



**VNiVERSiDAD D SALAMANCA**

**FACVLTADE EDVCACiÓN**

**DPTO.: DiDÁCTiCA DE LAS MATEMÁTiCAS Y DE LAS C.C.E.E.**

**TESiS DOCTORAL**

Dificultades y errores en la aplicación del algoritmo de la sustracción en estudiantes de Universidad. Implicaciones para la construcción de un modelo didáctico.

M. Mercedes Rodríguez Sánchez

Directores

Dr. Ricardo López Fernández

Dra. Ana Belén Sánchez García

Salamanca, 2015



Memoria de Tesis Doctoral titulada *Dificultades y errores en la aplicación del algoritmo de la sustracción en estudiantes de Universidad. Implicaciones para la construcción de un modelo didáctico*, presentada para optar al grado de Doctor por la Universidad de Salamanca por D<sup>a</sup>. M<sup>a</sup> MERCEDES RODRÍGUEZ SÁNCHEZ, en el Programa de Doctorado: *Educación Matemática*.

DIRECTORES DE LA TESIS:

Dr. RICARDO LÓPEZ FERNÁNDEZ, Profesor Titular de Universidad del Departamento Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca.

Dra. ANA BELÉN SÁNCHEZ GARCÍA, Profesora Contratado Doctor del Departamento Didáctica Organización y Métodos de Investigación de la Universidad de Salamanca

Salamanca, 1 de Diciembre de 2015

Fdo.: M. Mercedes Rodríguez Sánchez





Departamento de Didáctica de las Matemáticas y  
de las Ciencias Experimentales  
Facultad de Educación  
Universidad de Salamanca

Dr. D. Ricardo López Fernández, Profesor Titular de Universidad del Departamento Didáctica de la Matemática y Didáctica de las Ciencias Experimentales y Dra. D<sup>a</sup>. Ana Belén. Sánchez García, Profesora Contratado Doctor del Departamento Didáctica, Organización y Métodos de Investigación de la Universidad de Salamanca,

**CERTIFICAN:**

Que la Tesis Doctoral titulada *“Dificultades y errores en la aplicación del algoritmo de la sustracción en estudiantes de Universidad. Implicaciones para la construcción de un modelo didáctico.”*, presentada por M. Mercedes Rodríguez Sánchez para optar al Grado de Doctor, ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Salamanca, considerando que este trabajo reúne las condiciones necesarias para optar al Grado de Doctor.

Y para que conste, y tenga los efectos oportunos, expiden y firman la presente certificación

Salamanca, a 15 de diciembre de 2015

Prof. Dr. Ricardo López Fernández

Prof. Dra. Ana B. Sánchez García



A Leles  
In Memoriam

A mis tres mejores proyectos  
Gema, Natalia y Andrés  
lo mejor de mi vida

A mi madre  
por su gran generosidad y amor





## AGRADECIMIENTOS

En primer lugar quiero dar las gracias a mis directores de tesis. Han sabido acompañarme en este largo camino con paciencia y comprensión, y ayudarme con su conocimiento y experiencia a llegar hasta la meta esperada. Ricardo, cómo no recordar mis inicios en el Área de Didáctica de las Matemáticas. Ana, pese a sus muchas obligaciones docentes e investigadoras siempre encontró tiempo para dedicarme.

A Modesto Sierra, que desde el principio aceptó la dirección de esta tesis no sin antes advertirme: ¡Los estudiantes universitarios no van a cometer errores en la sustracción! Para posteriormente, a la vista de los primeros resultados, mostrar su sorpresa y alentar el desarrollo de este trabajo. Confió en mí y me dio ánimo. Lástima que no haya podido terminar la tarea empezada.

Gracias a los compañeros que me han apoyado y ayudado, y a todo el profesorado que me permitió entrar en sus aulas. Como no, agradecer también a los estudiantes que colaboraron en la realización de las pruebas.

En el ámbito más personal, gracias a mis tres hijos que han sufrido mi ausencia en esta recta final, que me han animado y ofrecido su apoyo y ayuda incondicional. Con un beso o una mirada saben trasmitirme toda su energía y darme justo lo que necesito en cada momento. Esta tesis es por y para vosotros.

A Jose, por su gran ayuda y colaboración, por todas sus sugerencias y correcciones. Por los buenos y malos ratos sufridos en este proceso, por su compañía en las horas de desesperación y las noches sin dormir. Por animarme cuando las fuerzas faltaban.

A mi madre que me ha apoyado en todas las etapas de mi vida. Supo darme calor y cariño en mi infancia, sensatez y comprensión en mi adolescencia, ánimo y fuerza en mis estudios, honestidad y sabios consejos hasta el día de hoy. Siempre ayudando, incluso por encima de lo posible. Gracias Amalia por ser como eres.

A mis hermanos, por estar siempre a mi lado, mi gran piña particular. Como diría Alejandro Dumas, uno para todos y todos para uno. No puedo evitar recordar a mi abuelo, y su pasión por los números, cuadernos y cuadernos llenos de cuentas, y ni un solo error. A toda mi familia gracias.

Gracias, como no, a mis amigos y a todas las personas que de una u otra forma han ayudado a que esta tesis salga adelante.

GRACIAS

## RESUMEN

El manejo adecuado de las operaciones elementales es uno de los objetivos de la enseñanza obligatoria. En este sentido, investigaciones previas muestran que un alto porcentaje de niños de Educación Primaria (6-12 años) cometen errores cuando realizan sustracciones (Brown y Burton, 1978; Sánchez, 2005; López y Sánchez, 2007; VanLehn, 1982; Young y O'Shea, 1981). Sin embargo apenas se sabe si las personas adultas cometen errores. Por ello este trabajo se centró en estudiantes universitarios, para analizar los errores y tipos de errores que cometen al efectuar sustracciones.

Con ese objetivo, 535 estudiantes universitarios de las Diplomaturas y Grados de Maestro, Ciencias Empresariales y Pymes, y Estadística de la Universidad de Salamanca completaron el cuestionario de VanLehn (1990), compuesto por 20 sustracciones de diferentes tipos. Las respuestas erróneas se categorizaron a partir de las categorías de errores de VanLehn (1990) tomando como referente la adaptación de las mismas realizada por Sánchez (2005), a las que se añadieron otros tipos de errores que surgieron del análisis.

Los resultados mostraron que solamente una cuarta parte de los estudiantes universitarios realizó correctamente todas las sustracciones del cuestionario y que, del total de 10.700 sustracciones, 1.258 (11'76%) habían sido resueltas de manera errónea. Analizando el tipo de errores producidos, se observó que los más frecuentes se corresponden con los errores sistemáticos cometidos por los estudiantes de Educación Primaria. Ello puede indicar que los tipos de errores cometidos en las edades de aprendizaje del algoritmo se mantienen con el tiempo, lo que puede suponer que la enseñanza y el aprendizaje del algoritmo de la sustracción pudo no haber sido el adecuado. En otro sentido, este estudio abre perspectivas de futuro y podría tener implicaciones educativas para favorecer la enseñanza y aprendizaje de la sustracción en las edades escolares.

*Palabras clave:* Algoritmo de la sustracción, error en la sustracción, estudiantes universitarios, educación matemática.



## ABSTRACT

Successful control of basic mathematical operations must be one of the aims in compulsory stages of education. To this respect, previous research has shown that a high percentage of Primary Education school children (6-12 years old) make errors when having to solve subtraction (Brown and Burton, 1978; Sánchez, 2005; López and Sánchez, 2007; VanLehn, 1982; Young and O'Shea, 1981). But not much is known about subtraction error among adults. For this reason, this dissertation was centered on university students, in order to analyze the errors and types of errors university students make when solving subtraction.

To achieve this aim, 535 university undergraduate students from the Pre-school and Primary school Teacher, B.A. in Small and Medium Business Management and Statistics Degrees from the University of Salamanca completed the questionnaire VanLehn (1990), containing twenty different types of subtractions. Wrong answers were categorized following error categorization established by VanLehn (1990) taking as reference the adaptation thereof by Sánchez (2005), to which other types of errors that came up from the analysis were also added.

Results have shown that only one in four among university students were able to complete the whole subtraction questionnaire correctly; and that, from a total of 10700 subtraction operations solved, 1.258 (11.76%) had been done wrong. Analyzing the type of error made, the most frequent ones were the same systematic errors made by the school children. This can indicate that the types of error made at early stages of education when learning this algorithm are kept in the time, which may mean that the teaching and learning process to master this algorithm might not have been the appropriate one. In another sense, this dissertation offers new perspectives for the future, as it could have educational implications in order to improve the teaching and learning process of subtraction in early stages of school education.

Keywords: subtraction algorithm, subtraction error analysis, university students, Mathematics Education.



## **ÍNDICE DE CONTENIDOS**

<b>ÍNDICE DE FIGURAS .....</b>	<b>15</b>
<b>ÍNDICE DE TABLAS .....</b>	<b>16</b>
<b>CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>21</b>
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO .....</b>	<b>31</b>
2. 1. Introducción .....	33
2.1.1. Errores usuales en el algoritmo de la sustracción .....	36
2. 2. Antecedentes y estado de la cuestión .....	38
2. 3. Teorías sobre la adquisición de los errores en la sustracción desde un enfoque de análisis procedimental y sintáctico-cognitivo en la tipificación del error .....	47
2.3.1. Teoría de Brown y Burton (1978) .....	48
2.3.2. Teoría de Young y O'Shea (1981) .....	56
2.3.3. Teoría de VanLehn (1982, 1990) .....	59
<b>CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN .....</b>	<b>67</b>
3. 1. Introducción .....	69
3. 2. Marco conceptual .....	70
3. 3. Finalidad de la investigación .....	74
3. 4. Marco metodológico .....	75
3.4.1. Objetivos .....	75
3.4.2. Muestra .....	75
3.4.3. Instrumento .....	78
3.4.4. Prueba previa exploratoria .....	79

3.4.5. Procedimiento .....	79
3.4.6. Temporalización .....	80
3.4.7. Datos .....	80
3.4.8. Sistema de análisis .....	80
3.4.9. Fases del trabajo .....	85
<b>CAPÍTULO 4. RESULTADOS .....</b>	<b>87</b>
4. 1. Número de errores cometidos por los estudiantes .....	89
4.1.1. Resultados según el sexo.....	91
4.1.2. Resultados según la edad .....	92
4.1.3. Resultados según el centro .....	95
4.1.4. Resultados según el curso .....	97
4.1.5. Resultados según estudios previos .....	100
4.1.6. Resultados según el tiempo empleado .....	101
4. 2. Sustracciones en las que se cometieron más errores .....	105
4. 3. Tipología de los errores cometidos por los estudiantes universitarios .....	115
<b>CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN .....</b>	<b>123</b>
<b>CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES .....</b>	<b>137</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>145</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>159</b>
Anexo I. Glosario de nuevos errores observados en esta investigación	161
Anexo II. Errores observados ordenados según frecuencia .....	165



## ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 2.1.</i> Red procedimental para un tipo de sustracción .....	50
<i>Figura 3.1.</i> Cuestionario completado por un estudiante universitario que incluía muchos errores del tipo Smaller-From-Larger.....	81
<i>Figura 3.2.</i> Cuestionario completado por un estudiante universitario que incluía muchos errores del tipo Borrow-No-Decrement .....	83
<i>Figura 4.1.</i> Porcentaje de cuestionarios según número de respuestas erróneas .....	91
<i>Figura 4.2.</i> Media de errores en función de la edad .....	94
<i>Figura 4.3.</i> Media de errores en los tres centros.....	97
<i>Figura 4.4.</i> Media de errores de los estudiantes universitarios en función del tiempo que tardaron en completar los cuestionarios.....	103
<i>Figura 4.5.</i> Organización de las 10 sustracciones en que se cometieron más errores en función de su estructura atendiendo a los números que incluyen en el minuendo y en el sustraendo ....	107

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1. <i>Tabla comparativa de los tipos de errores que se producen al efectuar la sustracción en diversas investigaciones .....</i>	45
Tabla 2.2. <i>Ejemplos de algunos errores en la sustracción .....</i>	51
Tabla 2.3. <i>14 errores más frecuentes en la sustracción .....</i>	55
Tabla 2.4. <i>Número de estudiantes en cada categoría .....</i>	64
Tabla 2.5. <i>Resumen de cómo se han ido descubriendo nuevos errores...</i>	65
Tabla 3.1. <i>Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por sexo.....</i>	76
Tabla 3.2. <i>Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por los estudios que realizaron antes de llegar a la Universidad.</i>	77
Tabla 3.3. <i>Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por curso.....</i>	77
Tabla 3.4. <i>Variables dependientes del estudio .....</i>	84
Tabla 3.5. <i>Variables independientes del estudio .....</i>	84
Tabla 4.1. <i>Número de estudiantes universitarios que realizaron correctamente todo el cuestionario de VanLehn, en datos totales y en porcentajes, y los que tuvieron al menos un error .....</i>	89

Tabla 4.2. <i>Número de estudiantes universitarios organizados en función del del número de errores cometidos al realizar el cuestionario de VanLehn .....</i>	90
Tabla 4.3. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del sexo .....</i>	92
Tabla 4.4. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al sexo .....</i>	92
Tabla 4.5. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función de la edad agrupada por intervalos.....</i>	93
Tabla 4.6. <i>Estadísticos para descubrir correlaciones del número de errores referido a la edad .....</i>	93
Tabla 4.7. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido a la edad considerada en intervalos agrupados .....</i>	94
Tabla 4.8. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del centro.....</i>	95
Tabla 4.9. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro .....</i>	95
Tabla 4.10. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro, comparando los centros dos a dos.....</i>	96
Tabla 4.11. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro, comparando Magisterio con los otros centros .....</i>	96

Tabla 4.12. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del curso .....</i>	98
Tabla 4.13. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al curso .....</i>	98
Tabla 4.14. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios de Magisterio al realizar el cuestionario organizados en función del curso .....</i>	99
Tabla 4.15. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función de la rama de estudios de cada estudiante en los años previos de llegar a la Universidad .....</i>	100
Tabla 4.16. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido a los estudios previos de los estudiantes .....</i>	101
Tabla 4.17. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del tiempo empleado en completarlo .....</i>	102
Tabla 4.18. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al tiempo que los estudiantes emplearon en su resolución .....</i>	104
Tabla 4.19. <i>Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al tiempo, comparando los tiempos dos a dos .....</i>	104
Tabla 4.20. <i>Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios en cada una de las 20 sustracciones del cuestionario.....</i>	105

Tabla 4.21. <i>Sustracciones ordenadas por las que los estudiantes universitarios cometieron más errores (sólo las 10 con más errores).....</i>	106
Tabla 4.22. <i>Tipos de errores que se cometieron en las 10 sustracciones en las que se produjeron más errores.....</i>	108
Tabla 4.23. <i>Descripción de cada tipo de error (VanLehn, 1990) cometido en las sustracciones efectuadas .....</i>	110
Tabla 4.24. <i>Descripción de nuevos tipos de error cometidos en las sustracciones efectuadas observados en este trabajo. ....</i>	112
Tabla 4.25. <i>Tipos de errores cometidos en las diez sustracciones en que los estudiantes cometieron más errores .....</i>	113
Tabla 4.26 <i>Definición de algunos errores que no habían aparecieron previamente .....</i>	114
Tabla 4.27. <i>Tipos de errores que se cometieron en las sustracciones que completaron los estudiantes universitarios organizados por las veces que aparecieron .....</i>	116
Tabla 4.28. <i>Tipos de errores que se cometieron en las 10 sustracciones en que se cometieron más errores .....</i>	117
Tabla 4.29. <i>Comparación de los tipos de errores que los estudiantes universitarios cometieron en las sustracciones que completaron con relación a estudiantes de Primaria en el estudio de Sánchez (2005). .....</i>	119
Tabla 4.30. <i>Comparación de los errores observados en los trabajos existentes que tuvieron como objetivo analizar los errores cometidos al efectuar sustracciones .....</i>	121



# **CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN**





Una investigación que avance sobre el análisis de los tipos de errores que se producen al efectuar sustracciones tiene gran interés en el área Didáctica de las Matemáticas porque los resultados pueden repercutir notablemente tanto en la actuación del profesorado como en la de los alumnos para mejorar la enseñanza y aprendizaje elemental. Se trata de un tipo de investigación que, usualmente, se trasmite al sistema educativo (Rico y Sierra, 2000).

Para situar este trabajo en el campo concreto de estudio, es necesario remitirse a un esquema integrador de los conocimientos compuesto por diferentes ejes denominados organizadores curriculares (Rico, 1997). En este esquema se incluye *el análisis de los errores y dificultades de aprendizaje* que constituye el núcleo empírico de esta tesis que, desde la perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas, trata de profundizar en este eje concreto del espacio de construcción de conocimiento, a través de la evidencia de la existencia del error algorítmico más allá de la enseñanza formal, para generar un espacio de reflexión sobre posibles implicaciones didácticas. Así pues, como finalidad última de este trabajo, se pretende generar conocimiento que pueda ser aplicado a la formación de los futuros profesionales de la enseñanza obligatoria. En este sentido, este contexto ha llevado a analizar los diferentes

tipos de errores que cometen los adultos jóvenes (estudiantes de la universidad) al efectuar el algoritmo de la sustracción. El origen de esta investigación nace de la constatación, a través de los resultados de investigación de autores como Brown y Burton (1978), VanLehn (1990) y Sánchez (2005), que incidieron en la existencia de errores sistemáticos al desarrollar dicho algoritmo.

