Facultad de Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática y
Didáctica de las Ciencias Experimentales

Tesis Doctoral

Análisis de los efectos que producen las interacciones en foros virtuales en el proceso de modelación matemática de estudiantes de ingeniería en un curso de ecuaciones diferenciales

Jazmín Adriana Juárez Ramírez

Directores

Dr. José María Chamoso Sánchez

Dra. María Teresa González Astudillo

Salamanca, 2014

José Mª Chamoso Sánchez
Mª Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca
Dpto. Didáctica de la Matemática y de las CCEE.
E-mail: jchamoso@usal.es, maite@usal.es

Dr. José María Chamoso Sánchez y Dra. Mª Teresa González Astudillo, ambos Profesores Titulares de Universidad del Departamento Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca,

INFORMAN

Que la Memoria *Análisis de los efectos que producen las interacciones en foros virtuales en el proceso de modelación matemática de estudiantes de ingeniería en un curso de ecuaciones diferenciales* ha sido realizada por Dª Jazmín Adriana Juárez Ramírez bajo su dirección y constituye su tesis para optar al grado de Doctor. Se trata de un trabajo que cumple las exigencias académicas exigidas a una tesis doctoral, en concreto, se trata de un trabajo de investigación original sobre un problema de interés para la Educación Matemática, con una metodología adecuada y unos resultados relevantes.

Para que conste y tenga los efectos oportunos, autorizan la presentación de la misma.

Salamanca, 29 de octubre de 2014

Fdo.: José Mª Chamoso Sánchez

Fdo.: Mª Teresa González Astudillo

DEDICATORIA

A Rafaela, mi mamá, guía, compañera y amiga en este increíble viaje llamado vida.

AGRADECIMIENTOS

Al Dr. José María Chamoso y a la Dra. María Teresa González Astudillo, por haber aceptado dirigir esta tesis, por su tiempo, paciencia, dedicación, compromiso, apoyo, y por su amabilidad y disposición para resolver mis dudas en cualquier momento, a pesar de la distancia.

A los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Experimentales de la facultad de Educación de la Universidad de Salamanca, por todo lo que me enseñaron durante mis estudios.

A mi madre y mis hermanas, un ramillete de magnolias de acero siempre dispuestas a ayudar. A mis sobrinos, la runfla que alegra mis días.

A Juanti que estuvo a mi lado en el comienzo de este trabajo, y que me animó siempre a seguir adelante, hasta el último de sus días. A mis niños Sergio y Pelayo.

A mis amigas en Salamanca, Laura, con quién compartí risas, llantos y maullidos. A Eliza, quién siempre tuvo un espacio y una cara amable para mí durante los días difíciles. A Tere, que me brindó su amistad y su confianza de este lado del mundo. A María José, por su ejemplo de tesón, disciplina y perseverancia.

A mis amigos Álvaro, Fabiola, Juan Antonio, Juan José, Roberto, Jorgito, Jorge Mendoza, Ricardo, Encarnación, José, Eliécer, Rubén, Jonathan, que estuvieron al pendiente de mis avances. A mi amigo Juan Manuel Carballo, un hermano durante más de veinte años, quien me recuerda siempre lo hermoso de ser profesor de matemáticas.

A la Dra. Patricia Camarena Gallardo, por dedicar tiempo a responder mis preguntas y su disposición para atenderme. Y por su contribución a este trabajo.

Al Comité Técnico de Prestaciones a Becarios (COTEPABE) y a la Comisión de Operación y Fomento de Actividades Académicas **(**COFAA**)** del Instituto Politécnico Nacional (IPN) haber financiado mis estudios.

A los estudiantes que amablemente participaron en esta experiencia. Y a todas las personas que pusieron un granito de arena para que este sueño fuera posible.

Mi gratitud infinita a Dios por darme la oportunidad de estudiar en la Universidad de Salamanca, vivir y conocer la cultura de este hermoso país, España mi segunda casa.

“Alégrate porque todo lugar es aquí y todo momento es ahora”

Buda

INTRODUCCIÓN

Los métodos analíticos para resolver una ecuación diferencial han sido, durante mucho tiempo, el pilar de la enseñanza tradicional en los cursos universitarios de ecuaciones diferenciales, lo que puede ser la causa de que los estudiantes, con frecuencia, sólo consiguen una comprensión limitada de lo que representan las soluciones de una ecuación diferencial en una situación aplicada.

Algunos investigadores (por ejemplo Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000, 2003) señalaron que, un curso de ecuaciones diferenciales en el que no se aprenda la modelación matemática de procesos físicos, mostraría a los estudiantes una imagen distorsionada de la asignatura, que podrían considerarla simplemente como un grupo de técnicas de resolución sin relación con el mundo real.

Sin embargo, independientemente del enfoque utilizado en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, los estudiantes presentan dificultades al formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones resultantes y predecir cómo se comportan las soluciones (Balderas, 2010; Camacho, Perdomo y Santos, 2007).

La falta de modelación o de procesos completos de modelación, el poco o nulo balance entre los enfoques de enseñanza algebraico, geométrico y numérico, y la escasez de tiempo dedicado a analizar, interpretar y validar soluciones, así como a proporcionar ejemplos de ajustes de modelos y predicciones, son los principales problemas didácticos en los cursos tradicionales de ecuaciones diferenciales.

Por otro lado, actualmente se están llevando a cabo muchos esfuerzos para implementar otras maneras de enseñar matemáticas a través de diversos planes de estudio y con instrumentos que incluyan nuevas herramientas, enfoques pedagógicos y métodos para involucrar a los estudiantes en un proceso de aprendizaje de la Matemática más efectivo. En este sentido las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación) se consideran herramientas esenciales para el aprendizaje de las matemáticas en el siglo XXI, por lo que los centros educativos deben asegurarse que los estudiantes tengan acceso a la tecnología y los profesores deben maximizar el potencial de las TIC para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés e incrementar sus habilidades en matemáticas (NCTM, 2000).

Parece que en la actualidad, los estudiantes son más capaces de comunicarse, discutir problemas o intercambiar ideas con sus compañeros de clase de manera efectiva a través de las herramientas de comunicación mediada por computadora. Las discusiones en línea que animan a los estudiantes a participar e interactuar en un entorno de aprendizaje se están convirtiendo en un método al que se recurre para la enseñanza y el aprendizaje en diversas asignaturas.

Reconociendo la importancia de la comunicación en el aula, así como el desarrollo de herramientas tecnológicas que han generado cambios sustanciales en la forma en que los estudiantes aprenden matemáticas, nos planteamos la posibilidad de introducir el uso de la comunicación mediada por computadora en el aula cuando los estudiantes de ingeniería trabajan con modelos matemáticos.

El tema o idea inicial de investigación es aquella cuestión que se va a estudiar con interés suficiente para sustentar investigaciones que contribuyan al progreso de la comprensión sobre el mismo (Sabariego y Bisquerra, 2004). Existe una gran variedad de fuentes que pueden generar ideas de investigación, entre ellas las experiencias personales.

La motivación para trabajar a partir de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales es consecuencia de la experiencia como profesora de matemáticas en la carrera de

Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC) del Instituto Politécnico Nacional (IPN), desde hace dieciocho años. Al impartir la asignatura Ecuaciones Diferenciales, me he percatado que los alumnos no solamente presentan dificultades para comprender las técnicas de resolución de las ecuaciones diferenciales e interpretar sus soluciones, sino también para entender la importancia de los contenidos de la asignatura en relación con su carrera y la forma de vincularlos con otras disciplinas.

A partir del interés por mejorar la comprensión de los alumnos del proceso de modelación matemática, y con la asesoría de los directores de esta tesis, se llevó a cabo una investigación para analizar los efectos de las interacciones de estudiantes de ingeniería, a través de un foro virtual, en el desarrollo de un proyecto de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Por tal motivo, se diseñó una metodología para abordar la asignatura, con un enfoque en problemas de aplicación basado en la construcción de modelos matemáticos de sistemas físicos y situaciones de la vida real.

En este proceso tuvo especial importancia la comunicación a través de foros virtuales de discusión con el objetivo de proporcionar condiciones que favorecieran la interacción, considerando que la implementación de estas herramientas permite crear entornos de aprendizaje basados en modelos constructivistas que hacen posible el trabajo colaborativo, la construcción de conocimiento en una comunidad de aprendizaje así como fomentar la reflexión de los estudiantes.

La documentación generada en el proceso de investigación se organizó en una memoria con siete capítulos a los que se añade una introducción, una sección de referencias y una de anexos.

En el capítulo 1 se estructura formalmente el tema de investigación a través del planteamiento del problema, así como los objetivos. Inicialmente se muestran algunos antecedentes sobre la enseñanza de la modelación matemática y se presenta el tratamiento que dan los libros de texto universitarios de ecuaciones diferenciales a los conceptos de modelo matemático y proceso de modelación matemática. Este capítulo finaliza con la justificación de la investigación donde se incluyen las razones que se consideran que respaldan su realización.

En el capítulo 2 se exponen los antecedentes, a partir de la revisión y el análisis de las investigaciones existentes relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática con ecuaciones diferenciales, y el análisis de las interacciones a través de foros virtuales al realizar actividades de aprendizaje en algunas asignaturas relacionadas con las matemáticas.

En el capítulo 3 se exponen los pilares conceptuales en los que se apoya la investigación. Se definen y se caracterizan las interacciones mediadas por foros virtuales, se muestra una reseña de los diferentes instrumentos utilizados para analizar las interacciones a partir de su contenido y se presentan los modelos teóricos en los que se basó el análisis de la investigación realizada.

En el capítulo 4, se describe cómo fue llevada a cabo la investigación. En una primera parte se explican los componentes del contexto de la investigación: la organización y la metodología de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, el proceso de modelación matemática empleado en la experiencia y la manera en que se presentó a los estudiantes en el aula. Así mismo se presenta la plataforma web en la que se organizó la asignatura y un proyecto como una actividad de aprendizaje que realizaron los estudiantes apoyándose en los foros virtuales de la plataforma.

En la segunda parte de este capítulo, se describe el diseño de la investigación y se presentan los principios metodológicos para dar sustento al tipo de investigación efectuada. También se define la muestra de estudio y se hace una descripción de los procesos de recogida de datos, incluyendo los instrumentos considerados para recolectar la información necesaria y el análisis realizado de la información recogida.

En el capítulo 5 se muestran los resultados producto del análisis, de acuerdo a los objetivos planteados, en dos secciones: referidos a la caracterización de las interacciones de los estudiantes en un foro virtual y las modificaciones realizadas al propio trabajo como consecuencia de las interacciones.

El capítulo 6 se dedica a la discusión de los resultados obtenidos. Se explicitan recomendaciones para otros estudios y se relacionan los resultados con los de otras investigaciones existentes. También se señala la importancia y significado del estudio.

El capítulo 7 corresponde a las conclusiones finales, apoyadas en el análisis y organizadas en términos de los objetivos de la investigación. Finalmente se exponen las implicaciones educativas, las limitaciones del estudio y las perspectivas que se plantean para investigaciones futuras.

En la sección de referencias se enlistan las fuentes utilizadas para apoyar esta investigación. Al final de la memoria, se agregaron los anexos que pueden consultarse, en el CD-ROM adjunto a esta tesis, como documentos útiles para describir algunos procesos que forman parte de la investigación sin distraer la lectura del texto principal de esta memoria y evitar que, de alguna manera, se rompa el formato de ésta.

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Una vez que se concibió la idea de la investigación, y que se profundizó en el tema en cuestión a partir de una primera búsqueda bibliográfica, nos encontramos en condiciones de plantear el problema de investigación. Para llevar a cabo este proceso hemos tenido en cuenta que, de su lógica y coherencia, dependerá el curso de la investigación.

En este capítulo se establece el problema de investigación en cinco apartados. Con el propósito de situar el objeto de investigación, en el primer apartado se exponen algunas reflexiones sobre la enseñanza de la modelación matemática para justificar su integración en el ámbito escolar. Posteriormente, en el segundo apartado se presentan los resultados de un análisis realizado con el propósito de conocer la forma en la que los libros de texto universitarios de ecuaciones diferenciales tratan el proceso de modelación matemática.

Una vez ubicados los objetos de interés, en un tercer apartado se formula el problema de investigación. Posteriormente, se plantean los objetivos que guiarán la investigación y, en un quinto y último apartado, se incluyen los argumentos que justifican la realización de la investigación que se presenta.

1.1. Reflexiones sobre la enseñanza de la modelación matemática

Uno de los objetivos más importantes de los cursos de matemáticas en la Universidad es que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos para aplicarlos en contextos diferentes al cual se aprendieron.

Desde hace unas dos décadas, de Guzmán (1993) señaló la existencia de una fuerte corriente en Educación Matemática que sostenía la necesidad de que el aprendizaje de la matemática no se realizara explorando las matemáticas en sí mismas, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real:

> *"Parece obvio que si nos limitáramos en nuestra educación a una mera presentación de los resultados que constituyen el edificio puramente teórico que se ha desarrollado en tal intento, dejando a un lado sus orígenes en los problemas que la realidad presenta y sus aplicaciones para resolver tales problemas, estaríamos ocultando una parte muy interesante y substancial de lo que la matemática verdaderamente es"* (p.77).

La modelación matemática ha sido fuertemente defendida, en diversos países, como un método de enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos, ya que permite al estudiante no solamente aprender las matemáticas de manera aplicada en otras áreas del conocimiento, sino también mejorar la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones reales.

La noción de modelo en Educación Matemática no surge de la matemática misma, sino que se trata de una relación entre un fenómeno, material o esquema y un concepto, estructura o procedimiento matemático (Castro y Castro, 2000). En otras palabras, existe una relación directa entre realidad y modelo mediada por conceptos matemáticos.

Al reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas, Gómez (2001) propuso la modelación matemática como una alternativa docente, señalándola como una herramienta de enseñanza-aprendizaje válida y eficaz, que favorece la creatividad y la motivación de los estudiantes al mostrarles aplicaciones reales de las matemáticas, y al poner a su alcance recursos y ejemplos cotidianos. Para este autor, el conocimiento es un todo y las matemáticas son un subconjunto de este todo, y considera que enseñar matemáticas como si estuvieran apartadas es una distorsión del conocimiento. Por ello sugirió, a los profesores, enseñar matemáticas yendo más allá de las propias matemáticas al considerar sus relaciones con otras áreas:

> *"Es preciso que como profesionales de la enseñanza, mostremos su utilidad más allá del ámbito meramente matemático. Es deseable que los estudiantes conozcan el uso cotidiano y profesional de las matemáticas. De hecho, si les mostramos la utilidad de las matemáticas, los estudiantes se sentirán más motivados en su estudio, lo cual repercutirá en beneficio de su carrera"* (p.120).

Por lo cual, dar un papel primordial a la modelación tiene importantes repercusiones desde el punto de vista educativo. Para Godino, Batanero y Font (2004) sería contradictorio, con la génesis histórica de las matemáticas y sus aplicaciones actuales, presentar la modelación como algo cerrado, completo y alejado de la realidad.

La modelación promueve el significado y la comprensión en matemáticas; además, cuando se presenta mediante problemas planteados en un contexto del mundo real, fomenta que los estudiantes formulen preguntas sobre el contexto y piensen en la utilidad de sus conocimientos matemáticos (Santos y Reyes, 2011).

Biembengut y Hein (2004) identificaron dos posturas con respecto a la modelación: la que considera que a través de la modelación no se pueden enseñar nuevos conceptos matemáticos y la que defiende que la modelación es un proceso ideal para enseñar matemática. Además, señalaron que al aplicar la modelación matemática se propicia en el estudiante entre otras cosas:

- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.
- Interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad.
- Mejora de la comprensión de los conceptos matemáticos.
- Capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar situaciones problema.
- Estimulación de la creatividad al formular y resolver problemas.
- Habilidad con el uso de la tecnología.
- Capacidad para actuar en grupo.

Existen dos tendencias importantes que existen alrededor de la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática: una que afirma que se puede enseñar "a través de la modelación" y otra que sostiene que es "la modelación" la que se debe enseñar (Gallegos, 2007). En otras palabras, según estas posturas, la modelación puede ser estudiada como herramienta pero también como objeto de enseñanza.

Convencido de la importancia de llevar la enseñanza de la modelación matemática al nivel universitario Alsina (2007) estableció que, a través del aprendizaje del modelado, los estudiantes pueden comprender cómo se originaron muchos conceptos y estructuras matemáticas, así como sus aplicaciones fuera de las matemáticas. Además, señaló que la enseñanza de la modelación abre una excelente oportunidad para revisar la evaluación tradicional por medio de exámenes escritos y da lugar a una variedad de prácticas de evaluación que pueden implementarse en la educación superior tales como tareas abiertas, portafolios de evidencias, desarrollo de proyectos y trabajo en grupo.

En la literatura sobre modelación matemática se pueden encontrar distintos ciclos o procesos de modelado que dependen de diversas orientaciones y enfoques de cómo se entiende el modelado y, además, en algunos casos, si se utilizan tareas complejas o no. Algunos investigadores (Balderas, 2001; Falsetti y Rodriguez, 2005; Hernández, 2009) consideraron en sus trabajos el ciclo completo de modelación. Otros autores (Chaachoua y Saglam, 2006; Crouch y Haines, 2004; Haines y Crouch, 2001; Klimchuk y Zverkova, 2001; Rowland, 2006; Rowland y Jovanoski, 2004) enfocaron sus trabajos a algunas etapas específicas del proceso.

Bassanezi y Biembegut (1997) enfatizaron que, al usar la modelación como un método de enseñanza, se debe seguir una secuencia de etapas bien definida y se debe aclarar a los estudiantes la dinámica del proceso aunque en algunas ocasiones no pueden identificarse etapas específicas de un ciclo de modelación sino la transición entre dos o más etapas.

Sin embargo, en los programas de las asignaturas de matemáticas para ingeniería, la práctica de modelación matemática se reduce a las aplicaciones, las cuales no son más que problemas propuestos al final de los capítulos en los libros de texto. Es decir, el papel que tiene la modelación en los cursos de matemáticas para ingeniería, en la mayoría de los casos, es de carácter teórico y se basa en modelos preestablecidos que los estudiantes resuelven como simples ejercicios.

En este sentido, Córdoba (2011) estableció que el proceso de modelación se enseña en las aulas de manera parcial, evitando confrontar a los alumnos con etapas claves de este proceso. En la mayoría de los casos los estudiantes no establecen el modelo, lo cual resta significado a la práctica.

Todo lo anterior ha conducido a plantear la importancia de la modelación como un método para enseñar matemáticas a los futuros ingenieros, considerando que es necesario que éstos cuenten con las herramientas necesarias para resolver problemas en el campo laboral y profesional al relacionar sus conocimientos en matemáticas con eventos contextualizados propios de su campo.

1.2. Modelación matemática en los libros de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales han sido, desde hace siglos, parte importante del cálculo y han desempeñado un importante papel en las matemáticas.

Algunos autores (Habre, 2000; Hubbard, 1994) señalaron que los cursos de ecuaciones diferenciales consisten principalmente en una secuencia de técnicas con el propósito de encontrar fórmulas de solución, y que la mayoría de los ejercicios en los libros de texto han sido adaptados con la intención de que las soluciones puedan determinarse con algunos de los métodos estudiados y para que la variable dependiente se exprese de manera explícita o implícita en términos de variable independiente.

Los enfoques tradicionales de enseñanza de las ecuaciones diferenciales hacen hincapié en técnicas analíticas, mientras que los actuales enfatizan los enfoques gráficos y numéricos para analizar y comprender el comportamiento de las soluciones. Algunos investigadores (Artigue, 1992; Rasmussen, 2001) señalaron que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales puede transformarse para incluir un enfoque más centrado en el estudiante.

Blanchard (1994) sugirió a los profesores evitar las ecuaciones diferenciales con soluciones explícitas, y utilizar computadoras o calculadoras gráficas para representar las soluciones, así como pedir a los estudiantes que interpreten y justifiquen lo que ven, ya que la formulación e interpretación son tan importantes como las técnicas.

En este sentido Boyce (1994) señaló que un curso elemental de ecuaciones diferenciales está lleno de oportunidades para trasladar problemas reales a símbolos matemáticos, para que los estudiantes puedan aplicar operaciones y procedimientos matemáticos. Y enfatizó que los estudiantes suelen encontrar esta tarea notoriamente difícil ya que, por lo general, han tenido relativamente pocas oportunidades para practicar la modelación pues sus cursos anteriores se suelen centrar en destrezas algebraicas.

Los resultados de las investigaciones que estudiaron el proceso de modelado con ecuaciones diferenciales con alumnos universitarios de primer año (por ejemplo, Balderas, 2010; Camarena, 2009; Chaachoua y Saglam, 2006; Hernández, 2009; Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier, 2010; Rowland, 2006) revelaron dificultades en la comprensión de los estudiantes tanto del concepto de ecuación diferencial como de su solución. Es importante que los estudiantes interpreten físicamente los términos de una ecuación diferencial y puedan traducirlos a una expresión matemática y que, al desarrollar actividades relacionadas con la modelación, los estudiantes puedan comprender e interpretar el concepto de ecuación diferencial (Rasmussen y Whitehead, 2003; Rowland y Jovanoski, 2004).

Todo lo anterior nos llevó a considerar la importancia de enseñar, en un curso de ecuaciones diferenciales, el proceso de modelación matemática no solamente como un ciclo dinámico para entender ciertos problemas o situaciones, sino como una forma de motivar un proceso de aprendizaje, en el cual los alumnos experimenten las matemáticas como medio para describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria. Por ello se realizó una revisión de algunos libros de texto universitarios de ecuaciones diferenciales con el objetivo de analizar la forma en que trataban el concepto de modelo matemático y el proceso de modelación matemática.

Para seleccionar los libros de texto, inicialmente, se revisaron los planes de estudio de las carreras de Ingeniería que oferta el IPN, y se identificaron las siguientes ingenierías en las que se imparte el curso de ecuaciones diferenciales:

1. Ingeniería Aeronáutica.
2. Ingeniería Eléctrica.
3. Ingeniería en Computación.
4. Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica.
5. Ingeniería en Control y Automatización.

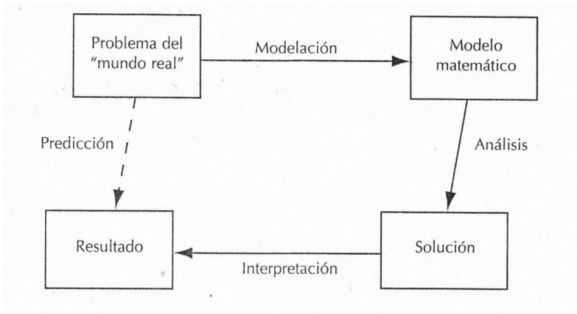
6. Ingeniería en Metalurgia y Metales.
7. Ingeniería en Robótica Industrial.
8. Ingeniería en Sistemas Automotrices.
9. Ingeniería en Sistemas Computacionales.
10. Ingeniería en Telemática.
11. Ingeniería Farmacéutica.
12. Ingeniería Geológica.
13. Ingeniería Matemática.
14. Ingeniería Mecánica.
15. Ingeniería Petrolera.
16. Ingeniería Química Industrial.
17. Ingeniería Química Petrolera.
18. Ingeniería Topográfica y Fotogrametría.

Posteriormente, se revisó el programa sintético de la asignatura Ecuaciones Diferenciales de cada una de las ingenierías para conocer la bibliografía empleada. Al comparar los programas, se identificaron 10 libros de texto y se registró tanto la definición de modelo matemático como la descripción del proceso de modelación en cada texto (Tabla 1.1 a Tabla 1.10).

Texto: Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Publishing (ITP).	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	Es importante recordar que los modelos matemáticos son como otros tipos de modelos. El objetivo no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien representar algunas características de la cosa real. Los pasos básicos para elaborar un modelo son: 1. Establezca claramente las hipótesis en que se basará el modelo. Estas deben describir las relaciones entre cantidades por estudiarse. En este paso "científico", se describe cómo funciona el sistema físico o, por lo menos, cuáles son sus aspectos más importantes. La calidad de las hipótesis determina la validez del modelo y las situaciones en que el modelo es pertinente. 2. Defina completamente las variables y parámetros que se usarán en el modelo. Las cantidades se agrupan en tres categorías básicas: la variable independiente, las variables dependientes y los parámetros. El aspecto más importante del estudio de un modelo consiste en determinar la manera en que cambian las variables dependientes cuando ajustamos los parámetros. 3. Use las hipótesis formuladas para obtener ecuaciones que relacionen las cantidades. En este paso se formulan las ecuaciones. La mayor parte de los modelos son expresados como ecuaciones diferenciales.

Tabla 1.1: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Blanchard, Devaney y Hall (1999).***

<table>
<tr><td colspan="2">Texto: Borreli, R. y Coleman, C. (2002). Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación. México: Oxford.</td></tr>
<tr><td>Modelo matemático</td><td>Es un dispositivo que ayuda a predecir o explicar el comportamiento de un fenómeno, experimento o suceso.</td></tr>
<tr><td>Proceso de modelación matemática</td><td>
La modelación es el proceso de reconstrucción de un proceso natural, de su medio a una forma llamada modelo, el cual puede analizarse por medio de técnicas que entendemos y en las que confiamos. Se construye un modelo matemático del problema por medio de leyes naturales aplicables. Después pueden usarse las ecuaciones, restricciones y elementos de control del modelo para dar una descripción razonablemente precisa.



Los modelos suelen terminar como un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias en varias funciones por determinar o en sistemas diferenciales. Alguno de los componentes esenciales de los modelos con EDO son:

1. Variables naturales. Un proceso natural se describe mediante un conjunto de variables denominadas variables naturales, que dependen de una sola variable independiente.

2. Leyes naturales. Un proceso natural se desenvuelve con el tiempo de acuerdo a las leyes o principios naturales en los que intervienen variables del mismo tipo. A veces estas leyes surgen de manera empírica; otras tienen un significado intrínseco.

3. Parámetros naturales. Las leyes naturales a menudo incluyen parámetros que deben determinarse en forma experimental.

Para construir un modelo a menudo se pasa por alto un paso importante: la validación del modelo. Se deben elaborar definiciones y simplificar suposiciones y descubrir leyes o principios básicos que gobiernan o explican el fenómeno. Para confiar en el modelo, se resuelven problemas especiales y se confronta el resultado con datos experimentales. Se usan intervalos de validez para estas limitaciones.
</td></tr>
</table>

Tabla 1.2: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Borreli y Coleman (2002).***

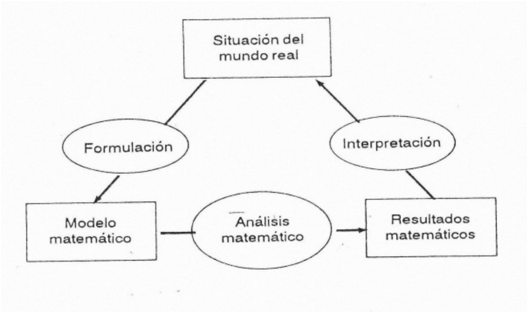
Texto: Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa-Wiley.	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	En el proceso de modelación, se presentan tres pasos identificables, sin importar cual sea el campo específico de aplicación. En primer lugar es necesario traducir la situación física en términos matemáticos. Se establecen hipótesis acerca de lo que está sucediendo, que parezcan ser coherentes con los fenómenos observados. Cada una de estas proposiciones comprende una razón de cambio (derivada) y, en consecuencia, al expresarse matemáticamente, toma la forma de una ecuación diferencial. Una vez que el problema se ha formulado matemáticamente, a menudo debe encararse el problema de resolver una o más ecuaciones diferenciales. Por último, una vez que se ha obtenido la solución, debe interpretarse en términos del contexto en el que surgió el problema. En particular siempre debe comprobarse si la solución matemática parece físicamente razonable. 

Tabla 1.3: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Boyce y Diprima (2000).***

Texto: Kreyszing, K. (1994). *Matemáticas avanzadas para ingeniería. Vol. I*. México: Limusa.	
Modelo Matemático	La definición está implícita en el proceso.
Proceso de modelación matemática	La aplicación de las matemáticas a un problema de ingeniería consiste básicamente de tres fases: *Modelo*. Traslación de la información física dada a una forma matemática. Este modelo puede ser una ecuación diferencial, un sistema de ecuaciones lineales o alguna otra expresión matemática. *Resolución*. Tratamiento del modelo por medio de métodos matemáticos. Esto lleva a la solución del problema dado, en forma matemática. *Interpretación*. Interpretación del resultado matemático en términos físicos. Los modelos por medio de EDO se elaboran según los siguientes pasos: 1) Planteamiento de un modelo matemático (ecuación diferencial del proceso físico), 2) Resolución de la ecuación diferencial, 3) Determinación de una solución particular, 4) Comprobación.

Tabla 1.4: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Kreyszing (1994).***

Texto: Nagle, K., Saff, E. y Snider A. (2001). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera*. México: Addison Wesley-Longman.	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	El proceso de imitar la realidad utilizando el lenguaje de las matemáticas se conoce como modelación matemática. Para elaborar modelos es útil el siguiente esquema general del proceso: *Formulación del problema*. Se debe plantear el problema de tal manera que pueda "responderse" matemáticamente. Esto requiere una comprensión del área del problema, lo mismo que de las matemáticas correspondientes. *Desarrollo del modelo***.** En primer lugar, es necesario decidir qué variables son importantes y cuáles no lo son. Las primeras se clasifican luego en variables independientes o variables dependientes. Las variables no importantes son aquellas que tienen muy poco o ningún efecto en el proceso. En segundo lugar, se deben determinar o especificar las relaciones (por ejemplo una ecuación diferencial), que existan entre las variables pertinentes. *Prueba del modelo***.** Antes de "verificar" un modelo comparando sus resultados con los datos experimentales, se deben considerar las siguientes cuestiones: ¿Son razonables las hipótesis? ¿Son correctas las dimensiones físicas de las variables? ¿Es el modelo internamente consistente en el sentido de que las ecuaciones no se contradigan entre sí? ¿Las ecuaciones pertinentes poseen solucionen? ¿Qué dificultad tiene obtener las soluciones? ¿Proporcionan las soluciones una respuesta del problema en estudio? Cuando sea posible, se debe dar validez al modelo comparando sus predicciones con cualquier tipo de datos experimentales.

Tabla 1.5: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Nagle, Saff y Snider (2001).***

Texto: O'Neil, P. (1994). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. *Volumen 1*. México: CECSA.	
Modelo matemático	Las ecuaciones diferenciales, junto con cualesquiera otras ecuaciones que se necesiten para especificar información acerca del sistema, constituyen un *modelo matemático* del sistema.
Proceso de modelación matemática	Se resuelven las ecuaciones del modelo a fin de entender cómo se comportan e interactúan las diferentes componentes del sistema, para anticipar cómo se comportará el sistema en lo sucesivo.

Tabla 1.6: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por O'Neil (1994).***

Texto: Penney, E. (1994). *Ecuaciones diferenciales y problemas con condiciones en la frontera*. México: Prentice Hall Hispanoamérica.	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	1. La formulación de un problema del mundo real en términos matemáticos (esto es, la construcción de un modelo matemático). 2. El análisis o solución del problema matemático resultante. 3. La interpretación de los resultados matemáticos en el contexto de la situación original del mundo real (por ejemplo, contestar la pregunta originalmente propuesta). Un modelo matemático satisfactorio ha de cumplir dos requerimientos contradictorios: debe ser lo suficientemente detallado como para representar la situación del mundo real y, a pesar de ello, debe ser bastante sencillo para permitir un análisis matemático práctico.

Tabla 1.7: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Penney (1994).***

Texto: Ross, L. (1989). *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. México: McGraw-Hill.	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	La formulación matemática de algunos problemas da lugar a ecuaciones diferenciales. En cada uno de los problemas mencionados, los objetos obedecen ciertas leyes científicas. Estas leyes implican diversas razones de cambio de una o más cantidades con respecto a otras. Recordemos que estas razones de cambio se expresan matemáticamente mediante derivadas. En la formulación matemática de cada uno de los problemas mencionados, las diversas razones de cambio se expresan mediante derivadas, y las leyes físicas dan lugar a ecuaciones matemáticas que contienen derivadas, es decir, ecuaciones diferenciales. En este proceso de formulación matemática deben efectuarse ciertas suposiciones de carácter general para simplificar su complejidad, a fin de que las ecuaciones diferenciales resultantes puedan resolverse fácilmente. De manera natural surge la siguiente pregunta: ¿Cómo se obtiene información útil de una ecuación diferencial? La respuesta es que si se puede obtener información se resuelve la ecuación diferencial hasta obtener una solución; si esto no fuera posible, entonces se usa la teoría de las ecuaciones diferenciales para obtener información acerca de la solución.

Tabla 1.8: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Ross (1989).***

Texto: Spiegel, M. (2001) *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall.	
Modelo matemático	No se define.
Proceso de modelación matemática	Hay tres etapas en la solución teórica de problemas científicos: *Formulación matemática del problema científico*. Las leyes que están basadas en experimentos u observaciones se traducen en ecuaciones matemáticas. En muchos casos un *modelo matemático* se usa para aproximarse a la realidad física. *Solución de las ecuaciones*. Las ecuaciones formuladas necesitan ser resueltas, sujetas a condiciones obtenidas del problema, para determinar la incógnita, o incógnitas involucradas. Los procedimientos usados pueden producir una solución exacta o soluciones aproximadas. El proceso de obtener soluciones frecuentemente conduce a preguntas de naturaleza puramente matemática que algunas veces tienen mayor interés que el problema científico original. *Interpretación científica de la solución*. Con el uso de las soluciones conocidas, el científico puede ser capaz de interpretar qué sucede desde el punto de vista aplicado. Se pueden hacer gráficas o tablas y comparar la teoría con los experimentos. Por supuesto que, si los experimentos u observaciones no están de acuerdo con la teoría, se debe revisar el modelo matemático y su formulación matemática hasta que se consiga un acuerdo razonable.

Tabla 1.9: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Spiegel (2001).***

<table>
<tr><td colspan="2">Texto: Zill, D. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. México: Cengage Learning.</td></tr>
<tr><td>Modelo matemático</td><td>Con frecuencia se desea describir, en términos matemáticos, el comportamiento de algunos sistemas o fenómenos de la vida real, sean físicos, sociológicos o hasta económicos. La descripción de un sistema de fenómenos se llama modelo matemático y se construye con ciertos objetivos.</td></tr>
<tr><td>Proceso de modelación matemática</td><td>La formulación de un modelo matemático de un sistema se inicia con:

i) Identificación de las variables que ocasionan el cambio del sistema. Se puede elegir no incorporar todas estas variables en el modelo desde el comienzo. En este paso especificamos el nivel de resolución del modelo.

ii) Se establece un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis acerca del sistema que estamos tratando de describir. Esas hipótesis también incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.

Una vez que se ha formulado un modelo matemático, ya sea una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, nos enfrentamos al problema que no siempre es fácil de resolver. Si puede resolverse, entonces se considera que el modelo es razonable si su solución es consistente con los datos experimentales o con los hechos conocidos acerca del comportamiento del sistema. Si las predicciones que se obtienen son deficientes, se puede aumentar el nivel de resolución del modelo o hacer hipótesis alternativas acerca de los mecanismos de cambio del sistema. Entonces se repiten los pasos del proceso de modelado:

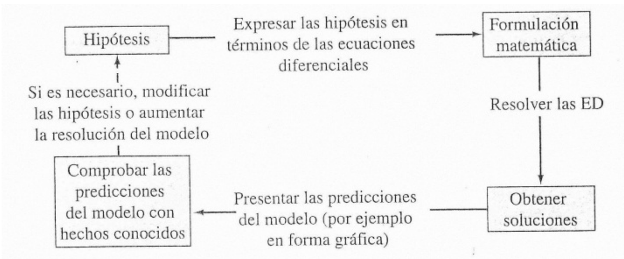

</td></tr>
</table>

Tabla 1.10: ***Definición de modelo matemático y descripción del proceso de modelación matemática por Zill (2006).***

Se observó que, entre los libros revisados, dos no son exclusivamente de ecuaciones diferenciales sino que, además, contienen temas de álgebra lineal: O´Neil (1994) y Kreyszing (1994). En el primero, la definición de modelo matemático aparece en términos de ecuaciones diferenciales; en el segundo la definición está implícita en la descripción del proceso de modelación, concretamente en problemas de ingeniería. Solamente algunos de los textos revisados contienen la definición del concepto de modelo matemático: Borreli y Coleman (2002), y Zill (2006). El primer texto no vincula el concepto con la matemática explícitamente sino que lo asocia al término "dispositivo" (Tabla 1.2). El segundo incluye, en su definición, la relación entre la matemática y los sistemas físicos, y las situaciones de la vida real (Tabla 1.10). Hay que mencionar que este libro es común en los programas de la asignatura Ecuaciones Diferenciales que se consultaron.

En referencia a la descripción del proceso de modelación matemática, se presenta como:

- Un proceso que consta de fases o pasos y que concluye con el planteamiento de ecuaciones diferenciales (Blanchard, 2004; Nagle, Saff y Snider, 2001).
- Un proceso en el que la solución de las ecuaciones resultantes, así como la interpretación de la solución, son fases del mismo (Boyce y DiPrima, 2000; Kreyszing, 1994; Penney, 1994; Spiegel, 2001).
- Un proceso que consiste en la construcción de un modelo matemático pero que no está completo si no se soluciona e interpreta (Zill, 2006).
- Una definición de elementos que intervienen en el proceso de representar situaciones mediante ecuaciones diferenciales (Borreli y Coleman, 1998; Ross, 1989). Hay que señalar que O'Neil (1994) describió el proceso de modelación solamente en términos de la solución de las ecuaciones resultantes (Tabla 1.6).

Balderas (2001) manifestó la importancia de analizar e interpretar la solución de una ecuación diferencial asociada a un modelo matemático; además enfatizó que, en los cursos tradicionales, por lo general, los problemas de ecuaciones diferenciales concluyen cuando se consigue la solución y, una vez obtenida ésta, se aborda el siguiente ejercicio. En términos de los libros revisados, Spiegel (2001) y Zill (2006) sugirieron interpretar la solución con gráficas o tablas.

En términos de la validez de un modelo matemático, algunos textos señalan que es un paso importante que no debe pasarse por alto (Borreli y Coleman, 2002; Nagle, Saff, y Snider, 2001; Zill, 2006). En este sentido, Balderas (2010) sugirió que hay que validar un modelo matemático, ya que siempre es posible presentar el contexto en el que surge el modelo y, por lo tanto, comparar la solución obtenida con el fenómeno al que se hace referencia, llevar a cabo simulaciones y hacer un análisis de los parámetros. Por su parte Bassanezi y Biembengut (1997) enfatizaron que toda solución debe ser interpretada usando datos recogidos y, si es posible, verificar su validez empírica en términos científicos.

Por último, son pocos los libros que incluyen diagramas para representar el proceso de modelación matemática: Boyce y DiPrima (2000), Borreli y Coleman (2002), y Zill (2006).

Por lo tanto, las observaciones realizadas a partir de la revisión de los libros de texto han permitido determinar que, la mayoría de estos, abordan el proceso de modelación matemática para mostrar las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales en situaciones reales de manera incompleta. Esto nos conduce a la necesidad de proponer en el aula un proceso de modelación matemática que incluya la construcción del modelo, la solución del modelo resultante y un análisis detallado de la solución, sin olvidar la validación del modelo propuesto.

1.3. Formulación del problema

Las ideas tratadas en la sección anterior nos llevan a considerar la necesidad de presentar el proceso de modelación matemática a los estudiantes de ingeniería no solamente como un proceso que simplemente intenta ampliar el conocimiento, sino como una forma particular de pensar y actuar, al unir abstracciones con fenómenos y situaciones cotidianas.

Por otro lado, hemos considerado que, en los cursos de matemáticas, el uso de foros virtuales fomentaría el trabajo colaborativo y la participación en una comunidad de aprendizaje, permitiendo a los estudiantes analizar, reflexionar y negociar mientras se lleva a cabo el debate de un tema, y a los profesores evaluar las habilidades de pensamiento expuestas durante el debate.

Por tanto, nos hemos planteamos diseñar una experiencia con estudiantes de primer año de ingeniería en un curso de ecuaciones diferenciales, para responder la siguiente pregunta:

> *En un curso de ecuaciones diferenciales, ¿Cómo influyen las aportaciones de estudiantes de ingeniería en un foro virtual relacionadas con el proceso de modelación matemática?*

1.4. Objetivos de investigación

Se trata de analizar los efectos de las aportaciones de estudiantes de ingeniería, a través de un foro virtual, en el desarrollo del proceso de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. En concreto, cuando estudiantes de ingeniería trabajan en grupos en un curso de ecuaciones diferenciales para desarrollar un proyecto de modelación matemática, que incluye la comunicación a través de un foro virtual, se pretende:

Objetivo 1. Analizar el nivel y la profundidad de las interacciones en el foro.

Objetivo 2. Analizar la influencia de las interacciones en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo.

1.5. Justificación

Esta propuesta es un intento por aportar resultados a la literatura acerca del uso de herramientas de comunicación asíncronas basadas en web, los efectos del uso de foros virtuales en el aprendizaje de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de los estudiantes de ingeniería del IPN y, de esta forma, proporcionar una perspectiva desde una experiencia realizada en México.

Esta investigación puede justificarse tomando en cuenta que:

1. La escasa o insuficiente vinculación del estudio de los contenidos matemáticos con situaciones reales no permite que el conocimiento matemático sea puesto en un plano diferente al teórico y conceptual, y surja como una herramienta importante y de apoyo en otras áreas del conocimiento.
2. El estudio de las aplicaciones a través de la modelación matemática propicia, en el estudiante, habilidades tales como: integración de la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática frente a su aplicabilidad y estímulo a la creatividad en la formulación y resolución de problemas.
3. Existe la necesidad de implementar gradualmente la modelación en los cursos de matemáticas para ingenieros con el objetivo que los estudiantes estén inmersos en procesos de modelación más complejos y propios de las

asignaturas de sus especialidades de tal forma que, al egresar, respondan adecuadamente ante situaciones que demandan la modelación propia de su ejercicio profesional.

4. Los foros virtuales han sido empleados para promover las interacciones entre estudiantes de diversos niveles y en diferentes áreas del conocimiento. Existen publicaciones que analizan las consecuencias del uso de foros en diversas disciplinas pero son limitadas las que han estudiado su uso en asignaturas de matemáticas a nivel universitario, así como en carreras de ingeniería.

5. El modelo educativo del IPN reconoce los beneficios del uso de las TIC y sugiere acciones relativas al diseño de sistemas de apoyo a la enseñanza-aprendizaje y al aprovechamiento de éstas en las instituciones educativas. Este planteamiento está de acuerdo con la Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el siglo XXI, en la cual se establece que las instituciones de educación superior deben aprovechar las ventajas y el potencial de las TIC, así como cuidar la calidad de la educación mediante la construcción de redes, la transferencia tecnológica, la formación de recursos humanos, la elaboración de material didáctico y el intercambio de experiencias de aplicación de estas tecnologías tanto en la enseñanza como en la formación y la investigación (UNESCO, 1998).

