la serie es finita han de obtener su valor. La diferencia entre el carácter monótono de la sucesión de sumas parciales cuando la razón es positiva, del carácter no monótono cuando la razón es negativa, les hace diferenciar estos dos casos:

Chema: *Sí, pero ¿y cuál es su valor? Pues es distinto cuando es positivo de cuando es negativo. Porque cuando es positivo se va sumando y cuando es negativo se van anulando.*
Daniel: *La diferencia es si es negativo no es monótona, si es positivo sí es monótona.*

La intervención de Daniel expresa, a partir de la visualización de su grafica cartesiana, un vínculo entre las dos sucesiones por el cual una característica de la sucesión $a_n$ determina la monotonía de la sucesión $S_n$ (*SspSuc3*). Chema, aunque también establece un vínculo entre las dos sucesiones al hacer referencia al comportamiento de la sucesión $S_n$ según el signo de la sucesión $a_n$, obvia la información que contiene la gráfica de la sucesión en relación a la oscilación, y se fija sólo en la parte del concepto de signo negativo asociada a que “una resta anula valores”.

De hecho, cuando la razón es positiva encuentran una regla entre su valor y la suma de la serie (que obtienen aproximando la asíntota de la representación gráfica de los primeros valores de la sucesión de sumas parciales):

Chema: *O sea, hasta lo que le falta para llegar a la unidad. A la inversa de lo que le falta para llegar a la unidad*
Daniel: *Sí. Le falta un cuarto. O sea, vale*
(…)
Chema: *Con cero veinticinco, me daría…*
Daniel: *Le falta… ¿cuánto le falta para la unidad?*
Chema: *Quedan tres cuartos, cuatro tercios. (…) Cuatro entre tres, algo más de uno.*
Daniel: *A uno con tres.*
(…)
Chema: *Entonces es uno menos… uno menos erre elevado a la menos uno, ¿no?*
Daniel: *Sí.*

Cuando la razón es negativa, no son capaces de verificar que también se cumple la fórmula que han obtenido. Por este motivo, concluyen erróneamente que no se verifica la misma fórmula para la suma de la serie geométrica de razón positiva, que para la suma de la serie geométrica de razón negativa. No se tiene información acerca del origen de este error, ya que realizan un cálculo mental que no manifiestan en lenguaje hablado o escrito. Por tanto, sólo se puede concluir que cometen un error que no corrigen:

Chema: *Y para los números negativos. Venga, vamos.*
Daniel: *Supongo que será lo mismo*

Chema: *A lo mejor es lo mismo, pero claro, uno menos algo negativo, al elevarlo a menos uno. Uno menos algo negativo…*

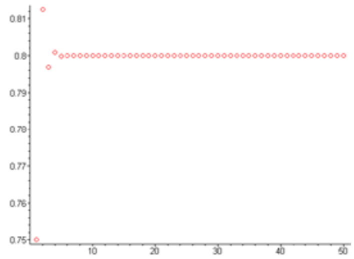



Figura 92. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}25$

Daniel: *Vamos a hacerlo con el cinco. Nos tendría que salir….*

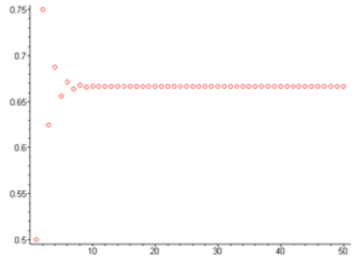



Figura 93. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}5$

Daniel: *Que no sale.*
Chema: *Pues no nos sale.*
Daniel: *Sale cero con seis período.*
Chema: *Cero con seis período. Prueba con cero setenta y cinco, a ver.*

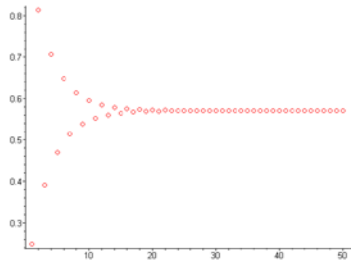



Figura 94. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}75$

Chema: *Sale siempre igual.*
(…) [Continúa realizando varias pruebas más]

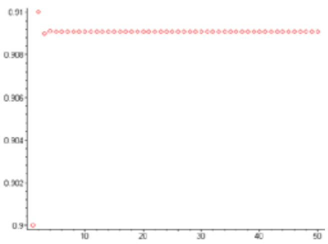


Figura 95. $r = -0{,}1$

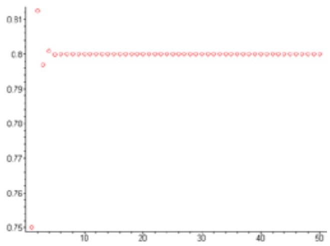


Figura 96. $r = -0{,}25$

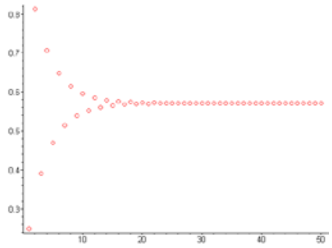


Figura 97. $r = -0{,}75$

Chema: *Se mueve siempre entre cero con cinco y uno, si te das cuenta.*

(…)
Daniel: *Vamos a poner uno exagerado. Cuanto más cerquita está del cero,…*

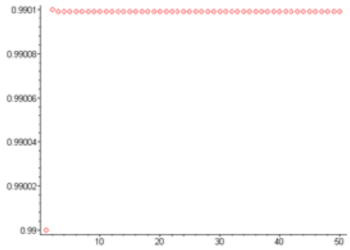


Figura 98. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}01$

Chema: *Más se acerca a uno.*
Daniel: *…más se acerca a uno.*
Chema: *Claro, porque... Y cuándo más lejos?, ¿Más?*

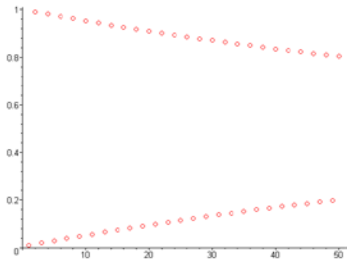


Figura 99. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}99$

Daniel: *Se acerca a cero con cinco.*
Chema: *(…) Para valores que tienden a menos uno, cuando aquí le llamamos erre. Si erre tiende a menos uno, decimos que se acerca a cero. Pues el sumatorio tiende a cero con cinco. Y cuando erre tiende a cero, el sumatorio tiende a uno. No, sí a uno. Pon cero con cinco.*
Daniel: *Era creo que cero seis período.*

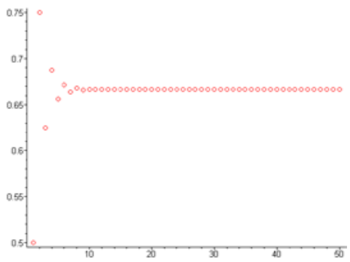


Figura 100. Respuesta de Maple cuando $r = -0{,}5$

Chema: *Cero seis período. Se acaba la hora.*
Daniel: *No hemos hecho nada, tío.*
Chema: *Bueno, venga, vamos para adelante y ya está. Bueno, ya por lo menos hemos sacado eso.*

Las prisas por terminar la actividad antes de que finalice la hora de clase les lleva a no plantearse una reflexión más profunda sobre este asunto y se contentan con haber respondido a una parte de la pregunta. Más tarde, la profesora aprueba la decisión de seguir adelante con el resto de la actividad:

> Chema: *Y después hemos sacado la fórmula que nos daría para los positivos. Para los negativos no…*
> Profesora: *Bueno, no importa. Seguid.*

Esta intervención de la profesora está condicionada por la dinámica de la clase.

En cuanto al empleo de la herramienta informática, hay que destacar que continúan utilizando la representación en el plano cartesiano de los términos de la sucesión de sumas parciales para aproximar el valor de la suma de la serie.

```
> restart:
  n:=10:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(((-1/2)^(t)),t=0..k)) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
```

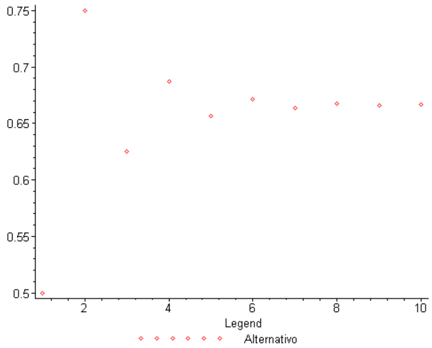



Figura 101. Ejecución de S1 para responder a la conjetura 1.

Este es un claro ejemplo de coordinación de los esquemas SSP y LS para construir el concepto de serie numérica (*SSsp2*): la suma de la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales (*SSsp1*), por tanto, con la gráfica de esta sucesión se puede aproximar la suma de la serie. Esta coordinación se lleva a cabo en el registro gráfico-cartesiano, lo cual refuerza el papel de lo visual en el proceso de construcción del conocimiento. En los comentarios de las experiencias ya se explicó que este modo de contestar se interpreta como la desencapsulación del objeto serie numérica que han ido construyendo en los distintos apartados de la actividad.

El tipo de información que solicita el grupo S1 a Maple podría obtenerse ejecutando reiteradamente una sola instrucción de Maple.

Con el comando *sum* de Maple se pueden obtener las sumas de las series. Además, como puede comprobarse, la respuesta de Maple en los distintos casos justifica sobradamente el carácter de la misma: *undefined* cuando diverge por oscilación, $\infty$ cuando diverge a infinito y $-\infty$ cuando diverge a menos infinito, o el valor de la suma cuando converge:

```
> sum((-1/2)^n,n=0..infinity);
                                        2/3
> sum((-1/1.01)^n,n=0..infinity);
                                        .5024875622
> sum((-1/1.1)^n,n=0..infinity);
                                        .5238095238
> sum((-0.9)^n,n=0..infinity);
                                        .5263157895
> sum((-1.1)^n,n=0..infinity);
                                        Float(undefined)
> sum((.1)^n,n=0..infinity);
                                        1.111111111
> sum((.5)^n,n=0..infinity);
                                        2.
> sum((1)^n,n=0..infinity);
                                        ∞
> sum((.9)^n,n=0..infinity);
                                        10.
> sum((.999)^n,n=0..infinity);
                                        1000.
> sum((.99)^n,n=0..infinity);
                                        100.
> sum((.8)^n,n=0..infinity);
                                        5.
```

Figura 102. Cálculo de sumas de series con Maple.

### IV 3.9.2 *Grupo S3: Conjetura 1*

Para contestar a esta conjetura, el grupo S3 se apoya en los resultados que obtuvo en las experiencias 1, 2 y 3, y responde correctamente a la primera pregunta:

Manuel: *Pues vamos a comparar con los que ya hemos hecho, ¿no? (…) Para los valores que son fracciones…¿no? (…)Perdón. No, cuando es menor de uno, ¿no?*
Carlos: *Espera, espera, espera.*
Manuel: *Cuando es menor de uno. Yo creo*
Carlos: *¿Para qué valores de erre la suma…? ¿Y por qué no calculamos este sumatorio en Maple?*
Manuel: *Yo creo que cuando erre es menor de uno.*
(…)
Ricardo: *Sí y este caso qué. Mira. Que también es menor que uno en sí, porque es negativo. Pero hay algunos negativos…, el menos ocho va a dar infinito, y el menos diez y…*
Manuel: *¿Por qué lo sabes? (…) Sí, porque el menos dos nos da infinito, menos infinito. Para los valores entre uno…*
Ricardo: *Para los valores entre menos uno, entre menos uno*
Manuel: *…Entre uno y cero.*
Ricardo: *No, entre uno y menos uno, entre uno y menos uno.*
Carlos: *Entre uno y cer… entre uno y menos uno.*
Manuel: *¿Podrá ser, ser eso?*
Ricardo: *¿Podrá ser, ser eso?*
Carlos: *Entre uno y menos uno. ¿Y por qué, por qué te sacas el uno y el, o sea el uno y el menos uno?*
Ricardo: *Por los casos anteriores. Pero eso es una bobada, yo creo. Pero vamos a ver.*
Carlos: *Pero tienes que tener en cuenta que en los casos anteriores tenías un número elevado a algo que no sabías.*
Manuel: *Bueno chicos y por qué no lo dibujamos aquí*

Ricardo: *El sesenta y cuatro tercios. El sesenta y cuatro tercios es mayor que uno y va a ser un infinito también ¿eh? Estoy seguro*
Carlos: *Lo comprobamos y punto.*

Para corroborar este resultado realizan algunas sumas en Maple para asegurarse de que con $r > 1$ la suma es $\infty$, y si $-1 < r < 1$, es finita. Como anteriormente la profesora les había indicado la instrucción para obtener la suma de la serie, no cometen ningún error. Prueban con valores de la razón, $\frac{3}{64}$, $-1$, $1$, $\frac{9}{10}$ y $\frac{64}{13}$:

```
> restart:
  sum((3/64)^j,j=0..infinity);
                                        64/61
> restart:
  sum((-1)^j,j=0..infinity);
                                        undefined
> restart:
  sum((9/10)^j,j=0..infinity);
                                        10
> restart:
  sum((64/13)^j,j=0..infinity);
                                        ∞
```

Figura 103. Sumas de series geométricas para distintos valores de la razón.