Cuando se planteó realizar esta investigación, la doctoranda ya estaba trabajando en el contexto de detección e intervención del error algoritmo con la Dra. Sánchez, directora de esta tesis. En un determinado momento surgió la idea, a partir de los resultados y literatura existentes, de avanzar y profundizar en esta temática tomando como referente a los adultos jóvenes. Lo que se sabía sobre el error, y la naturaleza y mecanismos que producen los errores durante los procesos de enseñanza y aprendizaje de los algoritmos, tanto a nivel semántico como sintáctico, no incluía investigaciones que estudiaran la existencia de errores sistemáticos en el algoritmo de la sustracción en esos adultos jóvenes, ni tampoco su catalogación en función de su sintaxis cognitiva.

Por tanto, la naturaleza de esta investigación podría estar situada en el corpus de conocimiento de los procesos cognitivos que subyacen y sistematizan el error algorítmico cuyos resultados pueden ser aplicados al campo de la Didáctica de las Matemáticas. En este contexto, no se pueden olvidar las aportaciones realizadas por la Ciencia Cognitiva, puesto que conceptos y procedimientos matemáticos están íntimamente relacionados con la cognición y, por tanto, la teoría del aprendizaje matemático no puede obviar a la Ciencia Cognitiva como campo primigenio que nutre fuertemente a la Didáctica de las Matemáticas (Schoenfeld, 1991).

Dentro de esta aproximación cognitivista con repercusiones notables en el área de la Educación Matemática, existen algunos estudios que indagaron sobre distintos aspectos de los procedimientos matemáticos. Así, en la búsqueda bibliográfica previa a la realización de este estudio se encontraron investigaciones que sugerían que muchos adultos no demostraban destrezas adecuadas en hechos relacionados con el conocimiento declarativo subyacente

a procedimientos matemáticos como la adición y la sustracción (LeFevre et al., 1996) o tomaban como referencia la multiplicación para resolver problemas de división (Robinson, Arbuthnott y Gibbons, 2002), hechos que se derivaban de una adquisición de las estructuras conceptuales y procedimentales de la multiplicación y la división poco eficientes. Es evidente que, las estructuras conceptuales subyacentes a los algoritmos y muy especialmente a la comprensión del sistema decimal, son determinantes para la organización de los diferentes elementos del procedimiento (Fuson y Kwon, 1992; Hiebert y Wearne, 1996) y, por tanto, para la enseñanza de los mismos. Una deficiencia en esta fase del aprendizaje supone que, algunos adultos, producirán errores por inducción en cierto algoritmo basados en conocimientos aportados por otros algoritmos, tal y como han estudiado algunos autores a partir de los resultados con niños (Ben-Zeev, 1995; Sánchez, 2012, 2013; VanLehn, 1990). Muchos de estos errores se ven condicionados por algunas propiedades como la identidad en suma y multiplicación. En este sentido, algunos estudios en adultos indicaron que estos pueden resolver con rapidez y precisión ejercicios de aritmética mental (Miller, 1984 y Miller, Perlmutter y Keating, 1984), pero dichos estudios no indagaron sobre la comprensión que los adultos tienen acerca del concepto de identidad. Lo mismo se puede decir de las relaciones inversas como parte importante de la comprensión de las operaciones algorítmicas, donde aún hace falta mucha investigación para determinar la comprensión de niños y adultos del concepto de relación inversa (Robinson y Ninowski, 2003 y Robinson, Ninowski, y Gray, 2006).

Otros ámbitos numéricos como los de las fracciones, decimales, proporciones y frecuencias también han tenido una especial atención por parte de los investigadores con relación a la cognición (Fagerlin, Zikmund-Fisher y Ubel, 2005; Woloshin, Schwartz, Byram, Fischhoff y Welch, 2000). De manera similar, en dichos estudios muchos adultos manifestaban una competencia más baja que la esperada (Lipkus, Samsa y Rimer, 2001; Hecht, Vagi y Torgesen, 2007). Del mismo modo, cabe destacar que los problemas encontrados en adolescentes al resolver procedimientos matemáticos básicos, como puede ser con fracciones, son un impedimento para la adquisición del

álgebra de manera solvente en carreras típicamente científicas (Loveless, 2003). Así mismo, Mitchell, Hawkins, Stancavage y Dossey (1999) concluyeron que la capacidad de estimación en adultos está lejos de ser la adecuada, hecho que sorprende pues este tipo de proceso está presente en la vida habitual de cualquier adulto. Sin embargo, otros autores confirmaron que los adultos utilizan una variedad más amplia de estrategias de estimación multiplicativas que los niños y que, además, estas estrategias presentan mayor nivel de precisión (LeFevre, Greenham y Waheed, 1993).

En los anteriores párrafos, se observa una amplia gama de investigaciones que se centraron en comparar diferentes habilidades matemáticas en jóvenes y adultos. No obstante, no se han encontrado investigaciones que indagaran sobre la existencia de sistematicidad en los errores cometidos por los adultos en el algoritmo de la sustracción. Tampoco se han encontrado trabajos que catalogaran estos errores al objeto de compararlos con los observados en niños durante el proceso de aprendizaje formal en las etapas de Educación Primaria.

Evidentemente, si se conoce la tipología y características de los errores que persisten más allá de las edades de Primaria, se pueden generar espacios de reflexión que permitan ofrecer determinadas implicaciones didácticas para que los profesionales de la enseñanza de matemáticas, en el contexto educativo, conozcan los postulados teóricos que aborden mejor la didáctica de estos procesos. Por tanto, en esta investigación confluyen tanto el campo específico de la enseñanza de los algoritmos en el currículum de matemáticas de la enseñanza obligatoria como la formación de profesionales capaces de contribuir eficientemente a dichos procesos de formación. Además, toma como referente las aportaciones que la Ciencia Cognitiva proyecta en la Didáctica en la medida en que el estudio de los objetos matemáticos implica el análisis de procesos cognitivos inherentes a la resolución de los mismos.

Situado el trabajo en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, con él se pretende contribuir a la teoría del aprendizaje algorítmico que se ve sustentada por los principios básicos necesarios para una instrucción que limite o elimine la producción de errores (Resnick, 1987 citado por Sánchez, 2005:

277). También se relaciona con ideas ya expuestas por autores como Kilpatrick (1981), que sostuvo la necesidad de poseer bases teóricas fuertes que apoyen la investigación en Didáctica de las Matemáticas puesto que una fundamentación teórica sólida, en palabras de Brousseau (1991), contribuirá a la consolidación de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina científica.

Es necesario pues, conocer cuáles son los procesos erróneos que condicionan la ejecución de objetos matemáticos de forma eficiente al objeto de contribuir a la construcción de ese basamento teórico que sustente el aprendizaje del algoritmo.

Siguiendo a Schoenfeld (2000), en la determinación de los diferentes tipos de objetivos en la investigación matemática, se puede decir que el presente trabajo está circunscrito dentro de un objetivo puro o ciencia básica porque trata de determinar la sistematicidad de los errores originalmente vinculados a procesos formativos previos, lo que situaría el contexto de investigación. Además, también presenta un carácter aplicado pues pretende contribuir a la mejora de los procesos de enseñanza de los algoritmos y es aquí donde se sitúa en el contexto práctico de la Didáctica de las Matemáticas.

El objetivo fundamental de esta tesis es analizar los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones, así como comparar los resultados con los de estudiantes de Primaria. Esos objetivos muestran el grado de innovación previsto y configuran las aportaciones que se pretenden realizar.

Bajo el prisma de un diseño metodológico cuasi-experimental se seleccionó una muestra, con carácter incidental, sobre la cual se estudió la presencia de errores en la ejecución de restas multicolumna y la categorización de los mismos, a la vez que se consideraron otras variables. Se analizaron 10700 sustracciones que sirvieron de soporte para la evidencia de sistematicidad del error en adultos universitarios y, a través de un sistemático procedimiento de categorización, se obtuvo información considerable.

La innovación de la propuesta de esta investigación radica en el hecho de la constatación de la falta de estudios que comprueben la sistematicidad de estos errores más allá de la escuela obligatoria. Se verifica la presencia de

errores sistemáticos en investigaciones con estudiantes en edades anteriores a las consideradas en este trabajo. La mayor parte de ellos han demostrado una relación clara entre el control de las operaciones aritméticas y la consecución de logros en diferentes campos de la propia disciplina (Jordan, Kaplan, Ramineni, y Locuniak, 2009). Las evidencias que soportan la influencia de las operaciones con números más allá del contexto escolar, donde las Matemáticas están situadas en un importante lugar en la sociedad actual, tanto en la definición de perfiles asociados a la obtención de un determinado puesto de trabajo como a las posibilidades de promoción en el mismo (Engberg y Wolniak, 2013), fundamentan en cierto modo la necesidad de indagar sobre el estado del desarrollo de los algoritmos en adultos jóvenes. Por esta razón, dada la alta importancia social de los procesos asociados a las habilidades numéricas (Geary, 2011), consideramos necesario profundizar en los procedimientos atípicos en la resolución del algoritmo de la sustracción en adultos jóvenes.

Al objeto de dar respuesta a los objetivos propuestos, la presente memoria de investigación se estructura en seis capítulos de los cuales el primero es introductorio, el segundo se dedica al estudio del marco teórico que refrenda esta investigación y, los restantes, constituyen el estudio empírico organizado en metodología, resultados, discusión de los resultados, y conclusiones y propuestas de trabajo futuro.

Así pues, después de esta introducción, en el capítulo 2, bajo el título de *Marco Teórico*, se aborda la tipología de los errores y su sistematicidad, se analiza el estado de la cuestión del objetivo de este trabajo, y se describe el marco teórico en el que se inscribe, exponiendo referentes teóricos como el de VanLehn (1990), Brown y Burton (1978), y Sánchez (2005).

En el capítulo 3, *Metodología de Investigación*, se expone el diseño metodológico llevado a cabo incluyendo el marco conceptual, se detallan los objetivos e hipótesis del estudio, la muestra en la que se aplicaron los cuestionarios, el cuestionario, el procedimiento para completarlo, la temporalización, los datos, el proceso de análisis y las fases del trabajo realizado.

El capítulo 4, *Resultados*, recoge los resultados de este trabajo en función de los objetivos planteados atendiendo al número de errores cometidos, las sustracciones en que se cometieron más errores incluyendo los tipos de errores más frecuentes producidos en cada una de ellas y los tipos de errores comparados con los que realizaron estudiantes de Primaria.

En el capítulo 5, *Discusión de los resultados*, se discuten los resultados de esta investigación donde, entre otros aspectos, los errores sistemáticos presentan especial interés.

Finalmente, en el capítulo 6, *Conclusiones*, se exponen las conclusiones, limitaciones del estudio e implicaciones educativas de este trabajo, así como las propuestas de trabajo futuro que se han generado en esta investigación y que pueden complementarla.





## **CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO**

Este apartado trata de enmarcar los aspectos teóricos que configuran el trabajo que se presenta. Por ello, en un primer lugar, se introduce el foco fundamental de esta investigación, la sustracción y sus dificultades, así como el concepto de error y los errores que se cometen al efectuar sustracciones. En segundo lugar, se presentan los antecedentes y estado de la cuestión de este estudio. Finalmente, se explican las tres teorías que trataron de categorizar y tipificar los errores que se producen al efectuar el algoritmo de la sustracción, concretamente las de Brown y Burton (1978), Young y O'Shea (1981) y VanLehn (1982, 1990).



## 2.1. Introducción

La sustracción es una de las operaciones elementales que se aprende en las primeras edades escolares. Se considera un conocimiento básico necesario para desenvolverse tanto en el futuro contexto escolar como en situaciones cotidianas.

En la adquisición comprensiva del conocimiento de la sustracción se atraviesan varias etapas. En un primer momento los niños, desde los primeros años de Educación Infantil, realizan sustracciones de manera intuitiva y ante situaciones que surgen en su contexto cercano. Usualmente se trata de operaciones sencillas, pero no siempre. El resultado que proponen, unas veces es correcto y otras no, en algún caso dependiendo del tamaño de los números que se consideren (más detalle, Chamoso, González, Martín y Hernández, 2013). La forma de buscar la solución varía pero suele girar en torno a incentivar didácticamente la adquisición de la capacidad de recuento de manera natural e intuitiva y, en ocasiones, utilizando materiales concretos tomados del contexto más cercano para hacerlo, aunque sea de formas diferentes. Esa forma natural de desarrollar la sustracción, ante la escasa formación y conocimientos

de ella en esas edades, se ve prolongada durante años sucesivos y se puede decir que es un componente muy importante de lo que autores como Baroody (1987) y Hughes (1986) denominaron matemática informal. Algunos estudios como los de Starkey y Cooper (1980); Ginsburg, Klein y Starkey (1998) evidenciaron la anterior aserción, pues apuntaron que el aprendizaje de los rudimentos del algoritmo como son los primeros conceptos lógico-matemáticos, las primeras nociones espaciales, la estimación intuitiva de cantidades y el uso de números ordinales, se aprenden, por ejemplo, ordenando y guardando juguetes y otros objetos, a través de canciones y retahílas acompañadas de diferentes movimientos con las distintas partes del cuerpo, mediante la acción de designar con los dedos y a través de otras numerosas actividades de la vida cotidiana que se realizan en contacto con el contexto social de desarrollo de los niños. La adquisición de este tipo de matemática, por tanto, puede ser considerada de gran importancia pues constituye la base de aprendizajes posteriores de tipo más formal.

Posteriormente, ya en un segundo momento, aparece el aprendizaje formal del algoritmo de la sustracción en las etapas de Educación Primaria donde ya se empieza a desarrollar la sustracción a partir de la aplicación del algoritmo. Siguiendo a Sánchez, (2005) se considera algoritmo,

al conjunto de los procedimientos o reglas sistemáticas implicadas en la resolución de un problema (...). Ese término incluye tanto el marco contextual como el conceptual que dirige dichas reglas de manera que, en el algoritmo de la sustracción, se consideran dos componentes esenciales:

- a) Los significados asociados relacionados con los conceptos quitar, perder o separar, por ejemplo (sería el marco conceptual en el que se sitúa el algoritmo).
- b) El sistema de reglas que propician su resolución (sería su procedimiento o sintaxis propiamente dicho). (p.272)

Por otra parte, “las reglas que rigen ese algoritmo hacen que se generen errores puros en su resolución. Una de las más características es la transformación del cero”. Las situaciones de transformación que se presenta en la resolución de la sustracción y la presencia de ceros en el minuendo parecen constituir el estado más complejo de resolución (Sánchez, 2005: 273). “Se entiende como transformación”, en el contexto de resolución de la sustracción,

a la acción constituida por “el conjunto de cambios que se tienen que realizar en la operación en relación con los valores posicionales” de sus dígitos (Sánchez, 2005: 273).

Su complejidad suscita especial atención en este estudio. Algunas situaciones complejas a la hora de resolver este algoritmo pueden ser cuando hay un cero en el minuendo o en el sustraendo en sus diferentes posibilidades.

Estas situaciones son de especial interés en este trabajo porque pueden inducir al error. Para resolver este tipo de situaciones, se generan una serie de estrategias que según Bermejo (1990), citado por Sánchez (2005), son las siguientes:

- Separar de.
- Contar hacia atrás a partir de.
- Separar a.
- Contar hacia atrás.
- Añadir a.
- Contar a partir de lo dado.
- Emparejamiento.
- Elección.

Estas estrategias fueron recogidas por autores como Cooper, Hierdsfield y Irons (1986); Klein, Beishuizen y Treffers (1998); Fuson, Wearne, Hieber, Murray, Human, Olivier, Carpenter y Fennema (1997); Carpenter, Fennema y Franke (1993), citados por Sánchez (2005: 275).

De manera general, para la resolución se utilizan expresiones como las de “llevar”, “quitar”, “tomar” o “prestar”, por ejemplo, que permiten establecer una relación entre el nivel conceptual matemático básico para el procedimiento y el procedimiento en sí mismo (Sánchez, 2005, 2012). En otras ocasiones, los aprendices se sirven de mediadores instrumentales de tipo perceptivo, como el poner “el uno” arriba encima de los números del minuendo.

Según Maza (1991) citado por Sánchez (2005), “el origen de las diferentes estrategias de sustracción es el resultado, por una parte, de la representación mental que el resolutor configura sobre la solución del procedimiento y también, por otra, de las acciones que ejerce sobre tal representación mental” (Sánchez, 2005: 276).

“Pero, ¿qué sucede cuando estas estrategias no funcionan?, ¿qué teorías explican estos errores?” (Sánchez, 2005: 276) A continuación se van a considerar estos aspectos.

### **2.1.1. Errores usuales en el algoritmo de la sustracción**

Los primeros estudios teóricos que se ocuparon de los errores que se cometen al ejecutar la sustracción, como los de Brownell (1935, 1964) citados por (Sánchez, 2005: 277), apuntaban claramente hacia la existencia de errores sistemáticos (Sánchez, 2005). Estos autores, de influencia conductista, daban por hecho que estos errores se cometen por determinadas rutinas que se aprenden durante el proceso de enseñanza inicial del algoritmo, se repiten sin comprensión y se aplican a situaciones distintas en los ejercicios de práctica para afianzar el aprendizaje del procedimiento (Sánchez, 2005). En las orientaciones encaminadas hacia la intervención educativa primaban, como objetivo esencial, la detección del error y su eliminación relegando a un segundo plano los mecanismos o estrategias mentales que subyacen a la comprensión significativa del procedimiento (Bermejo, 1990).