6. Aunque existen numerosas publicaciones sobre el uso de foros virtuales, son limitadas las investigaciones sobre el análisis de interacciones a través de foros en actividades de aprendizaje en asignaturas de matemáticas con estudiantes universitarios, a pesar de que algunos investigadores han mostrado que los foros son una herramienta que puede utilizarse en diversas disciplinas y además, brindan algunas posibilidades educativas que apoyan el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Capítulo 2. ANTECEDENTES

Las investigaciones en el área de Educación Matemática han evolucionado y se han especializado cada vez más y esto se debe, por un lado, a que forma en que se conciben las matemáticas en la actualidad y, por otro, a los avances sobre cómo se debe desarrollar su proceso de enseñanza y aprendizaje. Por un lado, la disciplina Matemática ha pasado de ser considerada un sistema de definiciones, reglas y procedimientos a entenderse como ciencia de patrones donde se utilizan distintos tipos de razonamiento, así como el reconocimiento de que el conocimiento matemático se construye dentro de una comunidad que promueve y valora la participación y colaboración entre sus miembros (Bishop, 2000). Por otro lado, la Educación Matemática, donde la conceptualización de la disciplina ha pasado de incluir aspectos generales de los procesos de enseñanza y aprendizaje a matices muy concretos, para lo cual han resultado esenciales las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática en diversos sentidos (Perdomo, 2011).

Entre estas investigaciones se incluyen aquellas relacionadas con la creación de entornos de aprendizaje que introduzcan variantes en el proceso de enseñanza como, por ejemplo, el uso de tecnología, la interacción entre estudiantes o el tipo de actividades que los alumnos deben realizar. Otras profundizan en estos aspectos generales y analizan su influencia en el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares informando qué ocurre cuando se introduce el uso de los mismos en el aula, o también, detectando dificultades relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos.

En este capítulo se muestran los antecedentes en los que se ha basado la investigación en dos sentidos: el análisis de la enseñanza y el aprendizaje del proceso de modelación matemática en general, así como en los cursos de ecuaciones diferenciales, y el estudio de las interacciones a través de foros virtuales en el aula de matemáticas.

2.1. Enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática en los cursos de ecuaciones diferenciales

Las investigaciones que analizaron la enseñanza y el aprendizaje de la modelación con ecuaciones diferenciales se dirigieron en los siguientes sentidos: dificultades de los estudiantes al construir modelos matemáticos, implementación de estrategias en la enseñanza de la modelación matemática y escasez de tratamiento de modelos matemáticos en las aulas.

Dificultades de los estudiantes al construir modelos matemáticos

En el grupo de investigaciones que se describen a continuación, se estudian los problemas a los que se enfrentan los estudiantes al estudiar modelación matemática en términos de la construcción del modelo matemático de un fenómeno físico, sus elementos, la interpretación de su solución, su relación con una situación real y las etapas que se deben seguir para construirlos (Chaachoua y Saglam, 2006; Crouch y Haines, 2004; Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier, 2010; Martins, 2008; Rowland, 2006; Rowland y Jovanoski, 2004; Soon, Tirtasanjaya y McInnes, 2011).

Rowland y Jovanoski (2004) realizaron un estudio para identificar las dificultades de 59 estudiantes universitarios, matriculados en un curso de cálculo y álgebra lineal, para interpretar físicamente los términos de una ecuación diferencial y traducirlos de una descripción física a una matemática. A partir de los resultados, los investigadores destacaron que el buen desempeño en procesos algorítmicos al resolver la ecuación diferencial no necesariamente implicaba que los estudiantes aprendieran los conceptos.

En concreto, los resultados mostraron que los estudiantes tenían dificultades para interpretar la derivada y confundían la cantidad con la tasa de variación de la cantidad, además de otras imprecisiones en el lenguaje. Además, los términos constantes de las ecuaciones diferenciales fueron interpretados por muchos estudiantes como condición inicial o como una cantidad máxima o de equilibrio, en vez de una tasa de variación constante. Rowland y Jovanoski (2004) consideraron que el conocimiento de muchos estudiantes era altamente fragmentado y, consecuentemente, dependiente del contexto y que, por ejemplo, es necesario un cambio de paradigma sobre la función que describe "cómo varía la cantidad" para dar paso a un pensamiento sobre la ecuación que describe "cómo cambia la tasa de variación de la cantidad".

Posteriormente Rowland (2006) realizó un estudio con estudiantes universitarios de primer año de ingeniería, matriculados en un curso de cálculo, en un contexto de modelación, para analizar sus dificultades al identificar las unidades de magnitudes físicas. A partir de un cuestionario diagnóstico, que incluía una pregunta en la cual se les pedía que proporcionaran las unidades y la interpretación física de cada uno de los términos de una ecuación diferencial que representaba una situación real, los resultados recogieron que, a pesar de que los estudiantes eran conscientes de que las ecuaciones debían ser dimensionalmente homogéneas, la mayoría no utilizó este hecho para entender las ecuaciones diferenciales en contextos de modelado; incluso algunos estudiantes consideraron que los factores de proporcionalidad no tenían unidades. Esto puede ser debido a que, usualmente, a los estudiantes se les proporciona la mayoría de las ecuaciones que resolverán, que suelen ser dimensionalmente correctas, lo que hace que no presten atención a las unidades durante el cálculo.

Puede observarse que, en los trabajos de Rowland y Jovanoski (2004), y Rowland (2006), se encontraron errores comunes de los estudiantes al interpretar diferentes términos de una ecuación diferencial, e ignoraron la consistencia en las unidades en los términos de la ecuación diferencial, e incluso algunos alumnos consideraron que los factores de proporcionalidad no tenían unidades. Los autores atribuyeron las dificultades a la existencia de vínculos débiles entre las matemáticas y los procesos físicos, y los problemas sencillos a que están acostumbrados los estudiantes.

En términos de las dificultades de los alumnos para relacionar las matemáticas y los fenómenos físicos, Chaachoua y Saglam (2006) investigaron las dificultades de 50 estudiantes universitarios de primer año al vincular la electrocinética y las matemáticas con el objetivo de descubrir la forma en que los estudiantes transferían el conocimiento de las ecuaciones diferenciales en una situación de otra disciplina. Los investigadores consideraron que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales se centraba exclusivamente en la solución algebraica, que los profesores no conceden importancia a los ámbitos de aplicación y que, por lo tanto, los estudiantes generalmente reducen las ecuaciones diferenciales a soluciones algebraicas y no las relacionan con otros campos de aplicación. Los datos se obtuvieron al resolver los estudiantes una ecuación diferencial e interpretar las soluciones obtenidas. Los resultados mostraron, por un lado, que la mayoría de los alumnos que resolvieron la ecuación diferencial no intentaron analizar la solución y, por otro, que algunos estudiantes simplemente trazaron la gráfica de la solución, otros propusieron los gráficos que habían estudiado y solo un tercer grupo sabía establecer la relación entre el circuito eléctrico y el gráfico trazado. Ningún estudiante comentó la evolución futura del circuito. Chaachoua y Saglam (2006) concluyeron que la ausencia de una relación entre las dos disciplinas impidió a los estudiantes el desarrollo de competencias transversales, que la ausencia de modelado conduce a reducir esto último a la búsqueda de la ecuación diferencial del sistema a partir de leyes teóricas y que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales debía ser cuestionada utilizando activamente el proceso de modelado para dar sentido a este concepto.

En la misma línea que la investigación anterior, Klymchuk, Zverkova, Gruenwald, y Sauerbier (2010) analizaron las dificultades de los estudiantes de ingeniería al construir una función en un contexto de modelado. Se presentó, en el aula, el uso de contextos no tradicionales en modelación matemática tales como el medio ambiente y la ecología y se aplicó un cuestionario para evaluar la capacidad de los estudiantes para plantear modelos matemáticos e incluir las etapas avanzadas del proceso de modelado, incluyendo la interpretación de las soluciones y las limitaciones de los modelos. Los resultados mostraron que los estudiantes presentaron dificultades para comprender la situación que deberían modelar, identificar variables y utilizar su conocimiento matemático para establecer la función adecuada. Klymchuk, Zverkova, Gruenwald, y

Sauerbier (2010) concluyeron que las dificultades de la mayoría de los estudiantes pudieron deberse a que eran principiantes en la modelización matemática y que poseían una base de conocimientos limitada y mal estructurada, lo que les dificultó saber qué información era relevante, y qué técnicas y procedimientos debían aplicar. Y recomendaron alentar a los estudiantes a escribir detalladamente todos los pasos del proceso de modelación, incluso para problemas de aplicaciones simples, ya que esto podría prepararlos para, en otros cursos y también en su futuro trabajo, enfrentarse a problemas de la vida real que requieren habilidades de modelado matemático avanzado.

Crouch y Haines (2004) analizaron los problemas que estudiantes de ingeniería tenían en la vinculación de modelos matemáticos con las situaciones del mundo real. Los datos se recogieron en cuestionarios de opción múltiple sobre problemas de modelado matemático, cuestionarios de las reflexiones de los estudiantes y entrevistas posteriores con los estudiantes y con un tutor del curso con la intención de comprender los procesos de desarrollo de los alumnos al iniciarse en la construcción de modelos matemáticos hasta convertirse en expertos. Los resultados mostraron las dificultades de los estudiantes para trasladar una situación real a un modelo matemático, a pesar de que en otras asignaturas estaban familiarizados con el uso de modelos matemáticos y que, aunque los estudiantes muestren interés en la solución de problemas en contextos reales, consideran que es más sencillo resolver los ejercicios tradicionales que se plantean en los libros de texto o en las aulas. Crouch y Haines (2004) sugirieron que sería útil analizar las etapas de la construcción del modelo matemático en que los estudiantes mostraban más dificultades e indicaron la evidencia de la necesidad de realizar, en el aula de matemáticas, actividades en contextos más reales.

De manera similar Soon, Tirtasanjaya y McInnes (2011) intentaron comprender las dificultades de los estudiantes de primer año de ingeniería en un curso de modelación matemática utilizando ecuaciones diferenciales y algebra lineal. En la investigación que realizaron se analizaron las habilidades de los estudiantes al resolver problemas clásicos de modelado, las técnicas que empleaban para resolverlos, sus comentarios y las expectativas de sus profesores y tutores. Para ello los estudiantes debían resolver, con ecuaciones diferenciales, problemas sobre situaciones reales. Los resultados mostraron que algunos estudiantes dibujaron diagramas para mejorar la comprensión de la situación mientras que otros reconocieron la importancia de comprender primero la situación física y entender exactamente qué deberían encontrar. Algunos estudiantes creyeron que debían usar alguna fórmula prevista o buscar una ecuación que representara la situación. Se advirtió una falta de comprensión de las variables y constantes involucradas en el proceso, así como no saber cómo relacionarlas. Algunos estudiantes indicaron que el uso de ejemplos de la vida real mostrados en el aula les hizo entender la razón para aprender las teorías representadas en el curso. Soon, Tirtasanjaya, y McInnes (2011) concluyeron que no se debería pedir a los estudiantes que únicamente resolvieran problemas complejos sino que era preferible que tuvieran clara la interpretación de la solución de problemas simples y avanzaran paulatinamente hacia esta comprensión. Además señalaron que uno de los problemas de los estudiantes es que no sabían cómo comenzar los problemas de modelado y que esta incapacidad se podía atribuir a la dificultad de convertir las palabras a términos matemáticos, ya que la mayoría de los problemas de modelación matemática se presentan verbalmente en las aulas. Finalmente también concluyeron que los estudiantes tienen problemas para ver la conexión entre los contextos de la vida real y las representaciones matemáticas.

En el trabajo de Soon, Tirtasanjaya, y McInnes (2011) los autores pretendían identificar los enfoques particulares de los estudiantes de ingeniería cuando trataban problemas clásicos de modelado. En ese mismo sentido, la investigación realizada por Martins (2008) tuvo como propósito mostrar que, como resultado del enfoque de enseñanza geométrico, los estudiantes de carreras de ingeniería presentan dificultades para formular modelos matemáticos, resolver las ecuaciones diferenciales resultantes y formular predicciones del comportamiento de las soluciones. Para recoger la información, se utilizó un cuestionario con el objetivo de explorar las habilidades de 238 estudiantes para formular un modelo y formular predicciones sobre su comportamiento. Los resultados mostraron que solamente algunos estudiantes comprendieron el significado de las ecuaciones diferenciales ordinarias como descriptoras de sistemas que evolucionan en el tiempo, tuvieron una visión limitada del comportamiento de las soluciones, necesitaron resolver la ecuación para graficar las curvas solución y mostraron dificultades en cuanto a la coordinación de los registros complicados. Martins (2008) consideró estos resultados como una limitación seria pues significa que los estudiantes sólo pueden realizar predicciones relativas a sistemas de modelado por ecuaciones que admitan soluciones exactas al desconocer los métodos numéricos y que la imagen conceptual de las ecuaciones diferenciales que tienen se parece más a una relación algebraica entre variables y derivadas que la descripción de un proceso que tiene lugar en el tiempo.

Tanto en la investigación de Chaachoua y Saglam (2006) como en la realizada por Martins (2008) coincidieron en señalar que los estudiantes consideraron a las ecuaciones diferenciales como un sistema que se reduce a una ecuación algebraica, cuya solución se puede calcular aplicando un algoritmo.

Implementación de estrategias en la enseñanza de la modelación matemática

Algunas investigaciones analizaron algunas formas de motivar a los alumnos en el aprendizaje de la modelación matemática a partir de la implementación de algunas estrategias en la enseñanza de la modelación matemática (Balderas, 2010; Jacobini y Wodewotzki, 2006; Maull y Berry, 2001; Roubides, 2004).

Maull y Berry (2001) estudiaron los estilos de trabajo de estudiantes universitarios de matemáticas al resolver tareas de modelado a partir de un enfoque experimental. Los investigadores pidieron, a estudiantes de matemáticas, que modelaran el enfriamiento de una taza de té y, a la vez, realizarán el experimento llevando un registro de los valores de la temperatura. Al finalizar la actividad, los instructores dirigieron un debate en el que animaron a los estudiantes a modificar sus modelos propuestos. Los estudiantes aplicaron el proceso de modelado con las etapas: 1) Especificar el problema real, 2) Establecer un modelo, 3) Formular el problema matemático, 4) Resolver el problema matemático, 5) Interpretar la solución; 6) Comparar con la realidad, y 7) Escribir un reporte. Los resultados mostraron que, los modelos que los estudiantes plantearon de manera inadecuada, dieron lugar a predicciones poco probables del comportamiento del sistema taza de té. Algunos alumnos aplicaron fórmulas conocidas en las etapas iniciales del proceso y otros pasaron directamente a los modelos con ecuaciones diferenciales sin tener en cuenta las simplificaciones necesarias. Los estudiantes no pudieron apreciar la importancia de hacer suposiciones y no tuvieron claras las razones por las cuáles llevaron a cabo ciertos pasos a pesar de que parecía que sabían qué tenían que hacer. Los investigadores concluyeron que los profesores deberían promover que los estudiantes dediquen tiempo para estudiar la situación física involucrada al principio del problema y enfatizaron que existe una necesidad de estudiar los estilos de trabajo de estudiantes en contextos de modelado.

En términos de presentar una alternativa a los problemas clásicos de modelación y buscando, de manera similar a Maull y Berry (2001), estrategias para abordar la modelación matemática en el aula, Jacobini y Wodewotzki (2006) aplicaron la construcción de entornos que a los que llamaron *escenarios de investigación*, para motivar a estudiantes universitarios a investigar, formular modelos matemáticos y reflexionar sobre situaciones reales. Los alumnos, organizados en grupos, desarrollaron el tema de los impuestos basándose en el modelado de la situación y en las aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana y presentaron sus resultados en el aula. Los resultados mostraron que los estudiantes encontraron sentido a su aprendizaje al considerar las matemáticas como un instrumento para crear y resolver problemas, así como una herramienta para analizar aspectos críticos de importancia social. Jacobini y Wodewotzki (2006) concluyeron que el trabajo con proyectos centrados en la investigación, la reflexión y la crítica, requiere de una interacción constante entre el investigador y sus alumnos, y que, cuando se trabaja con modelado, se pueden considerar a las aplicaciones de conceptos matemáticos, su relación con el tema, y la construcción de los modelos como importantes contribuciones a la percepción que tienen los estudiantes de la relación entre las matemáticas y la realidad.

Roubides (2004) presentó una propuesta para el rediseño de un curso universitario tradicional de ecuaciones diferenciales con un nuevo enfoque para la enseñanza de conceptos tradicionales teniendo en cuenta dos aspectos: prioridad de la comprensión de los aspectos físicos de los problemas sobre el hincapié en la operatividad al resolverlos y el uso de la tecnología (Math2209) para mejorar la comprensión del alumno de los conceptos y presentar la solución de problemas con un enfoque en el mundo real y en la industria. Se recogieron los datos a través de exámenes en los cuales los estudiantes debían relacionar la física de un problema con los contenidos matemáticos que habían estudiado. Los resultados mostraron que algunos alumnos memorizaron una secuencia de pasos o procedimientos para alcanzar una solución matemática. Roubides (2004) concluyó que la integración de la física y las matemáticas de los temas tratados en el aula, así como el desarrollo e implementación de un componente computacional, pueden mejorar la comprensión de los estudiantes de algunos conceptos físicos, del problema y de su solución, y que el desempeño del estudiante abarca una variedad de habilidades más allá del conocimiento de la materia, tales como la comprensión, la comunicación y la colaboración.

De forma similar, Balderas (2010) analizó el uso del software DERIVE en el contexto de modelado en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales. Los datos se recogieron en un cuestionario aplicado al final del curso dónde se preguntaba a los alumnos sobre sus impresiones al trabajar en el curso de matemáticas con una herramienta computacional. Los resultados mostraron que los estudiantes pudieron aplicar los contenidos en situaciones reales utilizando el software en problemas más complejos pero más reales y aumentaron su capacidad en la comprensión de los conceptos y sus aplicaciones. Además algunos estudiantes manifestaron que pudieron ver la utilidad de las matemáticas. Balderas (2010) concluyó que, en lugar de seguir la secuencia estándar de los cursos tradicionales de ecuaciones diferenciales, se presente la problemática completa del proceso de modelación, con ejemplos en un contexto amplio, construyendo modelos y discutiendo ampliamente las hipótesis y los elementos involucrados, y que, una vez que se obtiene la ecuación diferencial, se use el software para hallar la solución.

Escasez de tratamiento de modelos matemáticos en las aulas.

En las siguientes investigaciones se analiza la forma en que se abordan las ecuaciones diferenciales en los cursos universitarios (Moreno y Azcárate, 2003; Perdomo, 2011)

Moreno y Azcárate (2003) analizaron las concepciones y las creencias de profesores universitarios de Matemáticas sobre la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales por medio de entrevistas. Se pretendía conocer el punto de vista de los profesores sobre los aspectos metodológicos, conceptuales y procedimentales de la asignatura. Los resultados mostraron que algunas creencias de los profesores fueron que los estudiantes aprenden ecuaciones diferenciales por imitación y memorización de situaciones y esquemas de resolución estudiados en el aula, y son incapaces de pensar, crear y razonar por ellos mismos. También entendieron que sería mucho más interesante interpretar un modelo matemáticamente que invertir tanto tiempo en resolver diferentes tipos de ecuaciones mecánicamente. Los profesores también indicaron que utilizar computadoras de forma sistemática les obligaría a cambiar la manera de enseñar ecuaciones diferenciales y a dar más importancia a los métodos gráficos y numéricos, y que, debido a que las técnicas y los modelos matemáticos son dos aspectos difíciles de unificar, los estudiantes suelen elegir uno, el más fácil, ya que resulta mucho más fácil aprender a resolver una ecuación diferencial que reconocer un modelo matemático. Moreno y Azcárate (2003) concluyeron que las concepciones de las matemáticas de la mayoría de los profesores todavía se aproximan a las ideas formalistas de que la práctica docente es esencialmente instrumentalista y pone especial énfasis en la enseñanza de métodos de solución de ecuaciones diferenciales integrables y en la solución de determinados problemas-tipo de modelación, y que la persistencia de los métodos de enseñanza tradicional frente a alternativas de enseñanza más innovadoras se debe a que la concepción de las matemáticas, y en particular de las ecuaciones diferenciales, es muy formalista, valora demasiado la manipulación simbólica frente al tratamiento numérico y gráfico.

En esta misma línea Perdomo (2011) analizó, con un cuestionario y una entrevista, la forma en que estudiantes universitarios construían el significado de ecuación diferencial y la forma en que lo utilizaban para resolver problemas y responder a cuestiones relacionadas con sus soluciones. Como parte de la investigación se diseñó e implementó un módulo de enseñanza para introducir el concepto de ecuación diferencial ordinaria conjugando tres elementos: resolución de problemas, uso de tecnología e interacción entre alumnos. Los enunciados de los problemas se adaptaron de situaciones que tradicionalmente se plantean a los estudiantes. Los resultados mostraron que, con una enseñanza de las ecuaciones diferenciales basada en su resolución algebraica, los estudiantes disponían de los recursos conceptuales necesarios para resolver los problemas planteados pero no accedían a ellos ni los utilizan de manera eficiente ante situaciones a las que no se habían enfrentado con anterioridad. La dinámica de trabajo en el aula favoreció la autonomía de los alumnos y creó un ambiente de colaboración en el que los alumnos se sentían cómodos al mostrar sus razonamientos y criticar los de sus compañeros, lo que permitió que reconsideraran ciertas ideas y concepciones matemáticas. Perdomo (2011) concluyó que la mayoría de los estudiantes mostraron dificultades para establecer relaciones entre el concepto de ecuación diferencial y el de derivada de una función, lo que dificultó la realización de actividades. La tendencia de los estudiantes era reducir el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias a la búsqueda de algoritmos que resolvieran tipos particulares de ecuaciones, limitando sus posibilidades para abordar problemas contextualizados.

En definitiva, las investigaciones existentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de la modelación matemática en los cursos de ecuaciones diferenciales recogen que:

1. La modelación matemática puede apoyar la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, y evitar que los estudiantes las experimenten de manera mecánica. La construcción de modelos en el aula podría cambiar la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas. Sin embargo, al vincular una situación de la vida real con un modelo matemático, los estudiantes encuentran dificultades en varios sentidos, tales como interpretar cada uno de los términos de una ecuación diferencial, identificar las variables involucradas, considerar una derivada como una razón de cambio, establecer una ecuación a partir de leyes físicas, identificar condiciones iniciales, resolver la ecuación por otro método que no sea el algebraico y analizar la solución. ello puede deberse a que, en la mayoría de los casos, los cursos de ecuaciones diferenciales se basan en el estudio de técnicas de solución donde predomina el enfoque algorítmico con escasa vinculación real, por lo que es necesario promover el desarrollo de actividades para que los estudiantes utilicen los diversos enfoques de solución.

2. Es necesario que en los cursos de ecuaciones diferenciales se muestren situaciones de la vida real más complejas que las tratadas en los libros de texto, que encaminen a los estudiantes a considerar la modelación como una secuencia de etapas. Se deben analizar las etapas en donde se presentan dificultades, tales como la interpretación de una solución a través de gráficos, ya que los estudiantes tienden a trabajar mejor las primeras etapas. En este sentido, se puede apoyar la construcción de modelos teóricamente realizando un experimento en el laboratorio del fenómeno que se va a estudiar y, de esta manera, fortalecer la etapa validar el modelo que, con frecuencia, los estudiantes evitan.

3. La relación entre las matemáticas y las situaciones de la vida real de los estudiantes podría fortalecerse si se fomenta, en la enseñanza de las ecuaciones

diferenciales, el uso de herramientas computacionales para mejorar la comprensión de conceptos físicos al observar sus soluciones gráficamente y considerar a las ecuaciones diferenciales como sistemas que evolucionan en el tiempo. Se puede involucrar a los estudiantes en proyectos en contextos reales más allá de las aulas y llevar a cabo dinámicas grupales en las que los estudiantes se sientan motivados a mostrar sus razonamientos.

2.2. Interacciones a través de foros virtuales en el aula de matemáticas

Las siguientes investigaciones han estudiado las interacciones a través de foros virtuales al desarrollar actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula (De Corte, Verschaffel, Stijn Dhert y Vandeput, 2000; Llinares y Valls, 2009; Murillo y Marcos, 2009; Nason y Woodruff, 2003; Onrubia y Engel, 2009; Rodríguez y Clares, 2006; Zhu, 2006).

Nason y Woodruff (2005) investigaron si la integración de un enfoque discursivo, y una perspectiva de solución de problemas basada en modelos con un foro virtual, mejoraban y enriquecían la autenticidad de las actividades matemáticas de estudiantes de secundaria y su comprensión sobre la naturaleza y el discurso de la matemática. La investigación involucró un análisis detallado de cuatro fuentes de datos: notas de observación de clases, entrevistas en las que los alumnos explicaban sus modelos, hojas de cálculo de los alumnos al realizar la actividad y los mensajes en el foro virtual. Los datos se analizaron para determinar cómo los grupos de estudiantes habían generado y, posteriormente, modificado sus modelos para determinar: 1) Los conocimientos matemáticos previos que los estudiantes habían utilizado durante la generación y modificación de sus modelos matemáticos; y 2) Los nuevos conocimientos matemáticos que los alumnos habían construido durante la generación y modificación de sus modelos matemáticos.

En los resultados se observaron tres elementos importantes de la construcción de conocimiento de los estudiantes: el planteamiento de conjeturas, la búsqueda colectiva de la comprensión de los conceptos clave de matemáticas, y la mejora de modelos y de ideas. Esto indica que, al involucrar a los estudiantes en la solución de problemas con enfoque hacía el modelado mediante un foro virtual, mejoró la autenticidad de la actividad matemática de los estudiantes. Nason y Woodruff (2005) concluyeron que la calidad de la simbolización, comunicación, matematización y conocimiento colectivo de los estudiantes, fue mayor que lo que se observa en la mayoría de las clases de matemáticas, que los estudiantes percibieron las matemáticas como el resultado de procesos sociales, falible y revisable y que los estudiantes fueron capaces de llegar colectivamente a un consenso.

Murillo y Marcos (2009) analizaron los beneficios cognitivos que se producían en los estudiantes en relación con el desarrollo de determinadas competencias matemáticas cuando desarrollaban trabajo colaborativo utilizando foros: competencia comunicativa y de Geometría. Los investigadores plantearon una metodología de trabajo en la que los alumnos de secundaria debían participar formalmente y de manera activa, compartiendo descubrimientos en la interacción. El sistema de tutorización resultó ser una potente herramienta para dar respuesta estratégica que hizo posible que cada alumno desarrollara al máximo sus potencialidades. Murillo y Marcos (2009) concluyeron que los foros constituyen un recurso importante que favorece la interactividad entre profesores y alumnos, y que, en la enseñanza de las matemáticas, las interacciones constituyen un elemento que favorece el desarrollo cognitivo, la adquisición de conocimientos y habilidades.

La investigación realizada por De Corte, Verschaffel, Stijn Dhert y Vandeput (2000) tuvo como objetivo examinar cómo la construcción del conocimiento y el desarrollo de habilidades se pueden fomentar en los alumnos de primaria y secundaria, introduciéndolos bajo la guía de un maestro en el uso de redes de aprendizaje. Se utilizó una gran variedad de instrumentos para recopilar datos (examen con enunciados de problemas, cuestionarios, archivos de registro, observaciones en el aula y entrevistas a alumnos y profesores). Los resultados mostraron que se mezclaron los efectos cognitivos, metacognitivos y afectivos del foro virtual en los alumnos de manera que el entorno de aprendizaje con foros tuvo un efecto positivo en la competencia de resolución de problemas. Además, el entorno produjo una importante influencia positiva en las creencias de los alumnos y en sus actitudes hacia el aprendizaje colaborativo en general.

En la misma línea, Rodríguez y Clares (2006) analizaron la construcción del conocimiento de estudiantes universitarios en la interacción grupal en foros virtuales. Cada participación individual de los alumnos fue considerada como unidad de análisis, y para categorizarlos se utilizó un instrumento diseñado por Jeong (2004) para analizar las conductas interactivas que promuevan el pensamiento crítico. Los resultados mostraron que el desarrollo eficaz de los temas de debate en foros virtuales tiene relación con la forma en que participan los estudiantes. Los resultados también mostraron que los alumnos suelen reaccionar a las opiniones de sus compañeros justificando su posición, que sus opiniones iniciales pudieron servir de base para ampliar la reflexión de otros elementos del contenido y que participaron con frecuencia al responder las preguntas que se plantearon pero escasamente cuando se plantearon dudas. Rodríguez y Clares (2006) concluyeron que las interacciones en un foro virtual permiten la formación y reafirmación de significados, y ayuda a perfilar puntos de vista individuales y colectivos.

Onrubia y Engel (2009) también analizaron los procesos de construcción de conocimiento de estudiantes universitarios, organizados en grupos, en foros virtuales. Los datos fueron los mensajes de los estudiantes y, para el análisis, se utilizó el sistema de categorías de Gunawardena, Lowe y Anderson (1997), diseñado para determinar los procesos de construcción de conocimiento como una secuencia de fases. Los resultados mostraron cuatro fases de construcción colaborativa del conocimiento organizadas, donde cada fase representó un mayor nivel de complejidad cognitiva que el anterior: iniciación, exploración, negociación y co-construcción. Onrubia y Engel (2009) concluyeron que los grupos utilizaron diferentes estrategias en el inicio del proceso y, después, cada grupo adoptó alguna particular.

Por otro lado, Zhu (2006) analizó los tipos de interacción que se producen durante las discusiones en foros virtuales y los niveles de compromiso cognitivo de los estudiantes universitarios. Las unidades de análisis fueron los mensajes completos de los estudiantes en el foro y se categorizaron de acuerdo a una herramienta diseñada por Zhu (1999), para determinar el tipo de interacción. Los resultados mostraron dos tipos de interacción: estrella, en la cual el estudiante o profesor que propuso el tema de discusión llevó el mando, y web interconectada donde los estudiantes fueron más propensos a intercambiar, profundizar y desafiar las ideas del otro. La acción de compartir, intercambiar y defender ideas propias ayudó a los estudiantes a entender el material de aprendizaje. También se encontró que los niveles de compromiso cognitivo en las discusiones fueron disminuyendo. Zhu (2006) concluyó que es poco realista suponer que la discusión en línea se activará y mejorará la interacción bajo ninguna circunstancia sino que es importante la cuidadosa planificación de actividades de aprendizaje para lo cual es importante el papel de los instructores en la discusión.

De manera similar, Llinares y Valls (2009) analizaron las características de la interacción en las discusiones en foros virtuales de maestros en formación. Se realizó una experiencia en la cual se diseñaron entornos de aprendizaje que integraban video-clips de enseñanza de las matemáticas, foros virtuales y documentos sobre las actividades que había que realizar, con el propósito de permitir a los estudiantes construir significado al trabajar algunos aspectos de la actividad desarrollada de manera conjunta. Los datos fueron los mensajes de los estudiantes en el foro y se eligió, como unidad de análisis, cada idea con significado propio. El análisis se llevó a cabo en dos dimensiones: 1) Participación, que se centró en la medida en que los estudiantes contribuyen al discurso para lo que se utilizó un instrumento diseñado previamente por uno de sus autores (Rey, Penalva y Linares, 2006), y 2) Dimensión epistémica o compromiso cognitivo con la tarea, categorizada con un marco analítico de 4 niveles progresivos. Los resultados mostraron que los diferentes tipos de tareas y condiciones de discusión en los foros ejercieron influencia en la naturaleza de la interacción, y que la realización de tareas en línea ofreció a los estudiantes la oportunidad de utilizar conjuntamente la comprensión y el conocimiento construido sobre enseñanza de las matemáticas. Llinares y Valls (2009) concluyeron que las discusiones a través de foros permitieron que las interpretaciones personales fueron interrogadas y aclaradas, y que las hipótesis y conclusiones fueran refutadas, al construir una respuesta en conjunto apoyada en el conocimiento común.

En definitiva, las investigaciones existentes sobre las interacciones en foro virtuales en el aula de matemáticas muestran que:

1. Las interacciones través de foros virtuales en el aula de matemáticas pueden beneficiar la adquisición de conocimientos y habilidades de los estudiantes, así como motivarlos a reflexionar y a utilizar de manera conjunta sus conocimientos

construidos a partir de la participación colectiva. Así mismo, pueden ayudar a transformar los puntos de vista de los estudiantes al intercambiar ideas, así como profundizar y cuestionar sus planteamientos iniciales o los de sus compañeros de debate.

2. Se han realizado diversos intentos para analizar la construcción de conocimiento de los estudiantes y la manera en que interaccionan al realizar actividades en entornos de aprendizaje con foros virtuales. Se han utilizado diversos instrumentos, y se han tomado como unidades de análisis los mensajes de los estudiantes o las ideas con significado en sus aportaciones.

Por otro lado, también hemos tenido en cuenta algunas investigaciones (Chamoso y Cáceres; 2009; Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010) que no estudiaron las interacciones en foros virtuales, pero que pueden aportar elementos para valorar una experiencia de acuerdo a los objetivos planteados en esta investigación.

Chamoso y Cáceres (2009) analizaron la reflexión de los estudiantes para maestro, en términos de la visión del proceso de formación desarrollado en las aulas. El estudio se centró en el uso del portafolio de aprendizaje, que permitió aportar evidencias sobre sus conocimientos, habilidades, disposición y reflexión sobre su trabajo y su evolución. Para valorar el aprendizaje de los estudiantes se diseñó una categorización con los niveles: Descripción, Argumentación y Aportación. Estos criterios generales se adaptaron para evaluar cada una de las actividades en reflexión, conocimiento y creatividad. Los resultados señalaron que los estudiantes, en sus reflexiones, fundamentalmente describieron aspectos relacionados con el proceso de enseñanza-aprendizaje sin llegar a involucrarse y, en un porcentaje mucho menor, argumentaron o realizaron aportaciones, a pesar de la formación en reflexión realizada en el aula. No todas las actividades originaron los mismos niveles de reflexión, ya que los niveles más altos se presentaron en las actividades en que los estudiantes participaron activamente, lo que hace pensar que la calidad de la reflexión depende de los aspectos a los que se refieran.

Chamoso y Cáceres (2009) proporcionaron una herramienta para evaluar el pensamiento reflexivo de los estudiantes para maestro que puede ser útil para estudiar el pensamiento reflexivo de los estudiantes de otras disciplinas. También concluyeron que la reflexión sobre el propio trabajo desarrolla capacidades diferentes a otras actividades formativas, y que su desarrollo permite la evolución de las ideas iniciales, por lo que sugirieron trabajarla durante la formación inicial de maestros para llegar a conseguir niveles de profundidad satisfactorios en el pensamiento reflexivo.

Cáceres, Chamoso y Azcárate (2010)~~,~~ analizaron la forma que los estudiantes para maestro reconstruían las ideas iniciales que se propusieron en un proyecto que se incluyó en su portafolio de aprendizaje en un programa de formación de docentes. Los instrumentos utilizados para la recolección de los datos fueron los documentos que los maestros en formación incluyeron en su portafolios de aprendizaje. Se tuvieron en cuenta las diferencias de la valoración de sus proyectos inicial y final en cada una de las categorías (contenidos, actividades, metodología y reflexión), y las modificaciones realizadas en el proyecto final con respecto al proyecto inicial de estudiante considerando tanto el nivel de profundidad y los aspectos a los que se refieren en su trabajo. Para evaluar el trabajo realizado, se establecieron tres niveles para clasificar el grado de aprendizaje de cada estudiante, en base a su trabajo en los proyectos inicial y final. Para estudiar la profundidad de las modificaciones del proyecto final, se diseñó un sistema de categorías de acuerdo al proceso de reflexión de cada estudiante en cada caso con el fin de mejorar su proyecto inicial. Los resultados mostraron, por un lado, que los estudiantes modificaron sus proyectos iniciales en todas las categorías consideradas, por lo cual la valoración de los proyectos finales mejoró significativamente en todos los aspectos considerados, y por otro lado el número de estudiantes que hicieron completamente de nuevo su proyecto final en todas las categorías fue mayor que el número que hizo algún otro tipo de modificación, salvo en el caso de las actividades, en el que el número era el mismo que el de aquellos que sólo añadieron nuevos conocimientos a su proyecto inicial sin hacer otras modificaciones.

Cáceres, Chamoso y Azcárate (2010) concluyeron que, aunque el uso del portafolios de aprendizaje promovió un desarrollo exitoso de las ideas iniciales de cada uno de los estudiantes, la formación recibida durante el programa tuvo una limitada influencia. También concluyeron que el proceso de aprendizaje que tuve lugar en el aula ocasionó que algunos estudiantes participaran con un alto nivel de reflexión y que las ideas iniciales de los estudiantes se adaptaron a las propuestas a la metodología del curso.

Podemos decir que las investigaciones anteriores (Chamoso y Cáceres, 2009; Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010) muestran que existen herramientas que han valorado la reflexión de los estudiantes para maestro, pero que podrían adaptarse a otras disciplinas. Y que también han analizado la forma que los estudiantes para maestro reconstruyen sus ideas iniciales a partir del estudio de la profundidad de las modificaciones que realizan a sus trabajos.

En definitiva, la revisión de las investigaciones expuestas en este capítulo nos lleva a considerar la necesidad de realizar una investigación en la que se lleve a cabo una experiencia en un curso de ecuaciones diferenciales para ingenieros en que se trabaje la modelación matemática, y en la que se empleen estrategias que permitan utilizar las ventajas de la interacción a través de foros virtuales.

Capítulo 3. MARCO CONCEPTUAL

El marco de referencia es un elemento básico para organizar las ideas que sirven como base al fenómeno que se pretende investigar y ayuda a proporcionar una estructura adecuada que permita una comprensión del diseño del estudio de investigación, la interpretación de los datos y la elaboración de conclusiones. Como dijo Lester (2010), el marco de referencia permite conceptualizar y guiar la propia investigación, ayuda a determinar la manera en que se definen los conceptos, las construcciones y los procesos de investigación, así como los principios de descubrimiento y justificaciones permitidas para crear nuevos conocimientos sobre el tema objeto de estudio.

Para Silver y Herbst (2007), las teorías son útiles porque dirigen la atención de los investigadores a las relaciones particulares que dan sentido a los fenómenos que están siendo estudiados, evalúan la importancia relativa de las preguntas de investigación y sitúan los resultados del estudio en un contexto más amplio. Sin embargo, al revisar la literatura, en algunos casos no se ajusta una teoría o un modelo teórico en el cual enmarcar un estudio determinado por lo que, en ocasiones, en vez de considerar un marco teórico se contempla un marco conceptual o de referencia para desarrollar la propuesta.

Al respecto, Eisenhart (1991) distinguió tres tipos de marcos de investigación: Teórico, práctico y conceptual. Cada tipo tiene sus propias características y juega un papel importante en la investigación en Educación Matemática. Lester (2010) los caracterizó de la siguiente forma:

- Marco teórico. Depende de una teoría formal, las preguntas de investigación se reformulan en términos de dicha teoría, los resultados de la investigación se utilizan para confirmarla, extenderla o modificarla y los investigadores deben seguir la agenda de investigación marcada por dicha teoría, aceptando los convenios de argumentación y experimentación asociados a ella. Son numerosos y variados los marcos teóricos que existen en el campo de la investigación en Educación Matemática y, en muchos casos, no resulta sencillo establecer relaciones entre ellos, con lo que se siguen desarrollando nuevos o adaptaciones de otros dentro del contexto en que se crearon.

- Marco práctico. No se basa en la teoría formal sino en el conocimiento de la práctica acumulada por los profesionales, los resultados de investigaciones previas, y, con frecuencia, los puntos de vista ofrecidos por la opinión pública. Las preguntas de investigación se derivan de esta base de conocimientos y los resultados de la investigación se utilizan para apoyar, ampliar o revisar la práctica. Sin embargo cuenta con una seria limitación: al utilizar un marco práctico los resultados tienden a ser, como mucho, sólo generalizables a nivel local.

- Marco conceptual. Es un fundamento tal que los conceptos elegidos para la investigación, y cualquier relación prevista entre ellos, serán apropiados y útiles en el problema que se está investigando. Al igual que los marcos teóricos, los marcos conceptuales se basan en investigaciones previas pero se construyen a partir de una variedad de fuentes. El marco utilizado puede estar basado en diferentes teorías y diferentes aspectos del conocimiento, en función de lo que el investigador pueda argumentar que será relevante e importante para tratar el problema de investigación.

De acuerdo al problema planteado en esta investigación, el marco de referencia estará constituido por los fundamentos a través de los cuales sea posible estudiar la forma en que estudiantes de ingeniería construyen modelos matemáticos de fenómenos físicos o situaciones de la vida cotidiana con ecuaciones diferenciales ordinarias interaccionando a través de foros virtuales, cuando realizan actividades para estudiar problemas reales en los que puedan aplicarlas. Por lo tanto, en esta investigación se utilizará un marco conceptual formado por elementos de distintas teorías y fuentes.

En este capítulo se presentan, los aspectos teóricos sobre los que se asienta este trabajo. Se exponen, inicialmente, algunos conceptos relacionados con la comunicación mediada por computadora (CMC), para posteriormente describir y caracterizar las formas de interacción en entornos virtuales, así como los diferentes instrumentos existentes en la literatura para analizar las interacciones a través de foros virtuales entre los que se encuentran los que se utilizaron en este estudio.

3.1. Interacciones a través de foros virtuales

La comunicación mediada por computadora tiene una amplia variedad de funciones que van desde la administración a la comprensión y construcción de conocimiento, y puede ser asíncrona o síncrona (Naidu y Järvella, 2006). Dentro de la comunicación mediada por computadora se encuentra la llamada Conferencia Mediada por Computadora (CMC), una modalidad asincrónica que se basa en la comunicación a través de texto escrito. Esta herramienta proporciona un entorno electrónico para el envío y recepción de mensajes, así como para su administración.

La comunicación asíncrona presentan ventajas respecto a la síncrona: los estudiantes tienen más oportunidades de actuar recíprocamente entre sí y más tiempo para reflexionar, pensar y buscar la información antes de contribuir a la discusión (De Wever, Schellens, Valcke y Van Keer, 2006; Schrire, 2006).

La CMC normalmente es el medio más utilizado para desarrollar colaboración en un entorno de aprendizaje virtual. Si los objetivos se prestan para que el profesor estimule la comunicación por medio de preguntas adecuadas, en lugar de sólo dar las respuesta correctas, la CMC es un medio eficaz para la comunicación dentro del sistema instruccional que se trate (Silva y Gros, 2007). Al usar CMC los estudiantes presentan ideas, aclaran dudas, obtienen información, participan en debates y tienen la posibilidad de compartir sus trabajos.

Una de las características de los entornos constructivistas es facilitar el aprendizaje cooperativo y colaborativo, aspectos favorecidos por el uso de la CMC, que se basa en el hecho de que es posible emplear los medios electrónicos para permitir a los grupos coordinar y organizar el material de una manera apropiada a sus objetivos (Harasim, 2000).

La interacción entre estudiantes mediante CMC puede ser una manera efectiva para lograr resultados en relación con la adquisición de conocimientos. Si un grupo funciona bien, se producirá un intercambio de conocimiento que apoya la construcción social de conocimiento, los estudiantes aceptarán la información de sus compañeros, pedirán información y ayuda.

La interacción debe diferenciarse de la participación. En una conferencia mediada por computadora, la interacción se relaciona con los mensajes que son respuestas a otros y la participación involucra el número o la cantidad promedio de mensajes enviados (Schrire, 2006). Por lo tanto la interacción es vital para la construcción de conocimiento por medio de intercambio de mensajes con los otros estudiantes y con el profesor o tutor, centrados en los temas que se tratan de discutir. Estos mensajes se construyen desde la experiencia personal y luego se van enriqueciendo con las aportaciones de los demás estudiantes. La participación supone que los estudiantes simplemente estarán presentes e intervendrán, pero no necesitarán una respuesta de inmediato o la buscarán.