Manuel: *Es entre menos uno y uno sin incluirlos.*

A la segunda pregunta no responden porque no son capaces de advertir la dependencia entre $a_n$ y el valor de la razón, y entre éste y la suma de la serie:

$$a_n = r^n$$

$$S = \frac{a_0}{1 - r}$$

Esto muestra una falta de coordinación entre los esquemas de SSP y LS que puede estar originada por la ausencia de un vínculo entre las sucesiones $a_n$ y $S_n$ que relacione el resultado del límite de la sucesión $S_n$ con la sucesión $a_n$. Ese vínculo podría derivarse de las acciones que han realizado con Maple para comprobar el carácter de la suma de la serie para distintos valores de la razón. Sin embargo, el grupo S3 no llega a interiorizar estas acciones porque tienen dificultades para generalizar:

Ricardo: *Sí. Pregunta cuál es su valor. Y ¿cuáles ponemos?*
Carlos: *Pues lo haces con Maple, tío.*
Ricardo: *Pero hay mil valores.*
(…)
Ricardo: *Sí, pero hay que poner, en esos casos cuál es su valor. Como si hubiera un valor fijo o que de los ejemplos que pongamos, pongamos su valor.*
Carlos: *Claro, hay un valor fijo, infinito.*
(…)
Ricardo: *Muy bien… es fini… en esos casos ¿cuál es su valor?*
Carlos: *Pues pones dos ejemplos de…*
Ricardo: *Dale con el de los ejemplos.*

Además, sólo consideran que el límite converja o diverja a infinito sin contemplar el caso en el que diverge por oscilación, lo cual revela que poseen un esquema de límite inadecuado. Una consecuencia de esto es que no dejen claro qué ocurre cuando la razón toma un valor negativo, ni siquiera cuando es $-1$:

Carlos: *Pero que dices que ¿en qué casos es finito?...*
Ricardo: *Entre menos uno y uno.*
Carlos: *…porque en el resto, en el resto, el resto es infinito.*

Esta idea de que el límite sólo pueda ser finito o infinito, se ve reforzada por las experiencias del apartado anterior en las que, por haber escrito mal un paréntesis, habían obtenido una suma infinita cuando la razón era $r = -1$. En ese momento no se percataron del error y se quedaron con la idea de que cuando la suma no es finita, entonces es infinita. De hecho, ignoran la respuesta de Maple cuando el límite no existe porque diverge por oscilación:

```
> restart:
  sum((-1)^j,j=0..infinity);
                                                  undefined
```

Figura 104. Suma de una serie divergente por oscilación.

Ricardo: *Indefinido.*
Carlos: *Bue*
Ricardo: *Menos uno elevado. Bueno, pon … espérate*

Respecto a este asunto hay que comentar varios aspectos:

- ✓ El empleo de la herramienta de cálculo simbólico deja nuevamente de manifiesto el obstáculo global que Drijvers (2002) describe como la dificultad para interpretar la respuesta de la herramienta: cuestionarse el significado de la salida *undefined* de Maple daría pie a contemplar la posibilidad de que el límite no existe porque la sucesión diverge por oscilación.
- ✓ En algunas investigaciones se hace referencia a que la herramienta de cálculo simbólico no es la panacea para los problemas del aprendizaje, y éste es un buen ejemplo de ello. De nada sirve que la herramienta realice cálculos precisos y representaciones gráficas inmediatas si el individuo no es capaz de interpretarlos.
- ✓ La actitud que manifiestan hacia las matemáticas frena considerablemente los procesos de aprendizaje. El hecho de que no entiendan la respuesta *undefined* de Maple y no traten de conocer su significado, deja claro su desinterés por la actividad matemática que se traduce en una falta de reflexión.

La dinámica de la clase también dificulta la reflexión. Cuando el grupo S3 pregunta a la profesora por el significado de “dar el valor cuando la suma es finita”, ésta no se percata de la dificultad que tienen para comprender lo que se les pide y les anima a continuar con el resto de los apartados:

Ricardo: *Pero y lo de ¿cuál es su valor?*

Profesora: *Si lo sabéis calcular vale, y si no, seguid con las conjeturas.*
Ricardo: *Ah bueno, pues seguimos.*

### IV 3.10 Descripción del apartado Conjetura 2

A pesar de la sencillez de este apartado, el grupo S1 necesita diez minutos y el grupo S3 más de veinte para contestar correctamente a la segunda conjetura.

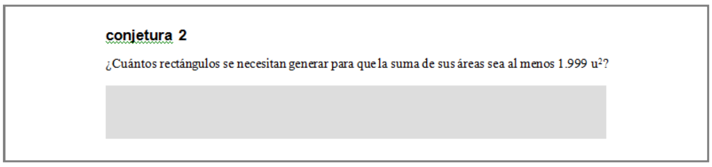



Figura 105. Enunciado del apartado conjetura 2.

#### IV 3.10.1 *Grupo S1: Conjetura 2*

El grupo S1 responde correctamente a la pregunta de la conjetura 2, pero antes de ello Chema protagoniza dos episodios que merecen comentario.

Cuando Chema asocia una suma infinita con un número real con expresión decimal periódica, y una suma finita con una expresión decimal no periódica (supuestamente exacta, aunque no periódica también engloba a los infinitos decimales de un irracional), está cometiendo un error debido a una ausencia de sentido por la dificultad de los conceptos de número real y de infinito:

Daniel: *Esto, en vez a la cuenta la vieja, habría que saber hacerlo de la otra manera, ¿no?*
Chema: *¿Qué? ¿Esto?*
Daniel: *Habría que saber darle la vuelta a esto.*
Chema: *Pues ahí tiene la cosa de que si esto es periódico, serían infinitos rectángulos. Como no es periódico… son unos rectángulos determinados.*
Daniel: *Sí, sí, pero claro, por la cuenta la vieja mirando a ver cuándo sale sí se puede, pero… pero habrá alguna otra manera de hacerlo.*

Este comentario de Chema es incoherente con las respuestas de apartados anteriores en los que ya había dado una expresión entera para unas cuantas sumas infinitas. La incoherencia surge cuando aparece la expresión decimal y Chema evoca una imagen inconsistente de expresión decimal infinita asociada a un proceso que no termina, mientras en apartados anteriores había dado una expresión entera para unas cuantas sumas infinitas. Podría parecer que este error es sólo debido a la dificultad por el concepto de número real, pero el hecho de que ocurra en el momento en que interviene el concepto de infinito en los "infinitos decimales", hace pensar que este concepto también sea causa del error.

El otro hito relevante ocurre cuando Chema se empeña en que Maple resuelva la ecuación:

$$\sum_{k=0}^{x} \frac{1}{2^k} = 1{,}999$$

Con la sintaxis de Maple que utiliza, está haciendo un uso inapropiado de la herramienta de cálculo simbólico asociado a los errores que describe Drijvers (2002) como:

- ✓ Las limitaciones de la HCS y la dificultad de proporcionar estrategias algebraicas que ayuden a la HCS a superar estas limitaciones (error global).
- ✓ La imposibilidad de decidir cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil (error global).
- ✓ La dificultad de transferencia entre las técnicas de la HCS y las de lápiz y papel por la falta de congruencia entre las técnicas en los dos medios (error global).
- ✓ La concepción limitada de la solución algebraica (error local).

Nachmias y Linn (citados en Tall, 1989) observaron cómo algunos estudiantes interpretaban literalmente las representaciones gráficas que visualizan en la pantalla del ordenador. En este caso, Chema traduce literalmente a la herramienta de cálculo simbólico el esquema algebraico de resolución que tiene en la cabeza, y que no es capaz de llevar a cabo con lápiz y papel. Por desconocimiento de las instrucciones de Maple y su sintaxis, ejecuta una instrucción incorrecta:

```
> restart:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(1/(2^t),t=0..k))=1999/1000 end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
Error, final value in for loop must be numeric or character

Plotting error, empty plot
```

Figura 106. Ejecución incorrecta de Chema para contestar a la Conjetura 2.

Una posible solución consiste en utilizar la instrucción *solve* de Maple. La siguiente ejecución muestra cómo encontrar la solución que busca Chema y cómo comprobar la veracidad de la misma:

```
> restart:
  evalf(solve (sum(1/2^k,k=0..x)=1999/1000,x));
                                                9.965784284
> evalf:
  Sum(1/2^k,k=0..9)=evalf(sum(1/2^k,k=0..9));
  Sum(1/2^k,k=0..10)=evalf(sum(1/2^k,k=0..10));
```

$$\sum_{k=0}^{9} \frac{1}{2^k} = 1.998046875$$

$$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{2^k} = 1.999023438$$

Figura 107. Posible solución para la Conjetura 2.

Por último, en relación al uso de la herramienta de cálculo simbólico, continúan ejecutando el bloque de instrucciones que han utilizado para realizar toda la actividad, a pesar de no necesitar algunos de los resultados que obtienen, como la grafica del plano cartesiano:

```
> restart:
  n:=100:

  for k to n do a[k] := evalf(sum(1/(2^t),t=0..k)) end do:
  A:=[[i,a[i]] $i=1..n]:
  a[n];
  plot(A, style=point, legend=["Alternativo"]);
                                        2.000000000
```

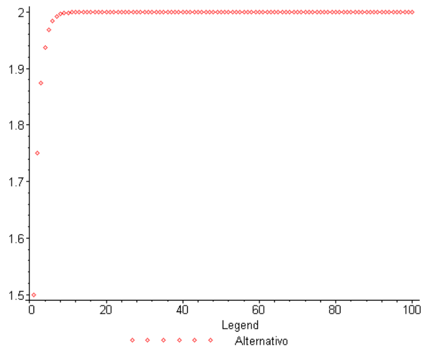



Figura 108. Ejecución de S1 para contestar a la conjetura 2.

Incluso una vez que en la lista A tienen a los cien primeros términos de la sucesión de sumas parciales, siguen ejecutando el mismo bloque de instrucciones modificando el valor de la variable $n$, en vez de utilizar la información que queda almacenada en la lista. De ese modo, repiten una ejecución como la anterior las cinco veces que prueban con distintos valores de $n$. La siguiente tabla muestra un resumen de los resultados que devuelve Maple, sin considerar las representaciones gráficas en el plano cartesiano:

| $n$ | $a_n$ |
|---|---|
| n:=50: | 2.000000000 |
| n:=10: | 1.999023438 |
| n:=15: | 1.999969482 |
| n:=14: | 1.999938965 |
| n:=13: | 1.999877930 |

Tabla 6. Términos de la SSP para distintos valores de $n$.

Un modo de optimizar la carga computacional, podría consistir en ejecutar las siguientes instrucciones con las que se obtienen los valores deseados sin realizar las representaciones gráficas:

```
> evalf(a[10]);
                                        1.999023438
> evalf(a[15]);
                                        1.999969482
> evalf(a[14]);
                                        1.999938965
> evalf(a[13]);
                                        1.999877930
```

Figura 109. Propuesta para responder a la Conjetura 2.

Como se ha comentado anteriormente, aunque la solución del grupo S1 no es eficiente porque consume muchos recursos del ordenador, se interpreta como la des-encapsulación del pre-objeto serie numérica para realizar las acciones de evaluación de la expresión general para un valor de $n$ concreto, y de comparación de ese valor con el número $1{,}999$.

#### IV 3.10.2 *Grupo S3: Conjetura 2*

La confusión que produce la lectura errónea del punto decimal en el número $1.999$ (el grupo lee el número mil novecientos noventa y nueve, en vez de la expresión decimal uno coma nueve, nueve, nueve), da una oportunidad para que Manuel exprese su concepción objeto del Pii resultante de añadir nuevos rectángulos a la figura coloreada (representación de la sucesión $S_n$).

Manuel: *Es que esto como máximo va a ser dos.*

Aunque la expresión que utiliza ("*como máximo va a ser*") se asemeja a las expresiones que denotan una concepción proceso, se considera que manifiesta una concepción objeto por haber encapsulado el Pii en un objeto mediante la acción de comparación de las áreas de las figuras resultantes del Pii (Brown y otros, 2008) con el rectángulo $2 \times 1$. El modo de representación gráfico-geométrico juega un papel crucial en esta acción de evaluación. El resto del grupo no contesta a este comentario.

Una vez aclarada la confusión, tratan de responder a la pregunta comprobando cuánto valen distintos términos de la sucesión de sumas parciales para elegir aquel que primero sobrepase $1{,}999$. El número de rectángulos será el valor de la variable discreta para ese término.

Al utilizar la herramienta de cálculo simbólico para probar con el término $S_{10}$, cometen un error que pone de manifiesto un esquema de función inadecuado:

Ricardo: *Ya sé. Aquí se pone sumatorio de uno partido dos a la k, desde ene, y ponemos por ejemplo igual a diez. Porque si a la cinco es uno coma noventa y seis, se prueba a la diez. Ponlo, ponlo, ponlo. Ponlo ahí.*

Este error consiste en un uso incorrecto de la variable índice del sumatorio y de la variable de la función discreta $S_n$, ya que el número $10$ es el valor que han de asignar a la variable de la función discreta y que ocupa el nivel superior del sumatorio:

$$\sum_{j=0}^{10} \frac{1}{2^j}$$

Sin embargo, ellos utilizan este número en el nivel inferior del sumatorio, cambiando por completo el significado de la suma:

$$\sum_{j=10}^{\infty} \frac{1}{2^j}$$

```
> restart:
  sum((1/2^j),j=10..infinity);
                                                    1/512
> restart:
  evalf(sum((1/2^j),j=10..infinity),3);
                                                    .00195
```

Figura 110. Ejecución errónea de S3 para contestar a la conjetura 2.

El origen de este error está en una ausencia de sentido debida a la complejidad del objeto matemático función. En este caso, la dificultad está asociada al significado de la variable independiente de la función discreta:

$$S(n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{2^j}$$

Además, aparecen otras dificultades debidas al álgebra y al concepto de sucesión de sumas parciales. En cuanto al álgebra, la frase de Ricardo "*Porque si a la cinco es uno coma noventa y seis, se prueba a la diez*", deja entrever que conoce el procedimiento que le llevará a la respuesta, sin embargo, tiene dificultades para expresarlo algebraicamente. Posiblemente, si hubieran dispuesto de una lista con algunos términos de la sucesión de sumas parciales, no habrían tenido ningún problema en encontrar la respuesta correcta. Pero el problema para ellos es expresar, tanto verbal como algebraicamente, los objetos matemáticos. Por ello, poseer un esquema consistente de sucesión de sumas parciales como función discreta, contribuiría a que no se produjeran este tipo de errores.