Autores como Groen y Resnick (1977) focalizaron su investigación en dichas rutinas concluyendo que podían ser útiles sólo si visualizan las estructuras subyacentes al contenido algorítmico, son fáciles de enseñar y pueden convertirse en rutinas de ejecución eficiente (Resnick y Ford, 1991 citados por Sánchez, 2005: 268). En el caso de que no se comprenda el marco conceptual de estas rutinas, los aprendices utilizarían su capacidad de invención para resolver el problema creando una especie de subproceso en el centro vital del proceso real del algoritmo (VanLehn, 1990) que les llevaría a cometer errores sistemáticos. En concreto Brown y Burton (1978) pensaron

que se producen errores porque los niños poseen ciertos componentes defectuosos de la tarea (Sánchez, 2005: 278) en los que se toman subcomponentes de la habilidad para representar subtareas y se comparan con subhabilidades correctas..., y estas fallas cometidas en el procedimiento suponen la existencia de un algoritmo paralelo (Sánchez, 2005: 269). Es decir algo complejo que depuró VanLehn, en 1990 y posteriores. Denominaron errores sistemáticos o “bug algorithms” a este tipo de comportamiento que significa la aceptación de la creación de un algoritmo paralelo que conduce al error (Sánchez, 2005).

En el próximo apartado se incidirá en estas teorías, pero no es posible hacerlo sin haber definido previamente el concepto de error.

### El concepto de error

Al objeto de aproximarse al concepto de error se adoptará (tal y como indicó Sánchez (2005: 271) una perspectiva que trata de profundizar en la lógica de su producción. Si se observan las siguientes sustracciones,

758	321	406	935	2015
- 416	- 138	- 257	- 809	- 1968
342	217	251	134	1953

se puede descubrir la semejanza del error que se produce (Sánchez, 2005: 271), lo que podría hacer pensar que la persona que las ha resuelto podría seguir cometiendo el mismo error de manera indefinida (al dígito mayor se le resta el menor, aunque el menor se encuentre en el minuendo, *Smaller From Larger*). A nivel procedimental, este error indica que hay una regla que subyace a la ejecución correcta del algoritmo y que dicha regla no ha sido comprendida de manera adecuada (Sánchez, 2005: 271).

Así pues, de acuerdo con Sánchez (2005) este error no debería de tener una acepción negativa desde el punto de vista de la intervención educativa ya que

da una importante información relacionada con la regla que ha sido transgredida en el proceso de resolución. Así pues, el error en la sustracción puede ser una muestra del uso de una forma inadecuada de resolver el problema. De esta conducta, como educadores, se podría inferir que lo normal, cuando no se comprende el procedimiento, sea inventar partiendo de lo que sabe. Así pues, podemos pensar que el sujeto que resuelve puede tener la capacidad de construir sus propios sistemas de reglas. VanLehn (1983) describió esta situación como un “impasse o callejón sin salida” que surge ante una tarea que no se sabe ejecutar y que provoca la búsqueda de una solución aunque no sea la correcta. Dicho camino generaría un bug (error) que, en ocasiones, se convierte en sistemático (Sánchez, 2005: 272).

## **2. 2. Antecedentes y estado de la cuestión**

Las operaciones aritméticas elementales, principalmente la adición y la sustracción, han estado incluidas en los objetivos de una gran parte de las investigaciones desarrolladas en Educación Matemática en diversos sentidos desde hace siglos, impulsadas por investigadores de una gran cantidad de países y contextos diferentes, y de las que una gran cantidad de ellas estuvieron dirigidas a aspectos relacionados con la mejora de la enseñanza y aprendizaje del desarrollo de esas operaciones (más detalle, por ejemplo, Fuson, 1992; Resnick y Ford, 1991; Verschaffell y de Corte, 1996). Entre ellas, una parte analizó el tipo y desarrollo de los errores que los resolutores cometen al efectuarlas (por ejemplo, Bélanger, 1991; Ashcraft, 1992). Una proporción menor se centró en los errores y tipos de errores que se producen al realizar sustracciones.

Atendiendo a los errores cometidos al efectuar sustracciones, las investigaciones realizadas con ese objetivo se explican a continuación. Con ello se pretende conocer lo que la literatura recoge, referido a ese aspecto, para poder comparar los resultados obtenidos en este trabajo con ellos y poder argumentarlos en el capítulo correspondiente a la discusión de los resultados. Sin embargo, en este sentido, no se han encontrado estudios relacionados con



adultos o estudiantes universitarios que analicen los errores que cometen al efectuar sustracciones sino que, todas las investigaciones realizadas, están relacionadas con estudiantes de Educación Primaria y Secundaria.

En este contexto, Cox (1975) analizó la frecuencia y descripción de los errores sistemáticos que se produjeron al realizar las operaciones aritméticas elementales, tomando una muestra compuesta por 744 estudiantes, teniendo en cuenta el conocimiento de las destrezas básicas computaciones de cada uno de ellos y su formación en ese sentido. La investigación se desarrolló a los largo de dos años y mostró que el 5-6% de los estudiantes cometían errores sistemáticos al efectuar los algoritmos de la adición, multiplicación y división, y el 13% al efectuar el algoritmo de la sustracción. Además, un año más tarde, un 23% de los estudiantes seguían cometiendo los mismos errores o algún otro error sistemático.

Referido a otros estudios que analizaron los errores de la sustracción, uno de ellos es el de Bennett (1976, citado en Young y O'Shea, 1981), utilizando sustracciones de uno o dos dígitos con estudiantes de 10 años. A partir del trabajo con 33 estudiantes que completaron una colección de 20 sustracciones en un primer momento y, unos cuatro meses después 42, en total 1549 sustracciones, 344 (22,2%) de ellas se completaron erróneamente. Para analizar el tipo de error, Bennett (1976, citado en Young y O'Shea, 1981) clasificó los tipos de errores en procedimentales (36%) (donde los que denominó Borrow When < y Take smaller fueron los que más se produjeron, por encima del 14% en ambos casos), de patrones (16%, donde  $0 - N = N$  apareció casi un 12%) y de cálculo (37%). Un 11% de los errores no se categorizaron.

Cebulski y Bucher (1986) desarrollaron una investigación para determinar los errores que cometían estudiantes de Primaria (3º grado) de Reino Unido al resolver sustracciones y una intervención para intentar conseguir que disminuyeran. Para ello, en un primer estudio, se observó a los niños cuando resolvían sustracciones y se preguntó por sus procedimientos para resolverlas, lo que permitió a los investigadores descubrir que las inversiones que exigían llevar prestado era una de sus mayores dificultades. Por ello realizaron un

segundo estudio que consistió en una preparación específica para resolver sustracciones que exigían llevar prestado pero, en una prueba que los estudiantes realizaron un mes después, no se consiguieron resultados satisfactorios en general, por lo que sugirieron que remedios técnicos aislados que no están directamente incluidos en la instrucción usual del aula no aseguran una efectividad clara. Debido a los resultados obtenidos, se efectuó un tercer estudio, en el desarrollo normal de la instrucción en el aula, en que los estudiantes se organizaron en tres grupos en función de sus dificultades al resolver sustracciones y los resultados obtenidos fueron mucho más satisfactorios. Este trabajo tuvo en cuenta, entre otros autores, los estudios de Young y O'Shea (1981) pero no consideraron los de VanLehn.

Brown y Burton (1978) recogieron datos cuando 1325 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado, de Nicaragua, rellenaron 10 versiones de cuestionarios basadas en Friend (1976), cada una de las cuales incluía 30 operaciones aditivas y de sustracciones. En total fueron 19500 operaciones completadas. Sólo analizaron los errores producidos en las sustracciones y descubrieron 60 tipos de errores que, combinados entre ellos, llegaban a 270.

Los resultados de Brown y Burton (1978) mostraron que casi el 40% de los estudiantes cometieron errores, resultados similares a los obtenidos por Cox (1975). Además, clasificaron los 14 tipos de errores que más se cometieron en función de la mayor frecuencia en la que aparecieron, donde los 4 que más se produjeron fueron Borrow/From/Zero (por ejemplo,  $103 - 45 = 158$ ), Smaller/From/Larger (por ejemplo,  $253 - 118 = 145$ ), Borrow/From/Zero juntamente con Left/Ten/Ok (por ejemplo,  $803 - 508 = 395$ ) y Diff/O-N=N juntamente con Move/Over/Zero/Borrow. Atendiendo a los cursos, los errores aumentaban según se pasaba de 4º a 6º curso, quizás debido a que 4º era el último en que se trabajaba directamente el aprendizaje de la sustracción en las aulas en que se realizaban sustracciones. Además, clasificaron a los estudiantes en 6 grupos en función de los tipos de error cometidos.

En ese mismo trabajo, Brown y Burton (1978) también estudiaron las impresiones que tenían estudiantes para maestro sobre los errores y tipos de

errores que cometían estudiantes de Primaria cuando realizaban sustracciones, de manera que les permitieron descubrir sus percepciones para detectar tipos de error y entender el complejo pensamiento que desarrolla un niño en edad escolar cuando realiza operaciones, así como también sugerir algunas implicaciones educativas para mejorar el aprendizaje del algoritmo de la sustracción. Aunque los procedimientos al realizar esas operaciones eran similares a los de otros países americanos, Brown y Burton (1978) no pretendían generalizar los resultados a otros contextos.

Por otro lado, la investigación de Young y O'Shea (1981) consideró 1500 sustracciones efectuadas por estudiantes menores de 10 años, de las cuales unas dos terceras partes tuvieron errores. Además, avanzaron sobre los resultados de Bennett (1976, citado en Young y O'Shea, 1981) y proporcionaron una sencilla interpretación alternativa de los errores analizados por Brown y Burton (1978). Los resultados más importantes del trabajo de Young y O'Shea (1981), al igual que los de VanLehn (1990), se presentan posteriormente al referirse al estudio de Sánchez (2005), en cuyo trabajo se compararon sus resultados con los de Young y O'Shea (1981) y VanLehn (1990).

Otros trabajos posteriores también consideraron los estudios de Brown y Burton (1978) y VanLehn (1990) como, por ejemplo, el de Sander (2001). Sander (2001), en un primer estudio con 50 estudiantes de grado 2 que habían empezado a estudiar la sustracción pero desconocían como realizar llevadas, después de completar las 20 sustracciones de VanLehn (1990) de las cuales 17 exigen realizar llevadas, comprobó que casi todos los niños, a pesar de no tener formación para resolver muchas de las sustracciones, intentaron hacer la mayor parte de ellas, lo que Sander (2001) interpretó como que lo que los niños habían aprendido conceptualmente proporcionó soluciones para situaciones nuevas. Los tipos de errores que cometieron fueron, en su mayor parte, aquellos que se podían suponer como resultados de estudios previos (entre el 77,4% y el 89,1%) y sólo ocasionalmente surgieron otros. En un segundo estudio, con 409 estudiantes que ya sabían efectuar llevadas (158 de grado 2 y 251 de grado 3) y completaron el mismo material que en el primer estudio, los resultados mostraron que los errores persistieron incluso entre los estudiantes

más aventajados y que la proporción de errores decreció cuando aumentaba el curso en el que estaban los estudiantes. Estos resultados refuerzan algunos de los resultados de VanLehn (1990).

En otro sentido, Fiori y Zuccheri (2005) analizaron los errores que cometieron 732 estudiantes de 9-12 años, en Italia, cuando realizaban sustracciones. Para ello utilizaron un cuestionario de 19 sustracciones, utilizado por Davis et al. (1994) en escuelas de Belo Horizonte y Rio de Janeiro, en Brasil, donde se mostró que uno de los errores más frecuentes que los estudiantes cometieron fue debido a la falta de entendimiento del significado del sistema numérico posicional. Por ello, Fiori y Zuccheri (2005) utilizaron ese cuestionario para valorar si los errores producidos podrían tener una relación con aspectos culturales, métodos de enseñanza o tipo de algoritmo utilizado y, en consecuencia, un grupo de estudiantes utilizó, para efectuar las sustracciones, el algoritmo usual mientras que, otro, el algoritmo australiano donde en vez de sustraer la llevada se añade la diferencia (más detalle, Fiori y Zuccheri, 2005). Los resultados, aunque reflejaron que los estudiantes que utilizaron el algoritmo australiano para efectuar sustracciones completaron muchas más correctamente que los que emplearon el usual, no mostraron diferencias significativas entre ambos grupos lo que puede evidenciar la importancia de la metodología utilizada en este aspecto, pero que no siempre tiene una decisiva influencia en los resultados aunque sea en contextos culturales diferentes. Fiori y Zuccheri (2005) concluyeron que influyó, en los resultados, la dificultad de entender el significado del cero entendido como dígito o como número. También remarcaron que un 16% de los estudiantes efectuaron sustracciones en las que obtenían como solución un resultado mayor que el minuendo, lo que reflejaba una ausencia de sentido numérico y sentido crítico en los estudiantes. Además, realizaron una categorización del tipo de error cometido a partir de los resultados obtenidos que aportó aspectos didácticos interesantes pero en la que no se consideró la tipología de errores de los estudios de Brown y Burton (1978), Young y O'Shea (1981) y VanLehn (1990).

En los resultados del estudio de Sánchez (2005), que tenía como objetivo analizar los errores y la tipología de los errores que cometían estudiantes de 2º a 6º de Primaria al realizar la sustracción a partir de una muestra significativa de 357 estudiantes, en España, utilizando el cuestionario de VanLehn (1990) y la categorización de VanLehn (1990), a la vez que la sistematicidad de los errores que se mantenían con el tiempo, se concluyó que un 26,61% de los estudiantes resolvió correctamente el cuestionario. Además, se cometieron errores en el 23,47% de las sustracciones donde, el mayor número de errores se concentró en las sustracciones, y en ese orden, 19, 20, 18, 17, 13, 16, 10, 15, 11, 12, 14, 9, 8 y 6 del cuestionario de VanLehn (1990).

Considerando la tipología del error en el estudio de Sánchez (2005), el 51,3% de los casos analizados mostró más de un error. En relación con el error cometido, el error de Cálculo fue el más frecuente con un porcentaje de un 35,01%, porcentaje que decrecía según se aumentaba de curso, mientras que en la investigación de Young y O'Shea (1981) fue de un 37% y, en el de VanLehn (1990), de un 27,13%. Un 5,88% de errores no se diagnosticaron (López y Sánchez, 2009).

El estudio de Sánchez (2005) se hizo de 2º a 6º para poder comparar si había evolución en el desarrollo del estudio de los errores. El mayor número de errores se produjo en 2º curso, disminuyó de 2º a 5º y volvió a ascender en 6º, lo que López y Sánchez (2009) denominaron Decaimiento de la información algorítmica que podía ser debido a que los contenidos del curriculum no eran transversales y a la falta de comprensión del valor posicional de las cifras en el sistema de base 10. No aparecieron diferencias significativas entre los errores cometidos por los estudiantes por curso de López y Sánchez (2009) y Young y O'Shea (1981) en ese aspecto.

La investigación de Sánchez (2005) mostró que los errores cometidos a lo largo de los cursos en los que se aplicó el cuestionario se repetían en algunos casos, lo que los convertían en sistemáticos, y que se produjeron en un 55,5%. Además, se compararon con los trabajos que tenían como objetivo el estudio de los errores que estudiantes de Primaria cometían al efectuar la sustracción, en

concreto los de Young y O'Shea (1981), Brown y VanLehn (1982) y VanLehn (1990). Aunque estos cuatro trabajos no se realizaron de la misma forma para poder ser comparados, al considerar en todos ellos la misma tipología de errores del estudio de VanLehn (1990) como instrumento de análisis, López y Sánchez (2009) adaptaron las características de cada una de ellos a las de los otros y establecieron una comparativa entre los diversos tipos de errores en cada caso y la sistematicidad de los mismos entendida como aquellos errores que se mantienen con los años de escolarización y que no incluirían, por ejemplo, aquellos que persistían en los primeros cursos pero desaparecían a partir de cuarto (Tabla 2.1).