Las interacciones desarrollan muchas funciones fundamentales en el proceso educativo. Una de las características más significativas de los textos escritos en debates asíncronos, y que influyen en la construcción de conocimiento de los participantes, es que los mensajes electrónicos están a la vista de todos los participantes del debate, lo cual provoca que los textos de los mensajes pueden buscarse, sus contenidos se pueden visualizar y examinar varias veces, y el texto se puede reestructurar (Hara, Bonk y Angeli, 2000). Sin embargo, un inconveniente de los debates virtuales es la coordinación de la participación y de las actividades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con el debate ya que únicamente se dispone del texto escrito.

Para convertir el debate virtual escrito en una actividad que potencie la construcción de conocimiento es necesario el uso reflexivo de ciertos procedimientos vinculados con el lenguaje escrito, por ejemplo: 1) necesidad de plantear por escrito preguntas adecuadas para iniciar o replantear el debate, 2) conveniencia de proveer ayudas a los estudiantes para que desarrollen aportaciones al debate como, por ejemplo, guías para preparar las respuestas o resúmenes de la discusión, y 3) poder seguir las líneas del debate y organizar la información escrita que aportaron los estudiantes para lo que los participantes pueden construir mapas conceptuales que estructuren las aportaciones, proporcionando representaciones visuales de los conceptos y argumentos.

Los foros virtuales, cada vez más, se están configurando como una poderosa herramienta de comunicación y trabajo colaborativo. Estos espacios de trabajo y diálogo proporcionan la posibilidad de participación de una forma reflexiva, frente a otras herramientas de comunicación y trabajo de carácter sincrónico, donde la inmediatez supone un obstáculo a la reflexión y el análisis.

Ornelas (2007) definió el foro virtual como un centro de discusión acerca de un tema en particular, que concentra opiniones de varias personas de distintos lugares, en forma asincrónica. Esto último significa que la comunicación se da sin necesidad de que los individuos se encuentren usando la plataforma de manera simultánea. Cada persona que se conecte, independientemente del momento, tendrá acceso a los mensajes que queden registrados en la temática de la discusión.

Para este autor, la participación en un foro virtual permite compartir reflexiones, búsquedas y hallazgos, así como solucionar problemas mediante las respuestas a las preguntas generadoras de discusión. Algunos de los principales beneficios del empleo de los foros virtuales, son 1) Reforzar el aprendizaje y mejorar su significatividad, 2) Permitir conocer las actitudes de los alumnos frente a ciertos temas, 3) Favorecer el desarrollo de habilidades sociales mediante la interacción, y 4) Ayuda a mejorar las habilidades de comunicación escrita.

Para Moya (2008), un foro virtual es un escenario de comunicación donde se propicia el debate, la concertación y el consenso de ideas. Es una herramienta que permite a un usuario publicar su mensaje en cualquier momento, quedando visible para que otros usuarios que entren más tarde, puedan leerlo y contestar. Esto permite mantener la comunicación constante con personas que están lejos, sin necesidad de coincidir en los horarios de encuentro en la red, superando así las limitaciones temporales de la comunicación sincrónica (como un chat, que exige que los participantes estén conectados al mismo tiempo) y dilatando en el tiempo los ciclos de interacción, lo que a su vez favorece la reflexión y la madurez de los mensajes.

Silva y Gros (2007) señalaron que una de las críticas que se hace, como demuestra la investigación, especialmente cuánto esta se refiere a los aspectos cuantitativos en relación al envío y recepción de mensajes, es que éstos reflejan participación en lugar de interacción. En esta construcción compartida no todos los estudiantes intervienen de la misma forma ya que algunos construyen de forma cooperativa mientras otros utilizan la red para ver qué pasa pero no participan en la construcción (Martínez y Prendes, 2004).

3.1.1. El análisis de las interacciones en foros virtuales

Salinas (2003) clasificó la interacción relacionada con el aprendizaje en dos tipos esenciales: 1) Interacción individual del estudiante con el material y, 2) Interacción de carácter social, entre estudiantes sobre el contenido. De acuerdo a Martínez y Prendes (2004), la interactividad a partir de los medios tecnológicos puede considerarse en dos modalidades: 1) Interactividad cognitiva, que considera al medio tecnológico como un instrumento de comunicación entre usuarios, e 2) interactividad instrumental, la interacción con el propio medio y que se refiere a la relación entre el estudiante y el medio, los contenidos o la información.

Barbera y Badía (2004) identificaron tres tipos de interacción que se ubican en las dimensiones sociales y cognitivas:

1. Interacción que favorece las condiciones afectivas adecuadas, denominadas interacciones afectivas virtuales, que tienen por objetivo regular y favorecer el hecho de que exista un clima positivo durante el desarrollo del intercambio comunicativo habitual. Puede ser de tres tipos: *presentación personal*, *gestión emocional* y *aproximación personal*.

2. Interacción relacionada con la gestión y la organización de la actividad. Su finalidad es lograr el acuerdo entre el profesor y los estudiantes sobre la actividad que se pretende realizar ya sea, por ejemplo, para clarificar objetivos, condiciones o criterios de valoración.

3. Interacción orientada a impulsar los procesos de construcción de conocimiento compartido. Tiene como objetivo construir el conocimiento interactuando tanto con los materiales escritos como con el profesor y con los compañeros.

La interactividad debe considerarse como un punto importante en el desarrollo y análisis de contextos virtuales que proporcionan experiencias de enseñanza y aprendizaje de calidad (Silva y Gros, 2007). Desde la perspectiva del aprendizaje es necesario analizar las discusiones en línea para determinar cómo, a través de ellas, se produce la construcción social del conocimiento.

Un aspecto complejo, en el análisis del proceso interactivo durante la comunicación mediada por computadora, surge a partir de la necesidad de establecer sistemas de análisis del texto de los mensajes. Las herramientas para analizar el discurso producido en entornos de interacción asincrónica han tenido una interesante evolución, que puede considerarse como un elemento importante para comprender la metodología de investigación en esta área.

La investigación en el área del aprendizaje colaborativo a través de foros virtuales se basa en una amplia variedad de metodologías, una de las más utilizadas es a través el análisis de contenido, una técnica que se usa con frecuencia para analizar las transcripciones de la discusión asincrónica de grupos mediada por computadora en ámbitos educativos. A partir de la revisión de diferentes instrumentos de análisis de contenido, y de una muestra de modelos comúnmente usado, se presentan a continuación algunos instrumentos desarrollados en las últimas dos décadas.

Instrumento de Henri (1991). Se basa en el enfoque cognitivista del aprendizaje. Hace referencia al aprendizaje cooperativo y al conocimiento colectivo. Un concepto central de este instrumento de análisis de contenido es la interactividad. El marco general de análisis, consta de cinco dimensiones: *participativa*, *social*, *interactiva*, *cognitiva* y *metacognitiva*. La dimensión *participativa* tiene las categorías: *participación general* (número de mensajes y accesos a la discusión), y *participación activa en el proceso de aprendizaje* (número de aportaciones directamente relacionadas con el aprendizaje de los estudiantes). Henri (1991) señaló que los mensajes de longitud desigual no sirven como medidas precisas de participación activa y propuso dividir los mensajes en enunciados correspondientes a las unidades de significado.

La dimensión *social* comprende la totalidad o parte de los enunciados que no están relacionados con el contenido formal de la materia. La dimensión *interactiva* se divide en: *declaraciones interactivas* y *no interactivas* (independientes). Las *declaraciones interactivas* pueden subdividirse en *interacciones explícitas* e *implícitas*. Existen dos tipos diferentes de mensajes interactivos: *respuestas* y *comentarios*. Esto lleva a cinco categorías: *respuesta directa* (explícita), *comentario directo* (explícito), *respuesta indirecta* (implícito), *comentario indirecto* (implícito) y *estados independientes*.

La dimensión *cognitiva* consta de cinco categorías: *aclaración primaria*, observación o estudio de un problema identificando sus elementos y la observación de sus vínculos para llegar a un entendimiento; *aclaración en profundidad*, analizar y comprender un problema que aclare valores, creencias y supuestos; *inferencia*, inducción y deducción, admitir o proponer una idea en términos de su relación con las proposiciones ya admitidas como verdaderas; *sentencia*, toma de decisiones, declaraciones, apreciaciones y críticas, y *estrategias,* proponer acciones coordinadas para la aplicación de una solución. La dimensión *metacognitiva* incluye conocimientos metacognitivos y habilidades meta-cognitivas. El conocimiento metacognitivo es conocimiento declarativo sobre la persona, tarea y estrategias. Las habilidades metacognitivas se refieren al conocimiento procedimental relativas a la evaluación, planificación, regulación y conciencia de sí mismo. El autor argumenta que, aunque los mensajes pueden revelar información útil, es imposible revelar la totalidad de los procesos metacognitivos.

Una de las mayores fortalezas del instrumento de Henri (1991) es que se centra en la actividad social y la interactividad de los participantes, y que proporciona un panorama de los procesos cognitivos y metacognitivos de los participantes; sin embargo, una de sus principales limitaciones es que no proporciona ninguna impresión de la construcción de conocimiento social en una discusión (Lally, 2001). Aunque el instrumento ha sido criticado (Gunawardena et al., 1997; Pena-Shaff y Nicholls, 2004), se considera como un trabajo pionero y ha sido la base para investigaciones posteriores.

Instrumento de Newman, Webb, y Cochrane (1995). Los conceptos teóricos que apoyan este instrumento son el aprendizaje en grupo, aprendizaje profundo y pensamiento crítico.

Los autores sostienen que existe una relación clara entre el pensamiento crítico, la interacción social y el aprendizaje profundo. El instrumento de análisis de contenido está basado en las cinco etapas del pensamiento crítico de Garrison (1991) y en las habilidades cognitivas de Henry (1991).

Consta de 10 categorías que tienen una serie de indicadores positivos y negativos, y la mayoría de los indicadores son bastante opuestos evidentemente (De Wever, et al., 2006). Una razón de pensamiento crítico se calcula utilizando los totales de cada indicador positivo o negativo, con un mínimo de -1 (todo pensamiento no-crítico, todo el aprendizaje a nivel superficial) y un máximo de +1 (todo pensamiento crítico, aprendizaje a nivel profundo). Los autores adoptaron los temas como unidad de análisis. Las unidades pueden ser frases, oraciones, párrafos o mensajes que ilustran, al menos, uno de los indicadores. Aunque los autores instan a otros a replicar su trabajo, no informan sobre la fiabilidad de los datos y apenas se presenta información sobre la validación empírica del instrumento.

Instrumento de Zhu (1996). En base a la teoría de interacción de grupo de Hatano e Inagaki (1991) y la teoría del análisis de preguntas de Graesser y Person (1994), la autora dividió la interacción social en *interacción vertical* (los miembros del grupo buscan las respuestas deseadas de los participantes más capaces, en lugar de contribuir a la construcción de conocimiento), e *interacción horizontal* (los deseos de los participantes para expresar sus ideas son fuertes, porque no se esperan de inmediato respuestas correctas de autoridad). En relación a esto último, se distinguen dos tipos de preguntas: *preguntas de búsqueda de información* (tipo I), que se plantean cuando falta información, y *preguntas de discusión* (tipo II), que se utilizan para proporcionar algún tipo de información, para solicitar opiniones o para iniciar un diálogo.

Las otras categorías son: *respuestas*, *intercambio de información*, *discusión*, *comentarios*, *reflexión* y *andamiaje*. La categoría *respuestas* incluye mensajes con información específica para responder a las preguntas tipo I, mientras que *intercambio de información* comprende información más general. *Discusión* se refiere a los mensajes que se centran en la elaboración y el intercambio de ideas. *Comentarios* comprende cualquier enunciado no-interrogativo relacionado con las lecciones, mientras que *reflexión* se centra en la evaluación, los mensajes de auto-evaluación, los mensajes relacionados y el ajuste de las metas de aprendizaje y objetivos. *Andamiaje* proporciona orientación o sugerencias. Zhu (1996) utilizó los mensajes enteros como unidades de análisis. No se reporta información acerca de la fiabilidad del sistema de codificación.

Instrumento de Gunawardena, Lowe y Anderson (1997). Este instrumento se presentó como una herramienta para examinar la construcción social de conocimiento en CMC. Utiliza las fases de un debate para determinar la cantidad de conocimiento que se construye dentro de un debate. El marco teórico del instrumento resultó de los principios del constructivismo social, de los procesos de negociación de significado para llegar a un entendimiento mediante la discusión y la contribución al conocimiento, lo que resulta como construcción compartida del conocimiento (Kanuka y Anderson, 1998).

A diferencia de Henri (1991) y Newman et al. (1995), Gunawardena et al. (1997) utilizaron el mensaje completo como unidad de análisis. Además, argumentaron que la construcción del conocimiento se desarrolla a través de una serie de 5 fases: *intercambio* y *comparación de la información* (incluye observaciones, opiniones, declaraciones de acuerdo, ejemplos, aclaraciones e identificación de problemas), *descubrimiento y exploración de disonancia o inconsistencia entre las ideas, conceptos o declaraciones*. La tercera fase, *negociación de significado* y *co-construcción del conocimiento,* incluye la negociación, la identificación de áreas de acuerdo y proponer nuevas co-construcciones sobre temas en que el conflicto existe. La cuarta fase es *pruebas y modificación de síntesis propuesta o co-construcción*. Estas declaraciones co-construidas comprueban el esquema cognitivo existente, las experiencias y la literatura. La fase quinta, *declaraciones de acuerdo y aplicación del significado recién construido,* abarca los acuerdos de resumen, las aplicaciones de nuevos conocimientos y las declaraciones metacognitivas que revelan la construcción de nuevos conocimientos (Gunawardena et al., 1997; Kanuka y Anderson, 1998; Lally, 2001).

Lally (2001) afirmó que el modelo de Gunawardena y sus colegas contiene varias características importantes en cuanto a la comprensión de la enseñanza y el aprendizaje en entornos colaborativos de aprendizaje en red: considera la interacción como el vehículo para la co-construcción de conocimiento, se centra en el modelo general de construcción de conocimiento a partir de un debate virtual, es más apropiado en el constructivismo social y en los contextos de aprendizaje en colaboración (centrado en el estudiante), es un esquema relativamente simple y es adaptable a una gama de contextos de enseñanza y aprendizaje.

Instrumento de Rourke, Anderson, Garrison y Archer (1999). Rourke, Anderson, Garrison y Archer (1999) conceptualizaron tres elementos en su modelo: *presencia social*, *presencia cognitiva* y *presencia de la enseñanza*. La presencia cognitiva refleja la adquisición de mayor orden de conocimientos y aplicación, y está asociada con la investigación relacionada con el pensamiento crítico. Esta última apoya los objetivos cognitivos a través de su capacidad para iniciar, sostener y apoyar el pensamiento crítico en una comunidad de estudiantes. Los mensajes sociales, tales como felicitaciones y saludos, se producen con frecuencia en los debates en línea asincrónica y se considera que son importantes para motivar a los estudiantes. El modelo de análisis de *presencia social* se compone de tres categorías principales: *respuestas afectivas, respuestas interactivas* y *respuestas de cohesión*. En su estudio se utilizan las unidades temáticas como unidades de análisis. Los autores afirman que las unidades tienen los atributos de identificación fiable de unidades sintácticas (Rourke et al., 1999).

Instrumento de Järvelä y Hakkinen (2002). Esta herramienta se centra en tres aspectos: *tipo de anuncio*, *nivel de los debates* y *fase de toma de perspectiva en las discusiones* (Hakkinen, Järvelä y Byman, 2001). Su marco teórico se fundamenta en las teorías del aprendizaje socio-constructivista en general y, más concretamente, en la idea de aprendizaje al pensar. Con respecto al tipo de anuncio, las siguientes categorías se derivan de la transcripción de los datos: *teoría*, *nuevo punto o pregunta*, *experiencia*, *sugerencia* y *comentarios*. El mensaje completo sirvió como unidad de análisis para esta categorización. Sin embargo, el vínculo concreto entre estas categorías de análisis y el marco teórico no se explica, así como tampoco se menciona la fiabilidad entre evaluadores de los datos cuando se utiliza esta categorización. En cuanto al nivel de los debates, se presentan tres categorías: *debates de alto nivel*, *debates progresivos* y *discusiones de bajo nivel*. Para esta categorización la unidad de análisis fue una discusión completa. El tercer aspecto, la fase de la toma de perspectiva en las discusiones, se tomó de las categorías en la toma de perspectivas del modelo de Selman (1980), en dónde se definieron cinco niveles de coordinación de las perspectivas sociales: (a) Etapa 0: *indiferente y egocéntrico*; (b) Etapa 1: *función diferenciada y subjetiva al asumir roles,* (c) Etapa 2: *auto-reflexiva, segunda persona y perspectiva de reciprocidad*, (d) Etapa 3: *en tercera persona y la mutua toma de perspectiva,* y (d) Etapa 4: *toma de perspectiva en profundidad y simbólica de la sociedad*. La unidad de análisis de este aspecto fue de nuevo una discusión completa.

Instrumento de Pena-Shaff y Nicholls (2004). Fue desarrollado para evaluar la construcción del conocimiento en los procesos de discusiones en línea. La teoría del *aprendizaje* constructivista social sirvió de nuevo como el marco teórico de este instrumento. Los autores también se concentraron en el análisis cuantitativo de la participación y las tasas de interacción (Pena-Shaff y Nicholls, 2004). Se consideró que las discusiones con los compañeros fomentan el aprendizaje. Los autores propusieron once categorías: *pregunta*, *respuesta*, *aclaración*, *interpretación*, *conflicto, afirmación*, *creación de consenso*, *juicio*, *reflexión*, *apoyo* y *otros*. Los autores afirmaron que las declaraciones de *aclaración*, *interpretación*, *conflicto, afirmación*, *juicio* y *reflexión* parecen ser las más directamente relacionados con el proceso de construcción del conocimiento.

Los investigadores utilizaron los enunciados dentro de los mensajes como la unidad básica de análisis, pero también los párrafos completos, a fin de mantener el sentido de un enunciado dado (Pena-Shaff y Nicholls, 2004). Se utilizaron codificación y recodificación para verificar la ambigüedad en la codificación. Otros dos codificadores independientes participaron en el procedimiento. Sin embargo no se reportaron datos de fiabilidad.

Instrumento de Weinberger y Fischer (2005). Este instrumento se diseñó considerando la argumentación pues se supone que, en un entorno de aprendizaje colaborativo basado en computadora (CSCL), los estudiantes discuten sus puntos de vista sobre un problema y participan en el discurso argumentativo con el objetivo de adquirir conocimientos. Los autores propusieron un enfoque multidimensional para analizar la construcción del conocimiento argumentativo. Se identificaron 4 dimensiones: *participación*, *epistémica*, *argumentación* y *modo social*. La dimensión *participación* consiste en: *cantidad de participación* (designa si los alumnos participan) y *heterogeneidad de la participación* (especifica si los estudiantes participan en igualdad de condiciones). La dimensión *epistémica* está dividida en *discurso fuera de la tarea* y *discurso de la tarea*. Este último se subdivide en tres categorías: *construcción del espacio del problema, construcción del espacio conceptual*, y *construcción de relaciones entre el espacio conceptual y espacio del problema*. La dimensión *argumento* comprende *construcción de argumentos únicos* (abarca reclamaciones, motivos con garantías, o de clasificación, y comprende *construcción de secuencias de argumentos*, que incluye argumentos, contra-argumentos, y respuestas). La última dimensión, *modos sociales de la co-construcción*, consta de cinco categorías: *externalización, obtención, creación de consenso rápido, integración* y *creación de consenso orientado a los conflictos* y *creación de consenso orientado*.

Rourke y Anderson (2003) sugirieron que, en lugar de desarrollar nuevos esquemas de codificación, los investigadores deben utilizar los esquemas que han sido desarrollados y utilizados en investigaciones anteriores. La aplicación de los instrumentos existentes fomenta la repetición y la validez del instrumento, y se tiene, como ventaja, la posibilidad de utilizar y contribuir a un catálogo cada vez mayor de datos normativos. En la literatura sobre los entornos CSCL muchos investigadores han diseñado nuevos instrumentos o modificados los existentes.

3.1.1.1. Tipos de participación en un debate virtual

Llinares y Valls (2009) realizaron una investigación con el propósito de describir las características de las interacciones, en discusiones en línea, cuando los estudiantes para profesor desarrollaban la capacidad de examinar y analizar la enseñanza de las matemáticas como un proceso para desarrollar las habilidades necesarias para aprender a partir de la práctica y construir conocimiento. La perspectiva adoptada en el análisis de Llinares y Valls (2009) pone de manifiesto que el proceso de compromiso cognitivo se produce en el contexto de la interacción mientras se resuelve algún tipo de problema de cierta importancia para los participantes, y toma la forma de un diálogo en el que se proponen soluciones y se responden con ampliaciones, objeciones y contrapropuestas de los demás (Schire, 2006).

La construcción del conocimiento en entornos de colaboración se basa en la suposición de que los estudiantes participan en actividades discursivas específicas y que la naturaleza de la participación y el contenido de estas actividades de discurso están relacionados con la construcción del conocimiento.

El análisis de los datos se llevó a cabo en dos dimensiones: participación y dimensiones epistémicas. La dimensión de la participación se centró en la medida en que los estudiantes contribuyen al discurso y cómo contribuyen. La cuestión era cómo abordar los modos de participación. Para determinar cómo los estudiantes para profesor se dedicaban a la construcción de significados entre sí, los autores consideraron la secuencia de intercambios entre los participantes, que denominaron *cadenas de conversación*.

En relación a los tipos de participación, los autores inicialmente utilizaron las categorías de la investigación de Rey, Penalva y Linares (2006). El marco analítico para la dimensión de la participación era un esquema de las seis categorías que proporcionan una descripción de cómo participan los estudiantes para profesor con el fin de resolver las tareas asignadas en un entorno de aprendizaje: *Aporta información*, *aclara*, *concuerda*, *coincide y amplia*, *discrepa*, *discrepa y amplia, y Otros* (Tabla 3.1). El marco analítico para la dimensión de la participación proporciona información sobre el proceso en el cual participan los estudiantes con el fin de llevar a cabo las tareas en conjunto con los demás, cómo los estudiantes se dedican a la construcción de significados con otros y cómo utilizan las ideas teóricas como herramientas.

Este marco analítico proporciona evidencia empírica de las relaciones entre las formas de interacción y la negociación de significados (Wenger, 1998). Cuanto mayor sea el número de participaciones que corresponden a las categorías de la participación en la dimensión interacción, más fuerte será la señal de que los estudiantes están tratando en el debate de comprender los puntos de vista de otros y de compartir o no compartir conclusiones diferentes.

Tipos de participación en un debate virtual
Aporta información (AI): Aporta nuevos datos relacionados con lo que se pide en la tarea.
Aclara (CL): Amplía o refina una aportación previa, ya sea propia o de otro participante.
Concuerda (C): Manifiesta conformidad y apoyo hacia una aportación determinada.
Concuerda y amplía (C+A): Concuerda y amplía aspectos mencionados en otras aportaciones.
Discrepa (D): Muestra desacuerdo con datos aportados previamente.
Discrepa y amplía (D+A): Muestra desacuerdo con una contribución acompañado de argumentos que lo respaldan.
Otros (O): Aporta datos que no están relacionados con lo que se pide en la tarea.

Tabla 3.1: ***Modelo de Llinares y Valls (2009) para clasificar la participación de maestros en formación en un debate virtual.***

3.1.1.2. Niveles de reflexión en las interacciones

La reflexión es valorada no sólo porque representa un estado de la mente que sirve como una poderosa herramienta para la resolución de problemas, sino también por su resultado (Loughran, 2002).

Históricamente, Dewey es reconocido como un autor principal en el siglo XX del concepto de reflexión. Señaló que es un componente importante del aprendizaje y necesario para incorporar experiencias en un marco de conocimiento existente, teniendo en cuenta la experiencia del estudiante. Desde que Dewey presentó por primera vez su idea y definición de reflexión, ha existido un debate acerca de sus diversos componentes y de cómo sucede realmente la reflexión (Dyment y O'Conell, 2011).Varios autores han tratado de aclarar la reflexión a través de ofrecer un marco conceptual y un modelo de reflexión.

Algunas de las investigaciones realizadas para estudiar los niveles de reflexión reconocen haber descubierto un modo de mejora en los procesos reflexivos en los participantes de prácticas reflexivas, además del uso de diversos recursos discursivos o narrativos para indagar en los niveles de reflexividad. La mayoría crítica el estado de confusión dentro del campo, así como la dificultad para contar con instrumentos y modelos confiables para poder determinar si efectivamente los profesores alcanzan niveles más altos de reflexividad. A continuación se muestran algunos de los modelos más relevantes empleados.

En el aprendizaje de las matemáticas, la reflexión se caracteriza por distanciarse de la acción de hacer las matemáticas. Según Bjunlad (2004), una cosa es resolver un problema y otra muy distinta es tratarlo como objeto de reflexión. No es suficiente que los estudiantes completen las tareas, sino que se les debe animar a reflexionar sobre su actividad, por ejemplo, al pedirles que justifiquen un método de solución.

Si los profesores han de evaluar los niveles de reflexión, necesitan un medio para determinar el nivel de reflexión. Tal sistema no proporcionará una medición precisa, pero dará orientación para realizar juicios disminuyendo la subjetividad. Se han utilizado trabajos académicos formales, cuestionarios, talleres, exámenes, grupos de discusión y tutoriales para motivar a los estudiantes universitarios a apropiarse de sus conocimientos y hacer conexiones entre la teoría y la práctica. El portafolios como medio de reflexión es otra técnica popular utilizada por los educadores en muchos contextos de educación superior (Dyment y O´Conell, 2011).

Con el uso de entornos virtuales de aprendizaje (EVA) se pueden crear oportunidades ideales para el diálogo profesional y la reflexión. De acuerdo con Khourey-Bowers (2005) las interacciones en el aula están limitadas por el tiempo, el espacio y el número de estudiantes. Si un estudiante habla, los demás escuchan, y la rapidez con la que plantean o se responden las preguntas en el aula, con frecuencia elimina a muchos estudiantes de la participación activa. Además, como agregó la autora, los intercambios habituales en el aula favorecen una respuesta rápida en lugar de respuestas reflexivas o bien pensadas.

En términos de interacciones en foros virtuales, hay que recordar que una ventaja de las herramientas de comunicación asíncrona es el marco de tiempo que permite construir una pausa en la comunicación, importante para la absorción e integración de materiales, creatividad y conexión profunda entre estudiantes (Silva y Gross, 2007).

Considerando que la investigación en formación docente sugiere que se debe fomentar la reflexión, con el fin de preparar profesionales capaces para la práctica educativa, Chamoso y Cáceres (2009) diseñaron una herramienta para evaluar el nivel de reflexión de los estudiantes para maestro de matemáticas, expresado en diarios escritos incluidos en un portafolio de aprendizaje (Tabla 3.2):

Niveles de reflexión	
Categorías	Explicación
Descripción(1)	Cuando el estudiante describe aspectos relacionados con el proceso de enseñanza aprendizaje, sin involucrarse, es decir, cuando solamente resume lo que se hizo durante una actividad.
Argumentación (2)	Cuando el estudiante argumenta, justifica o saca conclusiones acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje, es decir, cuando participa en el proceso y trata de comprender el sentido de la actividad.
Contribución (3)	Cuando el estudiante realiza contribuciones a fin de mejorar el proceso de enseñanza -aprendizaje, es decir, además de entender, se involucra en el desarrollo y la mejora de actividades.

Tabla 3.2: ***Modelo de Chamoso y Cáceres (2009), para categorizar la reflexión de maestros en formación a partir de su diario personal.***

3.1.1.3. Modificación del trabajo a partir de las interacciones

Para estudiar la profundidad de las modificaciones en un proyecto final, en función del proceso de reflexión que cada estudiante para maestro realizó para mejorar su proyecto inicial, Cáceres, Chamoso y Azcárate (2010) diseñaron el siguiente instrumento con el propósito de analizar las revisiones que los estudiantes para maestro de Matemáticas realizaron del propio trabajo tras la formación recibida en las aulas (Tabla 3.3):

Profundidad de las modificaciones
Nivel 4: Rehace completamente el proyecto inicial de nuevo.
Nivel 3: Reorganiza completamente el proyecto inicial y quizás añade algunas cosas.
Nivel 2: Reorganiza o modifica únicamente algunas partes del proyecto inicial.
Nivel 1: Añade nuevo conocimiento sin modificar ni reorganizar el proyecto inicial.
Nivel 0: No realiza ninguna modificación a la propuesta del proyecto inicial.

Tabla 3.3: ***Instrumento de Cáceres, Chamoso y Azcárate (2010) para determinar la profundidad de las modificaciones en un proyecto final de maestros en formación tras su proceso de reflexión.***

Capítulo 4. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Conocidos los antecedentes y el marco conceptual en que se fundamenta este trabajo, en este capítulo se describen los aspectos metodológicos de la investigación realizada. El apartado se organiza en dos partes. En la primera, se describe el contexto en el que se llevó a cabo la experiencia donde se incluye la organización y la metodología de la asignatura en la que se realizó el estudio, Ecuaciones Diferenciales. Posteriormente se realiza una propuesta del proceso de modelación matemática para resolver problemas de la vida real con ecuaciones diferenciales ordinarias, donde se incluyen ejemplos que se utilizaron en el aula. Finalmente se presenta la plataforma web que sirvió de apoyo para el desarrollo de la asignatura, así como para alojar un entorno de aprendizaje basado en web que se utilizó para que los estudiantes llevaran a cabo un *Proyecto* de modelación matemática con ecuaciones diferenciales en situaciones reales y que se describe posteriormente.

En la segunda parte se muestra el diseño de la investigación organizado en diversas secciones. En primer lugar, se presentan los principios metodológicos en los que se basa la propuesta para diseñar un plan que permitiera obtener la información necesaria, de acuerdo a los objetivos planteados en la investigación. En una segunda sección se describen las características de la muestra de estudio. En un tercer apartado se incluyen los instrumentos que se emplearon para recoger la información y, en la cuarta sección, se explica la forma en que se analizaron los datos recogidos organizados según los objetivos que se pretendían alcanzar.

4.1. Contexto de la investigación

El contexto de una investigación puede ser tan variado como el planteamiento del problema. Para Mertens (2005), existen dos dimensiones esenciales respecto a la elección del contexto: conveniencia y accesibilidad. Para este estudio, la selección del contexto se basó tanto en que incluyera a las personas necesarias para alcanzar los objetivos planteados como en que la recogida de datos fuera factible.

Con esas premisas, la experiencia se llevó a cabo durante dos semestres consecutivos del curso escolar 2009/2010, en el desarrollo de la asignatura Ecuaciones Diferenciales. Esta asignatura se imparte en el primero de los 4 años de los estudios universitarios de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), única carrera que ofrece la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), en la ciudad de México, y es una de las 12 materias obligatorias de formación Científica-Básica de su plan de estudios (Figura 4.1):

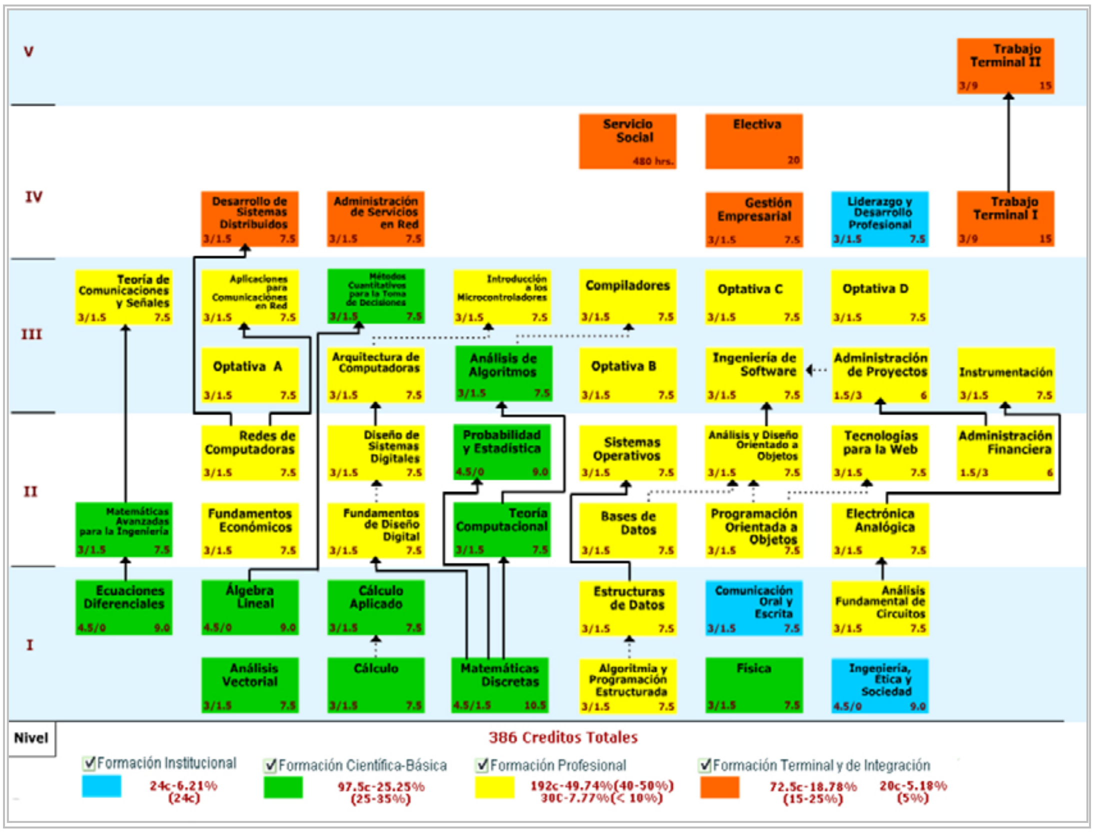


Figura 4.1: ***Plan de estudios de la carrera Ingeniería en Sistemas Computacionales en la ESCOM-IPN (2009).***

La Escuela Superior de Cómputo (ESCOM) es una unidad académica del Instituto Politécnico Nacional (IPN) que oferta los estudios de Ingeniería en Sistemas Computacionales, y cuyos objetivos es formar profesionales con una visión innovadora que se anticipan a los cambios tecnológicos para crear y proveer soluciones de software e infraestructura computacional. Sus principales herramientas son bases sólidas en: ingeniería, ciencias computacionales, desarrollo de software, sistemas de información, infraestructura computacional, administración de proyectos y valores universales sensibles a las necesidades sociales.

La justificación de la asignatura Ecuaciones Diferenciales en el plan de estudios de la carrera Ingeniería en Sistemas Computacionales se debe a la importancia de la aplicación de las ecuaciones diferenciales en las ingenierías, ya que algunos de los fenómenos que se producen principalmente en las ciencias físicas o químicas, pero también en ingeniería, biología o economía, se modelan por medio de funciones reales de una o varias variables reales que, en algunos casos, pueden involucrar derivadas totales o parciales lo que hace que se generen ecuaciones diferenciales.

4.1.1. Organización de la asignatura

Los cursos de matemáticas en ingeniería en la ESCOM-IPN tienen como uno de sus objetivos más importantes que los estudiantes se apropien de conceptos matemáticos que puedan aplicarse en otros contextos diferentes al cual se aprendieron. También se espera que los estudiantes desarrollen habilidades en el manejo de dichos conceptos en sus diferentes representaciones: algebraica, numérica y gráfica. En concreto, la asignatura Ecuaciones Diferenciales se diseñó con los siguientes objetivos y contenidos:

Objetivos

El objetivo general de la asignatura era que el alumno aprendiera a formular modelos matemáticos de problemas de ingeniería con ecuaciones diferenciales. Esto se concretó en los siguientes objetivos específicos:

- Identificar los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales.
- Resolver ecuaciones diferenciales, utilizando el método más adecuado.
- Desarrollar habilidades lógico matemáticas y destrezas que permitieran interpretar diversos modelos en términos de las ecuaciones diferenciales, mediante el razonamiento, el análisis y la reflexión.
- Proponer y plantear problemas prácticos y teóricos mediante formulación matemática.
- Argumentar y justificar la construcción de los modelos matemáticos que se utilizarán en la resolución de problemas prácticos y teóricos específicos de su área, partiendo de las bases matemáticas adquiridas en esta asignatura.
- Valorar la importancia de las ecuaciones diferenciales en su desarrollo profesional.

Contenidos

La asignatura estaba formada por las unidades temáticas:

I. Introducción a las ecuaciones diferenciales.

II. Ecuaciones diferenciales de primer orden.

III. Ecuaciones diferenciales de segundo orden y orden superior.

IV. Transformada de Laplace.

V. Solución de ecuaciones diferenciales con series de potencias.

El contenido de cada una de las unidades temáticas era (Figura 4.2):

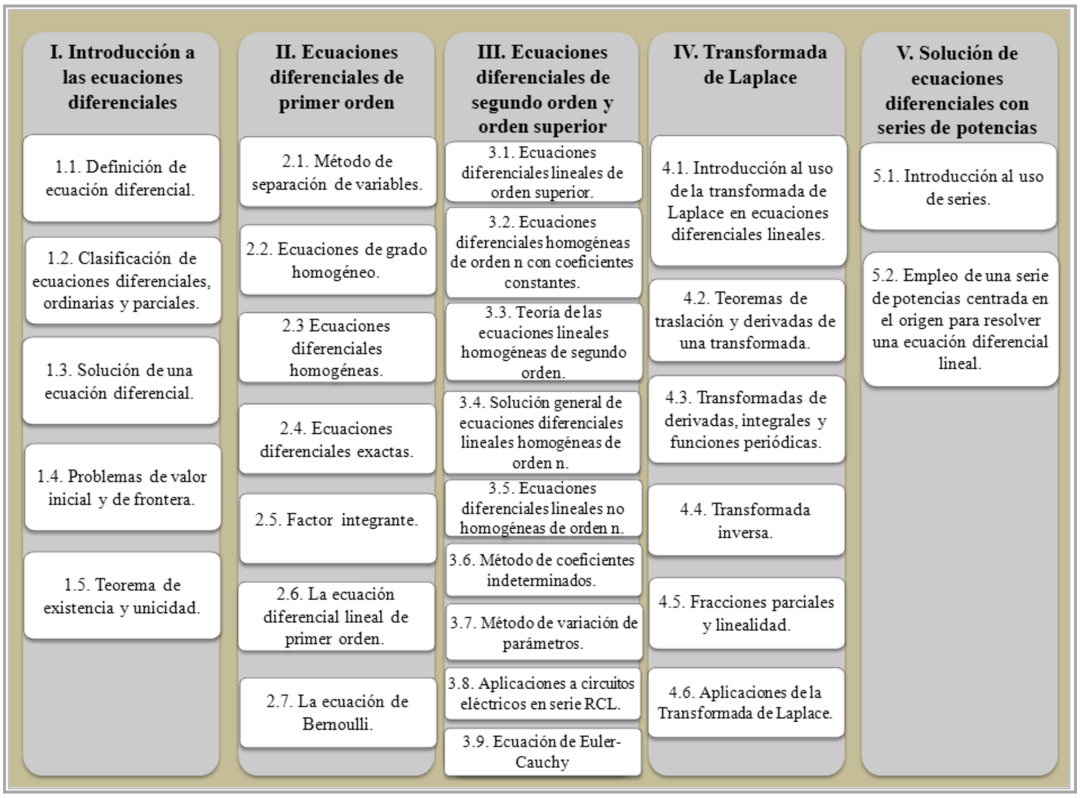


Figura 4.2: ***Programa de la asignatura Ecuaciones Diferenciales en la ESCOM-IPN*.**

4.1.2. Metodología de la asignatura

La metodología de la asignatura se basó en la participación activa de cada estudiante en aspectos teóricos y prácticos, tanto de forma individual como en grupo, y para lo que se intentaba debían desarrollar capacidad de análisis y reflexión.

En este apartado se describen las características de las sesiones que se impartieron en el aula, los materiales que el estudiante podía utilizar durante el desarrollo de la asignatura, el trabajo que el estudiante debía realizar a lo largo del curso y los elementos que formaron parte del procedimiento de evaluación.

Sesiones de aula

La asignatura tenía un tiempo asignado de 4.5 horas semanales en el plan de estudios durante un semestre, con una duración total de 81 horas. En su desarrollo se llevaron a cabo dos tipos de sesiones:

- *Sesiones teóricas*. Se impartieron dos veces por semana con una duración de 1.5 horas cada una. En ellas el profesor explicaba los contenidos de los temas del programa mediante exposiciones en la pizarra o haciendo uso del proyector de imágenes.
- *Sesiones prácticas*. Se impartieron una vez a la semana con una duración de 1.5 horas y, en ellas, se fomentó la participación individual y grupal, usualmente para la resolución de actividades.

Materiales del curso

Los materiales que cada estudiante disponía fueron:

- *Apuntes de la asignatura*. A pesar de la variedad de textos sobre ecuaciones diferenciales existentes, la academia de Formación Básica del centro de estudios consideró la conveniencia de preparar unos apuntes de la asignatura, elaboradas por la propia academia y validadas por la Secretaría Académica del IPN, y que incluían la teoría correspondiente a cada una de las cinco unidades del programa del curso, ejercicios resueltos y ejercicios propuestos de cada tema.
- *Colecciones de problemas y ejercicios*. Además de los apuntes de la asignatura, para favorecer el desarrollo del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales a través de la modelación matemática, se confeccionó una propuesta de ejercicios y problemas de los temas del curso, usualmente extraídos de los libros de consulta de la asignatura, algunos de los cuales se resolvieron en las sesiones prácticas del curso mientras que otros debían trabajarse fuera del aula.
- *Libro de texto*. Se consideró el libro *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado* (Zill, D.; México: Cengage, 2006) como el texto de la asignatura, que contiene actividades de diferentes niveles de dificultad.

- *Libros de consulta*. Se confeccionó una bibliografía complementaria, sugerida en el programa de la asignatura, usualmente formada por textos disponibles en la biblioteca del centro educativo (ESCOM).
- *Documentos de lectura*. En cada unidad se proporcionó un artículo que ilustraba la aplicación de las ecuaciones diferenciales y que se analizó posteriormente en el aula.

Trabajo del estudiante fuera del aula

Las actividades que los estudiantes realizaron durante el desarrollo del curso, fuera del aula, fueron:

- *Tareas individuales*. Los estudiantes realizaron las siguientes tareas que debían entregar oportunamente al profesor:
  a. Problemas de la colección de ejercicios y problemas del curso, asignados semanalmente y seleccionados por el profesor.
  b. Valoración crítica de cada uno de los documentos de lectura sobre las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales.
  c. Gráficas impresas, solicitadas periódicamente, de algunas funciones que aparecían como soluciones de ecuaciones diferenciales usando los paquetes de cómputo Maple o Mathematica.
- *Proyecto*. Considerando que el objetivo principal de la asignatura era que el alumno fuera capaz de formular y resolver modelos matemáticos de problemas reales con ecuaciones diferenciales, como se ha explicado, se llevó a cabo un *Proyecto* de aplicación de las ecuaciones diferenciales a situaciones de la vida real a través de la modelación matemática, para el cual los estudiantes emplearon foros virtuales para desarrollar actividades colaborativas de aprendizaje, como se explicará posteriormente. Para el diseño de este *Proyecto* se consideró que el aprendizaje colaborativo mediado por computadora mejora las destrezas orales y escritas, aumenta la motivación de los participantes y proporciona oportunidades para un aprendizaje reflexivo (Hara, Bonk y Angeli; 2000; Naidu y Järvellä, 2006; Rodríguez y Clares, 2006; Silva y Gros, 2007).