Al observar el segundo resultado, Carlos comete el error E(aS) cuando, al tratar de justificar el resultado que obtienen de Maple y que no esperan, confunde la sucesión $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ con la sucesión $a_n$:

> Carlos: *Lo que pasa es que ahora, como le has dado un valor muy alto a la k, que es diez, si… cada valor alto te va a salir un número más pequeño, porque es uno partido mucho.*

Ningún otro compañero corrige este error. El hecho de que en unos contextos diferencie las dos sucesiones y que en otros no sea capaz de hacerlo, induce a pensar que no ha construido un esquema consistente de sucesión de sumas parciales.

El entorno de la herramienta de cálculo simbólico, además de permitir que se manifiesten las dificultades debidas al álgebra, es idóneo para que el individuo se percate de ellas y trate de solucionarlas. En este caso, gracias al uso que se le puede dar a este entorno como banco de pruebas y a la inmediatez de las respuestas, Manuel realiza varios ensayos con distintos rangos de valores para el contador del sumatorio.

Comienza sumando con un rango acotado, pero superiormente desconocido, de modo que el resultado depende de un parámetro:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j),j=10..k),3);
```

$$-2.\ .500^{(k+1.)}+.00195$$

Figura 111. Variable contador entre 10 y k.

Posteriormente suma hasta infinito, comenzando, respectivamente, en 10 y en 5:

```
> restart:
  sum((1/2^j),j=10..infinity);
```

$$\frac{1}{512}$$

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=5..infinity)));
```

$$.06250000000$$

Figura 112. Variable contador en el intervalo $[10,\infty)$ y en el intervalo $[5,\infty)$.

Vuelve a sumar hasta un valor desconocido, que en este caso coincide con la variable contador y de nuevo el resultado depende de un parámetro:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=5..j)));
```

$$-2.\ .5000000000^{(j+1.)}+.06250000000$$

Figura 113. Variable contador en el intervalo $[5,j)$.

Finalmente, ejecuta una instrucción de Maple que muestra la operación con notación matemática sin visualizar el resultado.

```
> restart:
  Sum((1/2^j,j=5..infinity));
```

$$\sum_{j=5}^{\infty}\frac{1}{2^j}$$

Figura 114. Expresión matemática de la suma.

Las distintas ejecuciones parecen no estar meditadas, sino más bien elegidas al azar, y sin embargo ayudan a que Manuel se dé cuenta de cómo resolver este apartado:

> Manuel: *Es que… Es que tendría que ser desde jota igual a cero, ¿no? (…)* (Manuel teclea) *Ahora sí, chavales. (…) Que es desde el principio, desde cuando empiezas a coger rectangulicos.*

Una vez que Manuel descubre el modo correcto para expresar la suma finita, aproxima con cinco cifras decimales los primeros términos de la sucesión $S_k = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{2^j}$ , hasta que encuentra el que más se aproxima inferiormente al número 1,999.

Las pruebas las realiza para obtener los valores de los términos $S_6$, $S_7$, $S_8$, $S_{10}$, $S_9$, y $S_{11}$. Comienza probando con los siete primeros sumandos, y obtiene la primera aproximación con el término $S_6 = 1{,}98438$:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..6)),6);
                                                    1.98438
```

Figura 115. Suma de los siete primeros términos.

Continúa añadiendo un sumando más y calcula los valores de las sumas de los ocho y nueve primeros sumandos, obteniendo $S_7 = 1{,}99219$ y $S_8 = 1{,}99609$:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..7)),6);
                                                    1.99219
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..8)),6);
                                                    1.99609
```

Figura 116. Suma de los ocho y nueve primeros términos.

Como la aproximación no es suficiente, prueba con dos sumandos más y calcula el valor de los once primeros sumandos obteniendo $S_{10} = 1{,}99902$:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..10)),6);
                                                    1.99902
```

Figura 117. Suma de los once primeros términos.

Manuel: *Ahí lo tenemos.*
Ricardo: *Al menos diez.*
Manuel: *Desde diez en adelante, ¿no?*
Ricardo: *Bueno, pon nueve para probar, por si acaso.*

Al exceder este último valor la cantidad de $1{,}999$, vuelve a probar con un sumando menos por si el término $S_9$ aproxima mejor que $S_{10}$; obtiene así $S_9 = 1{,}99805$:

```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..9)),6);
                                                    1.99805
```

Figura 118. Suma de los diez primeros términos.

Tras comprobar que la aproximación no ha mejorado, realiza una última prueba y calcula la suma de los doce primeros sumandos para obtener $S_{11} = 1{,}99951$:

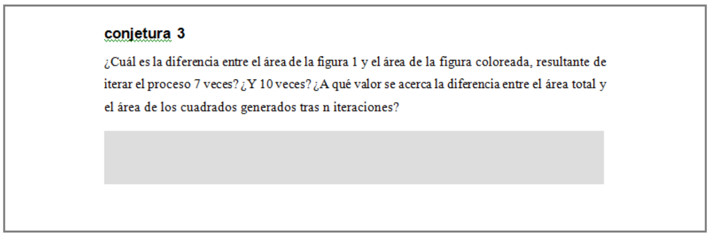
```
> restart:
  evalf(sum((1/2^j,j=0..11)),6);
                                                    1.99951
```

Figura 119. Suma de los doce primeros términos.

Carlos: *Se necesitan al menos diez.*
(…)
Carlos: *Al menos diez, vale.*

### IV 3.11 Descripción del apartado Conjetura 3

La confusión acerca de la identidad de la "figura 1" a la que hace alusión el enunciado, provoca que el grupo S1 necesite cinco minutos para contestar a estas preguntas de respuesta casi inmediata. El grupo S3 contesta en los últimos dos minutos de clase.


conjetura 3

¿Cuál es la diferencia entre el área de la figura 1 y el área de la figura coloreada, resultante de iterar el proceso 7 veces? ¿Y 10 veces? ¿A qué valor se acerca la diferencia entre el área total y el área de los cuadrados generados tras n iteraciones?

Figura 120. Enunciado del apartado conjetura 3.

#### IV 3.11.1 *Grupo S1: Conjetura 3*

El grupo S1 contesta correctamente y sin dilación. Apoyándose en el registro geométrico, obtienen la diferencia calculando el área no coloreada en el paso séptimo y décimo, respectivamente, del proceso iterativo:

> Chema: *Vale. Sería, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete. Pues un sesenta y cuatroavo.*
> (…)
> Daniel: *Esa es la diferencia. (…)Uno partido de sesenta y cuatro. (…) Uno partido mil veinticuatro para n igual a diez.*
> (…)
> Daniel: *¿A qué valor se acerca la diferencia entre el área de …. Se acerca a cero.*

El grupo S1 finaliza la *actividad rectángulos* sin necesidad de utilizar más de dos días de trabajo en el aula de ordenadores.

#### IV 3.11.2 *Grupo S3: Conjetura 3*

A pesar de que las respuestas a este apartado son correctas, Ricardo hace un comentario al principio que manifiesta un esquema cognitivo de límite inconsistente.

> Manuel: *A cero.*
> (…)
> Ricardo: *Va a ser cero coma nueve, nueve, nueve, o algo de eso. Se va a acercar a algo así.*
> Manuel: *Yo creo que a cero.*
> Carlos: *Claro, se va a acercar cada vez más a dos. Se van a sumar los decimales, los decimales, los decimales…*
> Manuel: *Pero si restas.*
> (…)
> Carlos: *Ah, la diferencia. (…) Yo es que pensaba que era sólo eso.*

Aunque tanto Carlos como Ricardo dan soluciones incorrectas para el valor del límite, para Ricardo es $0{,}999\ldots$ y para Carlos $2$, la respuesta de Carlos se debe a un despiste porque confunde la diferencia entre el área del rectángulo $2 \times 1$ y el área de la figura resultante de añadir nuevos rectángulos de manera indefinida, con esta última, de modo que desde su planteamiento la respuesta era correcta. Sin embargo, la respuesta de Ricardo está totalmente descontextualizada y hace referencia sólo a que será un número con una expresión decimal con muchos nueves.

Por otro lado, Manuel y Carlos manifiestan una concepción objeto de serie numérica porque logran encapsular el proceso de generar términos de la sucesión de sumas parciales en su límite, la serie numérica. La diferencia entre Manuel y el resto del grupo es que éste compara el área del rectángulo del rectángulo $2 \times 1$ con el área de la figura resultante de añadir nuevos rectángulos de manera indefinida; al ser igual, su diferencia es nula. Así, al realizar esta operación habrá encapsulado el proceso iterativo infinito en el objeto serie numérica, o lo que es lo mismo, el límite de la sucesión $S_n$.

## IV 4 SEGUNDA ETAPA DEL ANÁLISIS: CARCATERIZACIÓN POR GRUPO

En este apartado se sintetizará lo más relevante de los hitos que ya se han comentado en la primera etapa del análisis.

### IV 4.1 Caracterización del grupo S1

El grupo S1 responde a todas la cuestiones que plantea la actividad, salvo en la conjetura 1 cuando ha de obtener el valor de la suma de la serie geométrica para valores de la razón negativos y mayores que $-1$. Además, las respuestas son correctas con la excepción de aquellas relacionadas con dar el valor de un límite, porque parten de un esquema de límite inconsistente. Esto les lleva a plantearse que la suma de la serie se acerca a un valor (su suma), pero no llega a alcanzarlo.

A pesar de la inconsistencia del esquema de LS, lo más relevante para la comprensión del concepto de serie numérica es que sean capaces de entender que la serie es el límite de la sucesión de sumas parciales, y el grupo S1 da muestras continuas de ello coordinando los esquemas de SSP y LS. Esto se produce cuando:

- ✓ en el apartado enfoque geométrico se refieren al resultado del proceso iterativo de construcción de la figura coloreada como un límite;
- ✓ en el apartado enfoque gráfico concluyen el límite de la sucesión de sumas parciales sólo con fijarse en el listado de los valores numéricos de los primeros términos de la misma, y utilizan la asíntota de la función discreta $f(n) = S_n$ para representar en el plano cartesiano esta función;
- ✓ en el apartado reflexiona se refieren a la suma de la serie con la frase “*tiende a*”;
- ✓ en las experiencias 1, 2 y 3 se refieren al valor de la suma de las series como “*el límite*”, e incluso reemplazan la igualdad por el símbolo “→”o la frase exacta de “*tiende a*”;
- ✓ en las experiencias 1, 2 y 3 y en la conjetura 1 utilizan la representación en el plano cartesiano de los términos de la sucesión de sumas parciales para aproximar el valor de la suma de la serie.

Al margen de la coordinación de los esquemas de SSP y LS, el grupo S1 también muestra una construcción consistente del esquema de SSP a través de los vínculos que establece entre las dos sucesiones que están implicadas en una serie, la de sumas parciales, $S_n$, y la del término general de la serie, $a_n$. Estos vínculos se explicitan cuando:

- ✓ en el apartado Calcula y en el Enfoque gráfico utilizan una expresión algebraica para el término general de la sucesión de sumas parciales con un sumatorio;
- ✓ en el Enfoque gráfico representan los valores de la función discreta $f(n) = S_n$ siguiendo la ley por la que el siguiente punto es el anterior más el correspondiente término de la sucesión $a_n$, es decir, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$;
- ✓ en la Conjetura 1 concluyen ciertas propiedades de la sucesión $S_n$ como la monotonía, según el signo de los términos de la sucesión $a_n$.

No se puede decir lo mismo del esquema de LS que han construido en los cursos de bachillerato. Como se ha comentado más arriba, manifiestan ciertas inconsistencias e incoherencias que afectan directamente a la construcción del concepto de convergencia de serie numérica, principalmente por la concepción de que el límite nunca se alcanza y por algunas incoherencias respecto a propiedades de los límites como la unicidad y la divergencia por oscilación. De ese modo, al reconocer la suma de la serie como un límite, trasladan estas inconsistencias e incoherencias a la suma de una serie. Por ejemplo, en la Experiencia 3 se hacen explícitas algunas incoherencias del concepto de límite cuando asignan $\pm\infty$ o los valores $0$ ó $1$ a la suma de una serie que diverge por oscilación.

El que consideren que el límite nunca se alcanza, es una de las nueve ideas equivocadas de los estudiantes acerca del concepto de límite que salieron a la luz en el trabajo de Davis y Vinner (1986). Esto provoca que no puedan construir el objeto trascendente serie numérica, a pesar de coordinar los dos esquemas SSP y LS: cuando plantean que la sucesión "no llegará" a su límite, están estableciendo un vínculo entre la sucesión $S_n$ y su límite. Pero este vínculo está afectado por la concepción equivocada que poseen de límite, lo cual provoca que la evaluación sobre el proceso iterativo infinito no logre encapsularlo.

De este modo, se puede considerar que la concepción equivocada de límite como algo inalcanzable, es decir, la inconsistencia del esquema de límite de una sucesión, es un obstáculo para la construcción del concepto de serie numérica. Este obstáculo, tiene una fuerte componente epistemológica avalada por otras investigaciones (Cornu, 1991; Sierpinska, 1985).

Cuando en el Enfoque geométrico el grupo S1, tras observar los dibujos del proceso iterativo de creación de nuevos rectángulos, afirma que el área coloreada "se acerca pero nunca llega a dos", está ejemplificando la diferencia existente entre haber construido completamente un proceso infinito y verlo como una totalidad (Brown y otros, 2008): se podría decir que el grupo S1 ha construido completamente el proceso iterativo infinito pero no lo ve como una totalidad porque, aunque es capaz de imaginarse lo que ocurrirá en el siguiente paso ("se acerca"), no llega a contemplar la totalidad del proceso que conduce a que "llegue a dos".