Tabla 2.1

Tabla comparativa de los tipos de errores que se producen al efectuar la sustracción en diversas investigaciones

YO <sup>a</sup>	RT <sup>b</sup>	ST <sup>c</sup>	S <sup>d</sup>	Bug
		+	+	Always-Borrow-Left
		+		Blank-Instad-Of-Borrow
		+		Borrow-Across-Second-Zero
+	+	+	+	Borrow-Across-Zero
		+		Borrow-Don't-Decrement-Unless-Bottom-Smaller
		+		Borrow-From-One-Is-Nine
		+	+	Borrow-From-One-Is-Ten
+	+	+	+	Borrow-From-Zero
+				Borrow-From-All-Zero
	+	+	+	Borrow-From-Zero-Is-Ten
	+	+	+	Borrow-No-Decrement
		+	+	Borrow-No-Decrement-Except-Last
		+		Borrow-Treat-One-As-Zero
	+			Can't-Subtract
		+		Doesn't Borrow-Except-Last
+				Diff-0-N=0
+			+	Diff-0-N=N
+			+	Diff-N-N=N
+				Diff-N-0=0
		+		Don't-Decrement-Zero
		+	+	Forget-Borrow-Over-Blacks
		+		N-N-Causes-Borrow
		+		Only-Do-Units
	+	+		Quit-When-Bottom-Blank
+	+	+		Smaller-From-Larger
		+		Smaller-From-Larger-Except-Last
	+	+		Smaller-From-Larger-Instead-Of-Borrow-From-Zero
		+		Smaller-From-Larger-Instead-Of-Borrow-Unless-Bottom-Smaller
		+		Stops-Borrow-At-Multiple-Zero
+	+	+		Stops-Borrow-At-Zero
	+			Stutter-Subtract
	+	+		Top-Instead-Of-Borrow-From-Zero
+	+			Zero-Instead-Of-Borrow
<b>10</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>10</b>	<b>Total</b>

<sup>a</sup>YO = Young y O'Shea 1981, <sup>b</sup>RT = Repair Theory Brown and VanLehn (1982), <sup>c</sup>ST= Sierra's Theory VanLehn (1990), <sup>d</sup>S=Sánchez (2005). Adaptada de López, R y Sánchez, A.B. (2009). Análisis del error sistemático en la sustracción. *Enseñanza de las Ciencias* 27(1), p.54

Se observa que los estudiantes de Primaria cometían errores similares en las cuatro investigaciones en que se estudió ese aspecto. Además, los errores sistemáticos en los cuatro trabajos fueron Borrow-Across-Zero (por ejemplo,  $904-7=807$ ) y Borrow-From-Zero (por ejemplo,  $306-187=219$ ). Llama la atención que ambos tipos de errores estén relacionados con el valor posicional del cero.

La mayor cantidad de errores se produjo en las mismas sustracciones lo que pudo estar influido por la estructura de las mismas. En concreto, todos los errores producidos fueron en sustracciones que incluían el cero. Por ello el estudio sugirió algunas implicaciones educativas como que la causa de dichos errores se debía a la explicación deficiente del cero y de las agrupaciones de potencias de 10 en las aulas, por lo que se aconsejó una enseñanza más racional del cero y del sistema en base 10, una enseñanza más comprensiva del algoritmo de la sustracción, y la importancia de mejorar el libro de texto y la forma de utilizarlo para el aprendizaje (Sánchez, 2005). Además, añadió que los profesores tienen que construir los conocimientos aritméticos teniendo en cuenta la comprensión conceptual de los principios aritméticos como sugerían otras investigaciones (por ejemplo, Ohlsson y Rees, 1991).

En definitiva, a pesar que se tiene cierto conocimiento, como se ha explicado, de las investigaciones que analizaron los errores que cometen estudiantes de Primaria al realizar sustracciones, no se han encontrado investigaciones sobre los errores que cometen estudiantes universitarios en el algoritmo de la sustracción. Tampoco se han encontrado investigaciones con personas adultas con ese objetivo. Por ello, en este trabajo se pretende analizar los errores y tipos de errores que comenten estudiantes universitarios cuando efectúan sustracciones.



### 2.3. Teorías sobre la adquisición de los errores en la sustracción desde un enfoque de análisis procedimental y sintáctico-cognitivo en la tipificación del error

Resnick y Omanson (1987) partieron de la hipótesis de que los errores que cometen los niños al realizar sustracciones son invenciones, pues ningún maestro enseñaría procedimientos incorrectos, y se cuestionaron cuál era el proceso que causaba dicha invención, en qué conocimiento se basaba o qué conocimiento faltaba, así como por qué los niños tienden a inventar los mismos errores (Sánchez, 2005: 277). Atendiendo a esas cuestiones, elaboraron algunos principios de aprendizaje con objeto de limitar o eliminar la producción de los mismos e incidieron en la correcta adquisición del esquema conceptual del algoritmo de la sustracción (Sánchez, 2005: 277).

Otros autores han investigado sobre los errores cometidos al realizar sustracciones. Con ellos surgieron tres teorías que trataron de categorizar y tipificar los errores que se producen al efectuar el algoritmo de la sustracción. Estas teorías son las que se van a considerar en este apartado. Sánchez (2005) afirma que,

La primera teoría es la de Brown y Burton, elaborada en 1978. Para estos autores, los niños cometen los errores; porque *poseen versiones defectuosas de ciertos componentes de la tarea*. En el análisis de los mismos, siguen una tradición de análisis jerárquico iniciada por, Gagne, (1970); Resnick, (1973)(...) (p. 278).

La segunda teoría propuesta fue la de Young y O'Shea (1981), quienes dieron prioridad a la adquisición de las reglas y según Sánchez (2005) “Los errores más simples se originan cuando los niños *o se olvidan o no aprenden los principios básicos que se les enseñan en la escuela sobre el algoritmo de la sustracción (...)*” (p. 279).

La tercera teoría fue la de Brown y VanLehn (1980, 1982) y VanLehn (1990) que según Sánchez (2005),

Los errores en el procedimiento pueden originarse cuando el niño, al intentar responder, alcanza un callejón sin salida, situación para la que no posee ninguna solución. Para salir del mismo, recurre a una lista de

reparaciones, (...). La lista de reparaciones incluye numerosos subprocesos que originan la mayor parte de los errores. (p. 279)

### **2.3.1. Teoría de Brown y Burton (1978)**

Brown y Burton (1978) crearon un modelo de diagnóstico de los conceptos erróneos que se producían en los estudiantes en habilidades matemáticas básicas. El objetivo era ofrecer a los docentes un mecanismo que, más allá de identificar un error, explicase por qué un estudiante lo estaba cometiendo. (Sánchez, 2005: 280)

Según Sánchez (2005),

*Al considerar que los niños cometen los errores; porque poseen versiones defectuosas de ciertos componentes de la tarea; los autores parten teóricamente de la consideración de que todo comportamiento aberrante (...), debe representarse de manera flexible comparándolo con el modelo correcto, (...). Además, la representación debe permitir conocer a ambas subdestrezas correctas e incorrectas, (...).*

El objetivo más inmediato de su trabajo, pretendía sugerir técnicas de representación del proceso de la sustracción multicolumna y el modelado en la adquisición de la tarea, con el fin de representar la estructura de una habilidad correcta particular. (p. 281-282)

Una creencia común entre los maestros es que muchos estudiantes no siguen correctamente los procedimientos y presentan un comportamiento erróneo debido, principalmente, a su incapacidad para seguir cada paso correctamente. Sin embargo, los estudiantes suelen ser bastante competentes siguiendo el procedimiento aunque no siempre lo consigan. Por ello, Brown y Burton (1978) plantearon el diseño de una representación que facilitara el descubrimiento y diagnóstico del comportamiento erróneo del estudiante de manera automática. Para que esta automaticidad fuese posible, se debía poder representar la habilidad procesal que se tratase mediante los subprocesos necesarios, tanto incorrectos como correctos e, incluso, la mezcla de ambos. Ello conllevaba la ruptura de la habilidad en diferentes subhabilidades. Introdujeron el término modelo de diagnóstico para expresar la representación que describe una determinada habilidad del estudiante como una variante de su

versión correcta. Además, el modelo correcto debía contener todo el conocimiento que pudiera ser malentendido por el estudiante.

“La técnica que utilizaron para la representación del modelo es una red procesal (...), que consiste en una colección de procedimientos con las consiguientes relaciones entre los mismos que forman lo que denominan “*estructura de control del procedimiento*” (Sánchez, 2005, p 282).

Los autores, al representar mediante una red procesal las habilidades y subhabilidades, tenían como objetivo último el diagnóstico eficiente de los errores cometidos por los niños, (...). Por tanto, para vislumbrar los subprocesos que están en el origen del error, utilizaron una red que les permitiera simular el comportamiento de los subprocesos que se encontraban en el origen de los buggys o errores. (Sánchez, 2005, p. 283)

Como se ha expuesto anteriormente, para la representación de los modelos de diagnóstico utilizaron el diseño de redes procedimentales. Un modelo de ese tipo de red procesal para una habilidad adecuada consiste en una colección de procedimientos, con anotaciones, en las que las relaciones entre los procedimientos se hacen de manera explícita mediante enlaces apropiados. Cada nodo de la red tenía dos partes principales: una parte conceptual, que representaba el marco conceptual del procedimiento, y una parte operativa, que consistía en los métodos para ejecutar el procedimiento (ver la red procesal para la sustracción construida por Brown y Burton, 1978, Figura 2.1.).

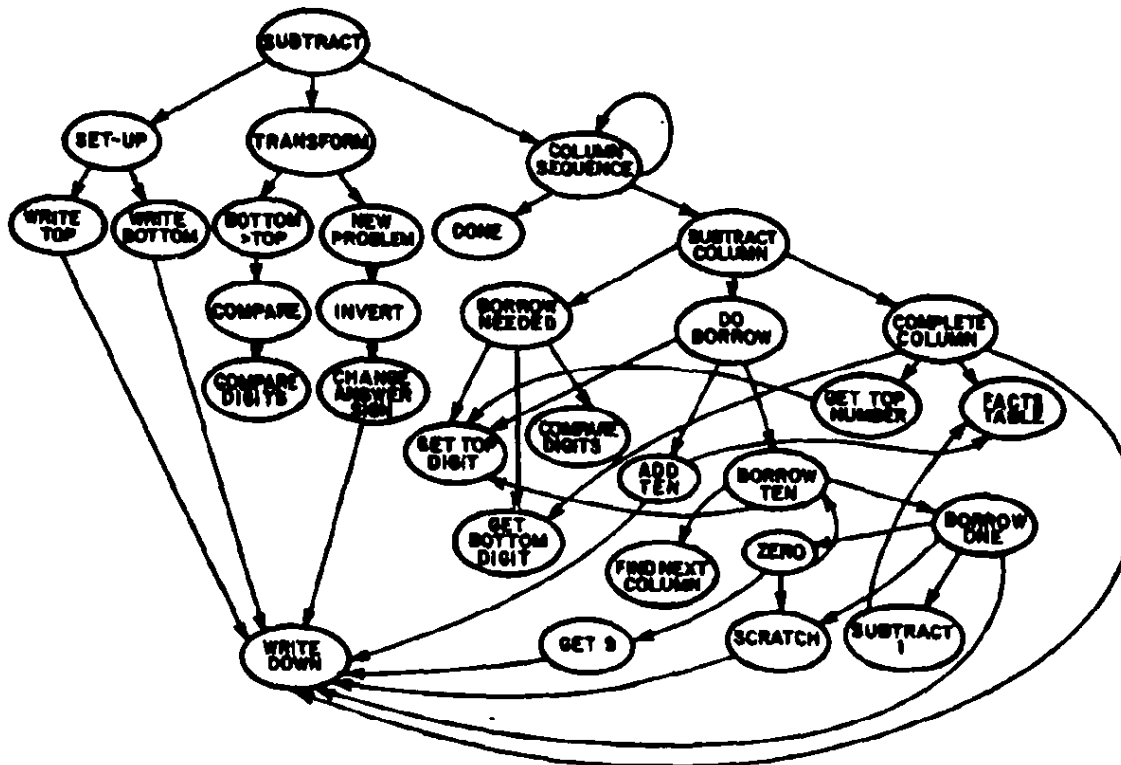


Figura 2. 1. Red procedimental para un tipo de sustracción.

Fuente: Brown, J. S. y Burton, R. R. (1978). Diagnostic Model for Procedural Bug in Basic Mathematical Skills\*. *Cognitive Science*, 2, p. 162.

En esencia, la red procesal para una habilidad simple como la sustracción de dos números, basada en uno de los algoritmos de resolución, es la siguiente (Figura 2.1): El nodo superior (subtract) representa la sustracción de dos números con  $n$  dígitos (Sánchez, 2005, p. 283). Se deben usar los procedimientos para comenzar el problema (setup), la transformación en el caso de que el sustraendo sea mayor que el minuendo (transform) y la secuenciación en cada columna de la realización de la resta columna (column sequence). La implementación del procedimiento para la sustracción en cada columna tiene que diferenciar los casos donde es necesario pedir prestado (borrow needed) y debe recurrir a otros subprocedimientos, incluyendo tomar préstamo del lugar correcto (do borrow), concretamente quitando 0 y escribiendo 9 si ese lugar contiene un cero (zero), y así sucesivamente. Cada uno de estos subprocessos podría tener varias versiones de errores asociados a él (Brown y Burton, 1978).

Además, pueden existir relaciones entre los errores de forma que un error sugiera otro o que varios errores interactúen entre ellos. Por tanto, un cambio en la descripción de una habilidad sería tener la red encargada de tales relaciones o interacciones de múltiples errores (la gama de respuestas que pueden venir de simples errores de respuestas a problemas de sustracción usando algunos de los errores que aparecen en la red procedimental para la sustracción se incluye en la Tabla 2.2).

Tabla 2.2

*Ejemplos de algunos errores en la sustracción*

<b>Ejemplo</b>	<b>Descripción</b>
$143 - 28 = 125$	El estudiante resta el dígito menor del mayor en cada columna independientemente de cuál esté en el minuendo.
$143 - 28 = 125$	Cuando el estudiante necesita pedir prestado, añade 10 al dígito del minuendo de la columna actual sin restar 1 a la siguiente columna a la izquierda.
$1300 - 522 = 878$	Cuando se pide prestado a una columna cuyo dígito en el minuendo es 0, el estudiante lo cambia a 9 pero no continúa pidiendo a la columna a la izquierda del 0.
$140 - 21 = 121$	Siempre que el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo en la respuesta, $0 - N = N$ .
$140 - 21 = 120$	Siempre que el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe 0 en la respuesta, $0 - N = 0$ .
$1300 - 522 = 788$	Cuando se pide prestado a una columna cuyo dígito en el minuendo es 0, el estudiante pide a la siguiente columna a la izquierda correctamente, pero escribe 10 en vez de 9 en la columna actual.
$321 - 89 = 231$	Cuando una columna cuyo dígito en el minuendo es 1 necesita un préstamo, el estudiante lo cambia a 10, en vez de a 11.
$662 - 357 = 205$	Una vez que el estudiante necesita pedir a una columna, el continúa pidiendo a cada columna, sea necesario o no.
$662 - 357 = 115$	El estudiante siempre resta todos los préstamos al dígito del minuendo más a la izquierda.

Nota. Fuente: Adaptada de Brown, J. S. y Burton, R. R. (1978). Diagnostic Model for Procedural Bug in Basic Mathematical Skills\*. *Cognitive Science*, 2, p. 163.

Una respuesta concreta a un determinado problema puede tener más de una explicación ya que varios errores diferentes pueden generar la misma respuesta. Incluso puede darse el caso de que un estudiante puede albergar muchas ideas falsas y, aún así, obtener la respuesta correcta a un problema particular.

A menudo resulta difícil deducir el error del estudiante de la respuesta. Por ello, Brown y Burton (1978) construyeron un juego de ordenador, BUGGY, basado en la interacción del diagnóstico de un tutor y un estudiante. El ordenador hacía del estudiante (Sánchez, 2005, p. 285), que cometía errores y el profesor debía descubrir cuál era el error subyacente. Una de las utilidades de BUGGY, y del modelo de diagnóstico de las habilidades procedimentales, se dirigía a la formación docente. La comprensión de que los errores que parecen aleatorios, que son, a menudo, las manifestaciones superficiales de un error sistemático subyacente, supone un importante avance conceptual.

Pero Brown y Burton (1978) entendían que ningún error de los generados explicaba satisfactoriamente algunos comportamientos. Referido a los estudiantes cuyo comportamiento no fue explicado, analizaron las respuestas de más de un millar de estudiantes para descubrir algún patrón computacional subyacente. Cuando se distinguió un patrón, se definió el subprocedimiento incorrecto y, ese nuevo error, se añadió a la red de manera que la lista de errores creció de 18 a 60. Aunque, si se cometiesen múltiples errores y esos errores se combinaran, dificultaría el diagnóstico del error.

La comparación de los errores múltiples permitió identificar qué estudiantes desarrollaban procedimientos erróneos frente a descuidos o errores aleatorios. Durante este proceso de clasificación, hecho a mano, perfeccionaron el uso intuitivo de la evidencia de un cuestionario completo de un estudiante con el fin de tomar una decisión. De este modo sugirieron seis agrupaciones de estudiantes que según Sánchez (2005) son las siguientes:

- Estudiantes que realizaron todos los problemas correctamente.
- Estudiantes que cometieron errores en varios problemas pero cuyos errores fueron explicados mediante un error o un par de ellos.

- Estudiantes que exhibieron claramente la existencia de un error pero que también mostraron algún comportamiento no explicado por ese error.
- Estudiantes que erraron sólo en uno o dos errores (o incluso hasta quince) pero de forma no consistente con ningún error.
- Estudiantes que exhibieron algún comportamiento erróneo pero no consistente.
- Estudiantes cuyo comportamiento parecía debido al azar respecto de los errores conocidos. (p. 288)

Estas agrupaciones podrían ser debidas a la acción tutorial del maestro para ayudar a un estudiante. Los tipos de estudiantes y los posibles enfoques tutoriales que observaron fueron:

1. Estudiantes correctos o casi correctos que, en cualquier caso, probablemente, únicamente necesitarían más práctica (Grupos 1 y 4).
2. Estudiantes que exhibieron un comportamiento erróneo consistente, por lo que la remediación podría ser entendida como un proceso de "debugging" del algoritmo (Grupos 2 y 3).
3. Estudiantes para los que parecería necesario un repaso profundo de todo el algoritmo (Grupos 5 y 6).