Evaluación

La evaluación a cada estudiante del curso se realizó teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- *Exámenes departamentales*. Se realizaron tres exámenes parciales durante el curso, con hora y fecha establecidas de acuerdo al calendario de actividades del IPN (en el primer examen se evaluaron los contenidos de las unidades temáticas I y II, en el segundo el de la III y, en el tercero, los de las unidades IV y V). En cada uno de ellos los estudiantes tenían que resolver ejercicios y problemas, individualmente y por escrito, así como desarrollar la demostración de algunas propiedades o teoremas de los contenidos expuestos en las sesiones teóricas. Los resultados de cada estudiante equivalía al 80% de su calificación en el primer y tercer examen parcial, y el 60% de su calificación en el segundo parcial.
- *Trabajo del estudiante fuera del aula*. Las *Tareas individuales* que cada estudiante tenía que realizar, explicadas en el apartado anterior, representaron el 20% de su calificación en cada uno de los exámenes parciales salvo en el segundo examen parcial, donde no se desarrollaron *Tareas individuales* sino que se realizó el *Proyecto*, que tuvo una valoración del 40% de la calificación final en ese segundo parcial.
- *Asistencia al curso.* Se consideró que, como requisito indispensable, para que un estudiante se pudiera presentar al tercer examen parcial, debería haber asistido, al menos, al 80% de las sesiones del curso.

4.1.3. Proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales

Para conseguir el objetivo más importante de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, presentado anteriormente, en algunas de las sesiones teóricas se estudiaron las etapas del proceso de modelación matemática, y en otras, se plantearon, resolvieron y analizaron algunos ejemplos de modelos matemáticos de acuerdo a este proceso.

De acuerdo a la literatura que estudia la modelación matemática con ecuaciones diferenciales explicada anteriormente, se plantea el proceso de modelado bajo un enfoque educativo y cognitivo considerando las siguientes fases:

1) Especificar el problema real.
2) Establecer un modelo.
3) Formular el problema matemático.
4) Resolver el problema matemático.
5) Interpretar la solución.
6) Comparar con la realidad.
7) Revisar y escribir un reporte.

Para la experiencia se consideraron principalmente las etapas de la Matemática en Contexto (Camarena, 2004) y el proceso de modelado de un fenómeno físico (Zill, 2006).

1. Etapas de la Matemática en Contexto. Camarena (2004) desarrolló la teoría de la Matemática en al Contexto de la Ciencias al observar que la matematización de los fenómenos que se presentan en el campo laboral del futuro ingeniero es un punto de conflicto cognitivo ya que éste recibió sus cursos de matemáticas, por un lado, y los de ingeniería, por otro, de tal manera que cuando hace uso de las dos áreas de conocimiento sus estructuras cognitivas están desvinculadas y debe integrarlas para matematizar la situación que se le presenta (Camarena, 1995). La modelación matemática es uno de los temas que aparecen de manera oculta en las carreras de ingeniería, ya que se supone que el egresado debe saber modelar problemas de otras áreas del conocimiento.

   Ante el hecho de que no existen asignaturas en ingenierías que se enfoquen a la elaboración de modelos matemáticos, Camarena (2004) propuso abordar la modelación matemática desde la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Esta teoría tuvo su origen en 1982 y reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias que la requieren, entre la matemática y las situaciones de la vida cotidiana, así como entre la matemática y los problemas de la actividad laboral y profesional del futuro egresado (Camarena, 2001). De hecho, se trata de construir en el estudiante una matemática para la vida que se fundamenta en los siguientes paradigmas:

- La matemática es una herramienta de apoyo y una disciplina formativa.
- La matemática tiene una función específica en el nivel universitario.
- Los conocimientos nacen integrados.

El supuesto filosófico-educativo de esta teoría consiste en que el estudiante debe estar capacitado para realizar la transferencia de la matemática a otras áreas y, con ello, se favorecen las competencias profesionales y laborales. Esta teoría concibe al proceso de enseñanza y aprendizaje como un sistema donde intervienen varios factores entre los que se encuentran: características cognitivas, psicológicas y afectivas de los estudiantes; conocimientos y concepciones de los profesores, epistemología del contenido que se va aprender y a enseñar, tipo de asignatura y la didáctica que se emplea (Camarena, 2004). Además, el proceso de enseñanza y el aprendizaje está influenciado e inmerso en un entorno no tangible de tipo social, cultural, económico y político, siempre presente en el contexto de aprendizaje.

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias aborda 5 fases: *Curricular*, *Didáctica*, *Epistemológica*, *Formación de docentes* y *Cognitiva*. En el ambiente de aprendizaje están presentes las cinco fases y éstas interactúan entre sí con algún efecto entre ellas, es decir, no están aisladas unas de las otras y tampoco son ajenas a las condiciones sociológicas de los actores del proceso educativo. Sin embargo, la exposición formal de la teoría hace necesario fragmentarla en las cinco fases.

Entre ellas, la fase didáctica contempla un proceso metodológico para el desarrollo de las competencias profesionales con el cual se fomenta el desarrollo de las habilidades para la transferencia del conocimiento, e incluye las etapas:

1. Presentar la estrategia didáctica Matemática en Contexto en el ambiente de aprendizaje.
2. Implantar cursos extracurriculares con actividades destinadas a desarrollar las habilidades del pensamiento, habilidades metacognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver eventos contextualizados, así como actividades para bloquear creencias negativas.
3. Instrumentar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, a fin de resolver eventos reales de la industria.

La primera etapa incluye una estrategia didáctica denomina la Matemática en Contexto donde se presentan a los estudiantes los conocimientos integrados a partir de cierta situación problemática de otras disciplinas que, al tratar de resolver, permite al alumno encontrar nuevos puntos de interés hacia la matemática que está estudiando, así como la necesidad de adquirir nuevos conocimientos matemáticos. En general, esta estrategia didáctica desarrolla la teoría matemática de acuerdo con las necesidades y ritmos que dictan los cursos de la ingeniería.

2. Proceso de modelado de un fenómeno físico. Propuesto por Zill (2006) en el libro *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelado*, de uso común en las ingenierías que se imparten en el IPN y que, de los libros de texto analizados, es el que muestra de forma más completa el proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales pues incluye, además de la construcción del modelo y su resolución, el análisis de la misma y la validación del modelo como se explicó anteriormente (Capítulo 1).

Ambas propuestas se compararon para establecer un proceso de modelación matemática con ecuaciones diferenciales más adecuado (Tabla 4.1):

Etapas del proceso de modelación matemática	
Camarena (2004)	Zill (2006)
Determinar las variables y las constantes del evento.	Determinar las variables responsables del cambio que se produce en el sistema.
Incluir los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del evento.	Establecer un conjunto de suposiciones razonables o hipótesis, acerca del sistema. Esas hipótesis incluyen todas las leyes empíricas que se pueden aplicar al sistema.
Determinar el modelo matemático.	Formular el enunciado matemático de las hipótesis con una ecuación diferencial o con un sistema de ecuaciones diferenciales.
Solución matemática del evento.	Resolver las ecuaciones diferenciales.
Determinar la solución requerida por el evento.	
Interpretarla solución en términos del evento y disciplinas del contexto.	Presentar las predicciones del modelo (por ejemplo en forma gráfica). Comprobar las predicciones del modelo con hechos conocidos.
Presentar una matemática descontextualizada en el entorno de aprendizaje.	

Tabla 4.1: ***Correspondencia entre las etapas de la Matemática en Contexto (Camarena, 2004), y las fases del proceso de modelado (Zill, 2006).***

A partir de la tabla anterior, y de la revisión de los libros realizada (Capítulo 1), se realizaron las siguientes observaciones:

- Zill (2006) no consideró las condiciones del problema en la fase formular el enunciado matemático del problema. Sin embargo, en el libro, después de mostrar algunos ejemplos de modelos con ecuaciones diferenciales de primer orden, mencionó: "*con frecuencia los modelos matemáticos se acompañan de condiciones que los definen*" (p.21) y, más adelante: "*Un modelo matemático puede consistir en un problema con valores iniciales, o con valores en la frontera*" (p.21).

  En este sentido Borreli y Coleman (2002) detallaron, al tratar los sistemas dinámicos, que un modelo matemático consta de una ecuación diferencial y las condiciones que permiten asignar valores a las variables en un instante específico y, además: "*Estos modelos son problemas de valor inicial (PVI) y las condiciones relacionadas con los datos iniciales son las condiciones iniciales*" (p.53).

- Relacionado con lo anterior, Zill (2006) no consideró el hecho de aplicar las condiciones del problema como una fase explícita en el proceso de modelado con ecuaciones diferenciales sino como parte de la fase de resolución, como se puede ver en los ejercicios de aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Por lo tanto, no existe una fase en el modelo de Zill que se corresponda de manera explícita con la etapa correspondiente en la teoría de la Matemática en Contexto *Determinar la solución requerida por el evento.*
- La etapa *Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto* se corresponde con varias fases del proceso de modelado con ecuaciones diferenciales: 1) En primer lugar Zill (2006) sugirió presentar las predicciones del modelo en forma gráfica. En ese sentido, por ejemplo, Spiegel (2001) señaló la importancia de hacer gráficos de la resolución de un modelo para interpretar lo que está sucediendo desde el punto de vista aplicado. 2) Comprobar las predicciones del modelo con hechos conocidos lleva a validar el modelo. Borreli y Coleman (2002) señalaron que, para que un modelo sea fiable, se debe confrontar el resultado con datos experimentales.
- Otra fase importante que se corresponde con la etapa *Interpretar la solución en términos del evento y disciplinas del contexto* es interpretar la solución del modelo en términos del contexto en que surgió el problema. Para Boyce y DiPrima (2000), verificar si la solución matemática es físicamente razonable es un paso importante en el proceso de modelado ya que, que la solución matemática parezca razonable, no garantiza que sea correcta.
- La etapa *Presentar una matemática descontextualizada en el entorno de aprendizaje* se correspondería con una fase del proceso de modelado que permitiría presentar a los estudiantes otras aplicaciones del sistema físico.

Partiendo de las observaciones anteriores, se considera que el proceso para formular y resolver el modelo matemático de un sistema físico debe hacerse en términos de 9 etapas. Esta propuesta está de acuerdo con algunos autores que indican que, además de establecer el modelo matemático, hay que resolver las ecuaciones diferenciales resultantes e interpretar la solución como fases del proceso de modelación matemática (Boyce y DiPrima, 2000; Kreyszing, 1994; Penney, 1994; Spiegel, 2001). En concreto fueron, entendiendo que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales no solamente se debe llevar a cabo desde el enfoque analítico, sino también considerando los enfoques geométrico y numérico (Tabla 4.2):

Proceso de modelación matemática propuesto	
Etapa	Descripción
1. Identificar variables y leyes por aplicar	Determinar las variables responsables del cambio que se produce en el sistema. Formular un conjunto de hipótesis o premisas del sistema por describir.
2. Plantear la EDO	Escribir la EDO correspondiente.
3. Establecer condiciones	Determinar las condiciones del problema.
4. Resolver la EDO	Aplicar los métodos estudiados para obtener la resolución general.
5. Aplicar condiciones	Aplicar las condiciones para determinar la resolución particular.
6. Graficar resolución	Expresar la resolución particular con un gráfico.
7. Contestar pregunta original	Explicar el resultado en el contexto de la situación real.
8. Analizar resultado	Validar el resultado contrastándolo con datos conocidos.
9. Identificar el modelo	Explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema.

Tabla 4.2: ***Descripción del proceso de modelación matemática propuesto.***

Aplicación del proceso de modelación matemática

A continuación se muestran dos ejemplos que se trabajaron en aula al resolver problemas de aplicación, siguiendo el proceso de modelación matemática propuesto anteriormente.

Ejemplo 1. Modelo logístico de población

Enunciado del problema: *Utilizando un modelo logístico con capacidad sustentable* $K = 100\times10^9$ *habitantes, una población mundial (humana) de* 5×10^9 *habitantes en 1986 y* *una razón de crecimiento r de 2% anual, hacer una predicción de la población mundial para el año 2016.*

Etapa 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*. El tiempo t es la variable independiente y la población $P= P(t)$ es la variable dependiente. La capacidad sustentable K y la razón de crecimiento r son cantidades constantes.

La ley de crecimiento logístico fue introducida por Pierre Verhulst en el año 1838 y supone que la razón de crecimiento de una población es proporcional conjuntamente tanto a la población misma como a la cantidad faltante para llegar a la máxima población sustentable.

Etapa 2. *Plantear la EDO*. El modelo logístico puede escribirse en términos de las variables y constantes del sistema como:

$$\frac{dP}{dt} \propto P\left(1-\frac{P}{K}\right).$$

Al introducir una constante de proporcionalidad, la expresión anterior queda de la forma

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1-\frac{P}{K}\right).$$

En este modelo el número r se conoce como la razón de crecimiento intrínseco, K es la capacidad sustentable, que es el máximo valor que puede tener la población P. Sustituyendo los valores de K y r, dados en el enunciado del problema, se tiene la EDO de primer orden de la forma:

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P\left(1-\frac{P}{100}\right)$$

Etapa 3. *Establecer condiciones*. La población en 1986 se considera como la condición inicial $P(t=0) = 5$ (en miles de millones de habitantes).

Etapa 4. *Resolver la EDO*. La EDO de primer orden resultante puede resolverse por el método de separación de variables:

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P\left(1-\frac{P}{100}\right) \Rightarrow \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{100}\right)} = 0.02dt \Rightarrow \int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{100}\right)} = 0.02t + C$$

La integral del primer miembro se resuelve aplicando fracciones parciales:

$$\ln\left(\frac{P}{100-P}\right) = 0.02t + C \Rightarrow \frac{P}{100-P} = Ce^{0.02t}$$, ésta es la solución general.

Etapa 5. *Aplicar condiciones*. Para determinar el valor de la constante de integración C se aplica la condición inicial $P_0 = P(0)=5$.

$$\frac{5}{100-5} = Ce^{0.02(0)} \Rightarrow C = \frac{5}{95} = \frac{1}{19}.$$

Sustituyendo la constante C en la solución general se llega a la solución particular

$$\frac{P}{100-P} = \frac{1}{19}e^{0.02t}.$$

Escribiendo P de manera explícita $P(t) = \dfrac{100}{1+19e^{-0.02t}}$.

Esta expresión permite determinar el número de habitantes como función del tiempo.

Finalmente, como se quiere hacer la predicción mundial de habitantes para el año 2016 y se está considerando 1986 como el tiempo inicial ($t=0$), habrá que sustituir t = 30 años (diferencia entre 2016 y 1986) en la solución particular (solución del problema de valor inicial PVI)

$$P(t=30) = \frac{100\times 10^9}{1+19e^{-0.02(30)}} \approx 8\ 750\ 880\ 820 \text{ habitantes.}$$

Etapa 6. *Graficar resolución*. La función

$$P(t) = \frac{100}{1+19e^{-0.02t}},$$

se representa con el siguiente gráfico (Figura 4.3), donde K y P_0 (población inicial) se expresan en miles de millones de habitantes.

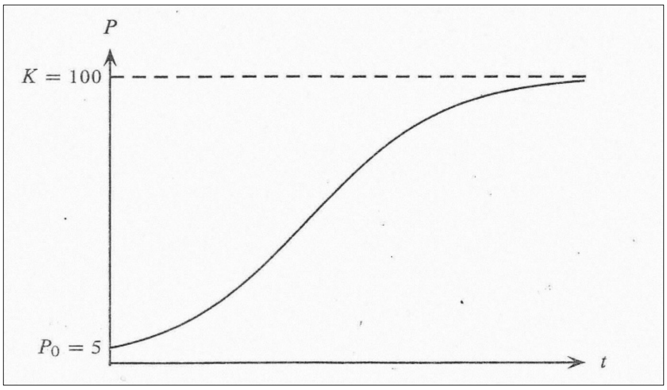


Figura 4.3: ***Comportamiento de la población P(t).***

Etapa 7. *Contestar pregunta original*. Para explicar si el resultado (predicción de 8.75×10^{9} habitantes para el año 2016) es físicamente aceptable, analizamos la solución particular en términos de la realidad.

De acuerdo a la gráfica, la población tiende al valor máximo sustentable cuando el tiempo t tiende a infinito. Sin embargo, tabulando algunos valores de las variables P población y t tiempo se tiene que, después de 500 años, la población se acercará al valor máximo sustentable de 100×10^{9} habitantes (Tabla 4.3):

Valores de la población *P*(*t*)	
t (años)	*P* (habitantes $\times10^{9}$)
0 (1986)	5.00
20(2006)	7.28
40 (2026)	10.48
60 (2046)	14.88
80 (2066)	20.67
100 (2086)	28.00
200 (2186)	74.18
300 (2286)	95.50
400 (2386)	99.37
500 (2486)	99.92

Tabla 4.3: ***Valores de la Población P(t).***

Parece que la población crecerá desmesuradamente pero, afortunadamente, la razón de crecimiento r=0.02, es una cantidad considerada constante (aproximadamente) y en muchos países ha estado disminuyendo por diversas razones como puede ser la planificación familiar.

Etapa 8. *Analizar resultado*. Para contrastar el resultado con datos conocidos, es decir validar el modelo matemático, se calcula la población en los años 2010 y 2050, y se comparan esas cifras con datos de la población mundial publicados por la ONU.

En el año 2010, $P(t=24)=\dfrac{100\times 10^9}{1+19e^{-0.02(24)}}\approx 7\,838\,904\,588$ habitantes.

En el año 2050, $P(t=64)=\dfrac{100\times 10^9}{1+19e^{-0.02(64)}}\approx 15\,916\,701\,640$ habitantes.

Según la ONU, en 2010 la población mundial era de 6 896 mil millones de habitantes y, en 2050, será de 9300 mil millones. Por lo tanto este modelo no es válido para describir el crecimiento de la población mundial. Esto se debe a que cada país tiene una razón de crecimiento diferente y no se puede considerar un valor único para todos los países.

Etapa 9. *Identificar el modelo*. El sistema (ecuación diferencial y condición inicial)

$$\frac{dP}{dt}=rP\left(1-\frac{P}{K}\right) \text{ y } P(t=0)=P_0,$$

puede aplicarse a problemas de propagación de un virus, para calcular el número de personas infectadas en función del tiempo, en términos de otros valores de *r*, *K*, y para una condición inicial particular.

Ejemplo 2. Ley de enfriamiento de Newton

Enunciado del problema: *Un ganadero salió una tarde a cazar un lobo solitario que estaba diezmando su rebaño. El cuerpo del ganadero fue encontrado sin vida por un campesino, en un cerro cerca del rancho junto al animal cazado, a las 6:00 hrs. del día siguiente. Un médico forense llegó a las 7:00 hrs. y tomó la temperatura del cadáver; a esa hora anotó 23˚C. Una hora más tarde, al darse cuenta de que en la noche, y aún a esas horas, la temperatura ambiente era aproximadamente de 5˚C, el forense volvió a* *medir la temperatura corporal del cadáver y observó que era de 18.5˚C. ¿A qué hora murió el ganadero aproximadamente?*

Etapa 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*. El tiempo t es la variable independiente y la temperatura $T=T(t)$ es la variable dependiente. La temperatura ambiente T_m es una cantidad constante.

De acuerdo con la ley empírica de Newton de enfriamiento/ calentamiento, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura T_m del medio que lo rodea.

Etapa 2. *Plantear la EDO*. La ley de Newton traducida a una expresión matemática es:

$$\frac{dT}{dt} \propto T - T_m .$$

T_m es la temperatura del medio. Al introducir una constante de proporcionalidad k, la expresión anterior se expresa de la forma

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

Sustituyendo el valor de T_m proporcionado en el enunciado del problema, se tiene la EDO de la forma:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

Etapa 3. *Establecer condiciones*. La temperatura en el tiempo inicial (cuando llegó el forense) era de 23˚*C*, y una hora más tarde de 18.5˚*C*, es decir, las condiciones quedan de la forma *T(0)* = 23˚*C*, esta es la condición inicial, *y T(0)* = 18.5˚*C* es la condición adicional.

Etapa 4. *Resolver la EDO*. La EDO de primer orden resultante puede resolverse por el método de separación de variables:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5) \Rightarrow \frac{dT}{(T-5)} = kdt \Rightarrow \int \frac{dT}{(T-5)} = kt + C$$

La integral del primer miembro es inmediata:

$ln(T-5) = kt + C \Rightarrow T(t) = Ce^{kt} + 5$, con lo que se obtiene la solución general.

Etapa 5. *Aplicar condiciones*. Para determinar el valor de la constante de integración C, se aplica la condición inicial:

$$T(0) = 23 = Ce^{k(0)} + 5 \Rightarrow C = 18$$

Por lo tanto, $T(t) = 18e^{kt} + 5$.

Para determinar el valor de la constante *k*, se aplica la condición adicional

$$T(1) = 18.5 = 18e^{k(1)} + 5$$

$$\frac{13.5}{18} = e^{k} \Rightarrow k = ln\left(\frac{13.5}{18}\right) = -0.2877 .$$

El signo negativo de la constante *k* indica que el cuerpo está perdiendo temperatura.

Escribiendo la solución *T* de manera explícita obtenemos la expresión

$$T(t) = 18e^{-0.2877t} + 5 ,$$

que permite determinar la temperatura *T* del cuerpo como una función del tiempo *t*.

Finalmente, como se quiere conocer la hora del deceso, suponemos que ocurrió al tiempo t_0 y, en ese instante, la temperatura del cuerpo era de 36 ˚*C* (temperatura corporal normal), es decir $T(t_0) = 36$.

Aplicando esta condición en la solución

$$T(t_0) = 36 = 18e^{-0.2877t_0} + 5 \Rightarrow \left(\frac{31}{18}\right) = e^{-0.2877t_0}$$

$$-0.2877t_0 = ln\left(\frac{31}{18}\right) \Rightarrow t_0 = -1.8895 .$$

El signo negativo del tiempo t_0, indica que el deceso ocurrió aproximadamente 1 hora y 53 minutos antes de las 7:00, que fue la hora de la primera toma de temperatura, esto es, alrededor de las 5:07 hrs.

Etapa 3. *Graficar resolución*. La función

$$T(t) = 18e^{-0.2877t} + 5$$

se representa con el siguiente gráfico (Figura 4.4), donde T(t) y *Tm* = 5 (temperatura del medio) se expresan en grados centígrados.

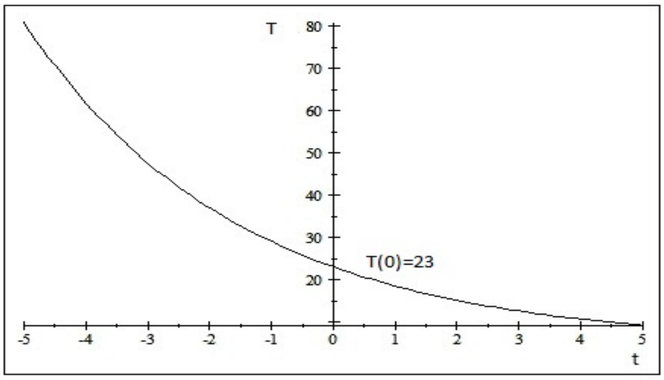


Figura 4.4: ***Comportamiento de la temperatura T(t).***

Etapa 7. *Contestar pregunta original*. Para explicar si el resultado (hora del deceso) es físicamente aceptable, analizamos la solución particular en términos de la realidad.

De acuerdo a la gráfica, la temperatura tiende a infinito cuando el tiempo *t* tiende a infinito. Sin embargo, tabulando algunos valores de las variables *T* y *t* se tiene (Tabla 4.4):

Valores de la temperatura $T(t)$	
t (horas)	$T(^{\circ}C)$
-5	80.85
-4	61.89
-3	47.69
-2	37.00
-1	29.00
0	23.00
1	18.05
2	15.12
3	12.59
4	10.69
5	9.27

Tabla 4.4: ***Valores de la temperatura T(t).***

Parece que la temperatura crecerá desmesuradamente para valores de tiempo anteriores a la hora del deceso, lo que significaría que la temperatura del ganadero era mayor que la temperatura normal. Esto no es físicamente posible. De igual manera, si el cuerpo se deja en el exterior sin ningún dispositivo de refrigeración, de acuerdo al gráfico, parece que cuanto más tiempo transcurra la temperatura se irá acercando más a $5\,^{\circ}C$.

Etapa 8. *Analizar resultado*. Para contrastar el resultado con datos conocidos, es decir validar el modelo matemático, en primer lugar debemos considerar que la ley de de enfriamiento de Newton es una aproximación a la situación real y se debe considerar válida tan sólo para pequeñas diferencias entre la temperatura del cuerpo T y la temperatura del ambiente que rodea al cuerpo.

En segundo lugar, de acuerdo con algunos textos, la temperatura decae aproximadamente $0.83\,^{\circ}C$ cada hora tras la muerte, a no ser que haya otros factores medio-ambientales que lo impidan. Por lo cual, de acuerdo a este dato, que indica una relación lineal entre la temperatura y el tiempo, el modelo matemático no puede ser válido para representar una situación de esta naturaleza.

Etapa 9. *Identificar el modelo*. El sistema (ecuación diferencial y condición inicial)

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5), T(t = 0) = T_0$$

podría aplicarse a problemas de enfriamiento de materiales cerámicos y metales, así como también calcular problemas de calentamiento para algunos líquidos.

4.1.4. Plataforma web para el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales

En comparación con una página web, que simplemente pone a disposición una serie de contenidos didácticos, una plataforma *e-learning*, independientemente de su nivel de complejidad, funciona como un entorno en el que los estudiantes llevan a cabo tanto actividades de tipo individual con los contenidos del curso (auto-aprendizaje), como actividades con la comunidad (aprendizaje colaborativo). Esto es posible gracias a las herramientas y servicios integrados en la plataforma como *chat*, foros, intercambio de documentos de texto o audio, *tracking*, etc., que difícilmente encontramos en una página web normal.

Existen diferentes tipos de plataformas e-learning que pueden ser sistemas desde muy sencillos hasta complejos y articulados. Unas son comerciales, realizadas por empresas de desarrollo de *software*, y otras de libre acceso (open source), desarrolladas por una comunidad de informáticos para que estén disponibles sin costo alguno y cuya licencia permite el acceso al código fuente para mejorar el programa. El software libre constituye un recurso verdaderamente valioso ya que es fácilmente accesible y disponible en comparación con plataformas comerciales extremadamente caras como, por ejemplo, Blackboard o WebCT (Martin-Blas y Serrano-Fernández, 2009). Una de las plataformas de acceso libre de más utilidad en la actualidad para la gestión de cursos en todo el mundo es MOODLE, un sistema de gestión de cursos de libre distribución que ayuda a los docentes a crear comunidades de aprendizaje en línea. Se considera como una plataforma de aprendizaje que facilita la comunicación entre sus usuarios con fines educativos.

La asignatura Ecuaciones Diferenciales se organizó a través de una plataforma web en MOODLE, que la Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual (UTEyCV) del centro educativo (ESCOM) ponía a disposición de los profesores para el desarrollo de cursos. El acceso se restringió a los estudiantes inscritos en el curso y que participaron en la experiencia.

Para apoyar el desarrollo de la asignatura, la plataforma web del curso se diseñó para cumplir los siguientes objetivos:

1. Informar de cuestiones generales y de organización del curso.
2. Gestionar los contenidos del curso.
3. Ampliar las vías de comunicación de los estudiantes con el profesor y entre los estudiantes.
4. Fomentar el trabajo colaborativo.

La plataforma del curso se organizó en un bloque principal y dos bloques secundarios que tuvieron las siguientes funciones:

a) Bloque principal. Se organizó en dos secciones de la siguiente forma (Figura 4.5):

   - *Informativa.* Recogió los datos del profesor y la información general sobre el desarrollo de la asignatura incluyendo, por ejemplo, programa, calendario, fechas de inicio y fin de actividades, fechas de exámenes departamentales, avisos y hechos extraordinarios. También contenía el plan de trabajo temporalizado del estudiante. Todo ello se actualizaba con un máximo de dos semanas.

   - *Unidades temáticas*. Estaba dividida en unidades, cada una de las cuales incluía su objetivo y contenidos. También informaba del trabajo que cada estudiante debía realizar con la correspondiente temporalización, incluía tanto los apuntes del curso como la colección de ejercicios y problemas, y los documentos de lectura correspondientes a cada unidad temática. Además, en las secciones correspondientes a la unidad III, se implementó un entorno de aprendizaje basado en web para el desarrollo de un *Proyecto* que cada estudiante debía realizar según se explica en el siguiente apartado de este capítulo. Por otro lado, en las secciones correspondientes a cada unidad temática, existía la posibilidad de que los estudiantes enviaran sus actividades al profesor desde la aplicación *tarea*, cuando el formato lo permitiera. Se almacenaban en una zona donde se indicaba el nombre del trabajo, en qué consistía lo que había que realizar, y la fecha de inicio y entrega (Figura 4.5):

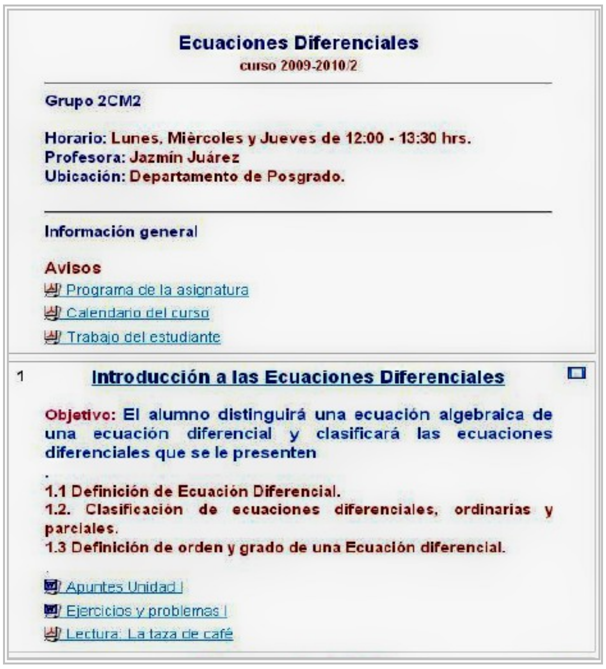


Figura 4.5: ***Sección informativa y Sección de la unidad temática I en el bloque principal de la plataforma.***

b) Bloque secundario derecho, contenía dos secciones (Figura 4.6):

- *Eventos próximos*. Permitía recordar las actividades que había que entregar próximamente y algunos aspectos de interés para el alumno.
- *Calendario*. Posibilitaba ver las fechas de inicio y entrega de las actividades que había que realizar, así como otros hechos significativos para el desarrollo del curso. Además, permitía añadir otras secciones de acuerdo a las necesidades del curso.

Figura 4.6: ***Bloque secundario derecho de la plataforma de la asignatura.***

c) Bloque secundario izquierdo, que incluía cuatro secciones (Figura 4.7):

- *Personas.* Enlazaba a una página donde aparecían los nombres de los estudiantes matriculados en el curso, sus direcciones electrónicas e información de la última vez que accedieron a la plataforma.

- *Actividades.* Permitía consultar los materiales del curso disponibles, las tareas y los foros de discusión activos, y otros aspectos que el profesor considerara conveniente.

- *Administración.* Posibilitaba que cada alumno modificara su perfil y consultará sus calificaciones.

- *Mis cursos.* Permitía que cada estudiante accediera a los cursos en los que estaba matriculado utilizando el gestor MOODLE de la Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual (UTEyCV), del centro educativo (ESCOM).

Figura 4.7: ***Bloque secundario izquierdo de la plataforma de la asignatura.***

4.1.4.1. Trabajo del estudiante a través de la plataforma web

La plataforma y su funcionamiento se presentaron a los estudiantes al inicio del semestre en el laboratorio de cómputo, donde cada estudiante generó una cuenta de ingreso. Además se les informó que, aunque todas las sesiones del curso se iban a desarrollar de manera presencial, toda la información sobre el desarrollo de la asignatura, los materiales, los documentos de trabajo y las actividades que había que realizar, así como la entrega de las mismas, se haría a través de la plataforma.

Como parte de las actividades del curso, los estudiantes desarrollaron un *Proyecto* usando un entorno de aprendizaje basado en web a través de la plataforma del curso. Se trataba de que los estudiantes pudieran analizar y discutir las aplicaciones reales de las ecuaciones diferenciales de segundo orden como se explica posteriormente.

***Proyecto* Modelos matemáticos y ecuaciones diferenciales de segundo orden**

Una vez que se concluyó la unidad de aprendizaje III: Ecuaciones Diferenciales de segundo orden y orden superior, se implementó un entorno de aprendizaje basado en web en la plataforma de la asignatura para que los estudiantes desarrollaran el *Proyecto* Modelos matemáticos y ecuaciones diferenciales de segundo orden. Para ello, además de utilizar foros virtuales como instrumentos de comunicación para trabajar en grupo, también debían usar el software PowerPoint.

Para diseñar el *Proyecto* se consideró, por un lado, la necesidad que existe en los cursos de ecuaciones diferenciales en las escuelas de ingeniería de presentar el proceso de modelación matemática que los estudiantes deben aprender como parte de su formación (Capítulo 1) y, por otro, se tuvo en cuenta que los grupos de aprendizaje colaborativo fomentan el desarrollo de habilidades que facilitan la interacción entre sus miembros, a la vez que posibilitan el desarrollo de destrezas para construir, descubrir, transformar y acrecentar los contenidos conceptuales, así como que permiten socializarse con las personas de su entorno (Vinagre, 2010).

Santos (2007) desarrolló algunas actividades que contribuyeron a que, a través de la participación y la discusión, los estudiantes mejoraran su disposición matemática y desarrollaran una forma de pensar acorde al quehacer matemático. Para este *Proyecto* se consideraron dos de ellas:

1. Discusión en grupos pequeños. Los estudiantes participaron activamente valorando constantemente sus ideas y sugiriendo y explorando conjeturas para construir el conocimiento matemático.
2. Presentaciones individuales. Los estudiantes presentaron sus avances a todo el grupo.

A partir de las ideas anteriores, se diseñó un *Proyecto* que tenía como objetivos formular, resolver, interpretar, justificar y analizar modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales, que se desarrolló de la siguiente forma:

1. Cada estudiante del curso eligió un problema de valores iniciales (PVI) de segundo orden, de la colección de ejercicios y problemas del curso.
2. Los estudiantes se organizaron en grupos de trabajo de unos 5 integrantes, donde cada uno aportó su problema seleccionado.

3. Se estableció, en la plataforma web de la asignatura, un foro F1 en cada grupo para que los estudiantes, conjuntamente, eligieran un problema entre los propuestos por cada integrante y que pudiera adaptarse a una situación de la vida real.
4. Se organizó un foro de discusión F2 en cada grupo para resolver el problema propuesto y elaborar, de forma conjunta, un trabajo inicial consistente en una presentación en PowerPoint (presentación inicial PI), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática, que se presentó en el aula. Después de finalizar el foro F2, los trabajos se expusieron en el aula y quedaron a disposición de todos los estudiantes en la plataforma de la asignatura.
5. Se estableció un tercer foro F3 en cada grupo para valorar en conjunto una de las presentaciones (PI) que se expusieron en el aula, de manera que todas fueran seleccionadas. Los estudiantes debían discutir con sus compañeros del grupo de trabajo sobre los elementos del trabajo que consideraban deberían revisar para favorecer la comprensión del proceso de modelación matemática.
6. Cada grupo de trabajo tuvo acceso a los mensajes del foro F3 en el que se valoró su presentación inicial (PI) y, tras revisar los comentarios sobre su trabajo, elaboraron una presentación final (PF).

Los foros F1 y F2 estuvieron activos durante 10 días y, el foro F3, 5 días. El debate en cada una de los foros comenzó con un mensaje del profesor, que contenía una pregunta y las indicaciones para participar, que podía ser respondida por cualquiera de los integrantes de los grupos de trabajo. El profesor no participó en ninguno de los foros durante el desarrollo del debate.

Este *Proyecto* se desarrolló durante el primer semestre del curso 2009/10 (curso A) y durante el segundo semestre del curso 2009/10 (curso B). Sin embargo, en el segundo semestre (curso B), los estudiantes realizaron el punto 5 del *Proyecto* de forma diferente al tener que revisar cada grupo, en el foro F3, la propia presentación (PI) como respuesta a las mismas preguntas mencionadas.

El comparativo realizado por Santos (2007) sobre los principales marcos teóricos relevantes en la investigación en Educación Matemática se indica que, bajo la perspectiva *Resolución de problemas*, se tratan problemas no rutinarios con diferentes tipos de dificultad (desde aquellos que se resuelven en un tiempo límite hasta aquellos que se trabajan durante largos periodos), y que se puede transformar un problema de rutina en un problema no rutinario a través de un proceso que involucra el planteamiento de preguntas. Sin embargo, recogió que la perspectiva de *Modelación matemática* implica problemas que involucren distintos contextos y cuya solución muestre explicaciones, descripciones, operaciones, interpretaciones, representaciones, algoritmos, argumentos, revisiones y ajustes.

En este caso particular, al abordar el proceso de modelación matemática desde la Matemática en Contexto se pretende que los estudiantes estén capacitados para establecer el modelo matemático de eventos contextualizados.

Por otro lado, la interacción profesor-alumno ha sido foco de interés desde hace años. El profesor es responsable tanto de diseñar como de crear un contexto que refuerce los objetivos educativos con el fin de lograr mejores resultados del aprendizaje (Rourke, Anderson, Garrison y Archer, 1999). De este modo, el profesor juega un papel clave en la motivación, apoyo y mejora del interés de los estudiantes y el aprendizaje. Este reconocimiento ha llevado a un interés en la investigación para estudiar cómo las acciones de los docentes afectan el aprendizaje del estudiante y la participación.

La presente investigación se ha efectuado desde una perspectiva de los estudiantes y no se ha centrado en los efectos de las acciones del profesor, aunque sería importante considerarlos en el futuro. Hay que tener en cuenta que se ha demostrado que las participaciones frecuentes de los profesores en los foros de discusión pueden originar un menor número de participaciones de los estudiantes a pesar de la información y del entusiasmo de los profesores (Mazzolini y Maddison, 2003). Sin embargo, la falta de interacción profesor-alumno, como fue el caso de las primeras generaciones de educación a distancia, ha sido un factor problemático ya que deja a los estudiantes la responsabilidad de mantener la motivación.

Por último, y no menos importante, hay que justificar el uso del software PowerPoint con el cual los estudiantes presentaron sus trabajos en el aula. No debe considerarse como un reemplazo de la pizarra sino como un medio eficiente auxiliar que puede mejorar el aprendizaje. Por tal motivo, revisamos los resultados de algunas investigaciones sobre su utilización en el aula universitaria.

Para Szabo y Hastings (2000), PowerPoint contiene algunos elementos que estimulan la atención: el color, la presentación de la información por concepto, la flexibilidad para la interfaz gráfica, así como la organización y la fácil variación del tamaño y tipo de fuentes de manera que acrecienta la atención de los estudiantes y reduce la distracción. La investigación que realizaron para evaluar la eficacia de este medio en las aulas de educación superior permitió concluir que PowerPoint podría ser útil para la enseñanza de la matemática especialmente cuando los modelos dinámicos, las animaciones y la variación del color pueden ayudar a una mejor comprensión de los conceptos.

Además, la organización del material está relacionada con la comprensión de conceptos y la retención del material. Acompañar las lecciones con PowerPoint es una estrategia de gestión del tiempo más eficiente que escribir en la pizarra ya que permite agilizar tiempo (Susskind, 2005). Se trata de una herramienta fácilmente disponible que puede ayudar a los estudiantes a la comprensión de conceptos matemáticos, especialmente en el desarrollo de proyectos que exijan trabajo colaborativo y originen debates (Wilson, 1999).

Sin embargo, no se pueden olvidar las sugerencias de Savoy, Proctor y Salvendy (2009) de que la facilidad de preparación y distribución de la información digital no siempre se traduce en un mejor rendimiento. Las ventajas e inconvenientes tienen que ser identificados para el uso adecuado de las tecnologías en educación ya que ningún instrumento es óptimo para todos los contenidos y contextos. A pesar de ello, y de que existe poca evidencia de su uso en educación superior, se entendía que podía favorecer el aprendizaje matemático.

4.2. Diseño de la investigación

Una vez que se precisó el problema y los objetivos de investigación, había que responder a esos objetivos con un diseño de investigación adecuado dentro de un modelo de investigación apropiado. Una metodología de investigación describe los procedimientos para guiar el estudio incluyendo cuándo, de quién y bajo qué condiciones serán obtenidos los datos. En otras palabras, recoge cómo preparar la investigación, qué les pasa a los sujetos, qué métodos de recogida de datos se utilizan y cómo se analizan los datos (McMillan y Schumacher, 2007).

4.2.1. Principios metodológicos de la investigación

La finalidad de la investigación en educación es conocer, describir o comprender, con cierta precisión, las características y funcionamiento de una determinada realidad educativa, así como la relación que existe entre los elementos que la configuran (Martínez, 2007). Nunca hay que olvidar que la investigación educativa, como investigación aplicada, tiene como finalidad prioritaria apoyar los procesos de reflexión y crítica para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje (Goetz y LeCompte, 1988).

En el ámbito educativo, la investigación empírica se caracteriza por utilizar una pluralidad de metodologías o diversidad de procedimientos que pueden utilizarse en otros ámbitos de conocimiento (Sabariego, 2004). Distintas metodologías y diseños diferentes pueden proporcionar diferentes tipos de conocimientos y, en algunos estudios, métodos complementarios de investigación (McMillan y Schumacher, 2007).

Para Rodríguez y Valldeoriola (2007), la esencia del método utilizado no reside en la naturaleza de las metodologías (cuantitativas/cualitativas), ni en los objetos de estudio (naturales/sociales), sino en los objetivos y finalidades de la investigación. Al respecto, Gadamer (2001) advirtió de la inutilidad de la discusión metodológica basada en una distinción metódica o en una distinción de objetos de estudio, considerando que la cuestión fundamental son los objetivos perseguidos por el investigador: explicar, propio de investigaciones cuantitativas, y comprender, propio de investigaciones cualitativas. Ambos enfoques resultan muy valiosos y han realizado notables aportaciones al avance del conocimiento. Ninguno es intrínsecamente mejor que el otro sino que constituyen diferentes aproximaciones al estudio de un fenómeno. Incluso un diseño de investigación puede compartir características tanto de metodología cuantitativa como de cualitativa.

La metodología más tradicionalmente utilizada en Educación Matemática ha sido la cuantitativa. Desde los años ochenta del siglo pasado se observó un creciente interés por la aplicación de los métodos cualitativos en el ámbito de la investigación educativa como resultado de utilizar los procedimientos empleados en otras disciplinas especialmente de las Ciencias Sociales y Humanas (Dorio, Sabariego y Massot, 2004). Desde esta perspectiva metodológica, el investigador se separa de la realidad que configura el objeto de estudio con el fin de descubrir regularidades y formular generalizaciones que posibiliten su predicción (Sabariego, 2004).

Para LeCompte (1995) la investigación cualitativa podría entenderse como una categoría de diseños de investigación que extraen descripciones a partir de observaciones que adoptan la forma de entrevistas, narraciones, notas de campo, grabaciones, transcripciones de audio y vídeo, registros escritos de todo tipo, fotografías o películas y artefactos. Para esta autora la mayor parte de los estudios cualitativos están preocupados por el entorno de los acontecimientos y centran su indagación en aquellos contextos naturales o tomados tal y como se encuentran, más que reconstruidos o modificados por el investigador, en los que las personas se implican e interesan, evalúan y experimentan directamente. Esto significa que los investigadores cualitativos estudian los fenómenos en su contexto natural, intentando darles sentido o interpretarlos en función de los significados que las personas les dan.