Sin embargo no puede decirse que manifieste sólo una concepción proceso de Pii ya que realizan una acción de evaluación sobre el Pii cuando comparan el área resultante del Pii con el área del rectángulo $2 \times 1$. El resultado de esta evaluación no es el objeto trascendente porque la concepción de límite inalcanzable obstaculiza que vea el Pii como una totalidad. Por eso se ha considerado que construyen un pre-objeto.

También el grupo S1 manifiesta un esquema conceptual inconsistente de infinito que influye negativamente en la construcción del concepto de convergencia de serie numérica. Por ejemplo, cuando:

- ✓ en la Experiencia 2, al aparecer series divergentes, tienen problemas para coordinar los esquemas de SSP y LS. En esta misma experiencia, Chema aclara que el motivo por el cual considera que el límite no se alcanza es porque "no es posible llegar a infinito";
- ✓ en la Experiencia 3, al enfrentarse a series que oscilan, se plantean la paridad de infinito como si se tratase de un número entero del cual se puede decidir si es par o impar;
- ✓ en la Conjetura 2 la cuestión de una expresión decimal con infinitos decimales también plantea un problema para coordinar los esquemas de SSP y LS.

Sin embargo, a pesar de estas inconsistencias en las concepciones previas de conceptos sobre los que se apoya la construcción del esquema de convergencia de serie numérica, el grupo S1 da muestras de haber construido un pre-objeto serie numérica e incluso de aproximarse a tematizar el esquema cuando es capaz de desencapsular ese pre-objeto. Esto ocurre en las experiencias 1, 2 y 3 y en la Conjetura 1, cuando desencapsulan el pre-objeto serie numérica convergente para actuar sobre el proceso iterativo infinito $S_n$ o sobre la acción de obtener un término de esa sucesión.

Por todo ello, con respecto al nivel de desarrollo del esquema de convergencia de serie numérica, el grupo S1 posee un nivel Inter avanzado: coordina los esquemas de SSP y LS y posee un nivel Trans de desarrollo del esquema de SSP, pero su concepción de límite y de infinito impide que construya completamente el objeto serie numérica.

### IV 4.2 Caracterización del grupo S3

El grupo S3 responde a todas las cuestiones que plantea la actividad, salvo a la segunda pregunta de la Conjetura 1. Las respuestas no son siempre correctas porque en ocasiones el grupo ejecuta instrucciones de Maple que no son las adecuadas y acepta la respuesta de Maple sin cuestionar su acierto.

En general, el grupo mantiene un modo de trabajar en el que lo más destacado es la obtención rápida de resultados sin reflexionar previa y posteriormente acerca de su significado. Por ejemplo, cuando en la Experiencia 3 se confunden al escribir un paréntesis y suman la serie $\sum_{t=0}^{\infty} -1^t$, en vez de la serie $\sum_{t=0}^{\infty} (-1)^t$, aceptan como resultado $-\infty$ cuando la respuesta correcta es que la suma diverge por oscilación y, por tanto, no existe; el grupo sencillamente copia la respuesta. Para percibir el carácter oscilante basta con representar o listar los primeros términos de la sucesión de sumas parciales, pero no lo hacen a pesar de que tienen a su alcance las herramientas para llevarlo a cabo. Más tarde, cuando en el apartado conjetura 1 suman esta serie escribiendo correctamente los paréntesis y leen la respuesta de Maple (*undefined*), no la entienden pero no se la cuestionan y simplemente lo dejan de lado y continúan. Este episodio ejemplifica muy bien cómo actúa el grupo frente a la actividad matemática, por eso, cuando en otras ocasiones responden correctamente, no se puede asegurar que se haya producido una construcción del conocimiento.

Este modo de trabajar, unido a la cantidad de errores que cometen por diversos motivos, les lleva a establecer pocos vínculos entre los elementos matemáticos que constituyen el concepto de convergencia de serie numérica.

Los errores que cometen tienen casi siempre una fuerte componente debida a dificultades asociadas a actitudes afectivas. Se han detectado dos tipos distintos de situaciones en las que destaca la actitud poco reflexiva del grupo frente a la actividad matemática:

- ✓ en los apartados Calcula y Enfoque gráfico, uno de los integrantes del grupo detecta alguna equivocación en la respuesta, o en algún paso intermedio en la elaboración de la respuesta; cuando advierte de ello al grupo, sus compañeros ignoran su observación. Al margen de la causa por la que se comete la incorrección, la actitud, tanto del grupo sin prestar atención como del individuo que no insiste en corregirla, provoca que no se tome conciencia de haber cometido un error y por tanto se pierde la oportunidad para construir el conocimiento implícito en la aceptación de un error y en su corrección.

  Esta construcción se puede apreciar cuando en la Experiencia 2 un integrante del grupo, Carlos, manifiesta una descoordinación de los esquemas de SSP y LS y una ausencia de vínculo entre las sucesiones $a_n$ y $S_n$; esto provoca una reacción en los otros dos compañeros que dan respuestas en las que coordinan los dos esquemas y establecen un vínculo entre las dos sucesiones. De ahí la relevancia de tomar conciencia de los errores que cometen;

- ✓ en repetidas ocasiones (en los apartados Enfoque gráfico y Reflexiona) incurren en el que se ha llamado error E(nk), que consiste en confundir el significado de la variable $n$ de la sucesión y de la variable índice de un sumatorio. La persistencia de este error, a pesar de que la profesora lo corrige en alguna ocasión, hay que buscarla en una actitud poco reflexiva que conduce a respuestas impulsivas.

Todas estas situaciones dificultan la construcción del conocimiento porque restan oportunidades para que se establezcan relaciones entre los elementos matemáticos que conforman el concepto de convergencia de serie numérica.

La otra componente que destaca en los errores que cometen, está asociada a obstáculos o a una ausencia de sentido por la complejidad de los objetos matemáticos. Por ejemplo:

- ✓ en los apartados Calcula y Conjetura 2 tienen dificultades para expresar algebraicamente objetos matemáticos, como "el doble de" o "sumar desde 0 hasta 10";
- ✓ en el apartado Reflexiona una ausencia de sentido debida a la complejidad del concepto de serie numérica como resultado de coordinar los esquemas de SSP y de LS, provoca la confusión entre los esquemas de SSP y LS que se manifiesta igualando la suma infinita $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ a la suma de una cantidad finita de sumandos;
- ✓ en la Experiencia 3 escriben incorrectamente un paréntesis en una expresión algebraica cambiando por completo su significado;
- ✓ en los apartados Experiencia 1 y Conjetura 2 algún integrante del grupo confunde la sucesión $S_n$ con $a_n$ por fijarse solamente en el término general de la sucesión de sumas parciales olvidando el operador suma; ese mismo individuo en otras ocasiones distingue las dos sucesiones.

Al margen de los errores que cometen, se dan otras situaciones en las que no construyen el esquema de SSP porque no establecen vínculos entre las dos sucesiones implicadas, la propia sucesión $S_n$ y la del término general $a_n$. Esto ocurre cuando, por ejemplo:

- ✓ en los apartados Enfoque geométrico, Calcula y Enfoque gráfico obtienen un término general para la sucesión de sumas parciales con una fracción algebraica, ignorando la sucesión $a_n$. Probablemente esta pérdida de vínculo entre las dos sucesiones tenga una relevancia especial porque en los primeros apartados de la *actividad rectángulos* es donde más se matizan las características de la SSP;
- ✓ en la Experiencia 2 un integrante del grupo no es capaz de argumentar sobre el carácter de la serie a partir de el de la sucesión $a_n$, por la ausencia de una reflexión sobre las acciones que han realizado anteriormente sumando series geométricas con distintos valores para la razón. Esta reflexión le hubiera permitido interiorizar las acciones en un proceso con el que podría distinguir la convergencia de una serie geométrica fijándose sólo en el valor de la razón;
- ✓ en la Experiencia 3 no son capaces de detectar que se han confundido al escribir un paréntesis y suman la serie $\sum_{t=0}^{\infty} -1^t$, en vez de la serie $\sum_{t=0}^{\infty}(-1)^t$, aceptando por válida la respuesta $-\infty$ de Maple cuando la respuesta correcta es que la suma no existe porque diverge por oscilación. Esto se produce porque no ejecutan ninguna acción de evaluación o de representación en el plano cartesiano de algunos términos de la sucesión de sumas parciales, que les dé una oportunidad para reflexionar sobre ellas e interiorizarlas. Con ello estarían contribuyendo a construir el esquema de SSP;
- ✓ en la Conjetura 1 no son capaces de responder a la segunda pregunta porque no interiorizan las acciones de obtener la suma de la serie para diversos valores de la razón; esto se produce por la falta de reflexión sobres estas acciones. Si lo hicieran, podrían encontrar una relación entre los valores de las sumas y el valor de la razón.

A pesar de ello, en algunas ocasiones sí establecen vínculos entre las dos sucesiones, construyendo así parte del esquema de SSP. Esto ocurre cuando, por ejemplo:

- ✓ en el apartado Reflexiona un integrante del grupo corrige a otro que ha confundido la sucesión $S_n$ por $a_n$; con ello incita al compañero a fijarse en la relación entre las dos sucesiones;
- ✓ en la Experiencia 1 un integrante del grupo estableció un vínculo ente las dos sucesiones al corregir el error de confundir la sucesión $S_n$ con la sucesión $a_n$, fijándose en la característica de $S_n$ de la recursividad;
- ✓ en la Experiencia 2 las acciones que han llevado a cabo en apartados anteriores sumando series las interiorizan (sólo dos integrantes del grupo) en un proceso por el que son capaces de distinguir la convergencia de algunas series geométricas fijándose en el valor de la razón.

Estos vínculos no son suficientes para construir un esquema consistente de SSP. De hecho, las pocas manifestaciones de vínculos entre las dos sucesiones son propias de un estado INTER de desarrollo del esquema de SSP que no es adecuado para construir el concepto de convergencia de serie numérica.

El esquema de LS que han construido en los cursos de bachillerato es inconsistente al menos en lo referente a la no convergencia. En la Conjetura 1, aunque concluyen correctamente los valores para los cuales la serie geométrica converge, afirman que en el resto de los casos la suma es $\infty$, sin plantearse la posibilidad de que no sea convergente porque diverja por oscilación o porque diverja a $-\infty$. En el segundo caso, puede ocurrir que se hable de que un límite es infinito cuando diverge, sin especificar el signo debido a un obstáculo didáctico relacionado con el principio de extensión genérica de Tall (1991) por el abuso de ejemplos en los que se manejan números positivos; el caso en el que el límite diverge por oscilación, simplemente se ignora.

No hay muchas más referencias al esquema de límite porque, como se ha comentado más arriba, no construyen el esquema de SSP que deben coordinar con el de LS. De hecho, se puede hablar más de una ausencia de coordinación de estos esquemas que de lo contrario. Muestra de ello es la falta de comentarios en la Experiencia 1 cuando el grupo obtiene las sumas de las series que requiere el enunciado manteniendo la postura de copiar y pegar sin reflexionar sobre los resultados que obtienen o esperan obtener.

De hecho, el grupo S3 en toda la sección experimenta se limita a copiar y pegar sin reflexionar sobre el significado del valor del parámetro $r$ en los resultados de las sumas de las series. Esto conlleva una ausencia total de vínculo entre los elementos del modelo. La postura de copiar sin plantearse la veracidad de la respuesta que devuelve Maple, ni siquiera en el caso en que devuelve un valor que no espera, muestra el aspecto negativo que destaca Tall (1989) de las herramientas de cálculo simbólico que pueden entorpecer el aprendizaje por la *autoridad del ordenador*. Una forma de prevenir esto, es evitar que en el alumno se establezca una dependencia con las herramientas informáticas, como aconseja Drijvers (2002).

Sin embargo, al final de la actividad (en la Conjetura 3), dos integrantes del grupo son capaces de realizar una evaluación sobre el Pii para encapsularlo en el objeto serie numérica. Sólo por esta evaluación no se puede decir que hayan construido el objeto serie numérica porque en el resto de la actividad han mostrado un estado de desarrollo del esquema poco avanzado y se han podido observar situaciones en las no han establecido vínculos necesarios para construir el concepto.

Por todo ello, con respecto al nivel de desarrollo del esquema de convergencia de serie numérica, el grupo S3 posee un nivel Intra avanzado: en algún contexto coordina los esquemas de SSP y LS, pero posee un nivel Inter de desarrollo de SSP.

## IV 5 TERCERA ETAPA DEL ANÁLISIS: CARACTERIZACIÓN GLOBAL

A pesar de que los dos grupos responden correctamente en la mayoría de los apartados de la *actividad rectángulos*, no se puede decir que ambos hayan construido el concepto de convergencia de serie numérica. Mientras el grupo S1 mantiene una postura reflexiva que le conduce a establecer relaciones entre elementos matemáticos y a coordinar los esquemas conceptuales que subyacen al concepto de convergencia de serie numérica, el grupo S3 se muestra irreflexivo y pierde oportunidades para construir consistentemente su conocimiento. Así, ambos grupos poseen niveles de desarrollo del esquema de convergencia de serie numérica diferentes, el grupo S1 posee un nivel Inter avanzado y el grupo S3 un nivel Intra avanzado.

Sin entran en detalles que ya se han comentado en los dos apartados anteriores, se han encontrado dos hitos importantes que diferencian el modo en que construyen el conocimiento de los grupos analizados: la actitud matemática y hacia las matemáticas, y los esquemas previos que poseen los individuos sobre conceptos matemáticos que intervienen en la construcción del tópico que se estudia. También se comentará el uso que hacen de la herramienta de cálculo simbólico.