Esto no significa, por ejemplo, que la mejor pedagogía para todos los estudiantes de los grupos 2 y 3 sea centrarse en el procedimiento de errores sino que se trata de un intento de identificar aquellos estudiantes que cometen el mismo error de manera consistente y para los que la depuración de sus procedimientos puede ser útil.

El procedimiento de clasificación anterior se utilizó para analizar el conjunto de respuestas de la prueba para 1325 estudiantes de cuarto, quinto y sexto grado. El 40% de los estudiantes mostró un comportamiento erróneo consistente. La similitud en todos los niveles de grado pudo ser debido al hecho de que la suma y la resta no se presentaron de nuevo después del cuarto grado. La mayor parte de las dificultades surgieron en el proceso de llevada, sobre

todo cuando se trataba de un cero. La Tabla 2.3 muestra la frecuencia de los 14 errores más comunes que se produjeron, solos o junto a otros errores, 153 veces en los 1325 cuestionarios.

Si se considera la influencia del experto en el desarrollo de una acción tutorial correctiva, que no tiene por qué ser la única estrategia posible, es probable que, en ciertos errores y con determinados estudiantes, con una clara descripción de lo que se desarrolla deficientemente en el proceso sea suficiente para que el estudiante corrija esas deficiencias. En otro caso quizás habría que formular una serie de problemas (posiblemente en conjunto con modelos físicos) que permitan al estudiante descubrir su propio error. O en último caso, podría ser preferible abandonar el algoritmo utilizado (en lugar de intentar depurarlo) y empezar de nuevo con uno diferente.



Tabla 2.3

*14 errores más frecuentes en la sustracción*

Los 14 errores más frecuentes en un grupo de 1325 estudiantes	
Fre	Error
57	BORROW/FROM/ZERO ( $103 - 45 = 158$ ) Cuando hay que pedir prestado a una columna donde el minuendo es 0, el estudiante escribe 9, pero no continúa pidiendo a la columna a la izquierda del 0.
54	SMALLER/FROM/LARGER ( $253 - 118 = 145$ ) El estudiante sustrae el dígito menor en la columna del dígito mayor, independientemente de cuál sea el minuendo.
50	BORROW/FROM/ZERO and LEFT/TEN/OK ( $803-508 = 395$ ) El estudiante cambia 0 a 9 sin continuar pidiendo, a menos que el 0 sea parte de un 10 en la parte izquierda del minuendo.
34	DIFF/0 - N = N and MOVE/OVER/ZERO/BORROW Cuando en una columna el minuendo es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo en la respuesta. Cuando el estudiante necesita pedir a una columna cuyo dígito en el minuendo es 0, se salta esa columna y pide a la siguiente.
14	DIFF/0 - N = N and STOPS/BORROW/AT/ZERO Cuando en una columna el dígito del minuendo es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo en la respuesta. El estudiante pide al 0 incorrectamente. Él no sustrae 1 al 0, sin embargo añade 10 correctamente al dígito del minuendo en la columna.
13	SMALLER/FROM/LARGER and 0 - N = 0 ( $203 - 98 = 205$ ) El estudiante sustrae el dígito mayor del menor en cada columna sin tener en cuenta cuál está en el minuendo. Excepto cuando el dígito del minuendo es 0, en ese caso escribe 0 como respuesta a esa columna.
12	DIFF/0 - N = 0 and MOVE/OVER/ZERO/BORROW Cuando el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe 0 en la respuesta. Cuando el estudiante necesita pedir a una columna cuyo minuendo es 0, salta esa columna y pide a la siguiente.
11	BORROW/FROM/ZERO and DIFF/N - 0 = 0 Cuando hay que pedir a una columna donde el dígito del minuendo es 0, el estudiante escribe 9, pero no continúa pidiendo a la columna a la izquierda del 0. Cuando el dígito del sustraendo en una columna es 0, escribe 0 en la respuesta.
10	DIFF/0 - N = 0 and N - 0 = 0 ( $302 - 192 = 290$ ) El estudiante escribe 0 como respuesta a una columna donde el dígito del minuendo o el del sustraendo es 0.
10	BORROW/FROM/ZERO and DIFF/0 - N = N Cuando hay que pedir a una columna donde el dígito del minuendo es 0, el estudiante escribe 9, pero no continúa pidiendo a la columna a la izquierda del 0. Cuando el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo como respuesta.
10	MOVE/OVER/ZERO/BORROW ( $304 - 75 = 139$ ) Cuando el estudiante necesita pedir a una columna cuyo minuendo es 0, salta esa columna y pide a la siguiente.
10	DIFF/N - 0 = 0 ( $403 - 208 = 105$ ) Cuando el dígito del sustraendo en una columna es 0, escribe 0 en la respuesta.
10	DIFF/0 - N = N ( $140 - 21 = 121$ ) Cuando el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo como respuesta.
9	DIFF/0 - N = N and LEFT/TEN/OK ( $908 - 395 = 693$ ) Cuando el dígito del minuendo en una columna es 0, el estudiante escribe el dígito del sustraendo como respuesta. Excepto que el 0 sea parte de un 10 en la parte izquierda del minuendo.

Nota. Fuente: Adaptada de Sánchez (2005). *Las dificultades cognitivas ("Buggy") en operaciones en las que intervienen algoritmos aritméticos y su tratamiento educativo con programaciones hipermedia*. Tesis doctotal. Universidad de Salamanca. P. 291.

### **2.3.2. Teoría de Young y O' Shea (1981)**

Hasta ese momento, los errores en la sustracción se atribuían a fallos en el recuerdo de hechos numéricos (como, por ejemplo,  $9 - 7 = 2$ ; Thyne, 1954) o a una variedad de factores como una respuesta defectuosa, descuido, fatiga o falta de concentración (Downes y Paling, 1958, citados por Sánchez 2005, p. 293). Aunque esos aspectos se profundizaron en diversos trabajos (por ejemplo, Sloman, 1974; Woods y Hartley, 1971; Woods, Resnick, y Groen, 1975 citados por Sánchez, 2005, p. 293), los resultados de Lankford (1972) y Ashlock (1976) concluyeron que muchos resultados erróneos se debían a fallos en el proceso de ejecución del algoritmo de la sustracción más que a descuidos (Sánchez, 2005, p. 293), lo que se puede entender como que los errores que se producían al efectuar la sustracción se debían más al uso de estrategias incorrectas que al uso incorrecto de hechos numéricos. Es decir, la mayor parte de las estrategias incorrectas empleadas al efectuar sustracciones podían explicarse por la omisión, permutaciones o introducciones (Sánchez, 2005, p. 294) de pasos en la resolución o la inclusión de normas utilizadas en otras tareas aritméticas (Young y O'Shea, 1981 citados por Sánchez, 2005, p. 294).

Young y O'Shea (1981) intentaron avanzar en las causas de esos errores relacionándolos con el procedimiento de ejecución del algoritmo entendido como los pasos que permiten su ejecución correcta. Para ello tomaron algunas respuestas incorrectas del trabajo de Bennett (1976, citado en Young y O'Shea, 1981) que permitieron ejemplificar los errores cometidos como, por ejemplo, restar el dígito menor del mayor en cada columna independientemente de que estén en el minuendo o el sustraendo y evitando la llevada; el caso opuesto donde no se necesita llevada pero se añade 10 al dígito del minuendo; se resta la llevada al minuendo en la columna de la izquierda y se suma en el sustraendo obteniendo un resultado 20 veces menor que el correcto; se escribe 0 como respuesta a una columna donde el sustraendo es mayor que el minuendo; se pide prestado a un dígito del minuendo igual a 1 considerado como un 10 en vez de 11; se pide prestado correctamente pero se suma la llevada en la columna de la izquierda en vez de restarla; se hace  $0-N=N$  que sería indistinguible del primer caso mencionado pero se sustrae el dígito menor

del mayor al observar la existencia de error únicamente cuando aparecía el 0, y  $0-N=0$  comparable a escribir 0 como respuesta a una columna donde el sustraendo es mayor que el minuendo. Esto daba una nueva perspectiva a lo que se sabía.

Ese análisis llevó a clasificar las respuestas erróneas en tres categorías (Young y O'Shea, 1981): error de hechos numéricos (en las que se había prestado correctamente y el resultado difería del correcto en una pequeña cantidad como  $9-3=7$ ) con una frecuencia del 37%, errores algorítmicos (Borrow when  $<$ , Take smaller, Always borrow,  $S>M \rightarrow 0$ ,  $One \rightarrow 10$ , Add Column 2) con un 36% de ocurrencias, o errores de patrón del 0 ( $0 - N = N$ ,  $0 - N = 0$ ,  $N - N = N$ ) con una frecuencia del 16%. Además de dejar un 11% de los casos como imposibles de analizar. Esa rudimentaria clasificación admite que cada tipo de error tenga variantes.

Después de este avance Young y O'Shea (1981), influidos por las teorías del procesamiento de la información, para analizar los errores en la sustracción crearon sistemas de producción (PS), es decir, una colección de reglas que implicaban aplicar unas acciones. Estos modelos fueron introducidos por Newell y Simon (1972) y se utilizaron en varios tópicos en psicología cognitiva (por ejemplo, Anderson, 1976). La modularidad de las reglas individuales los hacen especialmente útiles para describir el aprendizaje de una habilidad, ya que su crecimiento puede ser modelado por la adquisición de nuevas reglas y ofrecen un método de representación que permite entender la sustracción como una mezcla de varias estrategias (Young, 1976, 1977). Por ello, Young y O'Shea (1981) consideraron, por un lado, el proceso para la resolución correcta de la sustracción con llevadas y, por otro, los errores cometidos por los niños del trabajo de Bennett para compararlos. Ante la posibilidad de que el sistema de producción generara falsos errores, es decir, errores que no se cometieron, plantearon una medida del grado de acuerdo entre los errores producidos por el sistema de producción y la actuación real de los niños con el objetivo de depurar las reglas de ese sistema de producción. El Sistema de producción en el caso de la sustracción consistiría en procesar cada columna siguiendo las reglas donde, en líneas generales, primero se compararían minuendo y

sustraendo (regla 1), segundo se calcularía la diferencia (regla 2) y tercero se pasaría a la siguiente columna (regla 3). Según el resultado obtenido en la comparación (Regla 1): si el minuendo es mayor que el sustraendo, se calcularía la diferencia (regla 2) y se pasaría a la siguiente columna (regla 3); si el minuendo es igual al sustraendo, se escribiría resultado igual a cero y se pasaría a la siguiente columna (regla 3); si el minuendo es menor que el sustraendo, se pasaría a la siguiente columna (regla 3) para hacer el cambio correspondiente al préstamo (Regla 4) y se procesaría la columna con los cambios efectuados, esto es se compara, calcula la diferencia y pasa a la siguiente columna. Este proceso se repetiría tantas veces como fuese necesario en función del número de columnas que tenga la sustracción.

Además, Young y O'Shea (1981) analizaron si el comportamiento de los niños era consistente, es decir, si cometían errores de un determinado tipo era probable que volvieran a cometerlos. En los resultados mostraron que un 25% de ellos no tenían errores, 10% eran consistentes con un fallo en el algoritmo (no errores de hechos numéricos), 24% eran consistentes con un fallo algorítmico excepto en un único problema y 20% eran consistentes si se ignoran los errores numéricos. Es decir, el 59% de los errores fueron consistentes excepto por una sustracción como mucho o, de otra forma, el 78% si no tenía en cuenta los errores numéricos. Esto abría una nueva vía a lo que se conocía.

Para comprobar este análisis, Young y O'Shea (1981) proporcionaron una sencilla alternativa a los resultados de Brown y Burton (1978), que consideraron similares a los de Bennett (1976, citado en Young y O'Shea, 1981). Entendían que la clasificación de Brown y Burton (1978) era bastante superficial y que un análisis más profundo explicaría el comportamiento de menos tipos de errores pero más importantes. En ambos estudios parecía que muchos errores eran similares. Entendieron que la mayoría de los errores tuvieron que ver con el cero en el minuendo y cuando el sustraendo tenía menos dígitos que el minuendo. Además, que había que tener en cuenta la importancia del libro de texto por la influencia que pudo tener en alguno de los errores que se produjeron como Always Borrowing, así como que los

estudiantes podían haber obtenido respuestas correctas basadas en estrategias incorrectas o haberse resuelto por métodos alternativos correctos pero no enseñados.

### **2.3.3. Teoría de VanLehn (1982, 1990)**

Hasta ese momento, se consideraba que los fallos en habilidades procesales de la sustracción multicolumna podían ser debidos, fundamentalmente, a dos causas: deslices (slips) y errores (bugs). Se entendía como desliz a diversos fallos debidos al rendimiento o descuidos del estudiante, inestables en el tiempo, y que estaban únicamente relacionados con las sustracciones en las que se producían. Se consideraba error a diversos fallos de competencias que reflejaban errores en la habilidad o perturbaciones del procedimiento correcto, estables en el tiempo, que además servían para describir ese fallo. Este concepto de error surgió al entender que un estudiante muestra un comportamiento similar en sustracciones con características comunes, lo que permitía predecir en qué situaciones volverá a fallar el estudiante y qué respuestas dará.

Ante esta dualidad desliz-error surgieron diversos aspectos como, por un lado, que la mitad de los estudiantes analizados en el estudio de Brown y Burton (1978) no pudieron ser diagnosticados en algunos de los fallos que cometieron y, por otro, que los maestros en ejercicio observaron que los errores aparecían y desaparecían en periodos cortos de tiempo, lo que podría suponer una inestabilidad de los mismos. Por ello parecía necesario utilizar un nuevo mecanismo para acompañar la dualidad desliz-error con el objetivo de modelar cómo cambian los errores sin intervención exterior. En esencia, se trataba de avanzar en lo existente e investigar, por un lado, cómo adquieren los estudiantes los errores, cuánto tiempo se mantienen y por qué desaparecen y, por otro, analizar si, como se creía hasta ese momento, los únicos errores posibles no sólo eran los sistemáticos (de procedimiento) y los no sistemáticos (de descuido no intencional).

En ese sentido, surgió la Teoría de Reparación (Brown y VanLehn, 1980), que se creó como una teoría generadora de errores que intentaba explicar por qué, hasta ese momento, las distintas investigaciones habían observado unos errores y no otros, cómo se produjeron y, que además, predijera qué errores podrían darse en una determinada habilidad procedimental. Por otro lado, intentaba encontrar otros tipos de fallos diferentes a deslices o errores. Al generar esos errores, las actuaciones erróneas de los estudiantes podrían ser, en su mayor parte, diagnosticadas como errores, deslices y reparaciones propias de la Teoría de Reparación.

La Teoría de Reparación (Brown y VanLehn, 1980) se basaba en la idea de que, cuando un estudiante se queda atascado durante la ejecución de su procedimiento para efectuar la sustracción, al no poder dar un nuevo paso hará una pequeña pero suficiente variación en la resolución de la sustracción para desatascarse, avanzar y completar el resultado de la sustracción, normalmente con poco éxito para conseguir la respuesta correcta. Este paso dado por el estudiante, que se produce por analogía a partir de los ejemplos propuestos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la sustracción, llamado reparación, suele ser una conducta sencilla como saltarse el paso que no se puede realizar o tomar un camino diferente. Por ejemplo, si un estudiante, cuando tiene que pedir prestado al cero, se bloquea porque no puede decrementar un cero, entonces busca una solución que podría ser simplemente no restar la llevada ( $403 - 56 = 357$ ); si siempre realiza esta reparación, ese estudiante sería diagnosticado con el error Stop Borrow At Zero. De hecho, pueden producirse reparaciones diferentes a un mismo callejón sin salida. Por ejemplo, cuando el estudiante encuentra una columna con un cero en el minuendo y el sustraendo correspondiente es distinto de cero, si en vez de pedir prestado realiza alguna reparación, puede generar dos errores diferentes  $\text{Diff } 0 - N = N$  y  $\text{Diff } 0 - N = 0$ , que ocurren porque el estudiante no sabe cómo pedir prestado al cero; de esta forma un único bloqueo generaría dos errores. La Teoría de la Reparación predice que estos errores pertenecerán a la misma familia ya que provienen del mismo callejón sin salida.

En su investigación VanLehn (1982), en varias etapas y en diversos estudios, consideraron 925 estudiantes que estaban aprendiendo la sustracción para analizar los errores y su estabilidad a corto y largo plazo. Con ello pretendían determinar si los errores y deslices, por sí solos, serían suficientes para modelar el rendimiento de cualquier estudiante, o si una proporción significativa de la población quedaba sin ser analizada en estos términos. La última hipótesis fue acertada ya que el 34% de la población no pudo ser diagnosticada en términos de errores y deslices. En sus resultados se muestra que diagnosticaron 77 errores diferentes, algunos con bastante frecuencia. El más común fue *Smaller From Larger*, en el que nunca se pide prestado ya que se resta el valor menor del mayor en cada columna, que apareció 106 veces aislado y 18 veces más como parte de otros errores. Aproximadamente la mitad de los 77 errores solo aparecieron una o dos veces. Sin embargo, un tercio de los estudiantes que cometieron fallos no pudieron ser diagnosticados ni como error ni como desliz, además de ser errores inestables tanto a corto como a largo plazo. Ello parecía probar que errores y deslices, por sí solos, no podrían explicar los fallos en el procedimiento de la sustracción.