Una definición amplía y sintética, de las diferentes orientaciones englobadas bajo el término de investigación cualitativa es la que propone Sandín (2003): la investigación cualitativa es una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones, y hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento. En definitiva, las metodologías cualitativas se orientan hacia la comprensión de situaciones únicas y particulares, en la búsqueda de significado y de sentido que los propios agentes les conceden a los hechos, y en cómo viven y experimentan ciertos fenómenos o experiencias los individuos o los grupos sociales a los que se analizan.

La investigación que se presenta en este trabajo puede caracterizarse como una investigación mixta, ya que se emplearon aproximaciones cuantitativas y cualitativas para la recolección y el análisis de datos. Para Hernández, Fernández y Baptista (2003) la meta de la investigación mixta no es reemplazar la investigación cualitativa ni la investigación cuantitativa, sino utilizar las fortalezas de ambos tipos y tratar de minimizar sus debilidades.

4.2.2. Participantes

Como se explicó previamente, la experiencia se realizó en el desarrollo de la asignatura semestral Ecuaciones Diferenciales durante el curso 2009/2010, en dos semestres sucesivos (cursos A y B, respectivamente). Ambos cursos fueron impartidos por el mismo profesor (doctorando) y en las mismas condiciones.

De acuerdo con Creswell (2009) el muestreo cualitativo es propositivo. Las primeras acciones para elegir la muestra se producen desde el mismo planteamiento y al seleccionar el contexto, en el cual interesa: ¿Qué casos interesan inicialmente y dónde se pueden encontrar? (Hernández, Fernández y Baptista, 2003).

El muestreo adecuado tiene una importancia crucial en la investigación. Teniendo en cuenta que las investigaciones cualitativas consideran los procesos de la determinación de la muestra como dinámicos, adecuados y básicos más que como parámetros de población estáticos o previos, en el caso de esta investigación hemos optado por una muestra seleccionada de forma intencional, con los estudiantes a los que el doctorando estaba impartiendo la asignatura de Ecuaciones Diferenciales. Mientras que existen normas estadísticas probabilísticas para la confección de una muestra, para modelos intencionados solo existen líneas de guía (Rodríguez, Gil y García, 1999). Tradicionalmente un tamaño de muestra cualitativa puede parecer pequeño en comparación con el tamaño del modelo necesario de representatividad para generalizar a una población numerosa.

En esta investigación, en el primer semestre (curso A), participaron en la experiencia 26 estudiantes (8 mujeres, 31%, y 16 hombres, 69%), organizados en 5 grupos de trabajo: G1A, G2A, G3A, G4A, G5A. En el segundo semestre (curso B), participaron 27 estudiantes (6 mujeres, 22%, y 21 hombres, 78%), organizados en 5 grupos: G1B, G2B, G3B, G4B, G5B.

4.2.3. Recogida de datos

Una vez que se seleccionó la muestra adecuada, el siguiente paso consistió en planificar la recogida de datos. Según Hernández, Fernández y Baptista (2003), existe un espectro de técnicas que permiten recoger datos de distinta naturaleza: desde mediciones de variables cuantitativas hasta registros narrativos y descriptivos de observaciones cualitativas. La importancia de utilizar buenos procedimientos y técnicas de recogida de información en la investigación radica en que de ellas depende la calidad de los datos que se manejen para establecer conclusiones adecuadas o válidas sobre el tema investigado y, en su caso, para tomar decisiones eficaces sobre cómo intervenir sobre la situación analizada (Martínez, 2007).

Debido a las consideraciones anteriores, y teniendo en cuenta que la utilización de distintas técnicas de recogida de información es necesaria para poder contrastar y enriquecer la información obtenida sobre la realidad (Massot, Dorio y Sabariego, 2004), en esta investigación se tomaron como datos:

1. Los mensajes de los estudiantes en los foros F1, F2 y F3 durante el desarrollo del *Proyecto*, explicado anteriormente.
2. La presentación inicial del *Proyecto* solicitado (PI) y la presentación final (PF) del mismo, según se ha explicado, de cada grupo de trabajo de los cursos A y B.

Los mensajes en los diferentes foros se transformaron de archivos HTML a documentos PDF. La plataforma web del curso permitía mostrar los mensajes como *Respuestas en rama* (Figura 4.8), en las cuales solamente se recogía la secuencia de los mensajes a partir de una intervención inicial, sin mostrar el contenido, y como *Respuestas anidadas* (Figura 4.9), en las cuales también se mostraba el contenido de los mensajes.

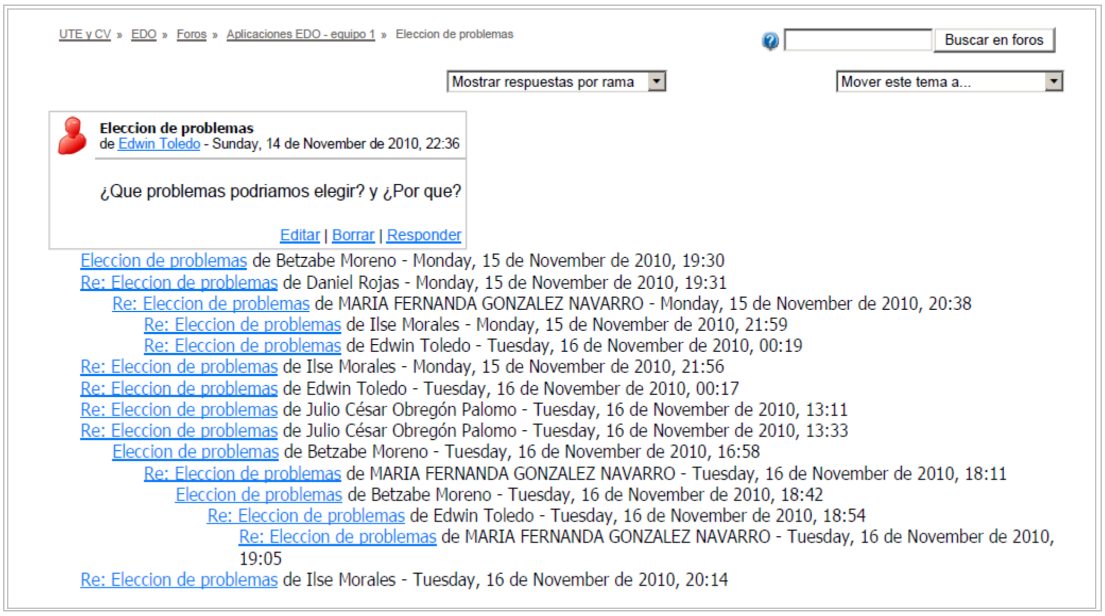


Figura 4.8: ***Respuestas en rama del grupo G1B en el foro F1.***

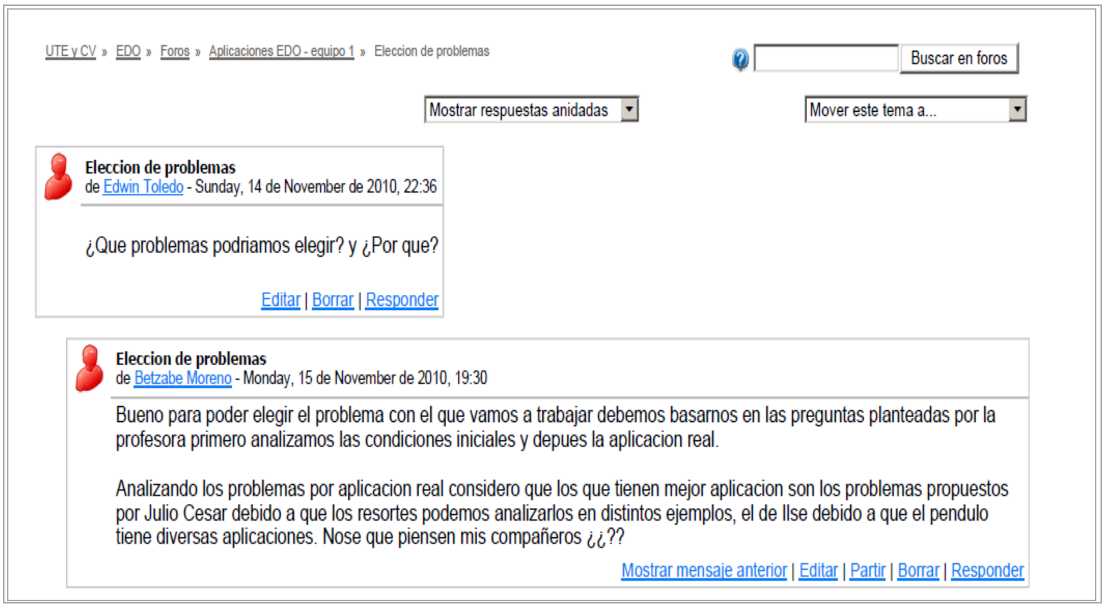


Figura 4.9: ***Respuestas anidadas del grupo G1B en el foro F1.***

Las respuestas en rama permitieron identificar cuando los estudiantes no insertaron su intervención en el lugar adecuado, así como las secuencia de participación. A partir de éstas y de las respuestas en rama, se construyeron las cadenas de conversación de cada grupo de trabajo entendidas como cada conjunto de mensajes enlazados y referidos a una misma temática o generados secuencialmente a partir de un inicio común (Schrire, 2006). De acuerdo a Llinares y Valls (2009), se consideraron cadenas conversacionales al conjunto de interacciones vinculadas a una misma temática, lo que permitió conocer alrededor de qué temas y de qué manera los estudiantes interaccionaban.

Para denotar a las cadenas de conversación se utilizó la siguiente notación: La letra C con un subíndice que señala el número de cadena en la sección del foro considerada, seguida por el nombre del grupo de trabajo y el foro. Por ejemplo, la única cadena del grupo G1A en el foro F2 se denotó por C_1G1AF2.

En las cadenas de conversación, la interacción entre los participantes se representó mediante flechas: el inicio de la flecha indica quién hizo la contribución y el final representa a quién iba dirigido el comentario. Finalmente los mensajes se agruparon de acuerdo al día de participación.

La siguiente gráfica (Figura 4.10) muestra un ejemplo de cadena de conversación en un debate virtual para seleccionar un problema en conjunto (foro F1), de un grupo de trabajo en el que participaron 4 estudiantes (KEA, CRT, DSC, EAH), a partir de la contribución inicial del profesor (JJR).

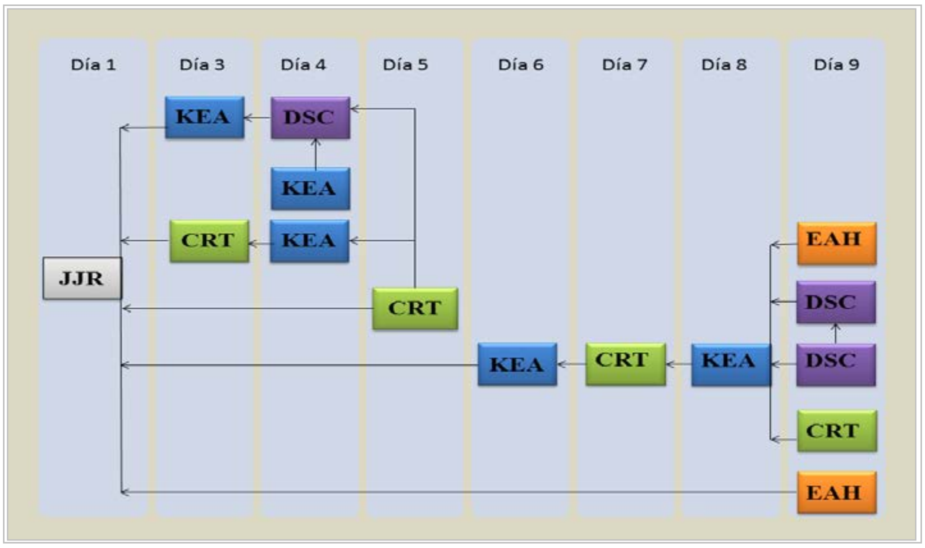


Figura 4.10: ***Representación gráfica de la segunda cadena de conversación del grupo G1A en el foro F1 (C_2G1AF1).***

Los mensajes de cada grupo y en cada curso se organizaron en tablas considerando cada uno de los foros F1, F2 y F3 de acuerdo a la cadena de conversación correspondiente incluyendo referencia del estudiante, momento de la participación y contenido del mensaje de manera que cada mensaje estuviese en el lugar que se correspondía con la intención del que lo envió.

4.2.4. Análisis de la información

El análisis de datos en investigación cualitativa es un proceso que consiste en dar sentido a la información recogida, lo que requiere que el investigador organice los datos de manera que la información resulte manejable con unidades de análisis relevantes (Rodríguez y Vallderiolla, 2007). Constituye una etapa clave del proceso de investigación cualitativa que parece indisolublemente unida a la recogida de la información: *"Cuando registramos y escribimos lo que observamos, de alguna manera ya estamos efectuando un análisis de la información, pues inevitablemente interpretamos la realidad y la categorizamos, aunque sea implícitamente, en el uso del lenguaje"* (Massot, Dorio y Sabariego, 2004, p.357).

Los mensajes de los estudiantes en los foros al desarrollar el *Proyecto* fueron transcritos y se organizaron en unidades de análisis. Para ello, referido a discusiones a través de herramientas de comunicación asíncronas, DeWever, Schellens, Valcke y Van Keer (2006) consideraron tres posibles opciones de unidad de análisis: 1) cada enunciado individual, 2) un tema o idea constante, y 3) el mensaje completo. Se consideró como unidad de análisis (UA) cada idea con significado propio, entendida como una unidad única de pensamiento que expresaba una única información, extraída de un segmento de la intervención (Rourke, Anderson, Garrison y Archer, 2001). Así, un mensaje puede contener varias unidades de análisis. Una vez realizada la identificación de las unidades de análisis se recogieron en la siguiente tabla en función de cada foro considerado (Tabla 4.5):

Distribución de las UA en los foros				
Foro	Curso A		Curso B	
	UA	Mensajes	UA	Mensajes
F1	304	153	294	164
F2	103	55	244	158
F3	140	44	186	73
Total	547	252	724	395

Tabla 4.5: ***Distribución de las unidades de análisis (UA) en los foros virtuales.***

El análisis de las datos obtenidos de las aportaciones de los estudiantes de cada uno de los cursos A y B, en cada grupo, en los diversos foros F1, F2 y F3 cuando desarrollaron el *Proyecto*, así como la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) realizadas, se llevó a cabo en dos partes de acuerdo a cada uno de los objetivos planteados en la investigación.

4.2.4.1. Análisis de las interacciones en el foro virtual

A partir del primer objetivo, *Analizar el nivel y la profundidad de las interacciones en el foro*, se formularon las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo fueron las interacciones de los estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales?
2. ¿Con qué profundidad interaccionaron los estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales?

El análisis de la forma en que interaccionaron los estudiantes en un foro virtual se hizo en los siguientes sentidos: a) Tipo y Nivel de interacción, b) Nivel de profundidad.

a) Tipo y Nivel de interacción

Para clasificar las unidades de análisis se realizó una adaptación del modelo de Llinares y Valls (2009), utilizado cuando estudiantes para maestro interactuaban para generar competencias profesionales relativas a la interpretación de la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. Este sistema de análisis se adaptaba mejor a esta investigación que el de los otros modelos considerados en el marco conceptual ya que permitía valorar, de manera más ajustada, las interacciones en un foro con estudiantes universitarios. Además, el instrumento seleccionado permitía que el proceso de implicación cognitiva producida en el contexto de la interacción considerara aspectos que surgieran entre los participantes, teniendo en cuenta soluciones, comentarios adicionales y contrapropuestas. Por otro lado, Llinares y Valls (2009) consideraron que un discurso debe producir progreso en el sentido de compartir, cuestionar y revisar opiniones, conducir a una nueva comprensión de todos los que participan y su contenido se debe considerar un artefacto del conocimiento sobre el que los participantes trabajan colaborativamente.

En Tabla 4.6, se muestra la forma en la que se adaptó el modelo de Llinares y Valls (2009) al contexto de la experiencia realizada, para clasificar las UA de los mensajes de los estudiantes en un foro virtual, incluyendo ejemplos de la experiencia realizada:

Tipo de interacción en un debate virtual		
Categoría	Indicadores	Ejemplos
Aporta información (I) Aporta nuevos datos relacionados con lo que se pide en la tarea.	- Contribución inicial como respuesta a las preguntas planteadas por el profesor. - Realiza preguntas que pueden conducir a la reflexión, a la revisión de una contribución o a la ampliación de la información proporcionada. - Introduce nuevos aspectos o propone una nueva idea.	*"El único ejercicio que es un problema de valores iniciales (PVI) es el primero de nuestra lista, ya que tiene valores iniciales".* *"¿Creen que este problema se pueda aplicar a un esquí acuático?"* *"Vean que el problema se puede resolver por la transformada de Laplace, que es unidad que estamos viendo".* *"Si se cambia el enunciado, el problema podría aplicarse a un juguete con resorte".*
Aclara (CL) Amplía o refina una aportación previa, ya sea propia o de otro participante.	- Subraya, explicita o explica aspectos considerados previamente. - Demanda la aclaración de algún concepto o idea utilizado en alguna aportación. - Responde preguntas de aclaración o de reflexión que se han planteado.	*"Es que el problema solo pide determinar si el paciente es sano o no, con respecto a los datos ofrecidos en el problema".* *"¿Qué condiciones debe cumplir un problema de valores iniciales (PVI)?"* *"Pues sí, se podría utilizar la transformada de Laplace porque la condición inicial es cero, pero el procedimiento es más largo".*
Coincide (C) Manifiesta conformidad y apoyo hacia una aportación determinada.	- Indica que está de acuerdo con alguna (s) de las aportaciones previas.	*"Coincido contigo en que este problema se debe resolver con el sistema masa-resorte".*
Coincide y amplía (CA) Concuerda y amplía aspectos mencionados en otras aportaciones.	- Indica que está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas, y además añade argumentos para apoyar su participación.	*"De acuerdo, si mi planteamiento está bien, no es necesario usar variación de parámetros, ya que es una ecuación homogénea y lineal".*
Discrepa (D) Muestra desacuerdo con datos aportados previamente.	- Indica que no está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas.	*"Pues a mí no me llamó la atención el problema de la diabetes".*
Discrepa y amplía (DA) Muestra desacuerdo con una contribución acompañado de argumentos que lo respaldan.	- Indica que no está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas, y además añade argumentos para apoyar su participación.	*"No sé, creo que el problema de equilibrio de Karen puede servir más porque la condición inicial es cero".*
Otros (O) Aporta datos que no están relacionados con lo que se pide en la tarea.	- Introduce elementos en la conversación que son ajenos al desarrollo de una tarea.	*"Disculpen la tardanza".*

Tabla 4.6: ***Plantilla de valoración para clasificar las aportaciones de los estudiantes según el tipo de interacción (adaptado de Llinares y Valls 2009).***

Después de realizar la clasificación anterior, las categorías se agruparon en tres niveles de acuerdo al nivel de interacción en que se desarrollaron las aportaciones de los estudiantes y teniendo en cuenta la tarea que debían realizar en cada uno de los foros (Tabla 4.7):

Nivel de interacción en un debate virtual	
Nivel	Categoría
Aporta información (0): Aporta ideas que no se han considerado previamente	Proporciona información (I)
Interactúa (1): Menciona ideas que han surgido de un aspecto considerado previamente por los compañeros o por él mismo	Aclara (CL)
	Coincide (C)
	Discrepa (D)
Interactúa y amplia (2): Amplía aspectos que han surgido en una aportación previa	Coincide y amplía (CA)
	Discrepa y amplía (DA)

Tabla 4.7: ***Plantilla de valoración para clasificar las aportaciones de los estudiantes según el nivel de interacción.***

b) Nivel de profundidad

Para analizar el nivel de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en un foro se realizó una adaptación de la herramienta de Chamoso y Cáceres (2009), diseñada para evaluar el pensamiento reflexivo que los estudiantes para maestro de matemáticas expresaron en su portafolios de aprendizaje. Para ello, en primer lugar se hizo una revisión general de las aportaciones de los estudiantes en términos del modelo seleccionado, para adaptar las categorías propuestas al contexto de la presente investigación y en términos de la tarea que se debía realizar en cada uno de los foros F1, F2 y F3, lo que generó la siguiente plantilla de valoración, incluyendo ejemplos de la experiencia realizada (Tabla 4.8):

Nivel de profundidad de las aportaciones		
Categorías	Descripción	Ejemplos
Generalidad (0)	Cuando el estudiante expresa aspectos ajenos al desarrollo de la tarea. Impresiones personales	*"Hay que hacerlo interesante para que el grupo no se aburra"* *"Su problema me gustó demasiado"*
Descripción (1)	Cuando el estudiante describe aspectos relacionados con el desarrollo de la tarea, sin involucrarse. Repite cuestiones mencionadas anteriormente, sus aportaciones no se acompañan de justificación.	*"Pues estoy de acuerdo contigo Karen, el problema del resorte tiene más aplicación en la vida cotidiana".* *"La transformada de Laplace serviría".*
Argumentación (2)	Cuando el estudiante argumenta, justifica o saca conclusiones acerca del desarrollo de la tarea. Participa en el proceso y trata de comprender el sentido de la actividad.	*"Creo que el problema que maneja una solución de PVI solo es el primero de nuestra lista, debido a que es el único en el que nos da un valor inicial".* *"A mi parecer podemos resolver nuestro problema a partir de los dos métodos (variación de parámetros y coeficientes Indeterminados), debido a que nos encontramos con una ecuación en donde la función f(x) es muy simple (polinomio)"*
Aportación (3)	Cuando el estudiante realiza contribuciones a fin de mejorar el desarrollo de la tarea. Se involucra en el desarrollo y la mejora de actividades.	*"Algunos conceptos que tenemos que investigar son las frecuencias naturales del edificio, estudiar la ley de Hooke, que estaría dada por mx''=-kx, además pensar si el número de pisos del edificio afecta la resolución del problema".* *"Podemos agregar más imágenes como por ejemplo el pez colgando indicando los puntos relevantes como lo fue la posición de equilibrio".*

Tabla 4.8: ***Niveles de profundidad de las aportaciones de los estudiantes a través de un foro virtual (adaptado de Chamoso y Cáceres, 2009).***

A cada UA se le asignó la categoría correspondiente en cuanto al Tipo de interacción (Tabla 4.6), al Nivel de interacción (Tabla 4.7) y al Nivel de profundidad (Tabla 4.8). Los datos, en valores absolutos y porcentajes, se recogieron en tablas en función de las categorías desarrolladas teniendo en cuenta los grupos en los que los estudiantes se organizaron para cada uno de los foros, en cada curso, teniendo en cuenta las cadenas de conversación que se habían construido. Hay que aclarar que, aunque las cadenas de conversación no tuvieron un papel determinante en el análisis, dado que el número de cadenas por grupo en cada una de los foros no fue mayor a tres, permitieron identificar los patrones de interacción y poder seguir la secuencia de las conversaciones de los estudiantes.

Posteriormente se compararon los porcentajes del tipo de interacción, nivel de interacción y nivel de profundidad en los diversos foros F1, F2 y F3. Se aplicó una prueba no paramétrica ji-cuadrada para determinar si las frecuencias de los tipos de interacción, de los niveles de interacción y de los niveles de profundidad eran similares en las aportaciones de los estudiantes del curso A y las de los del curso B, y establecer si la manera en que interaccionaron los estudiantes en el foro dependió de la forma en que desarrollaron el *Proyecto* de modelación matemática.

4.2.4.2. Análisis de la influencia de las interacciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo

Del segundo objetivo, *Analizar la influencia de las interacciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo*, se consideraron las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo modificaron los estudiantes su propio trabajo en términos del proceso de modelación matemática?
2. ¿Cómo influyó el contenido de las aportaciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo?
3. ¿Existió relación entre los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro, y las modificaciones que realizan al propio trabajo?

A continuación se describe cómo se llevó a cabo el análisis en cada uno de los sentidos indicados.

a) Modificaciones de los estudiantes a su propio trabajo en términos del proceso de modelación matemática

Las modificaciones que los estudiantes de ingeniería realizaron a su trabajo generado durante el desarrollo del *Proyecto* de modelación matemática se consideraron en dos sentidos: 1) Diferencias entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), y 2) Naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).

Diferencias entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)

La presentación inicial (PI) y presentación final (PF) de cada grupo de trabajo y de cada curso (5 en cada curso) se valoraron considerando las etapas del proceso de modelación matemática. Para ello, la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) de cada grupo se organizaron de acuerdo a las etapas del proceso de modelación y se asignó un valor numérico a cada una de ellas en función de la forma en que los estudiantes las trabajaron, es decir, si lo hicieron: con un tratamiento adecuado, incluyendo los elementos de cada etapa del proceso de modelado y justificando su presentación (valor 3); con un tratamiento mediano, es decir, si incluían la etapa del proceso pero sin justificar el hecho de incluirla (valor 2); sin explicaciones suficientes o con falta de algunos elementos (valor 1) y si no se consideró o no se incluyó la etapa en el trabajo (valor 0). De esa forma el valor máximo considerado que se podía asignar al trabajo de un grupo era 27.

A continuación, como ejemplo, se muestran la presentación inicial (PI) (Tabla 4.9 a Tabla 4.14) y la presentación final (PF) (Tabla 4.16 a Tabla 4.28) de uno de los grupos de trabajo (G2B). Se describe el contenido de cada diapositiva y se indica la etapa del proceso de modelación matemática a la que hicieron referencia en cada una de ellas. A la vez se muestra la valoración realizada a la presentación final (PF) (Tabla 4.15 a Tabla 4.29; en anexos están las de los demás grupos).

Valoración de la presentación inicial (PI) del grupo G2A

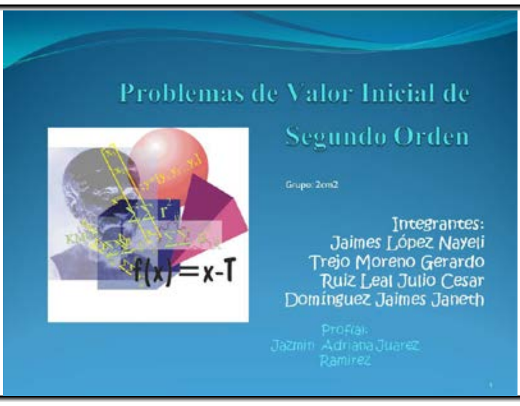
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Presentación de los integrantes del grupo.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.9: ***Diapositiva 1 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

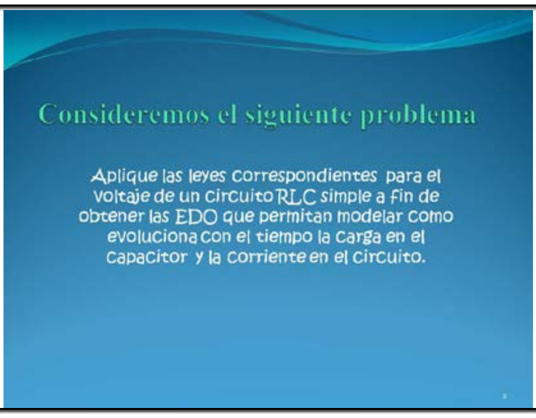
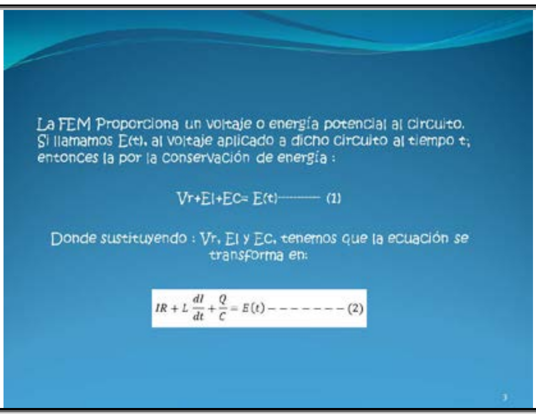
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Enunciado del problema. Se pide establecer la ecuación diferencial al aplicar las leyes correspondientes a un circuito RLC en serie.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.10: ***Diapositiva 2 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Reconocen que deben aplicar la ley de Kirchhoff para un circuito RLC de una sola malla.

Identifican las expresiones para las caídas de voltaje en cada uno de los elementos del circuito: Resistencia, inductor y capacitor.

Etapas 1: Identificar variables y leyes por aplicar, y 2. Plantear la EDO.</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.11: ***Diapositiva 3 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

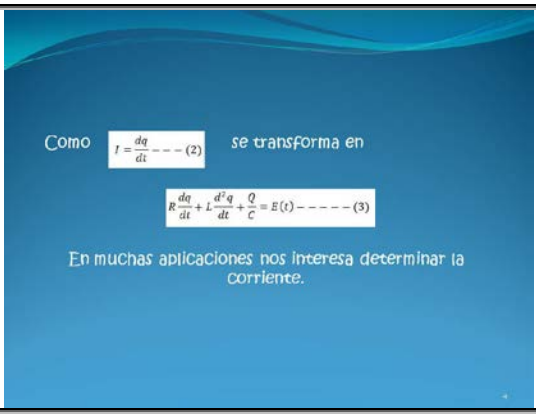
	Señalan la relación entre la carga y la corriente, e indican que deben aplicarla a la ecuación de voltajes. Sin embargo vuelven a escribir la ecuación en términos de la carga. Etapa 2. *Plantear la EDO.*

Tabla 4.12: ***Diapositiva 4 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

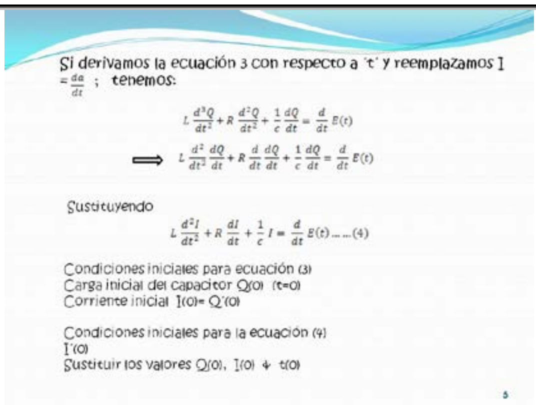
	Señalan nuevamente la relación entre la carga y la corriente, y la aplican en la ecuación de voltajes. Etapa 2. *Plantear la EDO.* Mencionan que la carga y la corriente inicial son ambas cero, sin justificar de dónde salen estas condiciones. Etapa 3. *Establecer condiciones.*

Tabla 4.13: ***Diapositiva 5 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

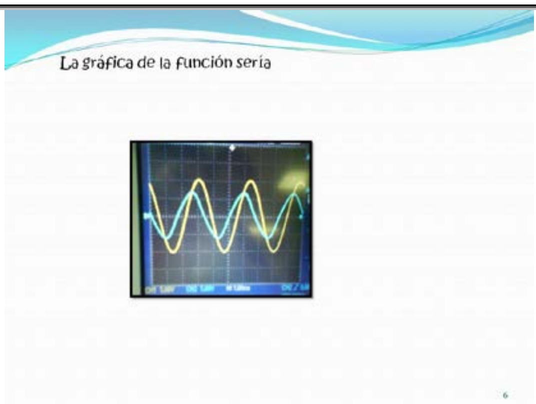
	Presentan la gráfica de una señal vista en un osciloscopio. Etapa 6. *Graficar resolución.*

Tabla 4.14: ***Diapositiva 6 de la presentación inicial (PI) del grupo G2A.***

A partir de la revisión de las diapositivas de la presentación inicial (PI), se asignaron valores de acuerdo a la forma en que habían trabajado las etapas del proceso de modelación matemática con EDO (Tabla 4.15).

Valoración de la presentación inicial (PI) del grupo G2A		
Etapa	Valor asignado	Explicación
1. Identificar variables y leyes por aplicar	1	Identifican solo algunas variables y otras solo las presentan sin definirlas. Explican que deben aplicar ley de Kichhkoff. No explican que se aplica ley de Omh. Sin embargo no están presentando las contantes y variables de un problema de aplicación.
2. Plantear la EDO	3	Describe el proceso para llegar a la ecuación diferencial y los pasos para conseguirlo.
3. Establecer condiciones	1	Establecen las condiciones iniciales relacionándolas con la carga inicial y la corriente inicial en el instante t=0; sin embargo no justifican su aparición.
4. Resolver la EDO	0	No incluida.
5. Aplicar condiciones	0	No incluida.
6. Graficar resolución	1	Se incluye una gráfica que corresponde a una solución no homogénea de la EDO del circuito RFC.
7. Contestar pregunta original	0	
8. Analizar resultado	0	
9. Identificar el modelo	0	
Valoración total	6	

4.15. ***Valoración de la presentación inicial (PI del grupo G2A.***

Valoración de la presentación final (PF) del grupo G2A

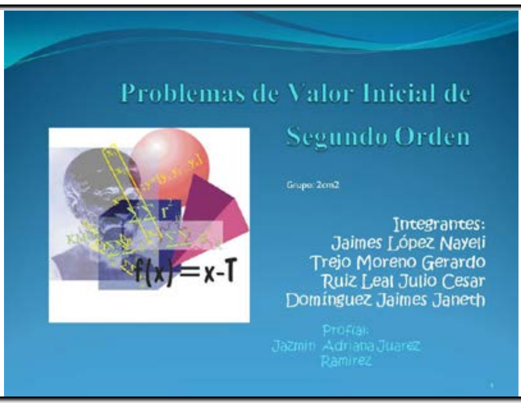
	Presentación de los integrantes del grupo.

Tabla 4.16: ***Diapositiva 1 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

 	Describen los elementos que hay en un circuito en serie RLC.

Tabla 4.17: ***Diapositiva 2 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

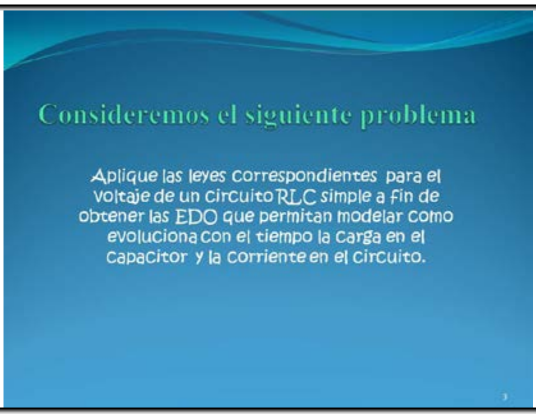
 	Enunciado del problema. Se pide establecer la ecuación diferencial al aplicar las leyes correspondientes a un circuito RLC en serie.

Tabla 4.18: ***Diapositiva 3 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

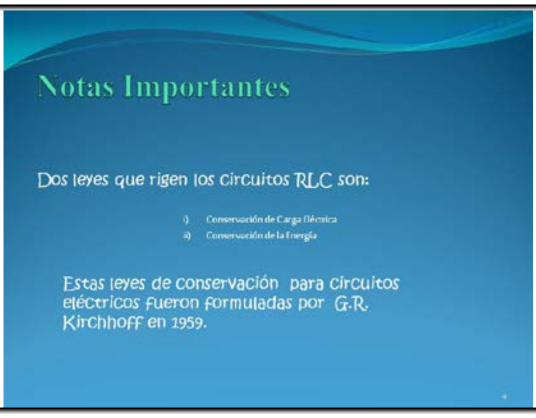
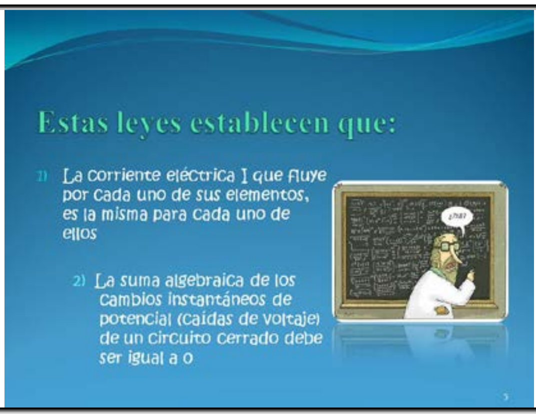
 	Describen que las leyes de Kirchhoff se utilizan en circuitos RLC de una malla. Etapa 1. *Identificar variables y leyes por aplicar.*

Tabla 4.19: ***Diapositiva 4 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Enuncian las leyes de Kirchhoff.

Etapa 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*.</td>
</tr>
</table>

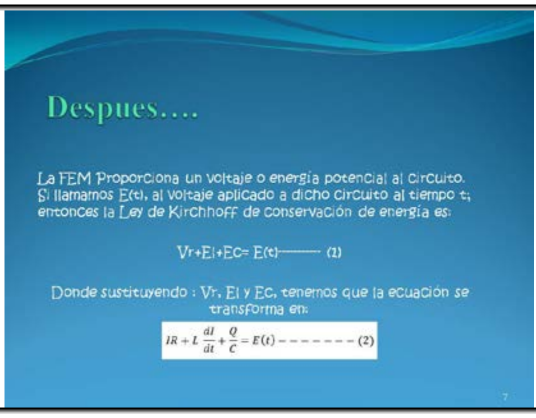
Tabla 4.20: ***Diapositiva 5 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Presentan las expresiones para la caída de voltaje en cada elemento del circuito.

Identifican que deben aplicar la ley de Omh.

Etapa 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*.</td>
</tr>
</table>

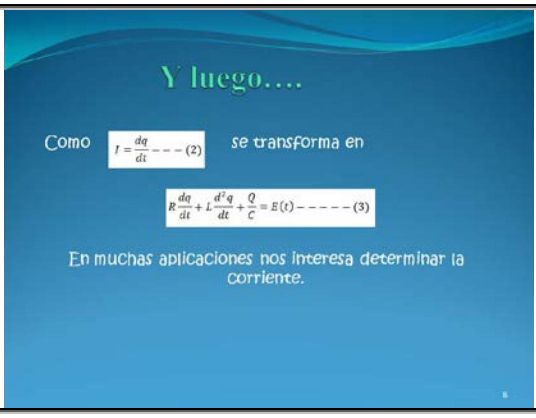
Tabla 4.21: ***Diapositiva 6 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Identifican que van a aplicar la ley de Kirchhoff para un circuito RLC de una sola malla.

Identifican las expresiones para las caídas de voltaje en cada uno de los elementos del circuito: resistencia, inductor y capacitor.

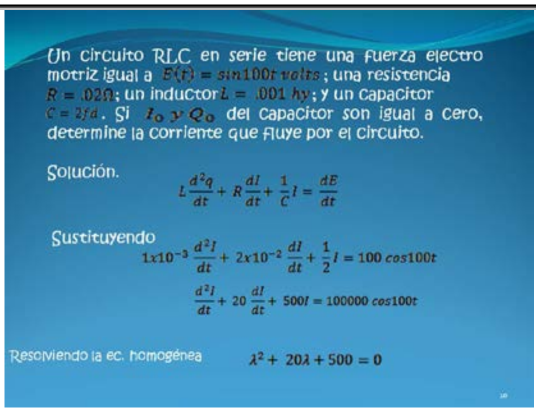
Etapas: 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*, *y* 2. *Plantear la EDO.*</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.22: ***Diapositiva 7 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>


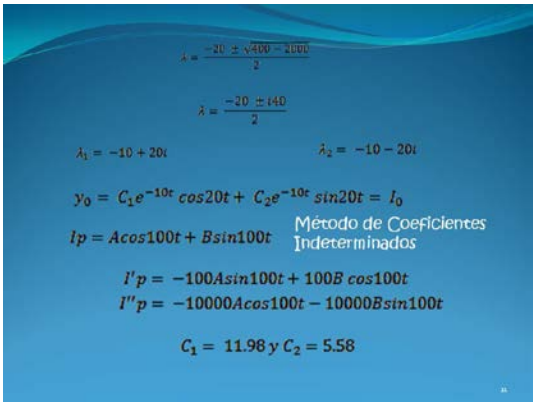
</td>
<td>
Mencionan la relación entre la carga y la corriente y se indican que la aplican a la ecuación de voltajes y escriben nuevamente la EDO, en términos de la carga.
Etapa 2. Plantear la EDO.
</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.23: ***Diapositiva 8 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Escriben la EDO que hay que resolver, con errores en el miembro derecho (derivan el voltaje de entrada).
Sustituyen los valores dados en el problema y llegan a la EDO del sistema del problema.
Etapa 2. Plantear la EDO.
Escriben la ecuación característica de la EDO.
Etapa 4. Resolver la EDO.
</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.24: ***Diapositiva 9 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>
Calculan las raíces de la ecuación característica y, en términos de éstas, escriben la solución homogénea.
Proponen la solución particular indicando el método empleado. Sin embargo, no determinan los coeficientes indeterminados.
Etapa 4. Resolver la EDO.
Escriben el valor de las constantes sin explicar cómo las obtuvieron.
Etapa 5. Aplicar condiciones.
</td>
</tr>
</table>

Tabla 4.25: ***Diapositiva 10 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

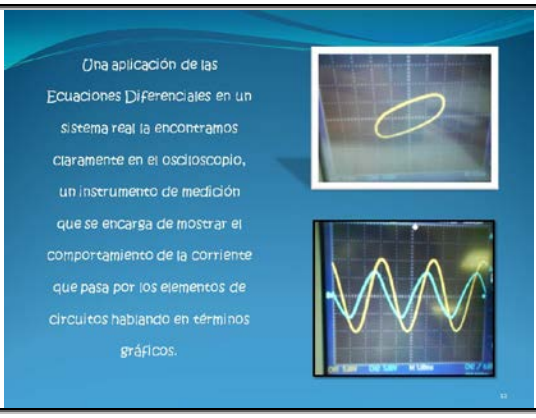
	Mencionan que el osciloscopio es una aplicación y un instrumento. Muestran solución particular de la EDO en su gráfica. Etapa 6. *Graficar la resolución.*

Tabla 4.26: ***Diapositiva 11 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

	Explica un ejemplo de aplicación de los circuitos RLC. Etapa 9. *Identificar el modelo.*

Tabla 4.27: ***Diapositiva 12 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

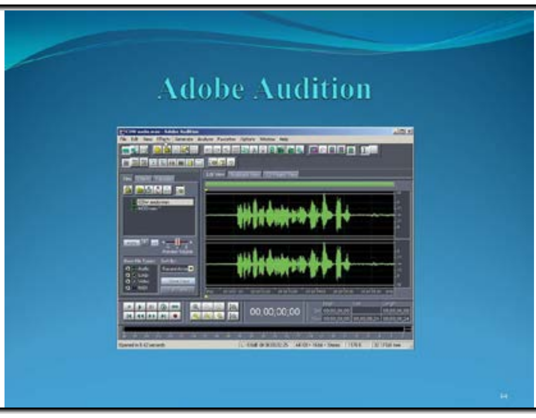
	Presenta una imagen de la aplicación mencionada. Etapa 9. *Identificar el modelo.*

Tabla 4.28: ***Diapositiva 13 de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

A partir de la revisión de las diapositivas de la presentación final (PF) se asignaron valores de acuerdo al proceso de modelación matemática (Tabla 4.29):

Valoración de la presentación final (PF) del grupo G2A		
Etapa	Valor asignado	Explicación
1. Identificar variables y leyes por aplicar	2	Identifican solo algunas variables y otras solo las presentan sin definirlas. Explican que se aplican ley de Kichhoff y ley de Omh.
2. Plantear la EDO	3	Describe el proceso para llegar a la EDO y los pasos para conseguirlo.
3. Establecer condiciones	2	Establecen las condiciones iniciales relacionándolas con la carga inicial y la corriente inicial en el instante t=0.
4. Resolver la EDO	2	Resuelven la EDO de manera incompleta. No aparece la solución particular. Ni la solución completa.
5. Aplicar condiciones	1	Obtienen la constantes a partir de las condiciones pero no muestran el proceso.
6. Graficar resolución	1	Se incluye una gráfica que corresponde a una solución no homogénea de la EDO un circuito RFC. No especifican si es el del problema. Incluyen una gráfica que no describen.
7. Contestar pregunta original	0	No incluida.
8. Analizar resultado	0	No incluida.
9. Identificar el modelo	3	Mencionan una aplicación términos de software como dispositivos de sonido.
Valoración total	14	

Tabla 4.29. ***Valoración de la presentación final (PF) del grupo G2A.***

Los datos se recogieron en tablas, para cada uno de los grupos de trabajo de los cursos A y B, y en cada una de las etapas del proceso de modelación en sus presentaciones tanto inicial (PI) como final (PF). Posteriormente, se compararon los valores de las presentaciones inicial (PI) y presentaciones final (PF), tanto globalmente como en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática en cada curso, y entre los cursos A y B.

Naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI)

Por otro lado, el análisis de la naturaleza de las modificaciones de la presentación final (PF) de cada grupo, se realizó a partir de una adaptación al sistema de categorías de Cáceres, Chamoso y Azcárate (2010), descrito en el capítulo 3. Para ello se tuvieron en cuenta las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI), de acuerdo a las etapas del proceso modelación matemática, de la siguiente forma (Tabla 4.30):

Naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF)	
Nivel	Descripción
4	Rehace completamente la etapa de nuevo.
3	Reorganiza completamente la etapa y quizá añade algunas cosas.
2	Reorganiza o modifica únicamente algunas partes de la etapa.
1	Añade nuevo conocimiento sin modificar ni reorganizar la etapa.
0	No realiza ninguna modificación a la etapa.

Tabla 4.30: ***Naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI) (adaptado de Cáceres, Chamoso y Azcárate, 2010).***

Este sistema de categorías se aplicó a la presentación final (PF) de cada grupo, en cada uno de los cursos A y B, en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática teniendo en cuenta la presentación inicial (PI). Posteriormente, estos valores se organizaron en tablas, para cada curso, según las etapas del proceso de modelación matemática y en cada una de ellas la cantidad de grupos que la modificó en su presentación final (PF) teniendo en cuenta la naturaleza de la modificación con que lo hizo.

b) Influencia del contenido de las aportaciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones realizadas al propio trabajo

Inicialmente se clasificaron las unidades de análisis (UA) de las aportaciones de los estudiantes en los foros, en cada grupo y en cada curso, para desarrollar el *Proyecto de* modelación matemática, organizadas en cada una de las nueve etapas del proceso de modelación matemática a la que cada aportación hacía referencia (ver ejemplos en Tabla 4.31):

Contenido de las aportaciones en los foros al desarrollar el *Proyecto*	
Etapa del proceso de modelación matemática	Aportación
1. Identificar variables y leyes por aplicar	*"Falto aclarar que es la resonancia sísmica para entender mejor el problema, ya que eso es lo que quieren averiguar".*
2. Plantear la EDO	*"No queda clara la explicación de cómo llegaron a las diversas ecuaciones que utilizaron".*
3. Establecer condiciones	*"Es importante que se establezca cual es la solución general, la solución particular, etc.".*
4. Resolver la EDO	*"Hay que explicar más a fondo el método de transformada de Laplace".*
5. Aplicar condiciones	*"No se muestra como se aplican las condiciones iniciales".*
6. Graficar resolución	*"Falta colocar gráficas para ver el comportamiento".*
7. Contestar pregunta original	*"Les falto enfocar la solución del problema a una aplicación y no solamente mencionarla".*
8. Analizar resultado	*¿Podríamos compararlo con un manual de sismos, si existe?*
9. Identificar el modelo	*"Se salieron de lo convencional al no elegir circuitos RC y RLC como la mayoría de los equipos, y darle otra aplicación de oscilador armónico".*

Tabla 4.31*: Ejemplos de la clasificación del contenido de las aportaciones de los estudiantes al desarrollar el Proyecto en términos del proceso de modelación matemática.*

Las aportaciones de los estudiantes, en cada grupo y en cada curso, organizadas en las nueve etapas del proceso de modelación matemática a la que cada aportación hacía referencia según se acaba de explicar, se agruparon en tablas considerando su frecuencia y sus porcentajes, tomando primeramente los foros F1 y F2 conjuntamente, que se desarrollaron antes de que los grupos mostraran su presentación inicial (PI) y, posteriormente el foro F3, que se desarrolló después que los grupos mostraran su presentación inicial (PI). En cada caso se organizaron considerando la cantidad de aspectos que los estudiantes, en cada grupo y curso, tuvieron en cuenta en su presentación inicial (PI) y en su presentación final (PF) y los que no se tuvieron en cuenta, en F1 y F2, así como los aspectos que tuvieron en cuenta en su presentación final (PF) y los que no se tuvieron en cuenta, en F3.

Por otro lado, las aportaciones de los estudiantes en F3, de cada grupo y en cada curso, considerando su frecuencia y sus porcentajes, se agruparon en tablas organizados en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática a las que correspondían, e indicando para cada una de estas etapas la cantidad de grupos que modificaron su presentación final (PF) relacionándolo con: 1) cada uno de los valores de la diferencia entre la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), desde 0, sin modificar hasta 3 con un tratamiento adecuado, y 2) cada uno de los valores de la naturaleza de las modificaciones de la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI), desde 0 sin modificar hasta 4 cuando rehace completamente la etapa.

Se aplicó una prueba no paramétrica ji-cuadrada para determinar si las frecuencias de las aportaciones en el foro organizadas en las etapas del proceso de modelación matemática a la que cada aportación hacía referencia, ya fuera tanto en la diferencia de valoración como en la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI), eran similares en las aportaciones de los estudiantes del curso A y los del curso B, es decir, si la forma en que se desarrolló el foro dependió de si los estudiantes pertenecían al curso A o B.

c) Relación entre los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones en el foro y las modificaciones realizadas al propio trabajo

Para determinar la relación entre el nivel de interacción y de profundidad de las interacciones de los estudiantes de ambos cursos, al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática, con las modificaciones realizadas a sus presentaciones finales (PF) se utilizó el coeficiente de correlación de Pearson.

Para los grupos de cada curso, se compararon sus frecuencias en cada uno de los niveles de interacción y de profundidad (tomando conjuntamente los foros F1, F2 y F3), con la cantidad de fases del proceso de modelación matemática modificadas en sus presentaciones finales. Las modificaciones se consideraron en términos de la diferencia entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), y la naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).

Capítulo 5. RESULTADOS

En este capítulo se describen los resultados obtenidos por los estudiantes de primer curso universitario de Ingeniería en la asignatura Ecuaciones Diferenciales cuando desarrollaban un *Proyecto* de modelación matemática con ecuaciones diferenciales. Se analizaron sus aportaciones en un foro virtual implementado para que desarrollaran el *Proyecto*, organizados en grupos de trabajo, en tres foros (F1, F2, F3), cada uno de los cuales se correspondía con cada una de las partes del *Proyecto*, según se ha explicado en el capítulo anterior. A la vez elaboraron una presentación inicial (PI) en PowerPoint de su propuesta de trabajo, teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática, y la mostraron en el aula. Posteriormente, cada grupo valoró uno de los trabajos presentados y, teniendo en cuenta las aportaciones realizadas en el foro virtual, mejoraron su propio trabajo y realizaron una presentación final (PF).

Los estudiantes que participaron en este estudio, matriculados en dos cursos distintos (curso A y curso B), llevaron a cabo el *Proyecto* desarrollando las actividades correspondientes en los foros F1 y F2 de la misma manera, pero realizaron las correspondientes en el foro F3 de diferente forma ya que, los grupos de trabajo del curso A, valoraron una presentación inicial (PI) de un grupo de trabajo distinto al suyo mientras que, los grupos de trabajo del curso B, valoraron su propia presentación inicial (PI).

Los resultados se presentan en dos secciones. En la primera se incluyen los referidos a las interacciones de los estudiantes en un foro, en términos del tipo y el nivel de interacción, así como de la profundidad de las aportaciones. En la segunda sección, se recogen los resultados referidos a la influencia de las modificaciones que realizaron los estudiantes a su propio trabajo tras interaccionar en un foro virtual, en cada caso, en función del proceso de modelación matemática, considerando:

- Valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), y la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).
- Influencia del contenido de las aportaciones de los estudiantes en el foro en la valoración de su presentación inicial (PI) y su presentación final (PF), y en la naturaleza de las modificaciones de su presentación final (PF).
- Relación existente entre los niveles de interacción y profundidad de las aportaciones de los estudiantes, y la diferencia entre la valoración de su presentación inicial (PI) y final (PF), y la naturaleza de las modificaciones en su presentación final (PF).

5.1. Interacciones en un foro virtual

Las aportaciones de los estudiantes en el foro se consideraron en dos sentidos: 1) tipo y nivel de interacción, y 2) nivel de profundidad.

5.1.1. Tipo y Nivel de interacción

La distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones de los estudiantes en los foros F1, F2 y F3 en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función de las categorías consideradas respecto al Tipo de interacción fueron (Tabla 5.1):

<table>
<tr><th rowspan="2">Foro</th><th rowspan="2">Curso</th><th colspan="7">Tipo de interacción</th><th rowspan="2">Total (UA)</th></tr>
<tr><th>Aporta información (I)</th><th>Aclara (CL)</th><th>Coincide (C)</th><th>Coincide y amplía (CA)</th><th>Discrepa (D)</th><th>Discrepa y amplía (DA)</th><th>Otros (O)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">F1</td><td>A</td><td>86(31%)</td><td>104(37%)</td><td>35(12%)</td><td>21(8%)</td><td>2(1%)</td><td>12(4%)</td><td>21(7%)</td><td>281(100%)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>78(27%)</td><td>114(39%)</td><td>57(19%)</td><td>29(10%)</td><td>0(0%)</td><td>6(2%)</td><td>10(3%)</td><td>294(100%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total F1</td><td>164(29%)</td><td>218(38%)</td><td>92(16%)</td><td>50(9%)</td><td>2(0%)</td><td>18 (3%)</td><td>31(5%)</td><td>575(100%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F2</td><td>A</td><td>36(36%)</td><td>33 (33%)</td><td>16(16%)</td><td>7(7%)</td><td>0(0%)</td><td>0(0%)</td><td>8(8%)</td><td>100(100%)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>69(28%)</td><td>97(40%)</td><td>32(13%)</td><td>22(9%)</td><td>1(1%)</td><td>5(2%)</td><td>18(7%)</td><td>244(100%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total F2</td><td>105(31%)</td><td>130(38%)</td><td>48 (14%)</td><td>29(8%)</td><td>1(0%)</td><td>5(1%)</td><td>26(8%)</td><td>344(100%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">F3</td><td>A</td><td>53(38%)</td><td>13(10%)</td><td>39(28%)</td><td>8(6%)</td><td>1(1%)</td><td>0(0%)</td><td>24(17%)</td><td>138(100%)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>39(21%)</td><td>51(27%)</td><td>56(30%)</td><td>14(8%)</td><td>0(0%)</td><td>0(0%)</td><td>26(14%)</td><td>186(100%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total F3</td><td>92(28%)</td><td>64(20%)</td><td>95(29%)</td><td>22(7%)</td><td>1(0%)</td><td>0(0%)</td><td>50(16%)</td><td>324(100%)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Total</td><td>A</td><td>175 (34%)</td><td>150(29%)</td><td>90(17%)</td><td>36(7%)</td><td>3(1%)</td><td>12(2%)</td><td>53(10%)</td><td>519(100%)</td></tr>
<tr><td>B</td><td>186(26%)</td><td>262(36%)</td><td>145(20%)</td><td>65(9%)</td><td>1(0%)</td><td>11(2%)</td><td>54(7%)</td><td>724(100%)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Total</td><td>361(29%)</td><td>412(33%)</td><td>235(19%)</td><td>101(8%)</td><td>4(0%)</td><td>23(2%)</td><td>107(9%)</td><td>1243(100%)</td></tr>
</table>

Tabla 5.1: ***Distribución de las UA de las aportaciones de los grupos de los cursos A y B en los foros según el tipo de interacción.***

Se puede observar que, en general, los estudiantes aportaron información (I, 29%) y aclararon aportaciones previas (CL, 33%) en proporciones similares y muy superiores a los de cualquier otra categoría (C, CA, D, DA, conjuntamente, 29%).

Si se comparan los resultados entre los cursos A y B, el total de porcentajes de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo, en ambos cursos, fue similar en todas las categorías y solamente se apreciaron pequeñas diferencias en las categorías *Aporta información* y *Aclara*.

Teniendo en cuenta los diversos foros se observa que, el total de los porcentajes de UA en todas las categorías del tipo de interacción, fue similar en los foros F1 y F2. En el foro F3, casi la mitad del total de UA de las aportaciones de ambos cursos (48%) se codificaron conjuntamente en las categorías *Aporta información* y *Aclara*, mientras que menos de la mitad del total de las UA (35% del curso A y 38% del curso B) se codificaron en las categorías *Coincide*, *Coincide y amplía*, *Discrepa*, y *Discrepa y amplía*. En este mismo foro F3 se observan diferencias en los porcentajes de las categorías *Aporta información* y *Aclara*, es decir, los grupos del curso B hicieron más aportaciones en las que aclararon alguna contribución previa (*Aclara*) que los grupos del curso A, mientras que los grupos del curso B aportaron menos información que no se había considerado previamente en el foro que los grupos del curso A (*Aporta información*).

Comparando el tipo de interacción de las aportaciones de los estudiantes entre los cursos A y B, no existieron diferencias significativas en los foros F1 [$\chi^2(6) = 15.07$, $p > 0.05$ y F2 [$\chi^2(6) = 5.50$, $p > 0.05$], pero sí en F3 [$\chi^2(6) = 23.86$, $p < 0.01$] (globalmente existieron diferencias significativas entre los cursos A y B[$\chi^2(6) = 19.76$, $p < 0.01$]). Esto puede hacer entender que el Tipo de interacción estuvo relacionado con la forma en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto*.

Posteriormente, las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en los foros de los estudiantes, en los grupos de trabajo y en cada uno de los cursos A y B, se organizaron en función de las categorías consideradas respecto al nivel de interacción (Tabla 5.2; no se consideró la categoría *Otros*).

Foro	Curso	Nivel de interacción: Aporta Información (0)	Interacciona (1)	Interacciona y amplia (2)	Total (UA)
F1	A	86(33%)	141(54%)	33(13%)	260(100%)
	B	78(28%)	171(60%)	35(12%)	284(100%)
Total F1		164(30%)	312(57%)	68(13%)	544(100%)
F2	A	36(39%)	49(53%)	7(8%)	92(100%)
	B	69(31%)	130(57%)	27(12%)	226(100%)
Total F2		105(33%)	179(56%)	34(11%)	318(100%)
F3	A	53(47%)	53(47%)	8(6%)	114(100%)
	B	39(24%)	107(67%)	14(9%)	160(100%)
Total F3		92(34%)	160(58%)	22(8%)	274(100%)
Total	A	175(38%)	243(52%)	48(10%)	466(100%)
	B	186(28%)	408(61%)	76(11%)	670(100%)
Total		361(32%)	651(57%)	124(11%)	1136(100%)

Tabla 5.2: ***Distribución de las UA de las aportaciones de los grupos de los cursos A y B en los foros según el nivel de interacción.***

Se observa que, en general, los estudiantes en cada grupo, al participar en los foros, interaccionaron más con sus compañeros (Nivel 1, 57%) que aportaron información (Nivel 0, 32%), alcanzando el mayor nivel de interacción (Nivel 2, 11%) en un porcentaje considerablemente menor que en los otros dos niveles.

Al comparar los resultados del nivel de interacción entre los cursos A y B, el total de porcentajes de UA de las aportaciones de los grupos de trabajo, en ambos cursos, fue similar en diferentes categorías aunque presentaron pequeñas diferencias en Nivel 0 (*Aporta información)* y Nivel 1 (*Interacciona).*

Teniendo en cuenta las diversos partes del foro se observa que, el total de los porcentajes de UA en F1 y en F2 fue similar. En el foro F3, los grupos del curso B aportaron menos información que no se había considerado previamente en el foro que los grupos del curso A (*Aporta información*) mientras que los grupos del curso B mencionaron más ideas surgidas de aspectos considerados previamente en la discusión y, por lo tanto, interaccionando con sus compañeros (*Interacciona*), que los grupos del curso A, quienes en la mayoría de sus aportaciones se refirieron a temas que no se habían mencionado en la discusión. Por otro lado, al considerar conjuntamente las categorías *Interacciona* e *Interacciona y amplía*, se puede decir que los grupos del curso

B alcanzaron mayores niveles de interacción (76%) al evaluar su propia presentación inicial (PI), que los grupos del curso A (53%), que evaluaron la presentación inicial (PI) de otro grupo de trabajo.

Comparando el nivel de interacción de las aportaciones de los estudiantes entre los cursos A y B, no existieron diferencias significativas en los foros F1 [$\chi^2(2) = 2.28$, $p > 0.05$] y F2 [$\chi^2(2) = 2.82$, $p > 0.05$], pero sí en F3 [$\chi^2(2) = 14.68$, $p < 0.01$] (globalmente existieron diferencias significativas entre los cursos A y B[$\chi^2(2) = 12.24$, $p < 0.01$]). Esto puede hacer entender que el Nivel de interacción estuvo relacionado con la forma en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto*.

5.1.2. Nivel de profundidad

Las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en los foros de los estudiantes en los grupos de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, se clasificaron en función del Nivel de profundidad en cada categoría considerada (Tabla 5.3):

Foro	Curso	Nivel de profundidad				Total (UA)
		Generalidad (N0)	Descripción (N1)	Argumentación (N2)	Aportación (N3)	
F1	A	26(9%)	178(63%)	50(18%)	27(10%)	281(100%)
	B	27(9%)	182(62%)	55(19%)	30(10%)	294(100%)
Total F1		53(9%)	360(63%)	105(18%)	57(10%)	575(100%)
F2	A	10(10%)	57(57%)	11(11%)	22(22%)	100(100%)
	B	32(13%)	147(60%)	39(16%)	27(11%)	245(100%)
Total F2		42(12%)	204(58%)	50(14%)	49(16%)	345(100%)
F3	A	24(17%)	83(60%)	23(17%)	8(6%)	138(100%)
	B	26(14%)	117(62%)	31(17%)	12(7%)	186(100%)
Total F3		50(15%)	200(61%)	54(17%)	20(7%)	324(100%)
Total	A	60(12%)	318(61%)	84(16%)	57(11%)	519(100%)
	B	85(12%)	446(61%)	125(17%)	69(10%)	724(100%)
Total		145(12%)	764(61%)	209(17%)	126(10%)	1244(100%)

Tabla 5.3: ***Distribución de las UA de las aportaciones de los grupos de los cursos A y B en los foros según el nivel de profundidad.***

Se observa que los estudiantes, en general, al participar en los foros, se limitaron a describir elementos de la presentación inicial (PI) sin justificar sus aportaciones o solo mencionaron aspectos señalados anteriormente (*Descripción*, 61%). En menores porcentajes, los estudiantes justificaron sus aportaciones al valorar, en el foro F3, la presentación inicial (PI) en relación con el proceso de modelación matemática (*Argumentación*, 17%), y plantearon soluciones para mejorar la presentación inicial (PI) que valoraron (*Aportación*, 10%).

En un segundo aspecto, comparando los resultados entre los cursos A y B, se observa que el total de los porcentajes de UA de las aportaciones de los estudiantes en los grupos de trabajo, en ambos cursos, fue similar en todas las categorías del Nivel de profundidad. En términos de los foros se observa que, en F1, F2 y F3, el total de los porcentajes de UA fue similar en todas las categorías del Nivel de profundidad.

Comparando el nivel de profundidad de las aportaciones de los estudiantes entre los cursos A y B, no existieron diferencias significativas en los foros F1 [$\chi^2(2) = 0.16$, $p > 0.05$] ni en F2[$\chi^2(2) = 7.14$, $p > 0.05$] ni en F3 [$\chi^2(2) = 0.43$, $p > 0.05$] (globalmente no existieron diferencias significativas entre los cursos A y B[$\chi^2(2) = 0.84$, $p > 0.05$]). Esto puede hacer entender que el Nivel de profundidad no estuvo relacionado con la forma en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto*.

5.2. Influencia de las interacciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo

En esta sección se recogen los resultados de la influencia de las interacciones en el foro de los estudiantes en las modificaciones que los estudiantes realizaron a su propio trabajo, organizados en tres apartados. En el primer apartado se muestran los resultados de las modificaciones que los estudiantes realizaron al propio trabajo en términos del proceso de modelación matemática. En el segundo, se presentan los resultados relativos a la influencia del contenido de las aportaciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo. Finalmente, en el tercer apartado, se muestran los resultados de la relación entre los niveles de interacción y profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo.

5.2.1. Modificaciones en el propio trabajo en términos del proceso de modelación matemática

Los resultados de las modificaciones realizadas por los estudiantes, organizados en grupos de trabajo, en términos del proceso de modelación matemática, se muestran en los siguientes sentidos: 1) Diferencias entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), y 2) Naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).

5.2.1.1. Diferencias entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)

Los resultados al valorar las presentaciones inicial (PI) y final (PF) de los grupos de trabajo de los cursos A y B, de acuerdo al proceso de modelación matemática, fueron (Tabla 5.4):

Proceso de modelación matemática	**Resultados de la valoración de las presentaciones inicial (PI) y final (PF)**																			
	Grupos curso A										Grupos curso B									
	G1A		G2A		G3A		G4A		G5A		G1B		G2B		G3B		G4B		G5B	
	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF	PI	PF
1. Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	1	2	1	3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3	3
2. Plantear la EDO	1	3	3	3	3	3	1	3	3	3	1	2	0	2	1	1	1	3	2	2
3. Establecer condiciones	0	2	1	2	3	3	1	1	1	1	0	0	0	2	0	3	1	3	2	2
4. Resolver la EDO	1	3	0	2	1	2	0	3	1	3	3	3	2	2	1	3	2	2	3	3
5. Aplicar condiciones	0	1	0	1	0	1	0	3	0	3	2	3	3	3	1	3	3	3	2	3
6. Graficar resolución	0	3	0	1	1	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3
7. Contestar pregunta original	0	3	0	0	0	3	0	3	0	0	1	1	2	2	2	2	0	3	2	2
8. Analizar resultado	0	3	0	0	0	3	0	3	0	0	0	3	0	3	0	2	0	3	0	3
9. Identificar el modelo	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Valoración total	2	18	5	14	9	21	2	19	5	14	7	15	7	17	5	17	7	20	14	21

Tabla 5.4: ***Distribución de las valoraciones de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) de los grupos en los cursos A y B en términos del proceso de modelación matemática.***

Por ejemplo en Tabla 5.4, observando la fila *Identificar variables y leyes por aplicar*, el grupo G2A la incluyó en su PI sin explicaciones suficientes o sin algunos elementos (valor 1); posteriormente en su PF lo hizo con un tratamiento mediano (valor 2). El grupo G3A la incluyó en su PI sin explicaciones suficientes o sin incluir algunos elementos (valor 1), y posteriormente en su PF, justificando los elementos incluidos en la etapa (valor 3). El grupo G5B incluyó la etapa tanto en PI como PF con un tratamiento adecuado (valor 3).

Globalmente, los grupos de trabajo realizaron cambios en sus presentaciones finales (PF) ya que en todos ellos aumenta la valoración total de su presentación final (PF) con relación al valor total de su presentación inicial (PI).

Se observa que la mayoría de los grupos en ambos cursos, en general, no incluyó, en su presentación inicial (PI), las etapas *Contestar pregunta original*, *Analizar resultado* e *Identificar el modelo.* Sin embargo, todos los grupos aumentaron el valor de su presentación final (PF) en la etapa *Graficar resolución*.

En el curso A, todos los grupos mejoraron las etapas *Resolver la EDO* y *Graficar resolución*. Sin embargo, bajo las mismas condiciones, la mayoría de los grupos del curso B mejoraron su presentación en las etapas *Establecer condiciones*, *Graficar resolución* y *Analizar resultado*.

Los grupos del curso A modificaron el 60% (27/45) de las etapas en sus presentaciones finales (PF) y, entre las que no modificaron, 4 se habían valorado con un tratamiento adecuado (valor 3) en la presentación inicial (PI) (en *Plantear la EDO* y *Establecer condiciones*).

Por otro lado, los grupos del curso B modificaron el 47% (21/45) de las etapas en sus presentaciones finales (PF) y, entre las que no modificaron, 4 se habían valorado con un tratamiento adecuado (valor 3) en la presentación inicial (PI) (en *Resolver la EDO, Aplicar condiciones* e *Identificar variables*).

Se puede decir que los grupos del curso A, que revisaron la presentación inicial (PI) de otro grupo de trabajo, aumentaron la nota de su presentación final (PF) en mayor porcentaje 66% (27/41), que los grupos del curso B (53%, 21/40), que revisaron su propia presentación inicial (PI).

Respecto a cada una de las etapas del proceso de modelación matemática, se observa que los grupos de ambos cursos aumentaron la valoración de su presentación final (PF), en términos de su presentación inicial (PI), en mayor porcentaje en las etapas *Graficar resolución* (curso A y curso B, 100%, 5/5), y *Analizar resultado* (curso A, 60%, 3/5 y curso B, 100%, 5/5) y en menor porcentaje *Identificar el modelo* (curso A, 20%, 1/5, y curso B, 0%, 0/5).

Se calculó la media de los valores de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), de los grupos en ambos cursos, en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática, comparados con los valores máximos posibles que se podían obtener en cada etapa (Tabla 5.5).

Proceso de modelación matemática	Media de los valores en las presentaciones			
	Curso A		Curso B	
	PI	PF	PI	PF
1. Identificar variables y leyes por aplicar	0.4	1.2	0.6	0.6
2. Plantear la EDO	2.2	3.0	1	2
3. Establecer condiciones	1.2	1.8	0.6	2.0
4. Resolver la EDO	0.6	2.6	2.2	2.6
5. Aplicar condiciones	0.0	1.8	2.2	3.0
6. Graficar resolución	0.2	2.2	0.0	3.0
7. Contestar pregunta original	0	1.8	1.4	2.4
8. Analizar resultado	0	1.8	0.0	2.8
9. Identificar el modelo	0.0	0.6	0.0	0.0
Total	4.6	16.8	8	18.4
Diferencia entre (PF) y (PI)	12.2.		10.4	

Tabla 5.5: ***Medias de los valores de las presentaciones inicial (PI) y final (PF) de los grupos en los cursos A y B en las etapas del proceso de modelación matemática.***

En términos de la diferencia entre la valoración de las presentaciones inicial (PI) y final (PF), y si se comparan con el valor máximo total posible que era igual con 27 para ambas presentaciones (PI) y (PF), puede decirse que, en general, los grupos del curso A aumentaron el valor de su presentación final (PF) respecto a su presentación inicial (PI) en un porcentaje ligeramente mayor (45%, 12.2/27) que los grupos del curso B (39%, 10.4/27).

A partir de Tabla 5.5, se observa que los grupos del curso A aumentaron la valoración de su presentación (PF) en las etapas *Resolver la EDO y Aplicar condiciones* en mayor proporción que los grupos del curso B. Sin embargo esta diferencia podría ser debida a que, algunos de los grupos del curso B, elaboraron cada una de las fases en esa etapa en su presentación inicial (PI) con un tratamiento adecuado (valor 3).

5.2.1.2. Naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI)

Se compararon las presentaciones inicial (PI) y final (PF) de los grupos de trabajo en cada uno de los cursos A y B, y se registró la naturaleza de las modificaciones realizadas en (PF) respecto a (PI), en términos del proceso de modelación matemática (Tabla 5.6).

Proceso de modelación matemática	Naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF)									
	Curso A					Curso B				
	0	1	2	3	4	0	1	2	3	4
1. Identificar variables y leyes por aplicar	3	1	1	0	0	5	0	0	0	0
2. Plantear la EDO	3	0	2	0	0	2	1	1	1	0
3. Establecer condiciones	4	0	1	0	0	2	0	1	1	1
4. Resolver la EDO	0	2	0	0	3	2	0	1	1	1
5. Aplicar condiciones	0	2	0	0	3	2	2	1	0	0
6. Graficar resolución	0	0	2	0	3	0	0	0	0	5
7. Contestar pregunta original	2	0	0	0	3	3	0	0	0	2
8. Analizar resultado	2	0	0	0	0	0	0	0	1	4
9. Identificar el modelo	4	0	0	0	1	5	0	0	0	0
Total	14 (34%)	4 (10%)	8 (19%)	0 (0%)	15 (37%)	18 (47%)	3 (7%)	4 (8%)	3 (7%)	12 (31%)

Tabla 5.6: ***Distribución de la naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF), de los grupos en los cursos A y B en términos del proceso de modelación matemática.***

Por ejemplo en Tabla 5.6, observando fila *Contestar pregunta original*, de los cinco grupos del curso A, dos grupos no realizaron modificaciones (naturaleza 0) en su presentación final (PF) en esa etapa, y tres la rehicieron completamente de nuevo (naturaleza 4). Y de los cinco grupos del curso B, tres no realizaron modificaciones (naturaleza 0) en su presentación final (PF) en esa etapa, y dos la rehicieron completamente de nuevo (naturaleza 4).

La mayoría de los grupos de ambos cursos realizaron más modificaciones en su presentación final (PF), con relación a su presentación inicial (PI), en las etapas *Contestar pregunta original*, *Analizar resultado* e *Identificar el modelo*.

Algunos grupos del curso A no hicieron modificaciones en la etapa *Plantear la EDO*, al igual que los grupos del curso B, aunque no hay que olvidar que en su presentación inicial (PI) ya habían entregado algunas de estas etapas con un tratamiento adecuado (ver Tabla 5.4). Por otro lado los grupos del curso B no hicieron modificaciones en las etapas *Resolver la EDO y Aplicar condiciones*, al igual que los grupos del curso A, sin olvidar que en su presentación inicial (PI) ya habían entregado algunas de estas etapas con un tratamiento adecuado (ver Tabla 5.5).

Se observa que los grupos del curso A no realizaron modificaciones de naturaleza 3 en su presentación (PF) (Reorganiza completamente la etapa en su presentación inicial (PI) y quizá añade algunas cosas).

5.2.2. Influencia del contenido de las aportaciones en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo

La distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en los foros de los estudiantes en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función del proceso de modelación matemática, se organizaron teniendo en cuenta cada una de las etapas y la frecuencia con que se hizo en los foros F1 y F2 conjuntamente, al seleccionar y resolver un problema (Tabla 5.7), y en el foro F3 al valorar una presentación inicial (PI) (Tabla 5.8):

Aportaciones en los foros F1 y F2 según las etapas del proceso de modelación matemática												
Etapas del proceso de modelación matemática	Grupos Curso A						Grupos Curso B					
	G1A	G2A	G3A	G4A	G5A	Total	G1B	G2B	G3B	G4B	G5B	Total
1. Identificar variables y leyes por aplicar	1	5	9	1	6	22(16%)	1	4	13	8	1	27(15%)
2. Plantear la EDO	0	0	3	0	3	6(4%)	3	0	2	7	8	20(11%)
3.Establecer condiciones	10	5	1	5	9	30(22%)	9	12	15	11	7	54(31%)
4. Resolver la EDO	4	1	1	2	9	17(13%)	8	18	13	2	5	46(26%)
5. Aplicar condiciones	0	1	0	1	0	2(1%)	0	0	1	2	0	3(2%)
6. Graficar resolución	0	0	0	1	0	1(1%)	0	1	1	0	2	4(2%)
7. Contestar pregunta original	0	0	2	1	1	4(3%)	1	2	1	1	0	5(3%)
8. Analizar resultado	1	11	2	2	3	19(14%)	0	0	2	0	0	2(1%)
9. Identificar el modelo	13	1	2	9	10	35(26%)	3	3	2	4	4	16(9%)
Total	29	24	20	22	41	136(100%)	25	40	50	35	27	177(100%)

Tabla 5.7: ***Distribución de las frecuencias de las aportaciones de los grupos en los cursos A y B en los foros F1 y F2, en relación con las etapas del proceso de modelación matemática.***

Aportaciones en el foro F3 según las etapas del proceso de modelación matemática												
Etapas del proceso de modelación matemática	Grupos Curso A						Grupos Curso B					
	G1A	G2A	G3A	G4A	G5A	Total	G1B	G2B	G3B	G4B	G5B	Total
1. Identificar variables y leyes por aplicar	0	0	1	2	0	3(3%)	0	0	0	0	5	5(4%)
2. Plantear la EDO	1	0	0	1	3	5(6%)	0	3	8	3	4	18(15%)
3.Establecer condiciones	1	0	0	0	0	1(1%)	0	4	4	5	1	14(12%)
4. Resolver la EDO	5	9	5	7	3	29(33%)	8	1	2	10	10	31(26%)
5. Aplicar condiciones	4	2	0	0	0	6(7%)	0	0	0	2	0	2(2%)
6. Graficar resolución	6	2	3	7	9	27(30%)	10	6	4	0	8	28(24%)
7. Contestar pregunta original	0	0	1	0	0	1(1%)	0	0	0	1	0	1(1%)
8. Analizar resultado	0	0	0	0	0	0(0%)	5	1	2	0	0	8(7%)
9. Identificar el modelo	5	0	6	5	1	17(19%)	0	0	3	2	5	10(9%)
Total	22	13	16	22	16	89(100%)	23	15	23	23	33	117(100%)

Tabla 5.8: ***Distribución de las frecuencias de las aportaciones de los grupos en los cursos A y B en el foro F3, en relación con las etapas del proceso de modelación matemática.***

Por ejemplo en Tabla 5.7, observando fila *Plantear la EDO*, los grupos del curso A, en sus aportaciones en F1 y F2 hicieron referencia a esa etapa de la siguiente forma: G2A con frecuencia 3, y G5A con frecuencia de 3. Los otros grupos no hicieron mención de esta etapa en sus aportaciones. Globalmente la frecuencia de las aportaciones en esa etapa corresponde al 15% (6/136) del total. Los grupos del curso B, en sus aportaciones en F1 y F2 hicieron referencia a esa etapa de la siguiente forma: G1A con frecuencia 1, G3B con frecuencia 3, G4B con frecuencia 7, G5B con frecuencia 8, y G2B no la mencionó. Globalmente la frecuencia de las aportaciones de los grupos en esa etapa corresponde al 11% (20/136) del total.

Por ejemplo en Tabla 5.8, observando fila *Analizar resultado*, los grupos del curso A, en sus aportaciones en F3 no hicieron referencia a esa etapa de la siguiente forma. Los grupos del curso B, en sus aportaciones en F3 hicieron referencia a esa etapa de la siguiente forma: G1B con frecuencia 5, G2B con frecuencia 1, G3B con frecuencia 2, los grupos G4B y G5B no la mencionaron. Globalmente la frecuencia de las aportaciones de los grupos en esa etapa corresponde al 7% (8/117) del total.

A partir de Tabla 5.7 se observa que los estudiantes del curso A, en sus aportaciones en los foros F1 y F2 al seleccionar y resolver un problema conjuntamente, mencionaron más aspectos relacionados con la etapa *Identificar el modelo* que los estudiantes del curso B, que a su vez tuvieron más en cuenta los aspectos relacionados con la etapa *Resolver la EDO* que los estudiantes del curso A.

Por otro lado, algunos elementos comunes en ambos cursos es que los grupos en mencionaron con escasa frecuencia aspectos relacionados con las etapas *Resolver la EDO*, *Graficar resolución* y *Contestar pregunta original*. Se observa que en ambos cursos los estudiantes mencionaron la etapa *Identificar variables y leyes por aplicar* en proporciones similares.

Se compararon las frecuencias de los aspectos mencionados entre los cursos A y B y se observó que existieron diferencias significativas [$\chi^2(8) = 46.63$, $p < 0.001$]. Es decir se observan diferencias en las aportaciones en los foros F1 y F2 con relación al proceso de modelación matemática, sin importar que los estudiantes hubieran realizado estas tareas del Proyecto de manera similar y bajo las mismas condiciones.

A partir de Tabla 5.8, se observa que los estudiantes del curso B, en sus aportaciones en el foro F3, al valorar su propia presentación inicial (PI), mencionaron más aspectos relacionados con las etapas *Establecer la EDO* y *Establecer condiciones* que los estudiantes del curso A al revisar la presentación inicial (PI) de otro grupo. Por otro lado, las aportaciones de los estudiantes del curso B tuvieron en cuenta los elementos relacionados con la etapa *Analizar resultado*, al contrario que los del curso A, que no los mencionaron.

Se compararon las frecuencias de los aspectos mencionados entre los cursos A y B y se observó que existieron diferencias significativas [$\chi^2(8) = 27.72$, $p < 0.001$]. Es decir la frecuencia de las aportaciones en el foro F3 en relación al proceso de modelación matemática, al valorar una presentación inicial (PI), estuvo relacionada con la manera en que los estudiantes realizaron la valoración.

Para valorar la influencia de los foros F1, F2 y F3 en las modificaciones al propio trabajo al desarrollar el *Proyecto*, se consideraron las aportaciones (y sus frecuencias) de los estudiantes en cada grupo, y en cada curso, en función de si se consideraron en las presentaciones inicial (PI) y final (PF) en cada caso y, posteriormente se relacionaron con dichas modificaciones. Las aportaciones de los estudiantes en los foros teniendo en cuenta si se consideraron al elaborar las presentaciones inicial (PI) y final (PF) fueron (Tabla 5.9):

Influencia de las aportaciones en el foro en las modificaciones realizadas en el *Proyecto*														
Proceso de modelación matemática	Aspectos mencionados en los foros (Curso A)							Aspectos mencionados en los foros (Curso B)						
	F1 y F2				F3			F1 y F2				F3		
	Se tuvieron en cuenta		No se tuvieron en cuenta	Total	Se tuvieron en cuenta	No se tuvieron en cuenta	Total	Se tuvieron en cuenta		No se tuvieron en cuenta	Total	Se tuvieron en cuenta	No se tuvieron en cuenta	Total
	PI	PF						PI	PF					
1. Identificar variables y leyes por aplicar	14	6	2	22	1	2	3	1	0	26	27	0	5	5
2. Plantear la EDO	6	0	0	6	2	3	5	20	0	0	20	6	12	18
3.Establecer condiciones	20	10	0	30	1	0	1	18	15	21	54	13	1	14
4. Resolver la EDO	14	2	1	17	29	0	29	46	0	0	46	2	29	31
5. Aplicar condiciones	0	2	0	2	6	0	6	3	0	0	3	0	2	2
6. Graficar resolución	0	1	0	1	27	0	27	0	3	1	4	28	0	28
7. Contestar pregunta original	0	3	1	4	1	0	1	4	1	0	5	1	0	1
8. Analizar resultado	0	5	14	19	0	0	0	0	2	0	2	8	0	8
9. Identificar el modelo	0	1	34	35	0	17	17	0	0	16	16	0	10	10
Total	54 (42%)	30 (21%)	52 (37%)	136 (100%)	67 (75%)	22 (25%)	89 (100%)	92 (52%)	21 (12%)	64 (36%)	177 (100%)	58 (49%)	59 (51%)	117 (100%)

Tabla 5.9: ***Distribución de las aportaciones de los estudiantes en los foros en los cursos A y B, organizadas según si se tuvieron en cuenta, o no, al modificar el Proyecto.***

> En términos de Tabla 5.9, por ejemplo, observando la fila *Contestar pregunta original*, los estudiantes del curso A en F1 y F2, hicieron 4 aportaciones en relación con esa etapa, de las cuales no tuvieron en cuenta ninguna para elaborar su PI y 3 para modificar su PF, y 1 no se tuvo en cuenta al realizar sus trabajos. Hicieron en F3, 1 aportación en relación con esa etapa, que tuvieron en cuenta para modificar PF. Los estudiantes del curso B en F1 y F2, hicieron 5 aportaciones en relación con esa etapa, 4 de las cuales tuvieron en cuenta para elaborar su PI y una para modificar su PF. En F3 hicieron una aportación que tuvieron en cuenta para elaborar si PI.

Se puede observar que, en general, los estudiantes consideraron las aportaciones en los foros F1 y F2 al elaborar sus presentaciones inicial (PI) y final (PF) (curso A, 63%, y curso B, 64%, tomando el total de los aspectos para PF y PI).

Por otro lado, y en proporciones algo diferentes (curso A, 21%, y curso B, 12%), los estudiantes de ambos cursos tuvieron en sus aportaciones para elaborar su presentación inicial (PI), y que no incluyeron en esta, en la elaboración de su presentación final (PF). Esto puede indicar que el efecto de los foros, en algunos casos, no se produjo de forma inmediata, ya que los estudiantes reconsideraron sus aportaciones que inicialmente no habían tenido en cuenta en su presentación inicial (PI). Que las aportaciones no siempre tuvieran influencia inmediata puede ser debido a que no supieron cómo seguirlas al momento o por otras circunstancias pero se mantuvieron en la mente de los estudiantes para considerarlas con posterioridad o, quizás, el tener acceso a la información sobre sus aportaciones en las diversas secciones del foro a través de la plataforma web del curso permitió recordarlas y tenerlas en cuenta posteriormente.

A partir de la Tabla 5.9 se observa que, en general, los estudiantes de ambos grupos incluyeron, en su presentación final (PF), las aportaciones en el foro F3 al valorar una presentación inicial (PI), lo que puede indicar que tuvieron en cuenta lo que se habló en el foro (curso A, 75%, y curso B, 49%). El hecho de que los estudiantes del curso B, los que valoraron su propio trabajo, tuvieron en cuenta las aportaciones del foro en menor grado que los del curso A, que valoraron el trabajo de otros, puede indicar que la forma de desarrollar el *Proyecto* tuvo influencia, aunque debería desarrollarse más investigación sobre ello.