### IV 5.1 Componente afectiva del aprendizaje

La componente afectiva del aprendizaje se ha mostrado como una característica diferenciadora en el proceso de construcción del conocimiento de los dos grupos analizados. La capacidad de reflexión ante una pregunta que se ha de contestar y ante su respuesta es fundamental para construir el conocimiento. Por un lado, evita que se cometan ciertos errores que distraen la atención del individuo y, por otro lado, es imprescindible para que éste estructure los elementos matemáticos en su mente (Asiala y otros, 1996; Sfard, 1991).

La consumación de errores no ha de interpretarse como algo negativo, ya que si uno se da cuenta de que ha cometido un error y lo corrige, está brindando una oportunidad para establecer vínculos entre elementos matemáticos e impulsar la construcción del conocimiento. Por eso, se mide más la capacidad del grupo para percibir los errores y corregirlos, que el número de errores que comete. En ese sentido, en general el grupo S1 comete pocos errores, y cuando lo hace es capaz de corregirlos. No así el grupo S3, que incide repetidas veces en algunos errores a pesar de que la profesora los corrija. De ese modo, se estancan en cálculos sencillos y manipulaciones algebraicas propias de niveles educativos inferiores, que distraen su atención.

El porqué de este modo diferente de actuar de los dos grupos se encuentra tanto en la actitud de los mismos hacia las matemáticas, y en particular hacia el trabajo frente al ordenador, como en la actitud matemática (Gómez-Chacón, 2009). Para el grupo S3 parece que la actividad matemática es una mera rutina de algoritmos para obtener resultados que carecen de sentido. Así, frente al ordenador actúa de manera impulsiva ejecutando comandos sin recapacitar sobre la conveniencia de los mismos. Sin embargo, el grupo S1 trata de dar sentido a las respuestas que obtiene de la herramienta e incluso se adelanta a los resultados especulando sobre los mismos. Por ejemplo, en el apartado Experimenta, el modo en que se construye el conocimiento depende no sólo de cómo se establecen los vínculos entre los elementos matemáticos, sino más bien de la reflexión interna que cada individuo realice al observar los resultados que devuelve la herramienta de cálculo simbólico.

Por ello, el cómo concibe cada grupo la actividad matemática, y las capacidades matemáticas de los integrantes de cada grupo, contribuyen a que uno de ellos establezca vínculos entre elementos matemáticos con los que construye su conocimiento, mientras el otro distrae su atención del objeto de estudio.

El hecho de que los datos se hayan tomado en el aula es determinante, ya que las tensiones del trabajo en la clase añaden un factor más de tipo afectivo que favorece la actitud poco reflexiva, y lo que esto conlleva. Un ejemplo de ello ocurre cuando el grupo S1 siente la presión por terminar la conjetura 1 en la hora de clase y, a pesar de su conducta reflexiva, se ve afectado por un bloqueo ocasionado por el poco tiempo que les queda para que finalice la misma, y la premura con la que quieren contestar a la actividad. Esto se traduce en una falta de reflexión que merma la consecución de resultados.

También con el grupo S1 se ha observado que en los primeros minutos de la clase se muestra más distraído y esto se traduce en que comete errores que en sesiones anteriores no habían aparecido. Esto ocurre cuando comienza la segunda sesión en el aula de ordenadores para terminar de resolver la *actividad rectángulos*, y se dispone a realizar el apartado Conjetura 1. El grupo S3 también se ve afectado por la rigidez de los horarios de clase cuando trata de acelerar las respuestas al quedar pocos minutos para que termine la clase.

Desde el principio de la actividad, cuando en el apartado Enfoque geométrico el grupo S1 ya daba muestras de coordinar los esquemas de SSP y LS mientras el grupo S3 se veía inmerso en una maraña de expresiones algebraicas incorrectas, ya se puede apreciar la diferencia entre el modo de enfrentarse a la actividad matemática de uno y otro grupo.

### IV 5.2 Esquemas previos

La otra gran diferencia entre los dos grupos estriba en los esquemas conceptuales que han construido en niveles educativos inferiores sobre tópicos matemáticos, tanto del análisis como del álgebra, que forman parte de los elementos matemáticos que un individuo ha de manejar para construir el concepto de serie numérica.

En general, la destreza en la manipulación algebraica de operaciones sencillas con fracciones, la modelización con expresiones algebraicas simples, o el significado de las letras en una expresión algebraica, son los principales puntos débiles del grupo S3 respecto del álgebra. Sin embargo, para el grupo S1 estos aspectos no suponen ninguna dificultad.

Con respecto a los esquemas previos que posee un individuo sobre conceptos del Análisis Matemático, los grandes protagonistas son el concepto de función, de límite y de infinito. Una serie numérica, por naturaleza, es un caso particular de un límite de una función peculiar: es una sucesión, por lo que el dominio de la función es discreto, y además es de sumas parciales, es decir, se construye sumando los términos de otra sucesión. Estas características componen un concepto en el que las inconsistencias e incoherencias de los conceptos base (función, límite e infinito) se acumulan dificultando la construcción del conocimiento del individuo. De ahí que el grupo S1 parezca poseer unas concepciones previas más consistentes (a pesar de manifestar ciertas inconsistencias e incoherencias en algunos conceptos básicos) que el grupo S3 que dejaba entrever grandes lagunas en cuestiones relativas al concepto de límite y de función.

#### IV 5.2.1 *El concepto de límite*

La concepción de límite inalcanzable ha sido la idea que ha entorpecido al grupo S1 para construir consistentemente el esquema de convergencia de serie numérica. Siempre que han tenido una oportunidad para coordinar los esquemas de SSP y LS ha salido a la luz derivando el pre-objeto serie numérica: el límite de la sucesión de sumas parciales que no llega a alcanzarse. Este argumento no es compartido por los dos integrantes del grupo ya que uno de ellos opina que el límite nunca se alcanza, mientras el otro cree que esto puede ocurrir pero “sólo en el mundo de las matemáticas”.

También asociado a este concepto, el carácter de un límite ha dificultado a los dos grupos ya que, en general, sólo han considerado la convergencia o la divergencia a infinito, sin contemplar el caso en el que diverge por oscilación y, por tanto, no existe. En esos casos, el grupo S3 ha obviado la situación (Conjetura 1), y Daniel del grupo S1 ha dado una respuesta incoherente con la unicidad del límite (Experiencia 3). Este argumento es una de las causas por las que el grupo S1 construye el pre-objeto serie numérica, al coordinar los esquemas de SSP y LS y mantener una respuesta que no es del todo correcta por las concepciones previas sobre el concepto de límite. Sin embargo, en el caso del grupo S3 no llega a producirse la coordinación de estos dos esquemas.

#### IV 5.2.2 *El concepto de infinito*

Íntimamente relacionado con el concepto de límite, el concepto de infinito también ha provocado alguna situación en la que se ha dejado ver un esquema inconsistente. Por ejemplo, el grupo S1 ha tenido problemas para coordinar los esquemas de SSP y LS en la Experiencia 2 cuando aparecen series divergentes y en la Conjetura 2 con las expresiones decimales infinitas; en la Experiencia 1, ha barajado la posibilidad de que infinito fuera un número que se pudiera alcanzar; y en la Experiencia 3 se ha planteado la paridad de infinito como si se tratase de un número entero. El grupo S3 no se plantea estas cuestiones por la actitud poco reflexiva comentada anteriormente.

#### IV 5.2.3 *El concepto de función*

El concepto de función, en el caso del grupo S3 aparece asociado a la consumación de algunos errores, y en el caso del grupo S1 como esquema consistente.

El modo en que el grupo S1 se apoya en el registro gráfico-cartesiano para aproximar la suma de las series a partir de la representación gráfica de la sucesión de sumas parciales, da fe, por un lado, de la coordinación de los esquemas de SSP y LS, y por otro lado de un esquema de función consistente.

Sin embargo, para el grupo S3 el esquema de función entraña otra fuente de dificultades que provoca errores, como el E(nk), relacionado con el papel de las variables y los parámetros de una expresión algebraica, el significado de la letra $n$ como variable independiente de la función discreta $f(n)$, o el significado de una variable contador. También la confusión entre las dos sucesiones $a_n$ y $S_n$, propia tanto del estado INTRA como del estado INTER de desarrollo del concepto de SSP, está relacionado con la comprensión del significado de la expresión algebraica de una función.

### IV 5.3 La herramienta de cálculo simbólico

El empleo de la herramienta de cálculo simbólico marca también una importante diferencia entre los dos grupos, y aunque hay una característica que se repite en los dos, ésta consigue efectos contrarios. Esta característica está relacionada con el obstáculo global que Drijvers (2002) define como "la imposibilidad de decidir cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil" y consiste en ejecutar bloques de instrucciones con patrones conocidos. En el caso del grupo S1 ese patrón consiste en representar y listar los primeros términos de la sucesión de sumas parciales y en el caso del grupo S3 en utilizar el comando *sum* de Maple que le facilitó la profesora. El hecho de que los individuos no se planteen obtener los resultados de forma más rápida, optimizando las líneas de código y el gasto computacional, o simplemente obteniendo otro tipo de información, debe tenerse en cuenta en el diseño de la instrucción para evitar que el estudiante tienda a obtener resultados sin más. Así, el ordenador perdería la ventaja de ofrecer un entorno para experimentar ya que copiar y pegar tiene poco que ver con el descubrimiento, la observación y el ensayo.

El patrón del grupo S1, si bien en ocasiones no es el más eficiente, ha favorecido la construcción del conocimiento porque requiere de la coordinación de los esquemas de SSP y LS para obtener las respuestas correctas. El grupo S3, obtiene respuestas inmediatas, unas veces adecuadas y otras no, que en ocasiones no sabe interpretar y casi nunca reflexiona.

Además, el grupo S1 apenas comete errores de sintaxis y cuando lo hace los corrige rápidamente, mientras que el grupo S3 reincide en el mismo tipo de errores que sólo ocasionalmente corrigen. También éste es otro factor que diferencia la construcción del conocimiento de uno y otro grupo, ya que percatarse de un error y corregirlo da una oportunidad para que se establezcan relaciones entre los elementos matemáticos involucrados.

# CAPÍTULO V Resultados y líneas futuras

En este capítulo se van a exponer los resultados logrados en este trabajo, destacando aquellos que aportan las mayores contribuciones científicas al estado actual de la investigación en Educación Matemática.

Los resultados se expondrán atendiendo a los cinco objetivos que se plantearon, tres en relación a la comprensión, uno en relación al uso de un software de cálculo simbólico y otro en relación al diseño experimental. En líneas generales se han conseguido todos los objetivos de la investigación, y se ha logrado innovar en el proceso de recogida de datos.

Para finalizar, se han planteado seis líneas de trabajo que, de algún modo han surgido tras el proceso de análisis de los datos. Una de ellas se plantea dentro del marco teórico de esta investigación.

## V 1 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN RELACIÓN A LA COMPRENSIÓN

En la introducción de esta memoria ya se reflejaron los objetivos relativos a la comprensión. Como se indicó entonces, el objetivo 1 se incluye en este apartado por su relación con el objetivo 2.

Objetivo 1. Estudiar el desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia.

Objetivo 2. Realizar una descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica.

Objetivo 3. Describir niveles de comprensión que permitan explicar cómo los estudiantes conocen la convergencia de series numéricas.

Respecto al objetivo 1, se ha realizado un estudio del desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia, basado en la síntesis de manuales sobre historia de la matemática. Como resultado de este estudio se ha aportado la identificación de cinco etapas en la evolución del concepto de serie: la etapa griega, medieval, de desarrollo, de formalización y la etapa moderna.

Estas etapas inspiraron el diseño de la *actividad rectángulos* y se reflejan en los distintos apartados de la misma. En concreto, la etapa griega protagoniza la presentación de la actividad y el apartado Enfoque geométrico; la etapa medieval se refleja en el Enfoque gráfico; la etapa de desarrollo en el apartado Experimenta y Conjetura; y finalmente la etapa de formalización en el apartado Demuestra. La última etapa corresponde a un curso más avanzado, por lo que no se ha considerado pertinente incluirla en una actividad introductoria del concepto.

Este estudio teórico facilitó parte de la información con la que se consigue el objetivo 2, que se corresponde con la propuesta de una descomposición genética del concepto de convergencia de serie numérica.

Uno de los aspectos que destaca en la descomposición genética, es que el esquema de convergencia de serie numérica es el resultado de coordinar los esquemas de sucesión y de límite, que los individuos no siempre han construido de manera consistente en cursos anteriores. La dificultad para coordinar estos esquemas, unida a la dificultad intrínseca de cada uno de ellos, justifican las dificultades que se interponen en la construcción del conocimiento de muchos estudiantes.

Completar el objetivo 2 ha sido el paso previo para abarcar el objetivo 3 y describir los niveles de compresión que, junto con la descomposición genética, han proporcionado una herramienta con la que analizar los datos y concluir los resultados que se exponen en este capítulo.

El análisis de los datos recogidos confirma la propuesta teórica formulada en la descomposición genética acerca de cómo se puede construir el concepto de serie numérica y su convergencia. Este resultado era esperable ya que la descomposición genética propuesta está influenciada por la experiencia de la investigadora como profesora de la asignatura Fundamentos Matemáticos I en la Escuela de Informática de la UPSA.

Los niveles de comprensión diferencian a los estudiantes por su capacidad para establecer relaciones entre elementos matemáticos con las que construyen el conocimiento. La clasificación inicial de tres niveles de comprensión (Clark y otros, 1997) se ha ampliado a cinco, con objeto de conseguir una mayor diferenciación de los niveles y así caracterizar mejor la construcción del concepto de convergencia de serie numérica por parte de los estudiantes (Sánchez-Matamoros, 2004). Atendiendo a esta clasificación, los dos grupos analizados han manifestado un nivel de construcción del conocimiento diferente, alcanzando el grupo S1 un nivel de desarrollo superior (nivel Inter avanzado) respecto al del grupo S3 (nivel Intra avanzado).