Además, se encontró una relación entre los errores cometidos y el curso en el que estaban los estudiantes que los cometían. Como era de esperar, la proporción de la muestra asignada a las categorías Correcto y Desliz creció a medida que el curso aumentaba de tercero a quinto. Sin embargo, la proporción asignada a la categoría No Diagnosticada mantuvo niveles relativamente constantes en todos los cursos. Parece que los errores sistemáticos de los estudiantes más jóvenes se convirtieron en el algoritmo correcto de los estudiantes mayores mientras que los errores No Diagnosticados se mantenían. De ser así, implicaría que los remedios deberían centrarse en el estudiante No Diagnosticado en lugar de en el estudiante diagnosticado como Buggy (entendido como el que comete errores).

A pesar de ello, los cambios en los errores de los 34 estudiantes diagnosticados como Buggy en ambas pruebas seguían los patrones que uno esperaría intuitivamente. En concreto, la mitad de los estudiantes tenían los mismos errores en ambas pruebas lo que suponía la estabilidad de los mismos.

Así, los errores estables más frecuentes fueron *Smaller From Larger*, *Stops Borrow At Zero* y *Borrow Across Zero*, precisamente los tres errores más comunes. La otra mitad tenían diagnósticos que no se solapaban en las dos pruebas, debido a que los estudiantes que utilizaron una misma estrategia de resolución constante en la primera prueba, y por lo tanto fueron diagnosticados de *Erróneos (Buggy)*, a menudo aplicaron una estrategia diferente para resolver los mismos problemas en la segunda prueba, lo que llevaría a un diagnóstico de error diferente en esa prueba. En la mayoría de estos casos, los cambios mostraron que el estudiante estaba inmerso en el proceso de aprendizaje de la sustracción. Por ejemplo, los estudiantes que tuvieron el error *Smaller From Larger* en la primera prueba tuvieron errores que implicaban préstamo en la segunda prueba, es decir, parecía que habían aprendido algo sobre los préstamos en las dos pruebas pero no lo suficiente como para hacerlo perfectamente. En otros casos el tipo de error *Borrow At Zero* cambió a *Stops Borrow At Multiple Zero*, de manera que los estudiantes aprendieron los préstamos de un cero entre una prueba y otra pero no aplicaron correctamente los préstamos de varios ceros.

Cuando se realizaron las pruebas se esperaba que las reparaciones surgidas se convirtieran en habituales con el tiempo, es decir, se formarían errores estables y consistentes. Sin embargo en todos los casos se observó que, aunque el atasco se produjera por la misma circunstancia, variaba la forma en la que se realizaba la reparación en dos sentidos: en primer lugar, algunos estudiantes repararon el atasco de varias maneras diferentes en una misma prueba (fue denominado retoques, “*Tinkering*”) y, en segundo lugar, algunos estudiantes pasaron de una reparación a otra en distintas pruebas, es decir, cometieron un error consistente en la primera prueba y otro error consistente, pero diferente, en la segunda prueba (fue llamado migración “*bug migration*”). Un análisis de 120 estudiantes, mostró que un 12% de los estudiantes hacía “retoques”, como se predecía en la Teoría de la Reparación. Referido a la migración de errores, se realizaron dos pruebas a 67 estudiantes en un corto espacio de tiempo de los cuales solo 12 mostraron errores en ambas pruebas y en 2 de ellos (17%) se observó la migración, lo que también predijo la Teoría de la Reparación.



En definitiva, ambos estudios, tanto el de corto plazo como el de largo plazo, parecieron probar que los errores no fueron estables en general. Esto implicaría que la inestabilidad de los errores podría ser resultado de las pruebas en sí mismas, más que del tiempo entre ellas. Es decir, la inestabilidad a corto plazo no se podría atribuir a que los estudiantes recordaran la prueba del día anterior y trataran de hacer la segunda prueba de forma diferente, ni la inestabilidad a largo plazo se podría atribuir a la remisión espontánea de los errores. En cambio, parecía que la inestabilidad de los resultados de los estudiantes se debía a procesos mentales diferentes según la duración de cada prueba. Esto anima a cambiar la imagen de un error como algo que existe necesariamente con el tiempo. En cambio, parece que los estudiantes crearon los errores al comienzo de la prueba y los repetían durante la realización de la prueba, para ser olvidados tan pronto como se terminara la prueba. Es decir, los errores parecían ser manifestaciones de estrategias de resolución incorrectas al trabajar en la prueba. Por tanto no había ninguna razón para que un estudiante mantuviera la estrategia después de terminar la prueba, y este error u otro parecido se podría generar de nuevo la próxima vez. De hecho, cuando el estudiante inventaba un error, la práctica continuada podría afianzarlo en la memoria, con lo que la recuperación sería más difícil.

Observando los porcentajes de estudiantes en cada categoría, tanto en el estudio de Brown y Burton (1978) como en el de VanLehn (1982), los errores de un alto porcentaje de estudiantes no fueron diagnosticados (Tabla 2.4):

Tabla 2.4

*Número de estudiantes en cada categoría*

<b>Categoría</b>	<b>Nicaragua</b>	<b>Southbay y Short-term</b>
Correcto	37	112
Erróneo	505 (39%)	417 (40%)
Desliz	116 (9%)	223 (22%)
No Diagnosticable	667(52%)	386 (37%)
<b>Total</b>	<b>1325</b>	<b>1138</b>

Nota. Fuente: Adaptada de VanLehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *The Journal of Mathematical Behavior*, 3(2), p.28

Es decir, si un estudiante no comete fallos en el cuestionario está en la categoría Correcto. Los demás estudiantes, a partir de sus errores, se distribuyeron en tres grupos: Si los errores cometidos seguían una cierta tipología, se consideran Buggy; si cometían pocas equivocaciones que no eran de procedimiento, se situaban en la categoría Desliz; en los demás casos, se incluían en la categoría No Diagnosticable (Brown y Burton, 1978). Con la nueva categoría de reparación del estudio de VanLehn (1982), el porcentaje de estudiantes No Diagnosticados quedó reducido a un 10%. Sin embargo, a pesar del avance que supuso la Teoría de la Reparación, aún había un número sustancial de estudiantes cuyos errores no era posible explicar y un número aún mayor de errores cuya tipología cambiaba a lo largo del tiempo sin causa justificada.

Puesto que el diagnóstico se ve afectado por la cantidad de tipologías de errores catalogados, la historia de ese desarrollo puede ser interesante (Tabla 2.5). La base de datos de errores inicial, desarrollada con estudiantes de Nicaragua a los que se les había enseñado la sustracción por radio, identificó 45 errores que fueron el punto de partida para desarrollar mejores pruebas de diagnóstico (Brown y Burton, 1978). Posteriormente, se compararon esos resultados con estudiantes americanos de Wellesley (Massachusetts), de enseñanza regular en un aula, donde sólo se agregaron 15 errores más ya que

los estudiantes eran de un entorno favorable y demasiado competentes (Haviland, 1979). El estudio en Southbay añadió 55 nuevos errores en varias etapas (VanLehn, 1982) y, a partir de ahí, el número de nuevos errores encontrados creció hasta llegar a 121 (VanLehn, 1990). Es probable que no estén todos los existentes pero sería un gran esfuerzo aumentar ese número (VanLehn, 1990).

Tabla 2.5

*Resumen de cómo se han ido descubriendo nuevos errores*

	Añadidos	Total
Brown y Burton, 1978	45	45
Haviland, 1979	15	60
VanLehn, 1982	30	90
VanLehn, 1982	15	105
VanLehn, 1982	10	115
VanLehn, 1990	6	121

Nota. Fuente: Adaptada de VanLehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *The Journal of Mathematical Behavior*, 3(2), p.38

Todo este proceso tuvo influencia en investigaciones posteriores ya fuera, por ejemplo, para determinar si la mejora del estudiante en efectuar sustracciones se podía mejorar si el maestro conocía el diagnóstico del estudiante o para analizar métodos de enseñanza que parecían remediar errores con éxito (Resnick, 1984).

En resumen, las teorías que abordan los errores en el algoritmo de la sustracción desde un punto de vista analítico-procedimental avanzaron en diversos sentidos. En esencia, Brown y Burton (1978), distinguieron entre estudiantes que cometían errores de procedimiento y los que tenían fallos debidos a despistes. Así, basándose en redes procedimentales de tipo jerárquico, establecieron que el error se produce porque los estudiantes poseen versiones defectuosas del algoritmo (Sánchez, 2005), y en lugar de utilizar el algoritmo correcto, emplean alguna variante del mismo. Posteriormente,

Young y O'Shea (1981) ofrecieron un enfoque diferente, basándose en sistemas de producción de normas independientes de tipo acumulativo y establecieron que el error se debía al olvido de determinadas reglas en el algoritmo, y clasificaron los errores según fuesen de algoritmo, patrón o relaciones numéricas. Finalmente VanLehn (1990), basándose en el trabajo previo de Brown y Burton, estableció la Teoría de la Reparación en la que se añadió una tercera categoría a errores y deslices, reparación, basada en la relación de bloqueo-reparación. Además, la tipología de errores aumentó en el avance de las investigaciones hasta llegar a catalogarse 121 tipos de error y, por tanto, los no diagnosticables disminuyeron, aunque todavía se mantenían en torno al 10%.

## **CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN**

Este capítulo recoge la metodología de investigación que permitió analizar las respuestas de los estudiantes universitarios cuando completaron un cuestionario de 20 sustracciones tomado de VanLehn (1990). Se organiza en varios apartados. En primer lugar, la introducción tiene como finalidad enmarcar el método de trabajo utilizado para comprobar las hipótesis de investigación. En un segundo apartado, se describe el marco conceptual que apoya el desarrollo de la investigación que se presenta. En tercer lugar, se describe la finalidad de la investigación donde se recogen las hipótesis y el tipo de investigación en que se sitúa este trabajo tomando como referencia el marco conceptual. Finalmente, en un cuarto lugar, se incluye la metodología de investigación donde, además de los objetivos, la muestra en la que se aplicaron los cuestionarios, el mismo cuestionario, el procedimiento para completarlo, la temporalización y los datos, también se detalla el proceso de análisis y las fases del trabajo realizado.



### 3.1. Introducción

En esta investigación se analizan los errores cometidos por estudiantes universitarios cuando realizaban sustracciones multicolumna. Continúa trabajos previos en diversos sentidos, pero especialmente los estudios que analizaron los errores cometidos por estudiantes de Primaria cuando hacían sustracciones (por ejemplo, Sánchez, 2005, en España, y VanLehn, 1990 y Brown y Burton, 1978 en América). Tomando como precedente los resultados obtenidos en los estudios anteriores se considera que investigar sobre los errores que se producen y profundizar en el conocimiento de las circunstancias que los causan puede aportar información interesante que podría realizar aportaciones importantes al ámbito de la Didáctica de las Matemáticas.

El algoritmo de la resta es puramente procesal. Consiste en aplicar los pasos del algoritmo en un orden adecuado. Usualmente se hace de forma mecánica después de un aprendizaje típicamente memorístico (Resnick, 1987). Cuando falla la memoria en la aplicación del algoritmo se pueden producir vacilaciones o bloqueos, callejones sin salida, procedimientos ya estudiados desde la Teoría de la Reparación por VanLehn (1990) en el proceso de

resolución, que pueden conllevar que, si las fuentes primarias de transferencia y los recursos utilizados por el resolvente no son los apropiados, puede producirse el error (Sánchez y López, 2011; Sánchez, 2013). Es decir, es fundamental la adquisición conceptual comprensiva y apropiada por el resolvente cuando aprende el algoritmo de la sustracción (Resnick, 1987; Sánchez, 2005). Este aspecto no se suele tener en cuenta por el docente cuando se aprende el algoritmo de la sustracción (Sánchez, 2005).

En general, los resultados obtenidos en este campo de investigación subrayan que los errores que se producen al efectuar la sustracción pueden ser principalmente debidos a aspectos semánticos (Sander, 2001; Sánchez, 2012), que no se perciben explícitamente debido al nivel de abstracción de los procesos algorítmicos pero que surgen en todo el proceso de aprendizaje, o a aspectos procesales en los que tiene especialmente influencia el proceso de enseñanza y aprendizaje del algoritmo (Resnick, 1977, 1982). Los aspectos semánticos son los que generan la mayor parte de los errores en el inicio del aprendizaje de la sustracción para, posteriormente, una vez culminado el proceso de aprendizaje de las estructuras conceptuales de la sustracción, disminuir su influencia y ceder más protagonismo a los aspectos procesales (Sánchez, 2005). En este trabajo únicamente se tendrán en cuenta los aspectos procesales siguiendo principalmente los trabajos de VanLehn (1982, 1990) y Sánchez (2005).

### **3.2. Marco conceptual**

El estudio de los errores que se producen cuando se realiza la sustracción ha sido un aspecto de interés en la investigación desde hace años. Para ello, en sus inicios, el análisis de los mismos se basaba en la teoría de Newell y Simon (1972) citados por VanLehn (1990), que consideraba tres tipos basados principalmente en considerar aspectos memorísticos y de ensayo-error: fallos del recuerdo, escasez de la práctica, y fatiga y falta de concentración (Bermejo, 1990, citado por Sánchez, 2005). Entre los muchos estudios desarrollados, pueden ser relevantes los de Groen y Resnick (1977) y Hatano (1988).



Las investigaciones posteriores avanzaron sobre la tipología de errores que se cometen al realizar la sustracción al considerar, además de la memoria, un enfoque centrado en el propio sistema de procesamiento de la información del resolutor. La importancia de la comprensión o fondo conceptual del proceso del algoritmo de la sustracción por el resolutor ha sido considerada esencial en muchas investigaciones (por ejemplo, Carpenter, Franke, Jacobs y Fennema, 1996; Fuson, 1986; Fuson y Briars, 1990; Hiebert y Wearne, 1996; Resnick, 1982; Resnick y Omanson, 1987; Castro, Rico y Castro, 1987). De esa forma se tuvieron en cuenta los errores producidos por el resolutor en el proceso de ejecución del algoritmo, es decir, cuando el algoritmo se olvida o se aprende mal, el resolutor recurre a diferentes estrategias para resolver la actividad. Estos errores procedimentales se convierten en sistemáticos al formar parte del procedimiento (VanLehn, 1990, López y Sánchez, 2007).

De acuerdo con Sánchez, 2005, si los errores del resolutor fueran debidos únicamente a fallos en los pasos de la memorización del algoritmo de la sustracción, se podría esperar que su tipología se debiese a la omisión de un paso, la permutación del orden de los mismos, la mezcla de sus componentes o la inclusión de pasos de otros procesos similares como el del algoritmo de la adición (Young y O'Shea, 1981). Pero estudios posteriores mostraron que esos no eran los únicos tipos de errores que se producían cuando se realizan sustracciones. De esta forma se considera que, aunque algunos errores provienen de un imperfecto conocimiento del algoritmo, otros pueden deberse a una ejecución del mismo sin una comprensión significativa de su significado lo que puede conllevar que el resolutor aplique rutinas erróneas (por ejemplo, Brownell, 1964). Entre los muchos estudios desarrollados sobresalen los de Brown y Burton (1978), López y Sánchez (2007), Sánchez (2005), VanLehn (1990) y Young y O'Shea (1981).

Este nuevo punto de vista no pretende sustituir la teoría del aprendizaje memorístico del proceso de adquisición del algoritmo sino agregarlo a ella. A la vez, la teoría del aprendizaje memorístico fue matizada por algunos autores (por ejemplo, VahnLehn, 1991 y Nesher, 1982; Sánchez, 2005, p.56). En concreto VanLehn (1990) consideró que, cuando alguien adquiere el

conocimiento del algoritmo de la sustracción, no es realmente un proceso memorístico y mecánico como podría hacerlo un programa de ordenador; sino que incluye un proceso de adquisición del procedimiento del algoritmo y de interpretación de ese procedimiento que ha de tenerse en cuenta cuando se aplica el algoritmo.

Esta nueva visión del procedimiento del algoritmo de la sustracción que incluye adquisición e interpretación permite entender que, cuando alguien encuentra dificultades para desarrollarlo, busca caminos para avanzar que no siempre son adecuados. A la vez, aquellos pasos del proceso de ejecución del algoritmo que produce bloqueos en el resolutor hacen que, cuando llega a ellos, decida saltarlos o buscar estrategias sencillas para avanzar, algunas de las cuales producen resultados correctos mientras que, otras, llevan a resultados incorrectos que permiten detectar errores (también llamados bugs) de diversos tipos (los ejemplos del trabajo de Brown y VanLehn, 1980, ilustran estos aspectos). Estas peculiaridades que se producen en el proceso de resolución del algoritmo de la sustracción es lo que Brown y VanLehn (1980) denominaron Teoría de la Reparación (Repair Theory). La nueva visión del aprendizaje memorístico del algoritmo de la sustracción que incluye la Teoría de Reparación ha sido, posteriormente, desarrollada por otros autores en conceptos diferentes y más amplios que el de la sustracción (por ejemplo, Laird, Newell, y Rosenbloom, 1987).

Muchos de los errores que se producen al realizar una sustracción no pueden considerarse fortuitos ya que se repiten en el mismo resolutor y en otros resolutores. Algunos son errores puros pero otros se presentan combinados. Además, no siempre ocurre que un resolutor cometa un determinado error o errores, o que los errores se mantengan con el tiempo porque a veces se debe a estrategias reparadoras que no es seguro que siempre se vayan a utilizar (Norman, 1981; VanLehn, 1989) y por tanto, carecen de estabilidad.