A continuación se muestran algunos ejemplos de aspectos que los estudiantes mencionaron en sus aportaciones en los foros F1 y F2 y que no incluyeron en su presentación inicial (PI), pero que consideraron posteriormente para incluirlos en su presentación final (PF):

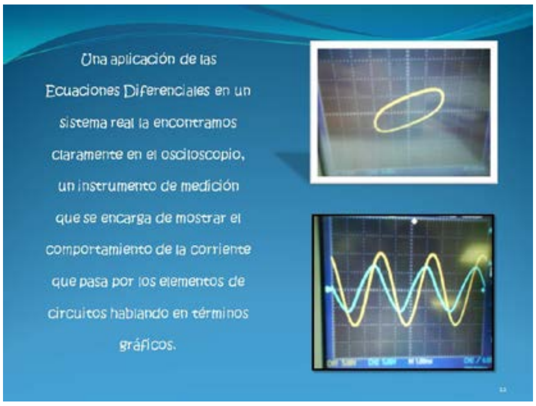
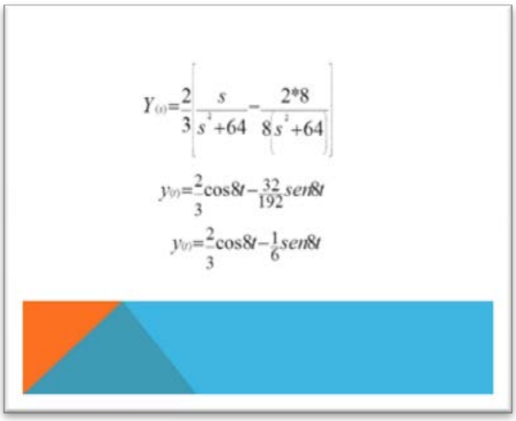
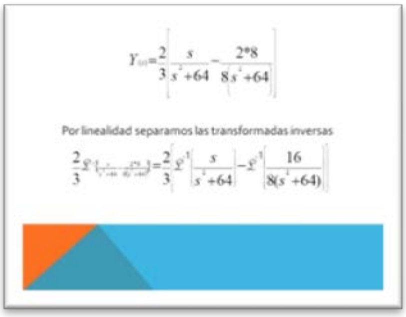
<table>
<tr><th colspan="2">Aportación del grupo G2A</th></tr>
<tr><td colspan="2">“Pues yo considero que podríamos armar protoboard con los elementos que involucra el problema, es decir, un capacitor, un resistor y un inductor, usar un generador de funciones y un osciloscopio y observar cómo se comporta la corriente en el circuito a través de este”.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">En la sección F2 un estudiante del grupo G2A sugiere comprobar físicamente la solución de la EDO.</td></tr>
<tr><td>Presentación inicial (PI): No se tuvo en cuenta esta consideración (no se presenta dispositiva en relación con lo comentado).
.</td><td>Presentación final (PF): Se incluyeron gráficas de la solución observadas en un osciloscopio en el laboratorio de electrónica.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es decir, la aportación del estudiante del grupo G2A pudo ser la causa de la mejora de este aspecto en la valoración final de la presentación final (PF).</td></tr>
</table>

Tabla 5.10: ***Ejemplo de las aportaciones en el foro de los estudiantes del grupo G2A, que no consideraron en su presentación inicial (PI), pero si en su presentación final (PF).***

Es decir, los estudiantes del grupo G2A incorporaron un elemento en su presentación final (PF), del que hablaron en el foro, que no habían incluido en su presentación inicial (PI).

<table>
<tr><th colspan="2">Aportación del grupo G1A</th></tr>
<tr><td colspan="2">“Si resolvemos la ecuación utilizando la transformada de Laplace tenemos que recordar la transformada inversa, ¿no creen?”</td></tr>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">En la sección F1 un estudiante del grupo G1A sugiere resolver la ecuación diferencial utilizando la transformada de Laplace.</td></tr>
<tr><td>Presentación inicial (PI): Se establece la ecuación diferencial y se resuelve por la transformada de Laplace sin indicar que se aplica la transformada inversa como parte del procedimiento.
</td><td>Presentación final (PF): Se describe lo que se hace en cada paso de la solución, y se indica cuando se incluye la transformada inversa.


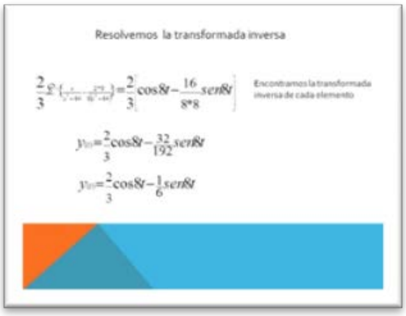
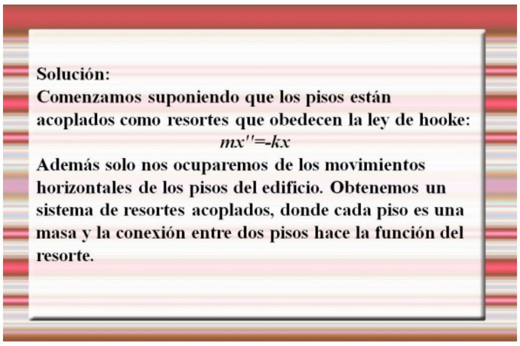
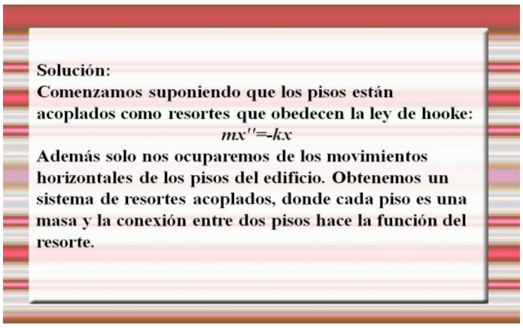

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es decir, la aportación del estudiante del grupo G1A pudo ser la causa de la mejora de este aspecto en la valoración final de la presentación final (PF).</td></tr>
</table>

Tabla 5.11: ***Ejemplo de las aportaciones en el foro de los estudiantes del grupo G1A, que no consideraron en su presentación inicial (PI), pero si en su presentación final (PF).***

Es decir, los estudiantes del grupo G1A añadieron algunas explicaciones a su presentación final (PF), de las que hablaron en el foro, que no habían incluido en su presentación inicial (PI).

<table>
<tr><th colspan="2">Aportación del grupo G4B</th></tr>
<tr><td colspan="2">“Como nada más estamos considerando los aspectos de la solución de PVI, creo que solamente tomaríamos unas pequeñas definiciones de otras ciencias porque lo que queremos saber es aplicar las operaciones para poder llegar a obtener una EDO de segundo orden y así poder resolver el problema”.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Descripción</th></tr>
<tr><td colspan="2">En la sección F1 un estudiante del grupo G4B sugiere consultar algunas definiciones necesarias para comprender un problema de sismología.</td></tr>
<tr><td>Presentación inicial (PI): No se tuvo en cuenta la definición de ningún concepto, al definir las variables del sistema, solo se mencionan las leyes físicas.

</td><td>Presentación final (PF): Se incluyó no solamente la ley física que gobierna el sistema, sino que también la definición del término resonancia.


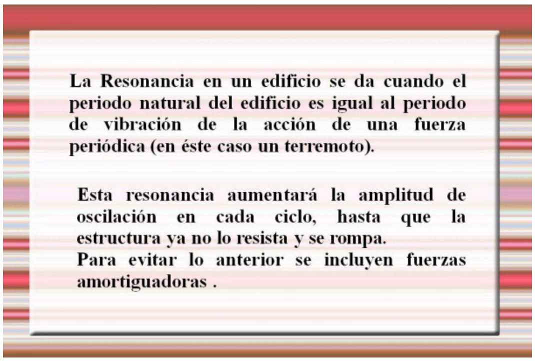

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Es decir, la aportación del estudiante del grupo G4B pudo ser la causa de la mejora de este aspecto en la valoración final de la presentación final (PF).</td></tr>
</table>

Tabla 5.12: ***Ejemplo de las aportaciones en el foro de los estudiantes del grupo G4B, que no consideraron en su presentación inicial (PI), pero si en su presentación final (PF).***

Es decir, los estudiantes del grupo G4B añadieron una de las definiciones de conceptos a su presentación final (PF), de la que hablaron en el foro, que no habían incluido en su presentación inicial (PI).

Influencia del contenido de las aportaciones en el foro en la diferencia de la valoración entre la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)

Las frecuencias de las aportaciones de los estudiantes en cada curso en el foro F3, en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática, en función de la diferencia de la valoración entre la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) y del número de grupos que hicieron cada modificación fueron:

Aportaciones en F3 en función de la diferencia entre la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)										
Proceso de modelación matemática	Curso A					Curso B				
	No se hicieron modificaciones en (PF)	Se hicieron modificaciones en (PF)			Total	No se hicieron modificaciones en (PF)	Se hicieron modificaciones en (PF)			Total
	0	1	2	3		0	1	2	3	
1. Identificar variables y leyes por aplicar	2(1)	0	1(1)	0	3(2)	5(1)	0	0	0	5(1)
2. Plantear EDO	3(1)	0	2(2)	0	5(3)	12(2)	0	6(2)	0	18(4)
3.Establecer condiciones	0	0	1(1)	0	1(1)	1(1)	0	9(2)	4(1)	14(4)
4.Resolver la EDO	0	5(1)	8(2)	16(2)	29(5)	29(4)	0	2(1)	0	31(5)
5.Aplicar condiciones	0	4(1)	0	2(1)	6(2)	2(1)	0	0	0	2(1)
6.Graficar resolución	0	5(2)	0	22(3)	27(3)	0	0	0	28(4)	28(4)
7.Contestar pregunta original	0	0	0	1(1)	1(1)	0	0	0	1(1)	1(1)
8.Analizar resultado	0	0	0	0	0	0	0	2(1)	6(2)	8(3)
9.Identificar el modelo	17(4)	0	0	0	17(4)	10(3)	0	0	0	10(3)
Total	22 (25%)	14 (16%)	12 (13%)	41 (46%)	89 (100%)	59 (51%)	0 (0%)	19 (16%)	39 (33%)	117 (100%)

Tabla 5.13: ***Aportaciones en el foro F3 en cada grupo de los cursos A y B organizadas en función de la diferencia de la valoración entre PF y PI y la frecuencia (N° grupos en que se hizo).***

En términos de la Tabla 5.13, por ejemplo, observando la fila *Resolver la EDO*, los grupos del curso A hicieron un total de hay un total de 29 aportaciones y aumentaron el valor de su PF en esa etapa en términos de la frecuencia de la siguiente forma: 1 grupo con valor 1, y frecuencia 5, 2 grupos con valor 2 y frecuencia 8, y 2 con valor 3 y frecuencia 16. Los grupos del curso B hicieron un total de hay un total de 31 aportaciones y aumentaron el valor de su PF en esa etapa en términos de la frecuencia de la siguiente forma: 1 grupo con valor 4, y frecuencia 2 y 4 grupos con valor 0 y frecuencia 29.

Se observa que, para ambos cursos, los cambios más considerables en la diferencia de valoración de las presentaciones inicial (PI) y final (PF) se corresponden, en general, con las etapas que más se mencionaron en el foro aunque esto no siempre fue así (por ejemplo, en la etapa 7. *Contestar pregunta original*, que se mencionó una sola vez en el foro de ambos cursos, se modificó profundamente en la presentación final PF). Esto conduce a considerar que la frecuencia de las aportaciones pareció influir en la diferencia de la valoración entre las presentaciones inicial (PI) y final (PF), pero no siempre.

Algunos casos concretos fueron, por ejemplo, en un sentido, la mayor diferencia en la valoración entre las presentaciones inicial (PI) y final (PF) se correspondió con la etapa 6. *Graficar resolución*, que se mencionó con mucha frecuencia en el foro, mientras que, en otro sentido, la etapa 9. *Identificar modelo* no aumentó su valoración en su presentación final (PF), aunque se mencionara frecuentemente en el foro.

La forma en que los estudiantes modificaron su presentación final (PF) en términos de la diferencia entre (PI) y (PF) como consecuencia de aportaciones en el foro, dependió de la forma en que los estudiantes realizaron la valoración de la presentación inicial (PI), ya fuera valorando la propia presentación o la de otro grupo de trabajo [$\chi^2(3) = 30.53$, $p < 0.001$].

Influencia del contenido de las aportaciones en el foro en la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI)

Las frecuencias de las aportaciones de los estudiantes en cada curso en el foro F3, en cada una de las etapas del proceso de modelación matemática, en función de la naturaleza de la presentación final respecto de la presentación inicial (PI) y del número de grupos que hicieron cada modificación fueron:

Aportaciones en F3 en función de la naturaleza de las modificaciones de la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI)								
Proceso de modelación matemática	Curso A				Curso B			
	No se hicieron modificaciones en PF	No se hicieron modificaciones En PF		Total	No se hicieron modificaciones En PF	No se hicieron modificaciones En PF		Total
	0	1,2	3,4		0	1,2	3,4	
1. Identificar variables y leyes por aplicar	2(1)	1(1)	0	3(2)	5(1)	0	0	5(1)
2. Plantear EDO	3(1)	2(2)	0	5(3)	12(2)	3(1)	3(1)	18(4)
3.Establecer condiciones	0	1	0	1(1)	1(1)	5(1)	8(2)	14(4)
4. Resolver la EDO	0	13	16	29(5)	29(4)	2(1)	0	31(5)
5. Aplicar condiciones	0	4(1)	2(1)	6(2)	2(1)	0	0	2(1)
6. Graficar resolución	0	5(1)	22(2)	27(3)	0	0	28(4)	28(4)
7. Contestar pregunta original	0	0	1(1)	1(1)	0	0	1(1)	1(1)
8. Analizar resultado	0	0	0	0	0	0	8(3)	8(3)
9. Identificar el modelo	17(4)	0	0	17(4)	10(3)	0	0	10(3)
Total	22 (25%)	26 (39%)	41 (46%)	89 (100%)	59 (51%)	10 (0%)	58 (49%)	117 (100%)

Tabla 5.14: ***Aportaciones en el foro F3 en cada grupo de los cursos A y B organizadas en función de la naturaleza de las modificaciones de PF y la frecuencia (N° grupos en que se hizo).***

A partir de Tabla 5.14, por ejemplo, observando la fila *Aplicar condiciones*, los grupos del curso A hicieron 6 aportaciones en relación a esa etapa, y 2 grupos la modificaron en su PF de la siguiente forma: 1 grupo realizó modificaciones con un nivel medio (naturaleza 1 o 2) como resultado de 4 aportaciones, y 1 grupo realizó modificaciones con un nivel alto (naturaleza 3 o 4) como resultado de 2 aportaciones. Solo un grupo del curso B hizo 2 aportaciones en relación a esa etapa, pero no la modificó en su PF.

Se observa que los estudiantes de ambos cursos hicieron algunas modificaciones de mayor nivel (4) en etapas cuyos aspectos se mencionaron con frecuencia en el foro (por ejemplo en la etapa 6. *Graficar resolución*), aunque también realizaron modificaciones de este mismo nivel en etapas a las que no se hizo referencia en las aportaciones con tanta frecuencia. Esto parece indicar que la frecuencia de las aportaciones influyó en la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) pero no en todos los casos.

Los estudiantes del curso A, en general, realizaron modificaciones en diversos niveles en sus presentaciones finales (PF) según los aspectos en las aportaciones que se mencionaron en el foro. Sin embargo los estudiantes del curso B, aunque también realizaron modificaciones en sus presentaciones finales (PF) según los aspectos que se mencionaron en el foro, en muchos casos no lo hicieron (por ejemplo no modificaron las etapas *Establecer EDO* y *Resolver la EDO* aunque las mencionaron frecuentemente en el foro).

Parece ser que la forma en que los estudiantes modificaron su presentación final (PF) en términos de la naturaleza de las modificaciones, como consecuencia de las aportaciones en el foro dependió de la forma en que los estudiantes realizaron la valoración ya fuera valorando la propia presentación inicial (PI) o la de otro grupo de trabajo [$\chi^2(3) = 31.15$, $p = 0.001$].

5.2.3. Relación entre los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones en el foro y las modificaciones realizadas al propio trabajo

La relación entre los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro y las modificaciones realizadas al propio trabajo se consideró en dos sentidos: 1) Relación entre los niveles de interacción y de profundidad con la diferencia entra la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), y 2) Relación entre los niveles de interacción y de profundidad con la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).

Relación entre los niveles de interacción y de profundidad con la diferencia entre la valoración entre la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)

La relación entre los niveles de interacción de las aportaciones de los estudiantes en los foros al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática, en cada grupo y en cada curso, y la diferencia entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) (que podía ser desde 0, cuando no hubo ningún cambio en (PF) respecto (PI), hasta 3, cuando se incluyeron modificaciones en (PF) con un tratamiento adecuado), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática consideradas en cada caso, a partir del coeficiente de correlación *r* de Pearson, fueron (Tabla 5.15):

Relación entre los niveles de interacción y la diferencia entre la valoración de las presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)								
Nivel de interacción	Valores de la diferencia entre las presentaciones (PF) y (PI)							
	Curso A				Curso B			
	0	1	2	3	0	1	2	3
Aporta Información (0)	-0.542	0.590	**0.958****	-0.607	-0.040	-0.209	0.341	0.393
Interacciona (1)	0.257	0.372	-0.414	-0.235	-0.011	0.302	-0.157	0.453
Interacciona y Amplía (2)	**0.813***	-0.332	-0.332	-0.318	**-0.739***	-0.641	0.585	**0.829***

*n.s.<0.05, **n.s.<0.001,

Tabla 5.15. ***Valores de la relación entre los Niveles de interacción y la diferencia entre la valoración de las presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), de los grupos en los curso A y B.***

A partir de la tabla anterior se observa que solamente se presentaron relaciones significativas para el curso A en los siguientes casos:

- Nivel *Interacciona y Amplía* con valoración 0 (r = 0.813). Esto quiere decir que los grupos que hicieron más aportaciones en el foro interaccionando y ampliando sus aportaciones dejaron un mayor número de etapas en sus presentaciones finales (PF) sin hacer ningún cambio. Esto puede parecer sorprendente pero hay que recordar que, el hecho de que la diferencia de la valoración entre las presentaciones final (PF) e inicial (PI) sea 0, no significa que esa etapa no estuviera presentado adecuadamente en la presentación inicial (PI).

- Nivel *Aporta información* con valoración 2 (r = 0.958). Esto significa que los grupos que hicieron mayores aportaciones en el foro en donde simplemente aportaron información al mencionar ideas que habían surgido anteriormente, hicieron más cambios considerables en la valoración entre sus presentaciones inicial (PI) y final (PF).

Para el curso B se presentaron las siguientes relaciones significativas:

- Nivel *Interacciona y Amplía* con valoración 0 (r=-0.739) por un lado, y con valoración 3 por otro (r = 0.829). Esto quiere decir que los grupos que hicieron mayores aportaciones en el foro donde interaccionaron y ampliaron su comentarios con un alto nivel de interacción, dejaron menos etapas sin modificar en su presentación final (PF), e hicieron más cambios con un tratamiento adecuado en su presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI).

La relación entre los niveles de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática, en cada grupo y en cada curso, y la diferencia entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF) (que podía ser desde 0, cuando no hubo ningún cambio en (PF) respecto (PI), hasta 3, cuando se incluyeron modificaciones en (PF) con un tratamiento adecuado), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática consideradas en cada caso, a partir del coeficiente de correlación *r* de Pearson fueron (Tabla 5.16):

Relación entre los niveles de profundidad y la diferencia entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF)								
Nivel de profundidad	Valores de la diferencia entre las presentaciones (PF) y (PI)							
	Curso A				Curso B			
	0	1	2	3	0	1	2	3
Descripción (N1)	0.253	0.366	-0.408	-0.287	-0.024	0.159	0.004	0.437
Argumentación (N2)	0.553	-0.123	0.031	-0.507	-0.361	-0.221	0.361	0.590
Aportación (N3)	-0.520	0.539	**0.784***	-0.231	-0.480	**-0.784***	0.480	**0.841***

*n.s.<0.05

Tabla 5.16. ***Valores de la relación entre los Niveles de profundidad y la diferencia de la valoración de las presentaciones inicial (PI) y final (PF), de los grupos en los curso A y B.***

A partir de la tabla anterior se observa que, para el curso A, solamente se presentó una relación significativa entre Nivel *Aportación* y valoración 2 (r = 0.784). Es decir que los grupos que hicieron más aportaciones en el foro fueron los que hicieron más cambios considerables en la valoración entre sus presentaciones inicial (PI) y final (PF).

Para el curso B se encontraron relaciones significativas entre Nivel *Aportación* y valoración 1 (r = -0.784), por un lado, y con valor 3 por otro (r = 0.841). Esto quiere decir que los grupos que hicieron más aportaciones en el foro, donde contribuyeron para mejorar la tarea, hicieron menos cambios sin justificar en su presentación inicial (PI) y final (PF), e hicieron más cambios con un tratamiento adecuado en sus presentaciones final (PF) respecto a las iniciales (PI).

Relación entre los niveles de interacción y de profundidad con la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) respecto a la presentación final (PI)

La relación entre los niveles de interacción de las aportaciones de los estudiantes en el foro al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática, en cada grupo y en cada curso, y la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) (que podía ser desde 0, cuando no se realiza ninguna modificación, hasta 4 cuando se rehace completamente la etapa del proceso de modelación matemática en PF), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática consideradas en cada caso, a partir del coeficiente de correlación *r* de Pearson fueron (Tabla 5.17):

Nivel de interacción	**Relación entre niveles de interacción y la naturaleza de las modificaciones de la presentación final (PF)**								
	Naturaleza de las modificaciones								
	Curso A				Curso B				
	0	1	2	4	0	1	2	3	4
Aporta Información (0)	0.122	0.282	0.126	-0.418	0.220	-0.034	0.055	-0.541	0.470
Interacciona (1)	**0.855***	0.098	-0.403	**-0.708***	-0.435	-0.087	**0.816**	0.012	-0.035
Interacciona y Amplía (2)	0.426	-0.280	0.058	-0.318	**-0.787**	-0.787	**0.873**	0.115	0.626

*n.s.<0.05

Tabla 5.17. ***Valores de la relación entre los Niveles de interacción de las aportaciones en el foro, y la naturaleza de las modificaciones en la presentación final (PF) de los grupos en los curso A y B.***

A partir de la tabla anterior, se observa que solamente se presentaron relaciones significativas para el curso A entre Nivel *Interacciona* con naturaleza 0 (*r*=0.855), por un lado, y con naturaleza 2 (*r* =-0.708) por otro. Esto quiere decir que, los grupos que hicieron más aportaciones en el foro en donde mencionaron ideas que surgieron de un aspecto considerado previamente, fueron los que dejaron más etapas sin modificar en su presentación final (PF), por un lado, y modificaron casi completamente un menor número de etapas en su presentación final (PF).

Para el curso B, se presentaron relaciones significativas en los siguientes casos:

- Nivel *Interacciona* con naturaleza 2 (*r*=0.816). Esto quiere decir que los grupos que hicieron más aportaciones en el foro en donde mencionaron ideas que surgieron de un aspecto considerado previamente fueron los que modificaron más etapas en su presentación final (PF) reorganizando algunas partes.

- Nivel *Interacciona y Amplía* con naturaleza 2 (*r*=0.873), por un lado, y con naturaleza 0 (*r*=-0.787) por otro. Es decir, los grupos que hicieron más aportaciones en el foro en donde además de interaccionar ampliaron sus aportaciones fueron los que modificaron más etapas en su presentación final (PF) reorganizando algunas partes y dejaron menos etapas sin modificar en su presentación final (PF).

La relación entre los niveles de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática, en cada grupo y en cada curso, y la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF) (que podía ser desde 0, cuando no se realiza ninguna modificación, hasta 4 cuando se rehace completamente la etapa del proceso de modelación matemática en (PF)), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática consideradas en cada caso, a partir del coeficiente de correlación *r* de Pearson fueron (Tabla 5.18):

Nivel de profundidad	**Relación entre niveles profundidad y naturaleza de las modificaciones de la presentación final (PF)**								
	Naturaleza de las modificaciones								
	Curso A				Curso B				
	0	1	2	4	0	1	2	3	4
Descripción (N1)	0.801	**-0.835**	-0.274	-0.241	-0.137	0.206	0.037	-0.434	0.523
Argumentación (N2)	0.414	-0.594	-0.523	**0.747**	-0.564	0.564	**0.976****	-0.228	0.263
Aportación (N3)	-0.242	0.679	0.181	-0.1740	0.457	0.280	**0.841**	0.457	0.267

*n.s.<0.05, **n.s.<0.01

Tabla 5.18. ***Valores de la relación entre los Niveles de profundidad de las aportaciones en el foro, y la diferencia de la valoración de las presentaciones inicial (PI) y final (PF) de los grupos en los curso A y B.***

A partir de la tabla anterior se observa que solamente se presentaron relaciones significativas para el curso A en los siguientes casos:

- Nivel *Descripción* con naturaleza 2 (*r* = -0. 835). Esto quiere decir que los grupos que hicieron más aportaciones en el foro describiendo aspectos relacionados con el desarrollo de la tarea, sin involucrarse, hicieron menos modificaciones en su presentación final (PF).
- Nivel *Argumentación* con naturaleza de 4 (*r* =0.747). Esto quiere decir que los grupos que hicieron más aportaciones ya sea justificando y sacando conclusiones sobre el desarrollo de la tareas, rehicieron completamente más etapas en su presentación final (PF).

En el caso del curso B solamente se presentaron relaciones significativas entre Niveles *Argumentación* y *Aportación* con naturaleza 2 (*r* =0.976 y *r* =0.841). Esto quiere decir que los grupos que más argumentaron y aportaron hicieron más modificaciones en su presentación final (PF).

Los resultados parecen indicar que, a mayor nivel de interacción y profundidad en las aportaciones de los estudiantes del curso B (que valoraron su propia presentación inicial PI), más cambios con un tratamiento adecuado y más modificaciones con profundidad realizaron en sus presentaciones finales (PF) respecto a las iniciales (PI).

Capítulo 6. DISCUSIÓN

En un curso de ecuaciones diferenciales para estudiantes de ingeniería que tenía como principal objetivo que los alumnos desarrollaran habilidades matemáticas como, por ejemplo, destrezas para argumentar y justificar la construcción de modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales de algunos fenómenos físicos, sistemas dinámicos o situaciones de la vida cotidiana mediante el razonamiento, el análisis y la reflexión, se diseñó, implementó y analizó una experiencia en la que se consideraron, como elementos fundamentales, tanto las interacciones entre los estudiantes al realizar tareas en conjunto como la construcción y resolución de modelos matemáticos.

Durante dicha experiencia los alumnos, organizados en grupos de trabajo, desarrollaron un *Proyecto* para estudiar modelación matemática que incluía diversas actividades en las que tenían que construir su aprendizaje y revisar críticamente su trabajo. Para llevarlo a cabo, los estudiantes se comunicaron a través de foros virtuales para discutir sobre el desarrollo de algunas tareas, elaborar reflexiones conjuntas y revisar el trabajo realizado, además de mostrar sus trabajos a sus compañeros en el aula.

Para analizar el desarrollo del proceso de modelación matemática se tuvo en cuenta no sólo la forma en que los estudiantes de ingeniería interaccionaron en un foro virtual para realizar las tareas del *Proyecto* y las valoraciones que hicieron a sus trabajos sino que, además, se consideraron los productos generados en ese *Proyecto* como fueron una presentación inicial (PI) en grupos, en la cual se mostraba el planteamiento, resolución y análisis de la modelización con ecuaciones diferenciales de una situación de la vida real, y una presentación final (PF), realizada como producto de la reflexión y revisión conjunta, en cada grupo, de la presentación inicial (PI) tratando de mejorarla.

En este capítulo se presenta la discusión de los resultados obtenidos después de analizar las interacciones de los estudiantes en el foro, las presentaciones iniciales (PI) y las presentaciones finales (PF) desarrolladas, y la forma en la que las realizaron. Se organiza en cinco apartados referidos al: tipo y nivel de interacción, y a la profundidad de las aportaciones; influencia del foro en las modificaciones realizadas al propio trabajo; proceso de modelación matemática; necesidad de aportar nuevos enfoques para mejorar la enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales; papel del profesor y consideraciones sobre la investigación realizada.

Tipo y nivel de interacción, y profundidad de las aportaciones

En las aportaciones de los estudiantes en el foro virtual para llevar a cabo el *Proyecto* de modelación matemática se observa que participaron activamente para desarrollar el trabajo: 1) Seleccionar un problema (*"Los problemas de los resortes están un poco más apegados a la vida cotidiana, ya que las básculas del supermercado o de la tiendita de la esquina utilizan resortes", "Creo que el problema del péndulo tiene muchas aplicaciones que se apegan a la realidad, por ejemplo, en el análisis de edificios ante sismos y la medición del tiempo"*), 2) Resolver el problema seleccionado (*"Eric propuso resolver este problema con el método de la transformada de Laplace, ya que tiene una condición inicial en t =0", "Bueno, antes de proponer un método de solución, es importante plantear la ecuación característica"*), y 3) Valorar la presentación inicial (PI) de otro grupo o la propia (*"Es importante que se establezca cuál es la solución general y cuál es la solución particular", "A nuestra presentación le faltó una gráfica que representara la trayectoria recorrida por el barco"*).

A pesar que la mayor parte de las aportaciones de los estudiantes fueron informar y, en menor intensidad, aclarar contribuciones previas y coincidir o discrepar con los compañeros, usualmente sin justificar sus puntos de vista ni aportar alternativas, la interacción en el foro posibilitó que reflexionaran sobre sus ideas, se cuestionaran conceptos y dieran significado a sus planteamientos, algo que coincide con trabajos previos (por ejemplo, Nasoon y Woodruff, 2005). Por ejemplo, *"Sería interesante observar cómo cambian nuestros resultados al considerar tanto los materiales del resorte como el peso de la nave en otro planeta", "Debemos pensar si el número de pisos del edificio afecta la solución del problema", "Si nos enfocamos a tiempos remotos, gracias a un péndulo Foucault demostró el movimiento de rotación de la Tierra"*. Estos resultados de un nivel medio de interacción confirman los obtenidos por Zhu (2006), que sugirió que no se puede suponer que cualquier discusión en línea permitirá alcanzar altos niveles de interacción entre los estudiantes bajo cualquier circunstancia.

Llinares y Valls (2009), en su trabajo con foros con estudiantes para maestro, concluyeron que el tipo de interacción varía en función de la tarea que se desarrolla. Esto también pudo observarse en los resultados de la presente investigación porque, aunque los tipos de interacción de dos foros (F1 y F2) fueron similares, no ocurrió lo mismo con los del otro foro, F3, cuando los estudiantes de un curso valoraron la presentación inicial (PI) de otro grupo mientras que los del otro curso lo hicieron con su propia presentación inicial (PI).

En términos del nivel de profundidad de las aportaciones de los estudiantes en el foro, en su mayor parte describieron aspectos sin involucrarse y, en proporción mucho menor, argumentaron o realizaron aportaciones a pesar de poder hacerlo porque tenían suficientes conocimientos teóricos (*"Un PVI es un problema en el cual nos dan ciertas condiciones para obtener una solución particular de la ecuación diferencial", "¿Qué les parece si resolvemos el problema por el método tradicional y por la transformada de Laplace, y así elegimos el más conveniente?"*). Estos resultados corroboran estudios previos en contextos universitarios como, por ejemplo, los de Chamoso y Cáceres (2009) en la formación de maestros de matemáticas. Existen evidencias de que, si solo se involucra a los estudiantes en reflexiones escritas, no se suele promover una reflexión realmente productiva (Loughram, 2002).

En este sentido, este estudio quizás podría haberse completado con notas de observación de clase, entrevistas a algunos estudiantes sobre sus aportaciones en el foro o utilizando diarios escritos, blogs o portafolios de aprendizaje que permitieran a los estudiantes profundizar en sus contribuciones durante el desarrollo del *Proyecto* como en la investigación de Nason y Woodruff (2005). En concreto, el uso del portafolios de aprendizaje es reconocido como un instrumento que puede fomentar la reflexión en contextos universitarios (Chamoso y Cáceres, 2009), aunque se conocen escasas investigaciones en este sentido en el contexto de formación de estudiantes universitarios de ingeniería. Quizás la investigación también se podría haber complementado con un estudio de casos de algunos grupos de estudiantes para analizar, por ejemplo, si los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones se modificaron a lo largo del desarrollo del *Proyecto*.

Influencia del foro en las modificaciones realizadas al propio trabajo

La investigación realizada permite entender que los foros virtuales podrían cambiar la forma en que los estudiantes de ingeniería acceden, perciben y comunican los conceptos matemáticos, y modifican sus trabajos a partir de las aportaciones realizadas en el foro, aunque se precisan más investigaciones en este sentido. Apenas se conocen trabajos similares en la formación universitaria y, aún menos, en la formación de ingenieros. En concreto, las aportaciones realizadas en el desarrollo del *Proyecto*, en cada grupo, permitieron que se replantearan sus presentaciones iniciales (PI) para mejorarlas y darles más consistencia como, por ejemplo, algunos grupos, ante el problema seleccionado inicialmente, propusieron modificar su posición inicial como resultado de las interacciones (*“Bueno creo que podemos corregir la aplicación, ya que el teorema que utilizamos no es muy práctico en la aplicación de las grúas”, “Tal vez sería mejor modificar la aplicación de nuestro problema, independientemente de cualquier objeto que cuelgue del resorte”*).

Las modificaciones que los estudiantes, en cada grupo, hicieron a su presentación final (PI) podrían haber sido más numerosas. Una de las causas podría ser que, en ocasiones, los grupos de estudiantes que llevan a cabo actividades en entornos de aprendizaje colaborativo en línea tienden a trabajar más en una forma cooperativa que colaborativa (Onrubia y Engel, 2009). Atendiendo a los trabajos presentados y las aportaciones de los estudiantes de nuestra investigación, parece evidente que algunos grupos no dieron la misma importancia a aspectos como la revisión conjunta, la aprobación o el rechazo de las sugerencias de los miembros del grupo o de otro grupo, o al consenso sobre la versión final de su trabajo. Ello conllevó que algunas presentaciones finales (PF) no fueron el resultado de una construcción real sino la unión de aportaciones individuales, más o menos controlada, y dirigida en algunos casos por uno o varios miembros del grupo. Un análisis más detallado de este proceso podría ser de gran interés.

Proceso de modelación matemática

En términos del proceso de modelación matemática, las escasas modificaciones que hicieron los estudiantes, en cada grupo, en su presentación inicial (PI), en las etapas 1. *Identificar variables y leyes por aplicar*, 2. *Plantear la EDO*, y 3. *Establecer condiciones*, parecen indicar que tuvieron dificultades para establecer conexiones entre los fenómenos físicos y las representaciones matemáticas. Sin embargo esto no debería entenderse como una incapacidad de los estudiantes sino como un valioso indicador de la complejidad de ese proceso.

En concreto, atendiendo a *Identificar las variables* involucradas al construir un modelo matemático y a las leyes que gobiernan el sistema físico, llama la atención que la mayoría de los estudiantes, en cada grupo, apenas le concediera importancia aunque algunos lo mencionaron en sus aportaciones como un aspecto que se debía considerar. Esto puede evidenciar una dificultad de comprensión, lo que corrobora otros resultados de estudios que analizaron las dificultades con que se enfrentaron estudiantes al trasladar una situación cotidiana a un problema matemático, una de las cuales eras las limitaciones que tenían para identificar las cantidades variables y constantes del sistema (Soon, Tirtasanjaya y McInnes, 2011; Klymchuk, Zverkova, Gruenwald y Sauerbier, 2008).

Otro aspecto interesante que se observa en *Establecer condiciones* es que algunos grupos de estudiantes no aplicaron condiciones iniciales al resolver la ecuación diferencial, aunque habían sido capaces de establecerlas adecuadamente en la etapa *Plantear la EDO*. Sólo algunos grupos lo mencionaron en los foros (*“Resolvemos la ecuación homogénea, encontramos las raíces y ya tenemos la solución para la ecuación homogénea, después calculamos las constantes de la solución general con las condiciones iniciales”, “Deberíamos resolverla como una ecuación homogénea, y después aplicar condiciones iniciales para resolver el problema”*). Parece que las condiciones iniciales únicamente adquirieron significado, para los estudiantes, después de calcular la solución general de la ecuación diferencial y obtener una solución particular, lo que permite suponer que no tuvieron una visión global de lo que estas condiciones iniciales representan con relación al problema.

Una de las etapas en que los grupos hicieron mayores modificaciones en su presentación final (PF) fue la que más se mencionó en el foro, *Graficar resolución* (*"Agregar algunas gráficas como actúa la FEM en el circuito RLC pudo ser favorable para comprender el problema", "Debemos agregar gráficas que muestren los comportamiento de la corriente y la carga", "Nos faltó emplear una gráfica que mostrara el movimiento que tendría la cuerda de la grúa al caer", "Hay que anexar gráficas que describan las funciones, además de una gráfica general que describa el comportamiento de la solución"*). El interés que los alumnos mostraron por la representación de las soluciones, aunque apenas lo materializaron en su presentación inicial (PI), pudo ser provocada por el enfoque algorítmico que suelen tienen los cursos de matemáticas y donde el aspecto gráfico suele estar ausente (Martins, 2008). Este hecho nos obliga a considerar la necesidad de replantear la enseñanza de estos contenidos.

Otro aspecto de interés es que, a pesar de que se dedicaron algunas sesiones al estudio detallado del proceso de modelación matemática en el aula, ninguno de los grupos de estudiantes incluyó la validación del modelo matemático, *Identificar el modelo*, en su presentación inicial (PI). Ello debe hacernos reflexionar sobre la dificultad de transferir lo que se conoce, o se sabe porque se lo han explicado, a un trabajo propio. Además, refleja que la visión de los estudiantes del concepto de ecuación diferencial se parecía más a una relación algebraica entre variables y derivadas que a la descripción de un proceso que sucede en el tiempo. Los modelos matemáticos trabajan sobre situaciones hipotéticas para interpretar la realidad y no se debe confundir el modelo con la realidad. Esto confirma la dificultad de la comprensión del significado de las ecuaciones diferenciales como descriptores de sistemas que evolucionan (Martins, 2008).

Con referencia a este aspecto, considerar el uso de software en el curso de ecuaciones diferenciales en este sentido posiblemente permitiría tener una visión más completa de la solución del modelo matemático (Balderas, 2010). En concreto, un grupo lo mencionó para validar sus datos (*"Además una herramienta adicional en el caso de este problema ayudaría; es un programa llamado Earthquake, que muestra los terremotos ocurridos en los últimos 7 días en todo el mundo"*).

Algunos estudiantes fueron incapaces de extraer del problema la información necesaria sobre las cantidades o variables o la relación entre ellas. Incluso cuando se les proporciona la ecuación diferencial dentro de un contexto de modelado, de forma explícita, pueden resolverla erróneamente debido a la mala identificación de las variables, ya que tienen una paciencia limitada al leer los enunciados de los problemas y pasan directamente a los procedimientos que consideran necesarios para resolverlos. Este es un aspecto básico cuando se trabaja el modelado.

En otro sentido, que se observen diferencias entre la frecuencia de los aspectos mencionados en las aportaciones de los estudiantes, organizados por las etapas del proceso de modelación matemática, y las modificaciones realizadas en su presentación final (PF), confirma que los estudiantes entienden estas etapas de forma diferente.

Necesidad de aportar nuevos enfoques para mejorar la enseñanza de ecuaciones diferenciales

Durante la interacción de los estudiantes para resolver la ecuación diferencial predominaron las aportaciones que aludían al uso de soluciones analíticas y algebraicas que originaron, en algunos casos, conclusiones erróneas o incompletas. Parece que los estudiantes de nuestro estudio tuvieron tendencia a elegir algoritmos como una secuencia de pasos que se debía seguir, lo que limitó sus posibilidades cuando no podían hacerlo, lo que coincide con los resultados de otras investigaciones (por ejemplo Camacho, Perdomo y Santos, 2007; Martins, 2008). Quizás haber hecho hincapié, en las sesiones en el aula, en la utilización coordinada de contextos gráficos, numéricos y algebraicos podría haber ayudado a los estudiantes. En este sentido utilizar un software, como Maple o Mathematica, podría ayudar a procesar representaciones, explorar contextos que usualmente no se consideran en los cursos tradicionales de matemáticas, relacionar los enfoques gráfico, numérico y algebraico, y obtener una comprensión más realista de la solución (Roubides, 2004).

No hay que olvidar que el enfoque de enseñanza habitual en los cursos de ecuaciones diferenciales introduce el concepto de ecuación diferencial a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución (Perdomo, 2011). Ello puede crear dificultades en los estudiantes para transferir los recursos conceptuales que conocen (derivación, integración, algoritmos de resolución de distintos tipos de ecuaciones diferenciales) a otras formas de resolución de las ecuaciones diferenciales que pueden ser necesarias cuando se trabaja con modelación. Sin embargo hay que tener en cuenta que, los estudiantes que aprenden ecuaciones diferenciales con énfasis en el enfoque gráfico, no necesariamente utilizan este registro para resolverlas (Perdomo, 2011).

En este sentido, Moreno y Azcárate (2003) señalaron que los profesores creen que los alumnos aprenden por imitación y memorización cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales, y no tienen condiciones para trabajar de otra manera porque tienen poco conocimiento matemático, y poca capacidad de raciocinio y creación. Quizás la metodología utilizada en la experiencia de este trabajo podría ser un primer paso para facilitar que los estudiantes de ingeniería de cursos de ecuaciones diferenciales consigan un aprendizaje más significativo.

Papel del profesor

Esta investigación se focalizó en el trabajo de los estudiantes sin intervención del profesor, quien solamente participó para explicar las instrucciones para el desarrollo de cada parte del *Proyecto* al inicio de cada sección del foro. Pero los resultados sugieren que, en actividades colaborativas que incluyan foros virtuales, es necesario añadir algunas estrategias para promover una interacción más intensa y activa. En concreto, es posible que las escasas aportaciones en las que los estudiantes ampliaron sus coincidencias o discrepancias con sus compañeros podrían haber sido más numerosas si el profesor hubiera intervenido en el desarrollo del foro en algún sentido como, por ejemplo, realizando preguntas para animar o guiar la discusión como sugirió Zhu (2006) después de analizar los factores que determinaban los tipos de interacción en discusiones asincrónicas. Las preguntas podrían haber sido dirigidas, por ejemplo, inicialmente para recordarles qué saben o introduciendo de manera sutil elementos clave para la construcción del modelo y, posteriormente, acerca de qué necesitan saber y cómo podrían proceder para avanzar en su trabajo (Soon, Tirtasanjaya y McInnes, 2011; Maull y Berry, 2001). Trabajar de este modo puede ser muy útil para los estudiantes que comienzan a trabajar la modelación matemática, como los del curso de ecuaciones diferenciales en esta investigación, porque puede facilitar que adquieran la confianza suficiente que les permita enfrentarse a situaciones más complicadas.

Se esperaba que los estudiantes, al tener que plantear una situación real con la que debían estar familiarizados, no tendrían dificultad en la comprensión del *Proyecto* que debían realizar, pero las aportaciones en el foro mostraron que no siempre fue así en todos los grupos de trabajo. Esto recuerda la importancia del profesor, que debe planificar cuidadosamente las tareas que se proponen a los estudiantes en todos sus aspectos.

En algunas aportaciones en el foro se hizo evidente la dificultad de los estudiantes en utilizar una expresión adecuada (*"Todos tienen condiciones iniciales que se notan a simple vista, pero no está de más verificar que sean concretas para resolver mejor los problemas", "Creo que deberíamos escoger uno de resortes y otro de los otros", "También sería ideal poder moldear una ecuación para hacer una detección oportuna de este mal"*), quizás porque no tenían un lenguaje matemático o científico común que permitiera que expresaran sus ideas de una manera clara, fluida y argumentada. Para los alumnos es difícil usar el lenguaje matemático, encontrar las palabras adecuadas y crear la definición que necesitan, así como poner por escrito sus ideas matemáticas (Lee, 2009). Esto permite reflexionar sobre la conveniencia de considerar la intervención del profesor para, por ejemplo, facilitar la comprensión del conjunto de tareas o llevar a cabo una preparación inicial para promover el entendimiento de los estudiantes sobre lo que requería el *Proyecto* planteado como, por ejemplo, que los estudiantes escribieran qué entendían que se requería hacer y, posteriormente, discutirlo conjuntamente en el aula o en otros sentidos.

Es obvio que la colaboración se ha convertido en una parte esencial en la era de la información por lo que el uso de espacios de trabajo compartidos tiene el potencial de apoyar la colaboración en grupo en términos de coordinar los esfuerzos de colaboración de los estudiantes y el seguimiento de su proceso de aprendizaje. Sin embargo, como se observó en algunos casos, los estudiantes fueron reacios a utilizar los espacios de colaboración, lo que hace necesario implementar algunas estrategias que alienten a los alumnos a participar o ayuden a moderar los debates, para lo cual el papel del profesor es fundamental.