Uno de los aspectos clave en las diferencias de los niveles de comprensión de los dos grupos es la concepción de proceso iterativo infinito que manifiestan. Ésta se encuentra asociada a la coordinación de los elementos matemáticos con los que se construye el concepto de serie numérica. En relación al proceso iterativo infinito implícito en este concepto, los resultados de esta investigación confirman que la encapsulación del mismo en un objeto, acarrea serias dificultades a los estudiantes (Brown y otros, 2008).

La decisión de analizar sólo las grabaciones en las que se resolvió la *actividad rectángulos*, ha ocasionado que sólo se contemple una parte de la construcción del conocimiento y no se pueda discernir la coherencia del esquema. Sin embargo, la escucha minuciosa de todas las grabaciones por parte de la autora de esta memoria, anticipa que ninguno de los grupos ha tematizado el esquema.

Además, se han detectado diversos factores que condicionan la construcción del conocimiento dificultando el que se establezca vínculos entre los elementos matemáticos y se coordinen los esquemas que dan sentido a la noción matemática objeto de estudio. Los más destacados son: las nociones previas sobre ciertos tópicos, la consumación de errores de diversa índole, y la componente afectiva del aprendizaje.

Respecto a esta última cuestión, cuando se planteó esta tesis doctoral, el dominio afectivo (Gómez-Chacón, 1998, 2000) no formó parte del problema de investigación. Sin embargo, a la luz del análisis de los datos, se revela con una notable influencia en el proceso de construcción del conocimiento. En este sentido, Przenioslo (2005), lejos de la posición atribuida al constructivismo, también considera que las iteraciones sociales juegan un papel importante en la construcción del conocimiento.

El planteamiento inicial desde el marco teórico APOS fue justificar si se produce o no la construcción del conocimiento, el nivel de desarrollo que alcanza esa construcción y su coherencia, por los elementos matemáticos que entran en juego y las relaciones que se establecen entre los mismos. En esta investigación se han encontrado dos grupos de estudiantes que manifiestan claramente diferencias en la construcción de su conocimiento y, desde el marco teórico APOS, se justifican esas diferencias por la capacidad para coordinar esquemas previos que han construido en los cursos de bachillerato. Se ha observado que el grupo que manifiesta un estado de construcción del conocimiento más avanzado, se desenvuelve con soltura manipulando expresiones algebraicas y comete pocos errores, de los que normalmente se percata y es capaz de corregir. Sin embargo, el otro grupo tiene algunas dificultades en la manipulación algebraica y comete muchos errores de los que, en muchos casos, no es consciente y por tanto no es capaz de corregir.

Teniendo en cuenta que la reflexión es uno de los requisitos para que se movilicen dispositivos mentales que faciliten la abstracción, no debería resultar extraño que el grupo que distrae su atención tratando de corregir errores en una expresión algebraica, no sea capaz de alcanzar un estado avanzado de construcción de su conocimiento. Esto es así porque en dicho grupo no se lleva a cabo la reflexión necesaria para que se produzca la abstracción. No en vano, Dreyfus (1991) asegura que la capacidad de abstracción refleja el nivel del pensamiento matemático y, para que esto se produzca, son necesarios los procesos de representar, generalizar y sintetizar.

La cuestión estriba en buscar el origen de esos errores que frenan la construcción del conocimiento por distraer la atención del individuo sobre los elementos matemáticos asociados al tópico que se quiere construir. En este punto el trabajo de Socas (2009) es revelador ya que, según su tesis, la semiosis del error tiene siempre una componente afectiva. Siguiendo la reflexión de Gómez-Chacón (2003) cuando afirma que el dominio afectivo puede actuar “facilitando o bloqueando la adquisición de conocimientos” (p. 226), parece natural plantear que el grupo S3 manifiesta una actitud matemática derivada de un sistema de “creencias limitativas” (p. 242), según el cual las matemáticas se reducen a fórmulas para obtener resultados inmediatos. Este sistema de creencias provoca una actitud matemática caracterizada por la ausencia de reflexión en la resolución de tareas matemáticas.

Poner en conocimiento de la comunidad científica y de los profesores de matemáticas las dificultades que han encontrado los estudiantes, es el primer paso para diseñar conjuntamente secuencias didácticas que ayuden a superarlas.

La semiosis del error (Socas, 2009) también ofrece pistas acerca de otros factores que condicionan el aprendizaje, como los obstáculos producidos por las concepciones de ciertos tópicos sobre los que se asienta la noción de serie numérica convergente. En ocasiones, estas concepciones dificultan la coordinación de esquemas, o el que se establezca vínculos entre elementos matemáticos que son necesarios para la construcción del conocimiento. En otras ocasiones reproducen, en el nuevo concepto, las inconsistencias e incoherencias que ha construido previamente el individuo. Éstas se manifiestan en la consumación de errores de diversa índole.

Al margen de los objetivos planteados en relación a la comprensión, esta investigación aporta un trabajo en profundidad sobre el aprendizaje de las series numéricas y su convergencia. Desde el trabajo de Soto-Johnson (1998), no se han realizado muchos trabajos de investigación que centren su foco de atención en el concepto de serie numérica. Algunos trabajos realizados bajo el marco teórico APOS como los de McDonald y otros

(2000) y Brown y otros (2008), están relacionados con las series numéricas, pero no se ocupan expresamente de ellas.

Recientemente se han publicado algunos trabajos derivados de una investigación que se está llevando a cabo en Canadá y Reino Unido, en la que plantean estudiar la enseñanza y el aprendizaje de las series infinitas (González-Martín, Seffah y Nardi, 2009; González-Martín, Seffah, Nardi y Biza, 2009; Nardi, Biza y González-Martín, 2009). Hasta el momento, estos trabajos se han centrado en analizar el currículo de libros de texto, los programas escolares, y la práctica docente en relación a las series infinitas.

## V 2 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN RELACIÓN AL USO DE UN SOFTWARE DE CÁLCULO SIMBÓLICO

El cuarto objetivo se planteó en relación al uso de software de cálculo simbólico:

Objetivo 4. Estudiar el impacto de la utilización de una herramienta de cálculo simbólico como soporte en el aula, para facilitar el enfoque geométrico y gráfico de la instrucción, y asistir en los cálculos repetitivos.

En esta investigación se han constatado algunas conclusiones de otros trabajos anteriores, relativos al impacto de la herramienta de cálculo simbólico en el aula de matemáticas cuando se utiliza como soporte para facilitar el enfoque geométrico y gráfico de la instrucción, y asistir en los cálculos repetitivos.

En relación al fenómeno de la doble referencia al que se refiere Lagrange (2000) como una posible fuente de dificultades añadidas por el uso del ordenador, se ha observado principalmente en el grupo S3, y en menor medida en el grupo S1. Efectivamente, los estudiantes no recibieron una instrucción sobre el manejo de la herramienta Maple y esto produjo situaciones en las que la herramienta no sólo no favoreció la construcción del conocimiento, sino que se impuso como un obstáculo. A este obstáculo se ha hecho referencia en el análisis al citar el obstáculo global que Drijvers (2002) define como “la imposibilidad de decidir cuándo y cómo el álgebra computacional puede ser útil”.

Merece un comentario especial el hecho de que en el grupo S1 este fenómeno haya servido para manifestar su nivel de comprensión: cuando ejecuta repetidas veces un bloque de instrucciones conocidas que no son las más eficientes para conseguir las respuestas, se pone de manifiesto el fenómeno de la doble referencia ya que los individuos no manejan con agilidad la sintaxis de Maple. Por ello, utilizan siempre el mismo patrón con el que manipulan la sucesión de sumas parciales y concluyen sus respuestas. Cuando han de coordinar los esquemas de SSP y LS, es cuando se produce la construcción del conocimiento.

La herramienta de cálculo simbólico se muestra así como facilitadora de la construcción del conocimiento, no por ella misma, sino por el empleo que hacen los individuos de ella. La herramienta es la misma, pero el modo en que la utilizan los estudiantes hace que se convierta en un instrumento que promueve y colabora en la construcción del conocimiento, o en un simple entorno para la experimentación a ciegas.

En el grupo S3 también se ha observado la advertencia de Lagrange (2000) sobre la imposibilidad de garantizar que la ejecución de comandos se traduzca en aprendizaje, si no se hace hincapié en una reflexión previa. Esto ocurre, por ejemplo, cuando el grupo S3 copia y pega la instrucción con la que suma una serie geométrica sin prestar atención a la respuesta que obtiene; la falta de reflexión en ocasiones produce respuestas incorrectas porque un simple error en la sintaxis devuelve una respuesta que no es acorde con la pregunta.

Por otro lado, con la herramienta de cálculo simbólico Maple se ha logrado un entorno que facilita la exploración y la experimentación, proporcionando al estudiante una estructura cognitiva sobre la que puede construir conceptos abstractos. Por ejemplo, la visualización de las gráficas cartesianas ha sido un mecanismo crucial para que el grupo S1 estableciera relaciones entre algunos de los elementos matemáticos del esquema de convergencia de serie numérica, mostrando así cómo la herramienta de cálculo simbólico se implica en la construcción del conocimiento.

## V 3 RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN EN RELACIÓN AL DISEÑO EXPERIMENTAL

En relación al diseño experimental, se planteó el objetivo 5:

Objetivo 5. Utilizar de manera eficiente los recursos tecnológicos disponibles para obtener información rica en detalles y de manejo sencillo.

Este es uno de los aspectos más innovadores de esta investigación. La combinación de las cámaras web y el software CamStudio, forja un recurso tecnológico fácil de manejar y que actualmente se encuentra al alcance de cualquier usuario.

Los resultados más relevantes de esta técnica de recogida de datos se pueden resumir en tres: el carácter universal, la flexibilidad en la recogida, almacenamiento y reproducción de los datos, y la riqueza de la información que se consigue.

Carácter universal: El software CamStudio permite registrar todo lo que aparece en la pantalla del ordenador, independientemente de la actividad que se esté realizando. Así, trabajando con otro software de cálculo simbólico, se pueden recoger el mismo tipo de datos que se han obtenido en esta investigación. Además, se puede utilizar en otros contextos distintos a la clase de matemáticas, lo que le confiere un carácter universal.

Flexibilidad: Los medios empleados para recoger en formato digital la información relativa a la instrucción de la profesora, el trabajo de los estudiantes en clase y las producciones de éstos con la herramienta de cálculo simbólico, son más flexibles que los utilizados tradicionalmente, ya que ocupan menos espacio, requieren menos mantenimiento y su coste económico es inferior. Además, el hecho de disponer de todos los datos grabados (audio, video y manejo de la herramienta informática) en formato digital, aporta mayor seguridad en el almacenamiento y mayor facilidad a la hora de reproducirlos. Por ejemplo, supone una gran ayuda el poder visionar la grabación de audio y video de los estudiantes al mismo tiempo que se visiona el archivo en el que se grabó todo lo que acontecía en la pantalla del ordenador con el que trabajaban. Asimismo, es posible disponer en cada momento de los archivos con la calidad que se requiera en función de la plataforma de reproducción o del medio de almacenamiento.

Riqueza de la información: El empleo del software CamStudio ha permitido recoger un tipo de información que con los métodos tradicionales utilizados en otras investigaciones se pierde. La posibilidad de reproducir la sesión completa del trabajo del estudiante frente al ordenador, junto con su voz e imagen, permite trasladar al investigador al escenario de la investigación tantas veces como desee. Hasta ahora no se había conseguido una información tan completa del trabajo del estudiante en el aula. En investigaciones anteriores, la información que manejaba el investigador, relativa al trabajo en un entorno informático, consistía en el archivo que contiene el resultado final de la actividad que ha llevado a cabo el estudiante, pero no quedaba constancia del proceso por el cual llega a ese resultado.

Prueba de la validez de esta técnica es que se ha utilizado en otras investigaciones posteriores con unos resultados fructíferos que dan fe de su acierto y conveniencia. Ortega y Contreras (2009) destacan la utilidad de poder visionar todo lo que acontece en la pantalla del ordenador, frente al tipo de registro con el que contaban anteriormente, que sólo les permitía disponer del archivo final que contenía las respuestas de los estudiantes, pero no el proceso para llegar a ellas. También se ha utilizado y se pretende seguir utilizando en otras investigaciones (Aranda, 2008). La literatura dará cuenta de ello.

## V 4 LÍNEAS FUTURAS

Tras finalizar el análisis de los datos y concluir los resultados de la investigación, se han planteado varias líneas de trabajo que se agrupan en dos bloques según dependan o no de los datos obtenidos para realizar esta investigación.

- ✓ Sin utilizar estos datos, se plantea como posible línea de trabajo el estudio del desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia, a través de una revisión en profundidad de textos clásicos. Para conseguir el segundo objetivo de esta investigación, ha bastado con la revisión de manuales sobre historia de la matemática y algunas obras de Euclides y Arquímedes. Sin embargo, para analizar detalladamente el desarrollo histórico del concepto de serie numérica y su convergencia es necesario plantear otra investigación que proponga este análisis como objetivo principal.

Los datos que se han utilizado para llevar a cabo esta investigación son parte de una colección más amplia, que recoge todas las grabaciones que se realizaron mientras se llevó a cabo la instrucción del tópico serie numérica. Para concluir los resultados de esta investigación se ha analizado, mientras resolvían la *actividad rectángulos*, a dos de los seis grupos que se grabaron.

- ✓ Dentro del marco teórico APOS, los resultados que se han obtenido se pueden completar realizando un análisis de estos dos grupos a lo largo de todas las sesiones en las que se trabajó el tópico de serie numérica. De ese modo, se contemplarían los elementos matemáticos que no aparecen en la *actividad rectángulos*, por la peculiaridad que tiene de ser introductoria del concepto de serie numérica. Además se podría ampliar el estudio a los otros grupos que se grabaron, para obtener más información que permita afinar la caracterización de los niveles de desarrollo que se han propuesto.