De acuerdo con Sánchez, (2005), López y Sánchez (2007, 2008), en este contexto de investigaciones que estudian los errores que se producen al

analizar sustracciones, algunos trabajos tuvieron como objetivo analizar la influencia de factores semánticos en la resolución de sustracciones de ciertos tipos como, por ejemplo, las que tienen columnas múltiples (por ejemplo, Carpenter, Franke, Jacobs y Fennema, 1996; Fuson, 1986; Fuson y Briars, 1990; Hiebert y Wearne, 1996; Resnick, 1982; Resnick y Omanson, 1987). Otros estudios concluyeron que el aprendizaje del algoritmo de la sustracción exige un determinado nivel de desarrollo evolutivo (más detalle, Resnick y Omanson, 1987). Estos aspectos no se van a tener en cuenta en este trabajo.

A partir de todo lo anteriormente expuesto, parece necesario profundizar sobre los errores que se producen al efectuar el algoritmo de la sustracción. Intentar comprenderlos puede ser utilizado desde un punto de vista educativo. Mucho se sabe sobre el proceso de desarrollo del algoritmo según se ha recogido en este trabajo. También existe conocimiento del tipo de errores que se producen en aulas de Primaria en España y cómo se mantienen transversalmente (por ejemplo, Sánchez, 2005). Sin embargo, este trabajo de investigación intenta avanzar y pretende conocer si estudiantes universitarios comenten errores al efectuar sustracciones y, si los cometen, de qué tipo son para poder comparar los resultados con otros trabajos como los obtenidos con estudiantes de Primaria. Los resultados pueden aportar luz sobre el tipo de errores que se mantienen o, mejor dicho, se sistematizan y, a partir de ello, sugerir formas de mejorar el aprendizaje del algoritmo de la sustracción en Educación Primaria

En el ámbito educativo, la realización de cálculos algorítmicos sigue siendo un objetivo prioritario en la Enseñanza Primaria. Sin embargo, la carencia significativa de comprensión justificada del proceso de la sustracción por los estudiantes es un supuesto aceptado por la comunidad educativa. Este trabajo es un intento de avanzar en el conocimiento del desarrollo del algoritmo de la sustracción y de los errores que se producen en diversos sentidos y, a partir de ese conocimiento, abrir vías para mejorar su enseñanza y aprendizaje como, por ejemplo, para desarrollar propuestas metodológicas para mejorarlo.

### **3.3. Finalidad de la investigación**

La finalidad del estudio que se presenta es avanzar en el conocimiento de los errores que se producen durante el proceso de aprendizaje del algoritmo de la sustracción. En concreto, el objetivo de este trabajo es analizar los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones y comparar los tipos de errores producidos con los que cometen los estudiantes de Educación Primaria. Para ello, se ha optado por un diseño de investigación cuasi-experimental porque existe una hipótesis que hay que contrastar pero no hay aleatoriedad de sujetos en la muestra o grupo de control. Para obtener los datos se aplicará el cuestionario de VanLehn (1990, p.170).

Se consideran las siguientes hipótesis:

**Hipótesis 1:** Los estudiantes universitarios cometen pocos errores al realizar sustracciones.

Aunque los estudiantes universitarios usualmente realizan pocas sustracciones, al tratarse de un algoritmo elemental que se aprende en Educación Primaria y se utiliza en Educación Secundaria, es previsible que esté completamente afianzado en todos ellos, teniendo especialmente en cuenta que se trata de estudiantes universitarios que, no solo han cursado la educación obligatoria, sino que han continuado superando estudios posteriores lo que les convierte en un subgrupo de personas con inquietudes formativas y, previsiblemente, con interés en esa formación.

**Hipótesis 2:** La tipología de los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones es similar a la que se produce con estudiantes de Educación Primaria. Es decir, los errores sistemáticos se mantienen a lo largo de todas las etapas de formación del estudiante.

Aunque es de suponer que los estudiantes universitarios cometerán pocos errores, es previsible que éstos sean similares a los que cometen estudiantes de Primaria; aunque puede ser interesante analizar aquellos que más se mantienen transversalmente, lo que podría tenerse en cuenta para el aprendizaje del algoritmo de la sustracción en Educación Primaria.

Así pues, a la luz de las anteriores hipótesis podemos decir que en esta investigación se opta por una metodología de tipo cuantitativa descriptiva e inferencial, ya que se pretende inicialmente cuantificar el número de errores producidos por estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones y sacar conclusiones del análisis de los datos, y comparativa, pues posteriormente se plantea comparar la tipología de los mismos con los que producen estudiantes de Primaria de forma transversal. Además, es empírica ya que se pretende obtener conocimiento utilizando la experiencia.

### **3.4. Marco metodológico**

En este apartado se describe el proceso llevado a cabo para analizar los datos al objeto de conseguir los resultados que se presentan en el capítulo siguiente. En concreto, se remarca que esta investigación considera esencialmente los errores cometidos por estudiantes universitarios al realizar sustracciones, que se pretenden comparar con los que cometen estudiantes de Primaria.

#### **3.4.1. Objetivos**

Los objetivos fueron los siguientes:

- Analizar los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones.
- Comparar los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones con los de estudiantes de Primaria.

#### **3.4.2. Muestra**

Para la selección de la muestra, en la investigación educativa es habitual usar el muestreo no probabilístico (McMillan y Schumacher, 2001, 2005) y de acuerdo con Creswell (2008) puede ser definido como un procedimiento de

muestreo cuantitativo donde el investigador selecciona a los participantes que están dispuestos y disponibles para ser estudiados. En este trabajo se ha utilizado una clase de muestreo no probabilístico denominado muestreo opinático. Así, se tomó una muestra de carácter casual o incidental de estudiantes universitarios de la Universidad de Salamanca, teniendo en cuenta que fueran de contextos y formación diferente en función de si sus estudios previos estaban más enfocados a las ciencias o a las letras. Por ello los estudiantes fueron de las Diplomaturas y Grados en Magisterio (Magisterio), en Ciencias Empresariales y en Gestión de Pequeñas y Medianas Empresas (Empresariales), y en Estadística (Estadística). Además, los estudiantes de Magisterio podrían proporcionar información educativa relevante ya que serían futuros educadores de niños de Primaria, donde se aprende el algoritmo de la sustracción.

En total, fueron 535 estudiantes universitarios de los tres centros, que completaron 10700 sustracciones. Se puede apreciar que aunque la muestra fuese casual, existió un número elevado de unidades muestrales y por tanto un acumulo importante de sustracciones para analizar. En las tablas que se presentan a continuación se describen las características organizados por sexo (Tabla 3.1), estudios realizados en los cursos previos a su entrada en la Universidad (Tabla 3.2) y cursos (Tabla 3.3):

Tabla 3.1

*Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por sexo*

<b>Centro</b>	<b>Hombre</b>	<b>Mujer</b>	<b>NS/NC</b>	<b>Total</b>
Magisterio	89(22,2%)	228(56,9%)	84(20,9%)	401(100%)
Empresariales	55(48,7%)	57(50,4%)	1(0,9%)	113(100%)
Estadística	3(14,3%)	18(85,7%)	0(0,0%)	21(100%)
<b>Total</b>	<b>147(27,5%)</b>	<b>303(56,6%)</b>	<b>85(15,9%)</b>	<b>535(100%)</b>

Tabla 3.2.

*Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por los estudios que realizaron antes de llegar a la Universidad*

<b>Centro</b>	<b>Ciencia y Tecnología</b>	<b>Humanidades y Ciencias Sociales</b>	<b>Otros<sup>a</sup></b>	<b>NS/NC</b>	<b>Total</b>
Magisterio	80(20,0%)	205(51,1%)	30(7,5%)	86(21,4%)	401(100%)
Empresariales	23(20,4%)	69(61,1%)	18(15,9%)	3(2,7%)	113(100%)
Estadística	9(42,9%)	11(52,4%)	0(0,0%)	1(4,8%)	21(100%)
<b>Total</b>	<b>112(9,0%)</b>	<b>285 (16,8%)</b>	<b>48 (20,9%)</b>	<b>90 (53,3%)</b>	<b>535(100%)</b>

<sup>a</sup>En otros se incluyen estudiantes que habían cursado Bachillerato de Arte, Formación Profesional, BUP y COU.

Tabla 3.3

*Muestra de estudiantes universitarios que realizaron las pruebas, en datos totales y en porcentajes, organizados por curso*

<b>Centro</b>	<b>Primero</b>	<b>Segundo</b>	<b>Tercero</b>	<b>Total</b>
Magisterio	185(46,1%)	143(35,7%)	73(18,2%)	401(100%)
Empresariales	64(56,6%)	0(0,0%)	49(43,4%)	113(100%)
Estadística	7(33,3%)	10(47,6%)	4(19,0%)	21(100%)
<b>Total</b>	<b>256(47,9%)</b>	<b>153(28,6%)</b>	<b>126(23,6%)</b>	<b>535(100%)</b>

### 3.4.3. Instrumento

El instrumento seleccionado fue el cuestionario de VanLehn (VanLehn 1990, p.170). Consiste en 20 sustracciones de las cuales 17 requieren pedir prestado. En concreto, el cuestionario que se aplicó a los estudiantes fue el siguiente:

#### PRUEBA DE LA RESTA

Código: _____
Fecha: _____
Edad: _____ Sexo: _____
Curso: _____
Bachillerato cursado: _____
Hora de inicio: _____ Hora final: _____

647	885	83	8305
- 45	- 205	- 44	- 3
_____	_____	_____	_____
50	562	742	106
- 23	- 3	- 136	- 70
_____	_____	_____	_____
716	1564	6591	311
- 598	- 887	- 2697	- 214
_____	_____	_____	_____
1813	102	9007	4015
- 215	- 39	- 6880	- 607
_____	_____	_____	_____
702	2006	10012	8001
- 108	- 42	- 214	- 43
_____	_____	_____	_____

La fiabilidad y validez del cuestionario de VanLehn están explicadas en VanLehn (1990).



### 3.4.4. Prueba previa exploratoria

Cuando se pensó en realizar este trabajo, había dudas de si los objetivos eran factibles pues había cierta incredulidad al hecho de que los estudiantes universitarios cometieran errores al realizar sustracciones, donde se supone aprendido el algoritmo. Por ello, antes de avanzar en los objetivos de la investigación, para descubrir si el estudio de los errores podría tener sentido con personas que estaban en ese nivel educativo, en marzo de 2011 se realizó una prueba exploratoria en un curso de 34 estudiantes universitarios de Magisterio, que completaron el cuestionario de VanLehn, para poder descubrir si se producirían errores al completarlo.

Una vez analizados los 34 cuestionarios completados se pudo comprobar que se habían producido un amplio porcentaje de errores, que no se analizaron pero sirvió para motivar el desarrollo y la planificación de esta investigación.

### 3.4.5. Procedimiento

Los estudiantes resolvieron, en el aula habitual y con la presencia de su profesor habitual, sin límite de tiempo, el cuestionario de VanLehn (1982). Antes de hacerlo, el profesor dio la siguiente instrucción: *“Tenéis que realizar este cuestionario. Consiste en realizar 20 sustracciones. Los resultados se tratarán en el contexto de una investigación y no se tendrán en cuenta para la evaluación. Por eso, en cada cuestionario no figura vuestro nombre, es anónimo. Hacedlo lo mejor que podáis. Tenéis todo el tiempo que necesitéis.”*

Aunque los estudiantes no tenían límite de tiempo para completar el cuestionario, se estimaba que tardarían entre 2 y 5 minutos, con un máximo de 10 minutos.

La doctoranda estuvo presente, sin hacerse visible, en todos los centros y aulas en que se tomaron los datos para anotar tiempos y posibles incidencias o aspectos de interés que se produjeran. En todos los casos los estudiantes completaron el cuestionario de forma independiente y con normalidad.

A todos los estudiantes se les comunicó que los datos que proporcionaban se iban a tratar para realizar una investigación y todos aceptaron que fueran utilizados con ese objetivo.

### **3.4.6. Temporalización**

La aplicación de los cuestionarios se realizó en mayo del 2011.

### **3.4.7. Datos**

Los datos fueron recabados desde los cuestionarios que completaron los estudiantes. En total fueron 535 cuestionarios y 10700 sustracciones.

### **3.4.8. Sistema de análisis**

A continuación se explica cómo se analizaron los datos para conseguir los resultados.

En primer lugar, se analizaron los aciertos y errores de cada estudiante después de completar el cuestionario. Los resultados se incluyeron en tablas, tanto en valor absoluto como en porcentaje, inicialmente teniendo en cuenta el número de errores cometidos y, posteriormente, organizados en función del sexo, edad, centro, curso, estudios previos y tiempo empleado en completar los cuestionarios. Los resultados se compararon para descubrir si existían diferencias significativas.

En segundo lugar, se analizaron las sustracciones en que se cometieron más errores en relación con la estructura de cada sustracción y el tipo de error cometido en cada una de ellas siguiendo la categorización de VanLehn (1990), que consta de 121 categorías a las que se añadieron algunas categorías nuevas que surgieron del análisis. Los resultados se incluyeron en tablas, tanto en valor absoluto como en porcentaje, y se compararon con los resultados obtenidos en

investigaciones previas con estudiantes de Primaria y, posteriormente, se analizaron en función del sexo, edad, centro, curso, estudios previos y tiempo empleado.

En tercer lugar, se analizó el tipo de error cometido en aquellas sustracciones erróneas utilizando la tipología de errores de la sustracción de VanLehn (1990), la frecuencia del tipo de error relacionado con las sustracciones en que se cometieron más errores y con los que se produjeron con estudiantes de Primaria y, finalmente, la sistematicidad del tipo de error entendida como que se mantiene a lo largo del tiempo teniendo en cuenta los que se cometieron en Primaria.

Algunos ejemplos del análisis fueron:

Ejemplo de análisis 1 (Figura: 3.1):

PRUEBA DE LA RESTA			
Código: 02612			
Fecha: 13-marzo-2011			
Edad: 20		Sexo: Mujer	
Curso: 3º			
Bachillerato cursado: Humanidades y Ciencias Sociales			
Hora de inicio: 9:20 a.m.		Hora final: 9:24	
647	885	83	8305
- 45	- 205	- 44	- 3
-----	-----	-----	-----
602	680	39	8302
50	562	742	106
- 23	- 3	- 136	- 70
-----	-----	-----	-----
33	559	614	36
716	1564	6591	311
- 598	- 887	- 2697	- 214
-----	-----	-----	-----
282	1323	4106	103
1813	102	9007	4015
- 215	- 39	- 6880	- 607
-----	-----	-----	-----
1602	77	3223	3412
702	2006	10012	8001
- 108	- 42	- 214	- 43
-----	-----	-----	-----
606	2044	9802	7062

Figura 3.1. Cuestionario completado por un estudiante universitario que incluía muchos errores del tipo Smaller-From-Larger. Nota: el alumno confundió el mes de realización del cuestionario, ya que se realizó en mayo).

En el ejemplo de análisis 1 se observa que las sustracciones 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 y 20, numeradas de arriba a abajo y de izquierda a derecha, tienen un error del tipo Smaller-From-Larger de la categoría de VanLehn, sustraer el número menor del mayor en cada columna. Por ejemplo, en la sustracción 11, el alumno la resolvió de la siguiente forma,  $6591 - 2697 = 4106$ , es decir,  $7 - 1 = 6$ ,  $9 - 9 = 0$ ,  $6 - 5 = 1$  y  $6 - 2 = 3$ . En la sustracción 15 el alumno resolvió  $9007 - 6880 = 3223$ , donde se observa que, además de ese tipo de error, en este caso también se le añade el error Treat-Top-Zero-As-Ten, que consiste en considerar el 0 del minuendo como 10, es decir,  $10 - 7 = 3$ ,  $10 - 8 = 2$ ,  $10 - 8 = 2$  y  $9 - 6 = 3$ . Además, en las sustracciones 14, 16, 19 y 20 el estudiante también cometió el error Smaller-From-Larger ya que, por ejemplo, en la sustracción 14 hizo  $102 - 39 = 77$ ,  $9 - 2 = 7$  y  $10 - 3 = 7$ ; en la sustracción 16 resolvió  $4015 - 607 = 3412$ , es decir,  $7 - 5 = 2$ ,  $1 - 0 = 1$  y  $40 - 6 = 34$ ; en la sustracción 19 el estudiante hizo  $10012 - 214 = 9802$ , es decir,  $4 - 2 = 2$ ,  $1 - 1 = 0$  y  $100 - 2 = 98$ .