Estos aspectos nos han ayudado a recordar la importancia del papel del profesor en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Por ejemplo, para planificar su participación en una tarea en la que se utilicen herramientas de comunicación en línea, si asume el papel principal, entonces se encargará de dirigir los debates y, probablemente, de concluirlos, aunque se esperaría que fuera uno de los participantes el que contribuyera con más frecuencia a las discusiones. Si, por el contrario, la tarea se diseña de acuerdo con el modelo constructivista para alentar a los estudiantes a iniciar discusiones y responder a las preguntas de los demás, entonces el profesor no dominará las discusiones (Murillo y

Marcos, 2009). La forma en que el profesor debe actuar en trabajos en este sentido puede ser objeto de futura investigación.

Sobre la investigación realizada

La investigación realizada partió del interés por mejorar la comprensión de los estudiantes del proceso de modelación matemática para vincular los contenidos de ecuaciones diferenciales con contextos reales. Y aunque se han realizado diversas investigaciones con el enfoque de la teoría de la Matemática en Contexto para analizar la modelación matemática en ingeniería, el presente trabajo puede ser relevante debido a la escasez de estudios que analicen el desarrollo del proceso de modelación matemática considerando el uso de foros virtuales.

A partir de nuestra experiencia en esta investigación entendemos que las interacciones a través de un medio tecnológico son un elemento que favorece la reflexión, el desarrollo cognitivo y la adquisición de habilidades en la enseñanza de las matemáticas como corroboraron otros investigadores como Murillo y Marcos (2009). Por ejemplo, dados los tiempos de respuesta requeridos para participar en una discusión asincrónica, aunque estos medios de comunicación escrita no permiten utilizar recursos orales o de gesticulación, no impidió que los alumnos, en sus aportaciones en los foros, comunicaran características gráficas, numéricas o algebraicas de los conceptos matemáticos (*"Observando el problema de nuevo, observé que cuando el barco A persigue al barco B, la recta tangente a la grafica y = y(x) en el punto P debe pasar por el punto Q"*, *"Encontré un video que nos puede ayudar a comprender nuestro problema, en el cual se explica el planteamiento de la ecuación diferencial que domina al sistema masa resorte en nuestro caso vibración libre"*, *"Podemos hacer x(t)=0, y entonces nuestra ecuación quedaría como: 0=1/2 cos(160t)+ (57/8000) sen(160t)"*).

Nuestra experiencia permitió comprobar que el uso de foros virtuales promovió el aprendizaje autónomo ya que, algunos estudiantes, investigaron algunos conceptos tanto para realizar su presentación inicial (PI) como para corregirla después de revisar las aportaciones en el foro en que se hacía referencia a su presentación inicial (PI) (*"Uno de los conceptos que tenemos que investigar es la frecuencia natural del edificio, y estudiar la ley de Hooke, que estaría dada por mx''=-kx, además debemos pensar si el número de pisos del edificio afecta la resolución del problema"*, *"Investigando un poco encontré que el tipo de suspensión más utilizada es la McPherson que fue inventada en*

1951, pero a pesar de eso sigo sin encontrar el rango que deba aguantar una suspensión, solo sé que es entre el 70% y 80% del peso", "Estuve investigando y encontré los aspectos que debemos de tomar en cuenta: Existe un problema llamado de Cauchy que consiste en resolver una ecuación diferencial sujeta a unas ciertas condiciones iniciales, y sobre la condición de que una de las variables que la definen (usualmente, la variable temporal), toma un determinado valor (usualmente, t = 0, para modelar las condiciones del sistema en el instante inicial)", "Algo interesante podría ser o tomar las estadísticas de México, porque hay que recordar que el problema de la diabetes está creciendo de manera seria.").

Desde nuestra perspectiva personal, esta investigación ha mostrado la importancia de considerar la modelación matemática no solo como un simple procedimiento que debe seguirse (Crouch y Haines, 2004). Y ha sugerido ideas para mejorar su enseñanza. Por ejemplo, el estudio podría completarse con un enfoque experimental proponiendo a los estudiantes una determinada experiencia que les permitiera tomar datos aunque ello pudiera favorecer la predicción más que la comprensión ya que no investiga las relaciones subyacentes del fenómeno observado (Maull y Berry, 2001). Otra posibilidad podría ser, para todos los estudiantes, considerar un ejemplo concreto de todas las asignaturas que estén cursando en su carrera como el caso de un circuito eléctrico, tal como algunos alumnos expresaron en sus aportaciones (*"Podríamos poner el ejemplo de las fuentes de voltaje que utilizamos en los laboratorios de la materia de análisis de circuitos", "Podemos ir al laboratorio de electrónica y observar cómo se comporta la corriente en el circuito a través de un osciloscopio", "El problema que podríamos utilizar como estudiantes de ESCOM es el del circuito eléctrico, más ahora que estamos cursando la materia de Análisis Fundamental de Circuitos, y nos servirá para las materias que cursaremos más adelante"*). Aunque no hay que olvidar que estas sugerencias podrían limitar la creatividad de los estudiantes y la gran variedad de situaciones físicas que pueden sugerir.

El sistema de categorías utilizado permitió analizar los procesos de interacción en las aportaciones de los estudiantes de ingeniería, pero es necesario mejorarlo con la experimentación. Hay que recordar que, por ejemplo, el modelo de Llinares y Valls (2009), adaptado para esta investigación, fue diseñado para describir las interacciones de estudiantes para maestro cuando participaban en discusiones en línea para resolver un conjunto de tareas en un entorno de aprendizaje. Para ello podrían tenerse en cuenta otros modelos que permiten determinar el conocimiento construido durante el proceso de interacción, como el de Gunawardena, Lowe, y Anderson (1997) que se ha utilizado en investigaciones en diferentes contextos (Onrubia y Engel, 2009). Además, se podría analizar la participación cognitiva de los estudiantes con un análisis multidimensional con una adaptación de instrumentos como los de Zhu (2006) y Llinares y Valls (2009), que podría revelar las relaciones existentes entre el contenido de los mensajes y otras variables. La naturaleza compleja del aprendizaje en línea requiere del uso de múltiples métodos de análisis, así como de diversas fuentes de datos para estudiar procesos de aprendizajes grupales e individuales. En cualquier caso, el sistema de análisis utilizado en esta investigación constituye un instrumento útil que puede auxiliar en la comprensión y el estudio de los procesos de interacción entre estudiantes en asignaturas de matemáticas en ingeniería, así como valorar las modificaciones que hacen de su propio trabajo.

Capítulo 7. CONCLUSIONES

Se realizó una investigación en el contexto de un curso universitario de ecuaciones diferenciales con el propósito de analizar los efectos de las interacciones de estudiantes de ingeniería, a través de un foro virtual, en el desarrollo de un proyecto de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Este objetivo se fundamentó, por un lado ante la necesidad de vincular en las escuelas de ingeniería el estudio de los contenidos matemáticos con situaciones reales a través de la modelación y, por otro, en la falta de investigaciones sobre la implementación de entornos de aprendizaje con foros virtuales en asignaturas de matemáticas a nivel universitario.

Para estudiar la forma en que estudiantes en un curso de ecuaciones diferenciales, organizados en grupos de trabajo y comunicándose a través de foros virtuales, vinculaban la matemática con algunas situaciones de la vida real, los alumnos llevaron a cabo un *Proyecto* de modelación matemática, organizado por una serie de tareas que debían realizar conjuntamente, que incluía elaborar una presentación inicial (PI) del desarrollo del proceso de modelación matemática a partir de una situación real y la modificación del propio trabajo y que consistió en una presentación final (PF). Todos los grupos de trabajo desarrollaron el *Proyecto* de igual forma excepto en su tercera y última fase, en que cada grupo de uno de los cursos valoró su propia presentación inicial (PI) mientras que cada grupo del otro curso valoró la presentación inicial (PI) de otro grupo.

Los estudiantes de primer año de ingeniería en sistemas computacionales cursaban la asignatura Ecuaciones Diferenciales por primera vez y no contaban con experiencia previa en la participación académica en foros virtuales de discusión ni en la construcción de modelos matemáticos de sistemas físicos. El profesor tampoco tenía experiencia previa en un trabajo en ese sentido. Por tanto, los resultados obtenidos en esta investigación deberían entenderse en el ámbito del proceso en que se desarrollaron.

En este capítulo se exponen las conclusiones de la investigación, a partir de los resultados obtenidos después de analizar las interacciones de estudiantes ingeniería a través de un foro virtual, las presentaciones realizadas y la forma de desarrollarlas. Así mismo se exponen las implicaciones educativas, las limitaciones del estudio y las perspectivas de futuro.

Las conclusiones se presentan a continuación en términos de cada uno de los objetivos planteados en esta investigación.

A partir del objetivo 1, *Analizar el nivel y la profundidad de las interacciones en el foro*, se especificaron las siguientes preguntas de investigación:

> ¿Cómo fueron las interacciones de los estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales?

Las aportaciones de los estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar el *Proyecto* de modelación matemática mostraron, en general, niveles bajos y medios de interacción (principalmente aportaron información y aclararon contribuciones previas).

El tipo y nivel de interacción no variaron al seleccionar, en conjunto, un problema de ecuaciones diferenciales, adaptándolo a una situación real y resolviéndolo, pero sí lo hicieron significativamente al valorar una presentación inicial (PI), donde fueron más altos en el curso donde cada grupo valoró su propia presentación inicial (PI) comparado con los del otro curso donde cada grupo valoró la presentación inicial (PI) de otro grupo. Es decir el tipo y nivel de interacción variaron en términos de las actividades sobre las que se discutía en los foros.

¿Con qué profundidad interaccionaron los estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar un *Proyecto* de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales?

Las aportaciones de los estudiantes mostraron, en general, bajos niveles de profundidad (fundamentalmente descripción, sin justificar o alusión de aspectos señalados anteriormente), que no variaron en función de los diversos foros. Es decir, la mayoría de los estudiantes respondieron a la tarea académica proporcionando respuestas sin tratar de llegar a un entendimiento del concepto o teoría que lo sustentara ni de la forma en que se podría aplicar. Solo algunos estudiantes mostraron la aplicación de la teoría interpretando los conceptos en relación con experiencias personales y discutiendo las situaciones surgidas en el desarrollo del *Proyecto* en relación con los conceptos que se habían mostrado en el aula.

En este caso los niveles de profundidad de las aportaciones no variaron en términos de las actividades sobre las que se discutía en los foros, así como tampoco lo hicieron en función de la manera en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto* de modelación matemática.

A partir del objetivo 2, *Analizar la influencia de las interacciones de los estudiantes en el foro en las modificaciones que realizan al propio trabajo*, se establecieron las siguientes preguntas:

¿Cómo modificaron los estudiantes su propio trabajo en términos del proceso de modelación matemática?

Los estudiantes de ingeniería hicieron modificaciones, en su presentación inicial (PI), considerando la mayoría de las etapas del proceso de modelación matemática consideradas, con excepción de *Identificar el modelo*. Por tanto, la valoración de la presentación final (PF) de los estudiantes aumentó. En la presentación inicial (PI) los estudiantes trabajaron en casi todas las etapas excepto *Analizar resultado* e *identificar el modelo* con una dedicación a cada una de ellas que fue diferente a cuando trabajaron en su presentación final (PF). Los estudiantes de ambos cursos trabajaron de manera diferente su presentación final (PF), siendo los estudiantes del curso A, que valoraron la presentación inicial (PI) de otro grupo, los que obtuvieron una mayor diferencia en la valoración entre sus presentaciones inicial (PI) y final (PF).

Los estudiantes de ingeniería, en sus grupos de trabajo realizaron algún tipo de modificación, en su presentación final (PF), en algunos aspectos según las etapas del proceso de modelación matemática, pero en ningún caso la modificaron por completo en todas sus etapas. En general los estudiantes hicieron modificaciones de mayor naturaleza en su presentación final (PF) en las etapas que no habían incluido en su presentación inicial (PI) más que en las etapas que habían incluido y que habían trabajado inicialmente. Los estudiantes el elaborar su presentación inicial (PI) se centraron en las etapas que se corresponden a los pasos iniciales al construir el modelo matemático, y llegaron hasta la solución de la ecuación diferencial incluyendo la aplicación de las condiciones iniciales. No llegaron a un análisis profundo de sus resultados obtenido al graficar la solución obtenida para analizar su comportamiento, así como validar sus resultados, y aún más darse cuenta que su modelo (ecuación diferencial y condiciones iniciales) puede aplicarse a otra situación real.

En su presentación final (PF) los estudiantes consideraron etapas o elementos de estas que no habían considerado anteriormente, sin embargo no modificaron la etapa *Identificar modelo*, es decir, aún después de trabajar el *Proyecto*, siguieron considerando tratando a ecuación diferencial y sus condiciones iniciales como expresiones matemáticas y no como un sistema que puede representar diversas situaciones reales.

De forma similar parece que los estudiantes no consideraron en su presentación inicial (PI) y en su presentación final (PF), el hecho de que, dada una situación real, existen leyes que gobiernan esos sistemas, es decir, dado un problema pasan a la ecuación diferencial de inmediato sin reconocer que construir un modelo matemático, intervienen reglas que representan el comportamiento del fenómeno que se pretende estudiar.

Los estudiantes de ambos cursos modificaron de diferente forma su presentación final (PF). Sin embargo, los estudiantes de ambos cursos consideraron de forma similar la etapa *Graficar resolución*, que se modificó en todas las presentaciones finales (PF) revisadas.

¿Cómo influyó el contenido de las aportaciones en el foro en las modificaciones realizadas al propio trabajo?

La manera en que influyó el contenido de las aportaciones varió en términos de la tarea que se desarrolló en los foros. Los grupos que valoraron la presentación inicial (PI) de otro grupo tuvieron en cuenta las aportaciones en el foro para elaborar su presentación inicial (PI) en menor grado que las aportaciones en el foro para mejorar su presentación final (PF). Sin embargo los grupos que valoraron su propia presentación atendieron a las aportaciones en los foros para elaborar su presentación inicial (PI) y su presentación final (PF) de manera semejante.

Los estudiantes tuvieron en cuenta, al elaborar su presentación final (PF), algunos de los aspectos que ellos mismos mencionaron en el foro al desarrollar el *Proyecto* de modelación matemática y que no incluyeron anteriormente en su presentación inicial (PI). En algunos casos las aportaciones en el foro no tuvieron efectos de manera inmediata al elaborar su presentación inicial (PI), pero si posteriormente al tratar de mejorar su presentación final (PF). Por ejemplo, algunos estudiantes, en su presentación final (PF), añadieron explicaciones, incorporaron nuevos elementos y agregaron definiciones de algunos conceptos de los que aludieron en el foro virtual que no habían incluido en su presentación inicial (PI).

Por otro lado, la forma en que influyó el contenido de las aportaciones, parece estar relacionado con la frecuencia de alguna manera, ya que los mayores valores entre la diferencia de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), así como en la naturaleza de las modificaciones realizadas en la presentación final (PF), se correspondieron con algunas de las etapas cuyos aspectos se mencionaron con más frecuencia en el foro. Esto indicaría que la frecuencia de los aspectos mencionados pareció haber influido en la calidad de las modificaciones que los estudiantes realizaron a sus trabajos. Es decir, las aportaciones en el foro influyeron en la forma de modificar algunas etapas de las presentaciones finales (PF) de los estudiantes de ingeniería.

Sin embargo, el contenido de las aportaciones influyó de manera distinta en la diferencia entre la valoración de la presentación inicial (PI) y la presentación final (PF), así como en la naturaleza de las modificaciones realizadas a la presentación final (PF) respecto a la presentación inicial (PI), de acuerdo a la forma en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto* de modelación matemática. El foro tuvo mayor influencia en los resultados de los estudiantes del curso A que valoraron la presentación inicial (PI) de otro grupo, que en los resultados de los estudiantes del curso B, que valoraron su propia presentación inicial (PI).

¿Existió relación entre los niveles de interacción y de profundidad de las aportaciones en el foro, y las modificaciones realizadas al propio trabajo?

Los estudiantes de ingeniería que valoraron su presentación inicial (PI) y que ampliaron los aspectos surgidos en una aportación previa en el foro y que además contribuyeron para mejorar la tarea, tuvieron mayores diferencias entre su presentación inicial (PI) y su presentación final (PF), e hicieron modificaciones de mayor naturaleza en su presentación final (PF) respecto a la inicial (PI).

Los estudiantes que alcanzaron mayores niveles de interacción y profundidad en sus aportaciones, al valorar su propia presentación inicial (PI), hicieron modificaciones con mayor nivel en sus presentaciones finales (PF).

Los resultados de la investigación se pueden resumir en las siguientes conclusiones:

En términos del Tipo y nivel de interacción, y profundidad de las aportaciones

- Se produjeron bajos y medios niveles de interacción y bajos en profundidad en las aportaciones de los estudiantes en el foro, lo que sugiere que el fácil acceso a la tecnología no es una condición suficiente para fomentar la participación activa y la interacción. Los estudiantes podrían continuar adoptando un enfoque práctico al combinar las ventajas de la comunicación a través de foros virtuales y la comunicación presencial si no se implementan estrategias tales como pueden ser, por ejemplo, la presencia del profesor como moderador en los debates o la elaboración de preguntas para guiar a los estudiantes con sistemas que requieren análisis o en contextos donde tienen poca información o experiencia.

- Los niveles más altos de interacción de los estudiantes de ingeniería se alcanzaron cuando realizaron la valoración de su propio trabajo frente a los que valoraron el trabajo de otros estudiantes, lo cual abre una futura línea de trabajo para descubrir si esos resultados son similares con otros estudiantes y otras tareas, e incluso en diferentes contextos, y analizar las circunstancias en que se produzcan.

En términos de la Influencia del foro en las modificaciones realizadas al propio trabajo

- Los estudiantes de ingeniería no concedieron la misma importancia a las etapas del proceso de modelación matemática para resolver una situación de la vida real, sin importar que se trabajaran anteriormente ejemplos en el aula. Los alumnos no consideran que después de obtener la solución de la ecuación diferencial deben analizar sus resultados al contrastarlos con datos reales, así como explicar si son posibles otras aplicaciones del sistema físico que modelaron. Por tanto, se hace necesaria una revisión de la enseñanza actual de las ecuaciones diferenciales en la educación superior con el objetivo de dar sentido activo al proceso de modelación matemática y que los estudiantes perciban, con la misma importancia, cada una de las etapas del ciclo de modelación de tal manera que, una vez que lleguen a la representación matemática del problema, sean capaces no solamente de continuar con el proceso de resolución sino también de hacer un análisis.
- Los estudiantes pusieron especial énfasis en la representación gráfica de la solución de una ecuación diferencial, que inicialmente habían resuelto de manera analítica. Por tanto resulta fundamental que, en los cursos de matemática en ingeniería, se trabajen los enfoques analítico, numérico y gráfico de resolución de ecuaciones diferenciales de manera balanceada y simultánea, sin que predomine uno sobre otro.

- El foro tuvo influencia en la forma en que los estudiantes desarrollaron el *Proyecto* de modelación matemática, ya que algunas de las modificaciones realizadas parecieron ser resultado de haberlo mencionado los aspectos relacionados en el foro, aunque esto no en todos los casos no fue así.

En términos de la relación entre la interacción y las modificaciones realizadas al propio trabajo

- Los estudiantes que mostraron un mayor nivel de interacción y profundidad en sus aportaciones fueron los que realizaron modificaciones con mayor profundidad en sus trabajos, lo que permite abrir futuras investigaciones en este sentido.

En términos de la investigación realizada

- Los foros virtuales se pueden utilizar en cursos universitarios de ingeniería lo que sugiere que pueden ser una herramienta fundamental en diferentes programas académicos, en muy diferentes sentidos, cuyo uso pueda influir en la forma en que los estudiantes desarrollan un conjunto de tareas en las asignaturas de matemáticas y quizás de otras áreas.
- La investigación realizada puede proporcionar un método para analizar las aportaciones de los estudiantes universitarios de ingeniería en foros virtuales de discusión para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, al desarrollar un proyecto u otras tareas, en términos de su interacción y profundidad, así como las revisiones que realizan de sus propios trabajos ante las escasas investigaciones previas en ingeniería y, en particular, de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la dificultad al valorar la calidad de las interacciones de estudiantes universitarios de ingeniería en un foro virtual, sugiere que éste no es más que un primer paso que se debe seguir experimentando en futuras investigaciones.
- El presente trabajo nos ha obligado a reflexionar sobre la manera en que los estudiantes relacionan los conceptos aprendidos en clase y las situaciones que los rodean, lo que nos ha llevado a cuestionarnos nuestra enseñanza de las ecuaciones diferenciales y a darnos cuenta que es necesario darle un papel aún más importante a la modelación matemática y, bajo estas consideraciones, considerar alternativas para mejorar nuestra práctica para formar futuros ingenieros en sistemas

computacionales capaces de valorar la importancia de las matemáticas en su desarrollo profesional. En relación a lo anterior, se podría fomentar en las aulas el desarrollo de proyectos grupales o individuales, que fomenten la construcción y el análisis de modelos matemáticos

- Este trabajo nos ha motivado a continuar trabajando en la investigación en diversos sentidos para contribuir, con nuestras propuestas, a la mejora de las metodologías existentes para la investigación, y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ingeniería, y añadir resultados a la literatura acerca del uso de foros de discusión en el aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario.

Limitaciones del estudio

Como limitaciones del estudio, podemos decir que las herramientas utilizadas para analizar la interacción y la profundidad de las aportaciones de los estudiantes, y las modificaciones realizadas al propio proyecto, que fueron adaptadas para esta experiencia con estudiantes de ingeniería, necesitarían más experimentación. Además, hay que tener en cuenta que los estudiantes y profesores que participaron en la experiencia no estaban familiarizados con el uso de foros virtuales para desarrollar actividades académicas relacionadas con matemáticas.

Implicaciones Educativas

Las implicaciones educativas que se derivan de los resultados de nuestro estudio pueden orientarse tanto a la enseñanza y aprendizaje de la modelación matemática así como al uso de foros virtuales en cursos de matemática en ingeniería, en los siguientes sentidos:

En primer lugar creemos que, para favorecer que los estudiantes de ingeniería en la asignatura de Ecuaciones Diferenciales desarrollen el proceso de modelación matemática en el aula, se debería ser trabajar la modelación de manera que obligue a los estudiantes a modelar un fenómeno físico e interpretar su solución, reformular el modelo matemático cuando cambian las condiciones, así como proponer problemas vinculados con ese contenido. Por tanto, se podría hacer una propuesta para modificar el programa de la asignatura de ecuaciones diferenciales en la carrera de Ingeniería en Sistemas

Computacionales en la ESCOM-IPN para integrar la práctica de la modelación matemática como una unidad de aprendizaje fundamental en el programa de la asignatura, con el propósito de propiciar en el estudiante habilidades para relacionar la matemática con otras áreas del conocimiento, interés por la matemática y su aplicabilidad, así como estimular su creatividad al formular y resolver problemas. También permitiría identificar las dificultades de aprendizaje de los estudiantes para utilizar sus conocimientos en una situación concreta cercana a la realidad. Esto podría considerarse para otros cursos de matemáticas de la misma especialidad o en otras.

En cuanto al uso de foros, éste puede ser un paso para considerar los foros virtuales como herramientas educativas que puedan incluirse en la organización de actividades en el aula en los cursos de matemáticas en ingeniería, para promover interacciones entre los estudiantes pues permiten tener tiempo para analizar, reflexionar y negociar mientras se lleva a cabo el debate sobre el desarrollo de una tarea o un conjunto de tareas y, de esta manera, los profesores podrían evaluar las habilidades de pensamiento que muestran los alumnos. También creemos que la incorporación de los foros virtuales al implementar una estrategia didáctica puede extenderse, con un diseño apropiado, a otras asignaturas no necesariamente relacionadas con matemáticas.

En términos del estudio de las interacciones y su profundidad, las contribuciones que se aportan al desarrollo de foros virtuales podrán ser utilizadas por educadores en asignaturas del área de matemáticas, para tomar acciones que permitan mejorar la participación y la interacción, y que la discusión resulte más eficaz.

Perspectivas de futuro

La investigación realizada puede ofrecer futuras líneas de investigación. Primeramente, hay que señalar que este tipo de experiencias en el contexto de un curso de matemáticas para ingenieros, ha sido poco estudiado. Aunque hemos aportado algunas respuestas a la situación analizada, esta investigación presenta nuevas perspectivas tales como realizar un estudio posterior en condiciones similares donde el profesor tenga un papel significativo, interviniendo si es necesario para guiar las discusiones de los alumnos, lo que podría aportar resultados diferentes.

Además, se podría considerar repetir la investigación realizada con un estudio similar, basándose en el mismo proyecto de aplicación de las ecuaciones diferenciales pero con un mismo problema común y familiar para todos los grupos de trabajo, para comparar los resultados obtenidos y analizar si los estudiantes consideran el ciclo de modelación completo en sus trabajos, y si trabajan de manera similar en cada una de las etapas del proceso, y darle más énfasis al desarrollo del modelo en aquellas en que se observaron dificultades por parte de los estudiantes.

También podría llevarse a cabo el mismo estudio en un periodo más largo de tiempo o, en el mismo tiempo, proponiendo que los estudiantes escriban reflexiones sobre el trabajo realizado en cada tarea, para analizar si mejoran los niveles de interacción y la profundidad de sus aportaciones. La experiencia podría realizarse de nuevo utilizando algún software para resolver, analizar y llevar a cabo predicciones del modelo matemático, y poder comparar los resultados con la experiencia realizada. La investigación también podría repetirse utilizando otras herramientas basadas en web como chats o blogs, y comparar con los resultados obtenidos al usar foros virtuales. Otra posibilidad sería considerar que los estudiantes realicen el proyecto de manera individual para comparar los resultados conseguidos en la revisión del propio proyecto. La evaluación de los trabajos de los estudiantes en el sentido del estudio realizado también podría abrir futuras líneas de investigación.

Los resultados obtenidos abren nuevas fronteras de investigación, así como podrían reflejar una forma diferente de trabajar en los cursos de matemáticas en escuelas de ingeniería, tal como la manera de valorar el trabajo de los estudiantes de esta experiencia, puede representar una manera novedosa para ser tomada en cuenta en otras asignaturas. Referido a las modificaciones que estudiantes universitarios de ingeniería hacen a sus trabajos en asignaturas relacionadas con matemáticas como resultado de las interacciones en el foro virtual, ya que no se conocen trabajos en esta línea, podría abrir caminos a futuras investigaciones en diferentes sentidos.

Aunque hemos aportado algunas respuestas al problema estudiado, nuestra investigación origina también nuevas interrogantes y presenta nuevas perspectivas, que podrían generar otras propuestas para enriquecer los aportes de nuestra investigación.

REFERENCIAS

Alsina, C. (2007). Teaching applications and modelling at tertiary level. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W, Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp. 469-474). New York: Springer.

Artigue, M. (1992). Cognitive difficulties and teaching practices. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 109-132). Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Balderas, A. (2001). Integration of CAS in the Didactics of Differential Equations. *Proceeding of the International Conference in New Ideas in Mathematics Education*. Palm Cove, Queensland, Australia. Documento ERIC 468 390.

Balderas, A. (2010). Modelación matemática en un curso introductorio de ecuaciones diferenciales. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 23*, 409-418.

Barbera, E. y Badia, A**.** (2004). *Educar con aulas virtuales*. Madrid: Machado libros.

Bassanezi, R. C. y Biembengut, M. S. (1997). Modelacion Matematica: Una antigua forma de investigación, un nuevo método de enseñanza. *NÚMEROS: Revista de didáctica de las matemáticas*, *32*, 13-25.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática*, *16*(2), 105-125.

Bishop, A. (2000). Clarificando la complejidad. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.7-8). Barcelona: GRAÓ.

Bjuland, R. (2004). Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 55*, 199-225.

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *The College Mathematical Journal*, *25*(5), 385-393.

Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales*. México: International Thomson Publishing (ITP).

Borreli, R. y Coleman, C. (2002). *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación*. México: Oxford.

Boyce, W. y Diprima, R. (2000). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México: Limusa Wiley.

Boyce, W. (1994). New Directions in Elementary Differential Equations. *The College Mathematics Journal*, *5*(25), 364-371.

Cáceres, M. J., Chamoso, J. y Azcárate, P. (2010). Analysis of the revisions that pre-service teachers of mathematics make of their own project included in their learning portfolio. *Teaching and Teacher Education*, *26*, 1186–1195.

Camacho, M., Perdomo, J. y Santos, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* (pp. 87-106). XI SEIEM (Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática). Tenerife: Universidad de la Laguna.

Camarena, P. (1995). La enseñanza de las matemáticas en el contexto de la ingeniería. *Memorias del XXVIII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana* (pp. 28-34). México: Sociedad Matemática Mexicana.

Camarena, P. (2001). Los modelos matemáticos como etapa de la matemática en el contexto de la ingeniería. *Reporte de investigación*. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME-IPN), México.

Camarena, P. (2004). La matemática en el contexto de las ciencias. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*(I), 57-61.

Camarena, P. (2009). Mathematical models in the context of sciences. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 117-131). Denmark: Roskilde University.

Castro, E. y Castro E. (2000). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Universidad de Barcelona e Instituto de Ciencias de la Educación.

Chaachoua, H. y Saglam, A. (2006). Modelling by differential equations. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 15-22.

Chamoso, J. y Cáceres, M. J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25*, 198–206.

Córdoba, J. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería*. Tesis de Maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* London: Sage Publications.

Crouch, R. y Haines, R. (2004). Mathematical modelling: Transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(2), 197-206.

De Corte, E., Verschaffel, L., Stijn Dhert, J. y Vandeput, L. (2000). Collaborative Learning of Mathematical Problem Solving and Problem Posing Supported By Webknowledge Forum: A Design Experiment. *V Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*. Viña del Mar, Chile. Recuperado de http://www.c5.cl/ieinvestiga/actas/ribie2000/charlas/decorte.htm.

De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática: Tendencias e innovaciones*. España: OEI.

De Wever, B., Schellens, T. Valcke, M., y Van Keer, H. (2006). Content analysis schemes to analyze transcripts of online asynchronous discussion groups: a review. *Computers y Education*, *46*, 6-28.

Dorio, I., Sabariego, M. y Massot, I. (2004). Características generales de la investigación educativa. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 274-292). Madrid: La muralla.

Dyment, J. y O'Connell, T. (2011). Assessing the quality of reflection in student journals: a review of the research. *Teaching in Higher Education*, *16*(1), 81-97.

Falsetti, M. y Rodriguez, M. (2005). A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *24*(1), 14-28.

Gallegos, R. (2007). La enseñanza de la modelación en clase de física y de matemáticas. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. 20* (pp.114-119). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Garrison, D. R. (1991). Critical thinking and adult education: a conceptual model for developing critical thinking in adult learners. *International Journal of Lifelong Education*, *10*, 287–303.

Garrison, D. R. y Anderson, T. (2003). *E-learning in the 21st century: A framework for research and practice.* London: Routledge/Falmer.

Garrison, D. R., Anderson, T. y Archer, W. (2000). Critical thinking, cognitive presence , and computer conference in distance education. *American Journal of Distance Education*, *15*, 7-23.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2004). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada: ReproDigital.

Goetz, J. P. y LeCompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid: Morata.

Gómez, J. (2001). *De la enseñanza al aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Paidós.

Graesser, A. C. y Person, N. K. (1994). Question asking during tutoring. *American Educational Research Journal, 31*, 104-137.

Guerra-Cáceres, M. E. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet* , *4*(1). Recuperado de http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/index.htm.

Gunawardena, L., Lowe, C. y Anderson, T. (1997). Interaction analysis of a global on-line debate and the development of a constructivist interaction analysis model for computer conferencing. *Journal of Educational Computing Research, 17*(4), 395-429.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(4), 455-472.

Habre, S. (2003). Investigating Students’ Approval of a Geometric Approach to Differential Equations and Their Solutions. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(5), 651-662.

Haines, C. y Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications, 20*(3), 129-138.

Häkkinen, P., Järvelä, S. y Byman, A. (2001). Sharing and making perspectives in web-based conferencing. En P. Dillenbourg, A. Eurelings y K. Hakkarainen (Eds.), *European perspectives on computer-supported collaborative learning. First European conference on CSCL*. Maastricht, The Netherlands: McLuhan Institute, University of Maastricht.

Hara, N., Bonk, C. y Angeli, C. (2000). Content Analysis of online discussion in an applied educational psychology course. *Instructional Science, 28*, 115-152.

Harasim, L. (2000). Shift happens: Online education as a new paradigm in learning. *The Internet and Higher Education, 2*(1-2), 41-61.

Hatano, C. y Inagaki, K. (1991). Sharing cognition through collective comprehension activity. En L. Resnick, J. Levin, y S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognitio*n (pp. 331-349). Washington, DC: American Psychology Association.

Henri, F. (1991). Computer conferencing and content analysis. En A. R. Kaye (Ed.), *Collaborative learning through computer conferencing: The Najaden papers* (pp. 117-136). London: Springer-Verlag.

Hernández, M. A. (2009). *Las Ecuaciones Diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*. Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), México.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2003). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.

Hubbard, J. (1994). What It Means to Understand a Differential Equation? *The College Mathematics Journal*, *25*(5), 372-384.

Hürme, T-R. y Järvelä S. (2005). Students' activity in computer-supported collaborative problem solving in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 10*, 49-73.

Jacobini, O. R. y Wodewotzki, M. (2006). Mathematical modelling: A path to political reflection in the mathematics class. *Teaching Mathematics and its Applications*, *25*(1), 33-42.

Järvelä, S. y Häkkinen, P. (2002). Web-based cases in teaching and learning: The quality of discussions and a stage of perspective taking in Asynchronous communication. *Interactive Learning Environments*, *10*, 1-22.

Jeong, A. (2004). Sequential analysis of group interaction and critical thinking in online threaded discussions. *The American Journal of Distance Education*, *17*(1), 25-43.

Kanuka, H. y Anderson, T. (1998). Online social interchange, discord, and knowledge construction. *Journal of Distance Education*, *13*(1), 57-74.

Khourey-Bowers, C. (2005). Emergent Reflective Dialogue Among Preservice Teachers Mediated Through A Virtual Learning Environment. *Journal of Computing in Teacher Education*, *21*(4), 85-90.

Klymchuk, S. y Zverkova T. (2001). Role of mathematical modelling and applications in university service courses: An across countries study. En J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston y S. P. Carreira (Eds.), *Modelling, applications and Mathematics Education - Trends and Issues* (pp. 227-235). Chichester, UK: Ellis Horwood.

Klymchuk, S., Zverkova, T., Gruenwald, N. y Sauerbier, G. (2010). Increasing engineering students awareness to environment through innovative teaching of mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*, *27*(3), 123-130.

Kreyszing, K. (1994). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. *Volumen I*. México: Limusa.

Lally, V. (2001). Analysing teaching and learning interactions in a networked collaborative learning environment: issues and work in progress. En Euro CSCL 2001 (pp.397-405). Maastricht, The Netherlands: McLuhan Institute, University of Maastricht.

LeCompte, M. D. (1995). Un matrimonio conveniente: diseño de investigación cualitativa y estándares para la evaluación de programas. *RELIEVE*, *1*(1). Recuperado de http://www2.uca.es/dept/didactica/RELIEVE/.

Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Llinares, S. y Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science, 37*, 247-271.

Loughran, J. J. (2002). Effective reflective practice. In search of meaning in learning about teaching. *Journal of Teacher Education*, *53*(1), 33-43.

MacMillan, J. y Schumacher, S. (2007). *Investigación educativa*. México: Pearson-Addison Wesley.

Martin-Blas, T. y Serrano-Fernández, A. (2009). The role of new technologies in the learning process: Moodle as a teaching tool in Physics. *Computers y Education*, *52*, 35-44.

Martínez, F. y Prendes, M. P. (2004) Nuevas Tecnologías y Educación. Madrid: Pearson.

Martínez, R-A. (2007). *La investigación en la práctica educativa: Guía metodológica de investigación para el diagnóstico y evaluación en los centros docentes*. Madrid: Centro de Investigación y Documentación Educativa (CIDE).

Martins, M. (2008). *Las dimensiones algorítmica y cualitativa del aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Tesis de maestría. Universidad de San Andrés, Buenos Aires.

Massot, I., Dorio, I. y Sabariego, M. (2004). Estrategias de recogida y análisis de la información. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 329-366). Madrid: La muralla.

Maull, W. y Berry, J. (2001). An investigation of student working styles in a mathematical modelling activity. *Teaching Mathematics and its Applications*, *20*(2), 78-88.

Mazzolini, M. y Maddison, S. (2003). Sage, guide or ghost? The effect of instructor intervention on student participation in online discussion forums. *Computers y Education*, *40*, 237-253.

Mertens, D. M. (2005). *Research and evaluation in education and psychology. Integrating diversity with quantitative, qualitative, and mixed methods.* Thousand Oaks, California: Sage Publications.

Moreno, M. y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, *21*(2), 265-280.

Moya, M. (2008). *La utilización de los foros en la enseñanza de la matemática mediada por tecnología digital. Análisis del caso del curso de Tecnología para la educación matemática de la UNSa.* Tesis de maestría. Universidad Nacional de la Plata, Buenos Aires.

Murillo, R. y Marcos, G. (2009). Un modelo para potenciar y analizar las competencias geométricas y comunicativas en un entorno interactivo de aprendizaje. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(2), 241-256.

Nagle, K., Saff, E. y Snider A. (2001). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores a la frontera*. México: Addison Wesley-Longman.

Naidu, S. y Järvelä, S. (2006). Analyzing CMC content for what? *Computers y Education*, *46*, 96-103.

Nason, R. y Woodruff, E. (2003). Fostering Authentic, Sustained, and Progressive Mathematical Knowledge-Building Activity in Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) Communities. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(4), 345-363.

Nava, A. (2009). *Los procesos interactivos como medio de formación de profesores de matemáticas en un ambiente virtual*. Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Newman, D. R., Webb, B. y Cochrane, C. (1995). A content analysis method to measure critical thinking in face to face and computer supported group learning. *Interpersonal Computing and Technology*, *3*, 56-77.

O'Neil, P. (1994). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. *Volumen 1*. México: CECSA.

Onrubia, J. y Engel, A. (2009). Strategies for collaborative writing and phases of knowledge construction in CSCL environments. *Computers y Education*, *53*(4), 1256-1265.

Ornelas, D. (2007). El uso del Foro de Discusión Virtual en la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación*, *44*, 4-10.

Pena-Shaff, J. y Nicholls, C. (2004). Analyzing student interactions and meaning construction in computer bulletin board discussions. *Computers y Education*, *42*, 243-265.

Penney, E. (1994). *Ecuaciones diferenciales y problemas con condiciones en la frontera*. México: Prentice Hall Hispanoamérica.

Perdomo, J. (2011). Módulo de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias en un ambiente de resolución de problemas con tecnología. *NÚMEROS: Revista Didáctica de las matemáticas*, *78*, 113-134.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 55-87.

Rasmussen, C. y Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. En A. Selden, y J. Selden, (Eds.), *MAA Online Research Sampler* [en línea]. Recuperado de http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html.

Rey, C., Penalva, C. y Llinares. S. (2006). Aprendizaje colaborativo y desarrollo professional del profesor de matemáticas. Análisis de un caso. *Quadrante, 15*(2), 95-120.

Rodríguez, D. y Vallderiola, J. (2007). *Metodología de la investigación*. Barcelona: Universidad Abierta de Cataluña.

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1999). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Málaga: Aljibe

Rodríguez, V. y Clares, J. (2006). Análisis de la integración grupal para la construcción del conocimiento en entornos de comunicación asincrónica. *Revista complutense de educación*, *17*(2), 155-168.

Ross, L. (1989). *Introducción a las ecuaciones diferenciales*. México: McGraw-Hill.

Roubides, P. (2004). Computational differential equations: A pilot project. *AACE Journal*, *12*(2), 218-235.

Rourke, L., Anderson, T., Garrison, D. R. y Archer, W. (1999). Assessing social presence in asynchronous text-based computer conferencing. *Journal of Distance Education*, *14*, 51-70.

Rourke, L., Anderson, T. Garrison, D. R., y Archer, W. (2001). Methodological issues in the content analysis of computer conference transcripts. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *12*, 8-22.

Rourke, L., & Anderson, T. (2003). Validity in quantitative content analysis. Recuperado de http:// communitiesofinquiry.com/sub/papers.html.

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(5), 553-558.

Rowland, D. R. y Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *35*(4), 503-516.

Sabariego, M. (2004). La investigación educativa: Génesis, evolución y características. En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 51-87). Madrid: La muralla.

Sabariego, M. y Bisquerra, R. (2004). El proceso de investigación (Parte I). En R. Bisquerra (Coord.), *Metodología de la investigación educativa* (pp. 89-125). Madrid: La muralla.

Sandín, M. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: McGraw-Hill.

Salinas, J. (2003). *El Diseño de procesos de aprendizaje colaborativo en situaciones virtuales*. Universidad de las Islas Baleares: España.

Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.

Santos, M. y Reyes, A. (2011). Teachers' use of computational tools to construct and explore dynamic mathematical models. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*(3), 313-336.

Savoy, A., Proctor, R. W. y Salvendy, G. (2009). Information retention from PowerPoint and traditional lectures. *Computers y Education, 52*, 858-867.

Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis, *Computers y Education, 46*, 49-70.

Silva, J. y Gros, B. (2007). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *8*(1), 81-105.

Silver, E. y Herbst, P. (2007). The role of theory in mathematics education scholarship. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 39-67). New York: Information Age.

Soon, W., Tirtasanjaya, L. y McInnes, B, (2011). Understanding the difficulties faced by engineering undergraduates in learning mathematical modelling.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, *42*(8), 1023-1039.

Spiegel, M. (2001) *Ecuaciones diferenciales aplicadas*. México: Prentice Hall.

Sriraman, B. y English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Susskind, J. (2005). PowerPoint's power in the classroom: enhancing students' self-efficacy and attitudes. *Computers y Education*, *45*, 203-215.

Szabo, A. y Hastings, N. (2000). Using IT in the undergraduate classroom: should we replace the blackboard with PowerPoint. *Computers y Education, 35,* 174-187.

UNESCO (1998). Declaración Mundial sobre la Educación Superior en el siglo XXI: visión y acción. *Conferencia Mundial sobre la Educación Superior*. París, Francia. Recuperado de http://www.unesco.org.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning y Instruction*, *7*(4), 339-359.

Vinagre, M. (2010). *Teoría y práctica del aprendizaje colaborativo asistido por ordenador*. Madrid: Síntesis.

Weinberger, A. y Fischer, F. (2005). A framework to analize argumentative knowledge construction in computer suported collaborative leraning. *Computers y Education*, *46*(1), 71-95.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wilson, M. (1999). Student-generated Multimedia presentation: Tools to help build and communicate mathematical understanding. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *18*(2), 145-156.

Zhu, E. (1998). Learning and mentoring: Electronic discussion in a distance learning course. En C. Bonk y K. King (Eds.), *Electronic collaborators: Learner* *centered technologies for literacy, apprenticeship, and discourse* (pp.233-259). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Zhu, E. (2006). Interactions and cognitive engagement: An analysis of four asynchronous online discussions. *Instructional Science*, *34*, 451–48.

Zill, D. (2006). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. México: Cengage Learning.