La riqueza de los datos obtenidos también da pie a plantear otras líneas de trabajo al margen del marco teórico APOS. Estas líneas son:

- ✓ Estudio de los errores que dificultan la construcción del conocimiento: en esta investigación se ha tratado de soslayo el origen de algunos errores que frenan la construcción del conocimiento, pero no se ha realizado un estudio detallado. Para completar este aspecto hay que tener en cuenta el enfoque lógico semiótico del doctor Martín Socas, profesor de la Universidad de La Laguna.
- ✓ Dominio afectivo del aprendizaje: en un principio esta investigación no contemplaba el aspecto actitudinal y emocional del aprendizaje. Sin embargo, los resultados obtenidos destacan la relevancia de estos aspectos en el proceso de construcción del conocimiento y plantean otra posible perspectiva desde la que analizar los datos. Con la información recogida de los seis grupos que participaron en las grabaciones y con los de las clases magistrales de la profesora, se podría realizar una investigación para estudiar el impacto del dominio afectivo en el aula de matemáticas. Para seguir la línea planteada en las últimas investigaciones relacionadas con el aspecto afectivo del aprendizaje de las matemáticas (Furinghetti y Morselli, 2009; Gómez-Chacón, 2009), se debería hacer hincapié en las conexiones que surgen entre la parte más conceptual de las actitudes (actitud matemática) y la parte más emocional (actitud hacia las matemáticas).
- ✓ Herramienta de cálculo simbólico: aunque el marco teórico de esta investigación, en lo referente al papel del ordenador en el proceso de construcción del conocimiento, deja en un segundo plano la dimensión técnica e instrumental del trabajo matemático, se han confirmado algunos resultados de investigaciones realizadas bajo el enfoque instrumental. Por ello, cabría peguntarse cómo ha influido el uso que se ha dado al software de cálculo simbólico Maple al proceso de adquisición del conocimiento y cómo podría utilizarse para que fuera un instrumento óptimo mediador del conocimiento matemático, sin restar importancia al aspecto cognitivo del aprendizaje.
- ✓ Aprendizaje versus enseñanza: las grabaciones que se han realizado para obtener los datos de esta investigación no sólo contienen el trabajo de los grupos de estudiantes, sino también las clases magistrales de la profesora en la clase de pizarra con objeto de facilitar el trabajo del observador externo para la triangulación del análisis. Así, se dispone de una serie de archivos digitales con las grabaciones de audio y video de la intervención de la profesora tanto en la clase magistral como en el aula de ordenadores donde guiaba el trabajo de los estudiantes y resolvía las dudas que les surgían. Estos datos se pueden analizar desde el papel

del profesor y estudiar cómo influyen sus creencias y su formación en el aprendizaje de sus estudiantes (Kendal y Stacey, 2002).

Por último, y con el ánimo de manifestar el reconocimiento de la autora hacia otros marcos teóricos que comparten con APOS el empeño por ampliar el conocimiento sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje, se considera que los datos que se han obtenido para desarrollar esta investigación permiten otra lectura, y otra interpretación, desde diferentes perspectivas para complementar los resultados logrados.

## REFERENCIAS


Aldis, G. K., Sidhu, H. S., Joiner, K. F. (1999). Trial of Calculus and Maple with heterogeneous student groups at the Australian Defence Force Academy. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 6*(3), 167-190.

Aledo, J. A., Cortés, J. C. (2000). Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas. *Suma, 34*, 53-58.

Aledo, J. A., Cortés, J. C. (2001). Suma geométrica de series numéricas. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 27*, 105-114.

American Psychological Association. (2009). Publication manual of the American Psychological Association (6th ed.). Washington, DC: Autor.

Aranda, C. (2008). *Construcción del concepto de dependencia lineal en el espacio: Diseño y realización de un experimento de enseñanza*. (Memoria de DEA sin publicar). Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Arquímedes (trad. 1986). *El método*. (María Luisa Puertas Castaño, trad.; Luis Vega introducción y notas). Madrid: Alianza.

Arquímedes (trad. 2009) *Tratados II. Sobre las líneas espirales. Sobre el equilibrio de las figuras planas. Arenario. Cuadratura de la parábola. Sobre los cuerpos flotantes. Stomachion. Método. Libro de los lemas. Problema de los bueyes. Fragmentos*. (Paloma Ortiz García, trad.) Madrid: Gredos.

Artigue, M. (1997). Le logiciel 'DERIVE' comme révélateur de phénomènes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33*, 33-169.

Artigue, M. (2001). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *2nd CAME Symposium. Communicating Mathematics through Computer Algebra Systems*, Freudenthal Institute, University of Utrecht. Recuperado en septiembre de 2004 desde http://www.lonklab.ac.uk/came/freudenthal/1-Presentation-Artigue.pdf

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., y Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II, Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 6* (pp. 1-32). Providence: American Mathematical Society.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 246-259.

Azcárate, C. (1998). Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 1*(2), 235-240.

Azcárate, C., Camacho, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 135-149.

Bachelard, G. (1975). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Bagni, G. T. (1999). Le serie numeriche dalla storia alla didatica della matematica. En A. Gagatsis (Ed.) *A Multidimensional Approach to Learning in Mathematics and Sciences* (pp. 183-194). Nicosia, Cyprus: Intercollege Press.

Bagni, G. T. (2000). Integrating history: research perspectives. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education: An ICMI Study* (pp. 82-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

Bagni, G. T. (2001a). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-62.

Bagni, G. T. (2001b). Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bolletino dei Docenti di Matematica, 42*, 9-20.

Bagni, G. T. (2004). History of mathematics and didactics: Reflections on teachers education. *10th International Congress on Mathematical Education (ICME 10)* (pp. 1-9). Copenhagen: The Danish University of Education. Recuperado en febrero de 2007 desde http://www.syllogismos.it/history /Icme10-DG6.pdf

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, June*. Recuperado en febrero de 2007 desde http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/bagni.pdf

Baker, B., Cooley, L., Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. *Journal for Research in Mathematics Education. 31*(5), 557-578.

Balderas, A. (1999). The influence of information technology in the daily work of mathematics teachers. *International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Societal Challenges, Issues and Approaches*. El Cairo, Egipto.

Belmonte, J. L. (2009). *Modelos intuitivos y esquema conceptual del infinito en estudiantes de Educación Primaria, Secundaria Obligatoria, Bachillerato y Universidad* (Tesis doctoral sin publicar). Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Bennett, A. (1989). Visualizing the geometric series. *Mathematics Teacher, 82*(2), 130-136.

Berkeley, G. (1734/2002). *The Analyst*. (Reeditado por D. R. Wilkins). Recuperado desde http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/Analyst.pdf

Blanco, L. J. (1996). *Aprender a enseñar matemáticas. Formación práctica de los profesores de primaria sobre resolución de problemas aritméticos*. Badajoz: ICE de la Universidad de Extremadura.

Blanco, L. J. (2001). Errors in the teaching/learning of the basic concepts of geometry. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, May*. Recuperado en enero de 2008 desde http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl /ijmenu.htm

Blanco, L. J., Guerrero, E., Caballero, A., Brígido, M., y Mellado, V. (2009). The affective dimension of learning and teaching mathematics and science. En M. P. Caltone (Ed.), *Handbook of Lifelong Learning Developments. Cap. 10*. Nova Science Publishers.

Bonar, D. D., y Khoury, M. J. (2006). *Real Infinite Series*. United States of America: Mathematical Association of America.

Bossé, M. J., Faulconer, F. (2007). Infinite sums in geometry: Inducing two sets of patterns. *Mathematics Teacher, 101*(1), 19-21.

Boulton, L., Rosas, M. H. (2003). Sumando la derivada de la serie geométrica. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(1), 89-97.

Bourbaki, N. (1976). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza.

Boyer, C. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover.

Boyer, C. (1986/1994). *Historia de la matemática*. (Mariano Martínez Pérez, trad.). Madrid: Alianza.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

Brousseau, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Conferencia de Montreal. Recuperado en enero de 2002 desde: http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03 .pdf

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Brown, A., McDonald, M., Weller, K. (2008). Step by step: iterative processes and actual infinity. *Conference Board of the Mathematical Sciences Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 5*, 117-144.

Buchberger, B. (1997, Julio). *The White-Box / Black-Box Principle in the didactics of symbolic computation*. IMACS Computer Algebra Conference, Maui, Hawaii, USA.

Buchberger, B. (2003). *The White-Box and Black-Box. Usage of Mathematical Software Systems*. Simposio "Matemáticas y nuevas tecnologías: ¿qué aprender, cómo enseñar?". Fundación Ramón Areces, Universidad Complutense de Madrid.

Burgos, J. de. (2002). *Cálculo infinitesimal de una variable*. Madrid: McGraw-Hill.

Burn, B. (2005). The vice: some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 269-295. DOI: 10.1007/s10649-005-7923-6

Callejo, M. L., Valls, J., Llinares, S. (2007) Interacción y análisis de la enseñanza: Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela. 61*, 5-22.

Camacho, M., y Depool, R., (2001a). La evolución de las actitudes de los estudiantes cuando utilizan CAS (Computer Algebra System) para el aprendizaje de los conceptos de cálculo. En, M. Camacho, A. Morales, y M. M. Socas (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 319-338). Universidad de La Laguna.

Camacho, M., y Depool, R., (2001b). Un análisis comparativo de las actitudes de estudiantes de primero de ingeniería hacia el uso de ordenadores y programas de cálculo simbólico para el aprendizaje de los conceptos de cálculo. En G. Beitia (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14* (pp. 603-610). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, M., y Depool, R., (2001c). Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un software para el aprendizaje de las matemáticas. En M. Camacho, A. Morales, y M. M. Socas (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 27-42). Universidad de La Laguna.

Camacho, M., Depool, R. (2003a). Un estudio gráfico y numérico del cálculo de la integral definida utilizando el programa de cálculo simbólico (PCS) DERIVE. *Educación Matemática, 15*(3), 119-140.

Camacho, M., Depool, R. (2003b). Using DERIVE to understand the concept of definite integral. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, December*, 1-16.

CamStudio.org [Software de ordenador]. Essex, U. K. http://camstudio.org/

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D.J., St. John, D., ... Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule? *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345-364.

Codes, M., y Sierra, M. (2004). Enseñanza-aprendizaje con Maple del concepto de convergencia de series numéricas con alumnos de primer curso de la diplomatura de informática: un estudio piloto. [Edición en CD]. En E. de la Torre (Ed.), *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones en los grupos de investigación. VIII Simposio SEIEM*. Universidade da Coruña.

Codes, M., y Sierra, M. (2005). Entorno computacional y educación matemática: una revisión del estado actual. [Edición en CD]. En B. Gómez, M. J. González, M. Moreno, P. Bolea, P. Flores, y M. Camacho (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. IX Simposio de la SEIEM*. Santander: Universidad de Cantabria.

Codes, M., y Sierra, M. (2007a) Una primera aproximación al análisis de la comprensión de alumnos de primero de la Escuela de Informática de la UPSA sobre la noción matemática del concepto de serie numérica. [Edición en CD]. En P. Bolea, M. Camacho, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo, y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. X Simposio de la SEIEM. (pp. 173-186)*. Huesca.

Codes, M., Sierra, M. (2007b). Actividad Rectángulos: Un ejemplo de aplicación de metodologías activas en el aula universitaria de matemáticas. [Edición en CD]. *Actas de las IV Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria*. Universidad Europea de Madrid.

Codes, M., Sierra M., y Raboso, M. (2007). Innovación en la recogida de datos para una investigación de carácter cualitativo. Un ejemplo con alumnos universitarios en un entorno computacional. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 261-271). San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: Caja Canarias.

Codes, M., y Sierra, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes universitarios en el aprendizaje del concepto de convergencia de serie numérica. En R. Luengo (Coord.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 379-389). Badajoz: Indugrafic Artes Gráficas.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J. (2003). *An Overview of Theories of Learning in Mathematics Education Research*. Recuperado en marzo 2006 desde http://homepages.ohiodominican.edu /~cottrilj/theory-pmet.pdf

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., Vidakovic, D. 1996. Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behaviour, 15*, 167-192.

Dana-Picard, T., Steiner, J. (2003). Enhancing conceptual insight using a CAS. *3rd CAME Symposium. Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment*. Freudenthal Institute, University of Utrecht. Recuperado en febrero de 2005 desde http://www.lonklab.ac.uk/came/events/reims/3-ShortPres-DanaPicard.pdf

Davis, R. B., Vinner, S. (1986) The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 281-303.

Dhombres, J., Dahan-Dalmedico, A., Bkouche, R., Houzel, C., Guillemot, M. (1987). *Mathématiques au fil des âges*. París: Gauthier-Villars.

Dienes, Z. D. (2002). How to make infinity intelligible? *Mathematics Magazine, 39*(2), 50-55.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(3), 189-209.

Drijvers, P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(5), 221-228.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1995). ISETL: A programming language for learning mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 48*(9), 1027-1051.

Dubinsky, E., Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education. The genetic decomposition of induction and compactness. *Journal of Mathematical Behavior, 5*, 55-92.

Dubinsky, E., y McDonald, M. A. (2001). APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, M. Artigue, U. Kirchgräber, J. Hillel, M. Niss, y A. Schoenfeld (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 275-282). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: part I. *Educational Studies in Mathematics, 58,* 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part II. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 253-266.

Dunham, W. (2004). *Viaje a través de los genios. Biografías y teoremas de los grandes matemáticos*. Madrid: Pirámide.

Durán, A. J. (1998). Historia. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 1*(2), 229-233.

Durán, A. J. (2000). *Notas de la traducción de Introducción al análisis de los infinitos*. Edición en castellano de A. J. Durán y F. J. Pérez (Eds.), Sevilla: SAEM "Thales" y Real Sociedad Matemática Española.

Earles, J. S. (2000). Mathematical beliefs and conceptual understanding of the limit of a function. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 258-276.

Edwards, C. H. (1979). *The historical development of the calculus*. New York: Springer.

Eisenberg, T., y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmermann y S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-37). Washington DC: Mathematical Association of America.

Euclides. (trad. 1994). *Elementos. Libros V-IX*. (María Luisa Puertas Castaño, trad.) Madrid: Gredos.

Euclides. (trad. 1996). *Elementos. Libros X-XIII*. (María Luisa Puertas Castaño, trad.) Madrid: Gredos.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48,* 309-329.

Fischbein, E., Tirosh, D., Hess, P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*, 3-40.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en didáctica de las matemáticas. *Revista EMA*, *7*(2), 127-170.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 131-143.

Furinghetti, F., Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 71-90. DOI 10.1007/s10649-008-9134-4

Galbraith, P., Haines, C. (1998). Disentangling the nexus: Attitudes to mathematics and technology in a computer learning environment. *Educational Studies in Mathematics, 36*(3), 275-290.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años*. [Edición microfotográfica] (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.

Garbín, S., Azcárate, C. (2002). Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años. *Enseñanza de las Ciencias*, *20*(1), 87-113.

Gleason, J. (2001). *The use of a Computer Algebra System in first year college mathematics classes*. Recuperado en febrero de 2005 desde http://www.graddiv .ucsb.edu/academic/ccut/portfolios/gleason/portfolio/caspaper.pdf

Gómez-Chacón, I. M. (1998). ¿Es la actividad matemática algo emocional? *Revista de la Real Sociedad Matemática Española, 1*(3), 415-423.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). Affective influences in the knowledge of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 43*(2), pp. 149-168.

Gómez-Chacón, I. M. (2003). La tarea intelectual en matemáticas. Afecto, meta-afecto y los sistemas de creencias. *Boletín de la Asociación Venezolana, 10*(2), 225-247.

Gómez-Chacón, I. M. (2009). Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad. *Educación Matemática, 21*(3), 5-32.

González-Martín, A., Seffah, R., Nardi, E. (2009). The concept of series in the textbooks: A meaningful introduction? En M. Tzekaki, M. Kalmidrimou, y C. Sakonidis (Eds.), *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 105-112). Thessaloniki, Grecia: PME.

González-Martín, A., Seffah, R., Nardi, E., Biza, I. (2009). The understanding of series: The didactic dimension. *61st Meeting of CIEAEM (Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques)* (pp. 203-207). Montreal, Canada.

Gray, E., Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 116-140.

Guin, D., Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 195-227.

Guin, D., Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: Necessity of instrumental orchestrations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(5), 204-211.

Guin, D., Trouche, L. (2005). Distance training, a key mode to support teachers in the integration of ICT? *4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Sant Feliu de Guixols, España.

Gutiérrez, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de Geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX* (pp. 27-44). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba y Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM.

Guzmán, M. de (1991). Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. En M. Abellanas, y A. García (Eds.), *Actas de las Jornadas sobre Enseñanza Experimental de la Matemática en la Universidad* (pp. 9-27). Universidad Politécnica de Madrid.

Guzmán, M. de (2002). The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis. *International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*, Creta, Grecia. Recuperado en marzo de2003 desde http://www.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/invGuz.pdf

Hall, R. (2000). Videorecording as theory. En D. Lesh y A. Kelley (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 647-664). Mahweh, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hammack, R. H., Lyons, D. W. (2006). Alternating series convergence: A visual proof. *Teaching Mathematics and Its Applications: An International Journal of the IMA, 25*(2), 58-60.

Heeffer, A. (2006*).* The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education. *International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education* .Chang Mai, Thailand.

Heid, M. K. (1988). Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool. *Journal for Research in Mathematics Education, 19,* 3-25.

Heid, M. K. (2003). Research on technology and the teaching and learning of mathematics. *International Conference on Research and Development in Mathematics and Science Education*. Recuperado en febrero de 2005 desde http://clnet.org/archive /dfgnsf/docs/KielUSPlenaryPapers.pdf

Herscovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the learning of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 60-86). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 213-223.

Iannone, P., Nardi, E. (2001). On the Tail of a Sequence, the Universal Quantifier and the Definition of Convergence. *5th British Congress on Mathematics Education* (pp. 147-157). Keele University.

Jaramillo, C. M., Campillo, P. (2000). Tratamiento estadístico y propuesta metodológica de la noción de convergencia de una serie en el contexto de Van Hiele. *Epsilon, 48*, 209-224.

Kendal, M., Stacey, K. (2002). Teachers in transition: Moving towards CAS-supported classrooms. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(5), 196-203.

Kidron, I. (2001). Animation and epistemology. *2nd CAME Symposium. Communicating Mathematics through Computer Algebra Systems*. Freudenthal Institute, University of Utrecht. Recuperado en febrero de 2005 desde http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events /freudenthal/theme1.html

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. En A. D. Cockbrun y E. Nardi (Eds.), *26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 209-216). Norwich, England: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Kidron, I., Zehavi, N., Openhaim, E. (2001). Teaching the limit concept in a CAS environment: students' dynamic perceptions and reasoning. *25th PME Conference, 3*, 241-248.

Kimmis, D. (2004). Utilizing the power of technology to visualize mathematics. *9th Annual Mid-South Instructional Technology Conference. Teaching, Learning, & Technology. Transforming the Learning Environment*. Recuperado en febrero de 2005 desde http://www.mtsu.edu/~itconf/proceed04/kimmins.pdf

Kindt, M. (2005). *La historia de la matemática en la enseñanza del análisis*. Curso interuniversitario "Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas". Universidad de La Laguna.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza.

Lagrange, J. B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : Une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43*, 1-30.

Lanius, C. (1999-2008). *Visualizing an infinite series*. Recuperado en diciembre de 2006 desde http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/Series/infinite.htm

Lay, S. R. (1985). Sharing Teaching Ideas: A Geometric View of the Geometric Series. *Mathematics Teacher, 78*, 434-435.

Lazarus, E. (2006). *Using "videopapers" for professional learning and assessment in initial teacher education*. Recuperado en febrero de 2007 desde http://www.ituniv.se /program/ikt/ttit06/PowerPoint/Elisabeth_Lazarus_061116.ppt

Lesh, R., y Lehrer, R. (2000). Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. En D. Lesh y A. Kelley (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 665-708). Mahweh, NJ: Lawrence Erlbaum.

Llinares, S. (2008). Learning to notice the mathematics teaching. Adopting a socio-cultural perspective on student teachers' learning. En A. Gomes (Coord.), *EME2008 Elementary Mathematics Education* (pp. 31-44). Braga, Portugal: Barbosa & Xavier.

Llinares, S., y Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. Technologies, interactions and new forms of discourse En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 155-179). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Llinares, S., Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: los vídeos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria, 13*, 29-44.

Llinares, S., Valls, J. (2007). The building of pre-service primary teachers' know-ledge of mathematics teaching: Interaction and online video cases studies. *Instructional Science*, DOI: 10.1007/s11251-007-9043-4

Llinares, S., Valls, J., Roig, A. I. (2008). Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, *20*(3), 31-54.

Llorens, J. L., Santonjan, F. J. (1997). Una interpretación de las dificultades en el aprendizaje del concepto de integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1/2), 61-76.

Mabry, R. (1999). Proof without words: $\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}$. *Mathematics Magazine*, *72*(1), 63.

Mackie, D. (2002). *Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus*. Recuperado en febrero de 2005 desde http://www.math.uoc.gr/ictm2 /Proceedings/pap415.pdf

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear of the formal, a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 259-288.

McDonald, M. A., Mathews, D. M., Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 8*, 77-102.

Monaghan, J. (1991). Problems with the language of limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 239-257.

Monaghan, J., Sun, S., y Tall, D. (1994). Construction of the limit concept with a computer algebra system. En J. P. da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *18th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 279-286). Lisboa, Portugal.

Mugler, C. (1970). *Archimède*. París: Société d'Édition Les Belles Lettres.

Nardi, E., Biza, I., González-Martín, A. (2009). Introducing the concept of infinite series: The role of visualisation and exemplification. En M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, y C. Sakonidis (Eds.), *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 192-200). Thessaloniki, Greece: PME.

O'Callaghan, B. R. (1998). Computer-intensive algebra and students' conceptual knowledge of functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(1), 21-40.

Ortega, M., Contreras, A. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. (En prensa).

Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años* (Tesis doctoral). Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna. Recuperado en enero de 2008 desde http://dialnet.unirioja.es/servlet/oaites?codigo=991.

Palmiter, J. (1991). Effects of a computer algebra system on concept and skill acquisition in calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(2), 151-156.

Przenioslo, M. (2004). Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics, 55,* 103-132.

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics, 60,* 71-93.

Real Academia Española. (2001). *Diccionario de la lengua española* (22.ª ed., Tomo II). Madrid: Espasa Calpe.

Rodríguez-Vida, S. (2006). *Curso práctico de corrección de estilo*. Barcelona: Octaedro.

Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 217-233.

Robert, A., y Schwarzenberger, R. (1991). Research in teaching and learning mathematics at an advanced level. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 127-139). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de bachillerato y primer año de universidad sobre la noción matemática de derivada (desarrollo del concepto)* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Sevilla.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.

Sfard, A., Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Sherin, M. G. (2003). New perspectives on the role of video in teacher education. *Advances in Research on Teaching, 10,* 1-27. DOI: 10.1016/S1479-3687(03)10001-6

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

Sierra, M. (2000). El papel de la historia de la matemática en la enseñanza. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos* (pp. 93-96.). Madrid: Nívola.

Sierra, M., González, M. T., López, M. C. (2002). Una visión integradora acerca del concepto de límite. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 29*, 77-94.

Silvester, J. R. (1997). The Political Frogs. *The Mathematical Gazette, 81*, 58-63.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, M. Coriat, L. Puig, M. Sierra, y M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria (*pp.125-154). Barcelona: ICE Universitat de Barcelona- Horsori.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores, y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). San Cristóbal de La Laguna, Tenerife: Caja Canarias.

Socas, M. (2009, Junio). Supuestos básicos del Enfoque Lógico Semióticos (ELOS). El Modelo de Competencia Formal (MCF). *Seminario de investigación: Dificultades, obstáculos y errores en la comprensión de los marcos teóricos APOS y ELOS*. Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna.

Soto-Johnson, H. (1998). Impact of technology on learning infinite series. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 5*(2), 95-109.

Stacey, K., Kendal, M., Pierce, R. (2002). Teaching with CAS in a time of transition. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education, 9*(2), 113-127.

Swetz, F. J. (1989). Using problems from the history of mathematics in classroom instruction. *Mathematics Teacher, 82,* 370-377.

Tall, D. (1986). Using the computer to represent calculus concepts. Texto en inglés de la lectura plenaria titulada "Utiliser l'ordinateur pour se représenter des concepts du calcul différentiel et intégral", de la *IVème Ecole d'eté de Didactique des Mathématiques*, Orléans, 238-264. Recuperado en marzo de 2005 desde http://www.warwick.ac.uk/staff /David.Tall/pdfs/dot1986g-orleans-calculus.pdf

Tall, D. (1989). New cognitive obstacles in a technological paradigm. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, N.C.T.M.*, 87-92.

Tall, D. (1990). Using computer environments to conceptualize mathematical ideas. *Conference on New Technological Tools in Education* (pp. 55-75). Singapore: Nee Ann Polytechnic. Recuperado en marzo de 2005 desde http://www.warwick.ac.uk/staff /David.Tall/pdfs/dot1990a-singapore.pdf

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1993). Technology and mathematics education. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, y B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 189-199). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1994). Cognitive difficulties in learning analysis. En A. Barnard (Ed.), *Report on the Teaching of Analysis*, para el TaLUM committee.

Tall, D. (1995). The psychology of symbols and symbol manipulators: What are we doing right? Versión reducida publicada en *The Seventh Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching* (pp. 453-457). Addison-Wesley.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal, 12*(3), 210-230.

Tall, D., Schwarzenberger, R. L. E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limit. *Mathematics Teaching, 82*, 44-49.

Tall, D., Smith, D., y Piez, C. (2008). Technology and calculus. En M. K. Heid y G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses, case and perspectives. Vol. 1* (pp. 207-258). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tall, D., Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 151-169.

Tirosh, D., Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*, 33-40.

Trigueros, M. (2003). El uso de la noción de esquema en el análisis de la solución de problemas complejos. *Actas de las XIX Jornadas del SI-IDM*, Córdoba. Recuperado en marzo de 2005 desde http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Trouche, L. (2003). Managing the complexity of human/machine environment (CBLE): guiding student's process command through instrumental orchestrations. *3rd CAME Symposium. Learning in a CAS Environment: Mind-Machine Interaction, Curriculum & Assessment*. Freudenthal Institute, University of Utrecht. Recuperado en septiembre de 2004 desde http://www.lkl.ac.uk/research/came/events/reims

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: Quels usages pour quels apprentissages? *Educational Studies in Mathematics, 55*, 181-197.

Tsamir, T. (2001). When the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 48,* 289-307.

Valls, J., Llinares, S., y Callejo, M.L. (2006). Video-clips y análisis de la enseñanza: Construcción del conocimiento necesario para enseñar Matemáticas. En M. C. Penalva, I. Escudero, y D. Barba (Eds.), *Conocimiento, entornos de aprendizaje y tutorización para la formación del profesorado de Matemáticas* (pp. 25-43). Granada: Proyecto Sur.

Weigand, H. G. (2004). Sequences - Basic elements for discrete mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 36*(3), 91-97.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M., Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society*, *51*(7), 741-750.

Williams, S. R. (2001). Predications of the limit concept: An application of repertory grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 341-367.

Yarema, C. H., Sampson, J. H. (2001). Just Say "Charge It!". *Mathematics Teacher, 94*(7), 558-564.