Ejemplo de análisis 2 (Figura: 3.2):

PRUEBA DE LA RESTA			
Código: 02005			
Fecha: 10-05-11			
Edad: 27		Sexo: H	
Curso: 3º			
Bachillerato cursado: Humanidades			
Hora de inicio: 13:13		Hora final: 13:16	
647	885	83	8305
- 45	- 205	- 44	- 3
-----	-----	-----	-----
602	680	49	8302
50	562	742	106
- 23	- 3	- 136	- 70
-----	-----	-----	-----
37	569	616	136
716	1564	6591	311
- 598	- 887	- 2697	- 214
-----	-----	-----	-----
128	1677	3809	097
1813	102	9007	4015
- 215	- 39	- 6880	- 607
-----	-----	-----	-----
1598	063	3227	3408
702	2006	10012	8001
- 108	- 42	- 214	- 43
-----	-----	-----	-----
594	1964	09798	7958

Figura 3.2. Cuestionario completado por un estudiante universitario que incluía muchos errores del tipo Borrow-No-Decrement

Siguiendo la numeración mencionada anteriormente, en las sustracciones 3, 5, 6, 7, 8 y 15 el estudiante cometió el error Borrow-No-Decrement, es decir, añadió 10 correctamente pero no tuvo en cuenta la llevada en la siguiente columna. Por ejemplo, en la sustracción 3,  $83 - 44 = 49$  el estudiante añadió 10 al 3 correctamente,  $13 - 4 = 9$ , pero no tuvo en cuenta la llevada e hizo  $8 - 4 = 4$ .

Además de ello, en la sustracción 9 se produce el error Borrow-No-Decrement-Except-Last, un error relacionado con el anterior, donde el estudiante igualmente olvidó la llevada salvo en la última columna del problema,  $716 - 598 = 128$ , es decir,  $16 - 8 = 8$ ,  $11 - 9 = 2$  aunque en la última columna sea  $6 - 5 = 1$ . En la sustracción 10 el error cometido fue Forget-Borrow-Over-Blank, es decir, el estudiante no decrementó un dígito situado

sobre un espacio en blanco de manera que en la solución dada,  $1564 - 887 = 1677$ , se puede observar que hizo la sustracción correcta en todos los casos salvo en el último dígito que está sobre un espacio blanco. Lo mismo sucedió en las sustracciones 6 y 8 que, además de que aparece el error Borrow-No-Decrement, como se ha mencionado anteriormente, también se produjo el error Forget-Borrow-Over-Blank en la línea que se ha explicado. Además en la sustracción 11,  $6591 - 2697 = 3804$ , el error cometido fue del tipo Borrow-Skip-Equal, es decir, cuando hay que pedir prestado, el estudiante saltó la columna en la que minuendo y sustraendo son iguales.

Las variables fueron:

Tabla 3.4.

*Variables dependientes del estudio*

<b>Variables Dependientes</b>	<b>Operativización de la variable</b>
Aciertos/Errores en total de sustracciones	$N_{20}$ : Total de aciertos (de 20 sustracciones) $20 - N_{20}$ : Total de errores (de 20 sustracciones)
Categoría de error en cada resta	Porcentaje de errores en cada categoría por cada sustracción (VanLehn, 1990)

Tabla 3.5

*Variables independientes del estudio*

<b>Variables Independientes</b>	<b>Operativización de la variable</b>
Sexo	Hombre / Mujer
Edad	18-19, 20-21, 22-23, 24-25 y >25 años
Centro	Magisterio / Estadística/ Empresariales
Curso	1° /2° /3°
Estudios previos	Ciencia y Tecnología/Humanidades y Ciencias Sociales/Otros (Arte, BUP, FP)
Tiempo en completar el cuestionario	Minutos

Para el análisis de los datos se utilizó el programa IBM SPSS Statistics 20, principalmente en pruebas descriptivas, correlacionales e inferenciales en función de la naturaleza de las variables.

### **3.4.9. Fases del trabajo**

1ª Fase: Búsqueda bibliográfica. Delimitación de los objetivos de la investigación. Diseño de la investigación. Caracterización de los instrumentos de análisis. Prueba previa exploratoria, prueba piloto. Diseño del trabajo de campo. Elección de una muestra significativa de estudiantes universitarios.

2ª Fase: Recogida de información de los estudiantes universitarios a través de los cuestionarios.

3ª Fase: Análisis transversal de los resultados obtenidos en los cuestionarios completados por los estudiantes universitarios a partir de una adaptación del estudio de VanLenh (1988), teniendo en cuenta tanto el número de errores cometidos como el tipo de error en cada caso.

4ª Fase: Interpretación de los resultados obtenidos y relación con los de otras investigaciones con objetivos similares. Análisis de las implicaciones educativas de los resultados obtenidos. Elaboración del informe final.





## **CAPÍTULO 4. RESULTADOS**

En este capítulo se recogen los resultados del análisis de las respuestas de los estudiantes universitarios cuando completaron un cuestionario de 20 sustracciones. En primer lugar, se incluye el número de estudiantes que completaron el cuestionario sin cometer ningún error y el número de errores que tuvieron los demás estudiantes, errores que se relacionaron con el sexo, edad, centro, curso, estudios previos y tiempo empleado en resolverlo. En segundo lugar, se muestran los resultados de las sustracciones en que se cometieron más errores, incluyendo los tipos de errores más frecuentes producidos en cada una de ellas. Y, finalmente, en tercer lugar se recogen los tipos de errores que cometieron los estudiantes universitarios, errores que se compararon con los que realizaron estudiantes de Primaria.



## 4.1. Número de errores cometidos por los estudiantes

Los resultados obtenidos por los 535 estudiantes universitarios considerados, al realizar el cuestionario de 20 sustracciones de VanLehn (1990), explicado anteriormente, teniendo en cuenta el total de las 10700 sustracciones completadas por todos ellos, atendiendo inicialmente a los estudiantes universitarios que realizaron correctamente las 20 sustracciones (Tabla 4.1) y después al número de errores de cada uno de ellos (Tabla 4.2), fueron:

Tabla 4.1

*Número de estudiantes universitarios que realizaron correctamente todo el cuestionario de VanLehn, en datos totales y en porcentajes, y los que tuvieron al menos un error*

	<b>Número de estudiantes universitarios (%)</b>
Estudiantes que realizaron correctamente el cuestionario	129 (24,1%)
Estudiantes que cometieron al menos un error al realizar el cuestionario	406 (75,9%)
<b>Total</b>	<b>535 (100%)</b>

Tabla 4.2

*Número de estudiantes universitarios organizados en función del número de errores cometidos al realizar el cuestionario de VanLehn*

<b>Número de errores posibles</b>	<b>Número de estudiantes universitarios (%)</b>
0	129 (24,11%)
1	120 (22,43%)
2	97 (18,13%)
3	74 (13,83%)
4	43 (8,04%)
5	24 (4,49%)
6	11 (2,06%)
7	10 (1,87%)
8	5 (0,93%)
9	5 (0,93%)
10	5 (0,93%)
11	3 (0,56%)
12	3 (0,56%)
13	1 (0,19%)
14	3 (0,56%)
15	1 (0,19%)
Más de 15	1 (0,19%) <sup>a</sup>
<b>Total</b>	<b>535(100%)</b>

<sup>a</sup>El único estudiante de este grupo cometió 20 errores

Se observa que, únicamente, el 24,11% de los estudiantes resolvieron correctamente las 20 sustracciones de su cuestionario mientras que el 75,9% cometieron al menos un error en alguna de ellas. Si se consideran los estudiantes que completaron correctamente todo el cuestionario unido a aquellos que tuvieron un único error, el porcentaje aumentaría al 46,54%, lo que equivale a decir que más de la mitad de los estudiantes realizó incorrectamente al menos dos de las 20 sustracciones del cuestionario. Además, los estudiantes que cometieron dos errores o menos al completar el cuestionario fue el 64,67%, que es lo mismo que decir que más de una tercera parte (35,33%) de los universitarios encuestados realizaron al menos 3 sustracciones de manera equivocada (Figura 4.1).

En otro sentido, prácticamente todos los estudiantes resolvieron con éxito al menos 5 de las 20 sustracciones, aunque no hay que olvidar que el cuestionario incluía 3 que no precisaban llevada. Observando el trabajo del único estudiante que realizó de forma incorrecta las 20 sustracciones, lo hizo realizando la operación de adición en vez de la sustracción en las 20 operaciones.

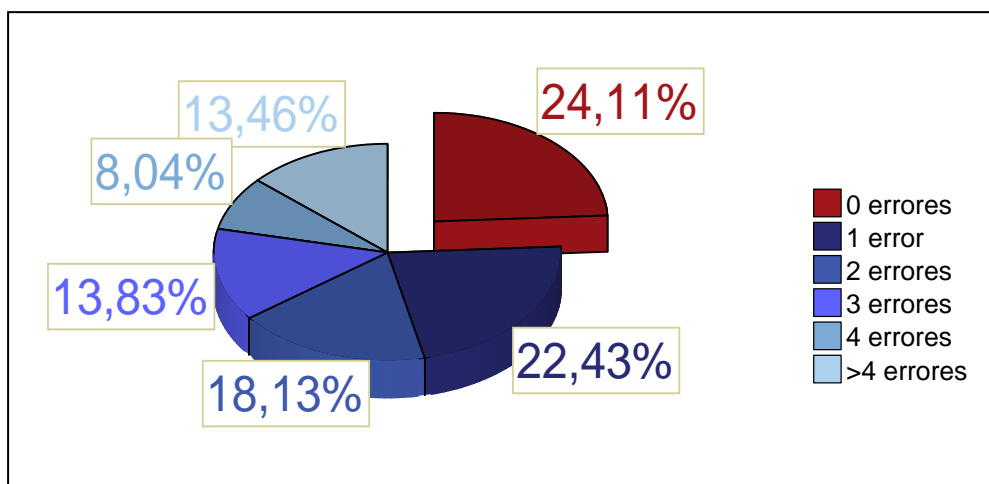


Figura 4.1. Porcentaje de cuestionarios según número de respuestas erróneas

#### 4.1.1. Resultados según el sexo

El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta el sexo se puede observar en la Tabla 4.3.

Se observa que el porcentaje de mujeres que no cometieron ningún error fue superior al del grupo de hombres (27,1% > 19,0%). Además, atendiendo a las categorías de menor número de errores, las mujeres tuvieron un porcentaje superior al de los hombres mientras que, en los porcentajes de las categorías de 5 errores o más, los hombres superaron a las mujeres (salvo el caso de 11 errores). Es decir, considerando las observaciones muestrales los hombres cometieron más errores.

Tabla 4.3.

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del sexo*

		Total errores															Total	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
Sexo	H fr	28	34	25	25	6	9	6	4	2	2	2	0	1	1	1	1	147
	%	19,0	23,1	17,0	17,0	4,1	6,1	4,1	2,7	1,4	1,4	1,4	0,0	0,7	0,7	0,7	0,7	100
Sexo	M fr	82	67	55	37	25	14	4	4	3	3	3	2	2	0	2	0	303
	%	27,1	22,1	18,2	12,2	8,3	4,6	1,3	1,3	1,0	1,0	1,0	0,7	0,7	0,0	0,7	0,0	100
Total	fr	110	101	80	62	31	23	10	8	5	5	5	2	3	1	3	1	450 <sup>a</sup>
	%	24,4	22,4	17,8	13,8	6,9	5,1	2,2	1,8	1,1	1,1	1,1	0,4	0,7	0,2	0,7	0,2	100

<sup>a</sup> El tamaño total en este caso es menor de 535 ya que no se han tenido en cuenta los valores perdidos.

La prueba *t de Student* de comparación de medias para muestras independientes demostró que esas diferencias fueron significativas para un nivel  $\alpha$  del 5% (Tabla 4.4):

Tabla 4.4

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al sexo*

Sexo	N	Media	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias		
			F	Sig.	t	gl	Sig.
Hombre	147	2,72	2,451	0,118	1,98	448	0,04*
Mujer	303	2,19					

\* 95% Intervalo de confianza para la diferencia de medias

#### 4.1.2. Resultados según la edad

Para el análisis de los errores cometidos teniendo en cuenta la edad, los datos se agruparon en intervalos de igual amplitud excepto para los mayores de 25 años, para los que se consideró un único grupo teniendo en cuenta su escasa

frecuencia y que los 25 años marca un proceso diferente de acceso a la Universidad mediante las pruebas de acceso para mayores de 25. El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta la edad fue (Tabla 4.5):

Tabla 4.5

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función de la edad agrupada por intervalos*

		Total errores																	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total	
Edad	18-19	fr	28	21	20	13	4	3	1	2	0	2	1	2	1	0	0	0	98
		%	28,6	21,4	20,4	13,3	4,1	3,1	1,0	2,0	0,0	2,0	1,0	2,0	1,0	0,0	0,0	0,0	100
	20-21	fr	49	42	29	29	17	10	4	4	4	1	1	0	2	1	1	0	194
		%	25,3	21,6	14,9	14,9	8,8	5,2	2,1	2,1	2,1	0,5	0,5	0,0	1,0	0,5	0,5	0,0	100
	22-23	fr	23	24	15	7	4	7	3	2	0	0	2	0	0	0	1	1	89
		%	25,8	27,0	16,9	7,9	4,5	7,9	3,4	2,2	0,0	0,0	2,2	0,0	0,0	0,0	1,1	1,1	100
	24-25	fr	5	5	7	7	4	0	1	0	0	2	1	1	0	0	1	0	34
		%	14,7	14,7	20,6	20,6	11,8	0,0	2,9	0,0	0,0	5,9	2,9	2,9	0,0	0,0	2,9	0,0	100
	>25	fr	7	9	11	7	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
		%	17,5	22,5	27,5	17,5	7,5	7,5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100
	<b>Total</b>	fr	112	101	82	63	32	23	9	8	4	5	5	3	3	1	3	1	455 <sup>a</sup>
		%	24,6	22,2	18,0	13,8	7,0	5,1	2,0	1,8	0,9	1,1	1,1	0,7	0,7	0,2	0,7	0,2	100

<sup>a</sup> El tamaño total en este caso es menor de 535 ya que no se han tenido en cuenta los valores perdidos.

Se realizó un análisis de correlaciones para ver si había relación entre la edad y el número de errores cometidos. No se observaron diferencias significativas ( $0,555 > 0,05$ ) (Tabla 4.6)

Tabla 4.6

*Estadísticos para descubrir correlaciones del número de errores referido a la edad*

		Edad
Total errores	Correlación de Pearson	0,028
	Sig. (bilateral)	0,555
	N	455

A pesar de no apreciarse diferencias significativas, el gráfico de medias muestra un ascenso llamativo en el intervalo correspondiente a los 24-25 años (Figura 4.2).

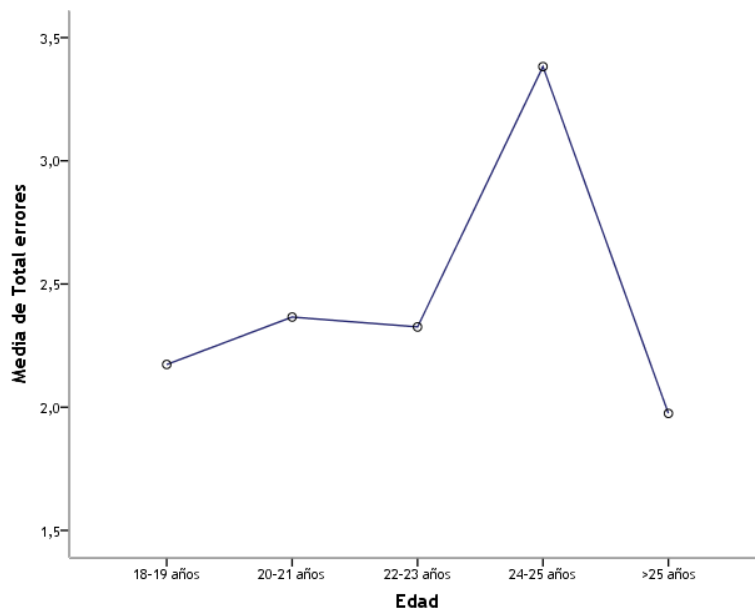


Figura 4.2. Media de errores en función de la edad

Aunque la Figura 4.2 parece indicar que los estudiantes de 24-25 años fueron los que más errores cometieron, el análisis de la varianza (ANOVA) muestra que no existieron diferencias significativas con los otros grupos de estudiantes ( $0,173 > 0,05$ ) (Tabla 4.7)

Tabla 4.7.

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido a la edad considerada en intervalos agrupados*

Edad	N	Media	Estadístico de Levene Sig.	ANOVA de un factor Sig.
18-19 años	98	2,17	0,037	0,173
20-21 años	194	2,37		
22-23 años	89	2,33		
24-25 años	34	3,38		
>25 años	40	1,98		
<b>Total</b>	<b>455</b>	<b>2,36</b>		



### 4.1.3. Resultados según el centro

El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta el centro fue (Tabla 4.8):

Tabla 4.8

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del centro*

		Total errores																	Total	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20		
<b>Centro</b>	Mag.	fr	109	85	74	58	31	15	6	5	2	4	4	2	2	1	2	0	1	401
		%	27,2	21,2	18,5	14,5	7,7	3,7	1,5	1,2	0,5	1,0	1,0	0,5	0,5	0,2	0,5	0,0	0,2	100
	Estad.	fr	2	8	2	4	2	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	21
		%	9,5	38,1	9,5	19,0	9,5	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	4,8	4,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100
	Empr.	fr	18	27	21	12	10	8	5	5	3	1	0	0	1	0	1	1	0	113
		%	15,9	23,9	18,6	10,6	8,8	7,1	4,4	4,4	2,7	0,9	0,0	0,0	0,9	0,0	0,9	0,9	0,0	100
<b>Total</b>	fr	129	120	97	74	43	24	11	10	5	5	5	3	3	1	3	1	1	535	
	%	24,1	22,4	18,1	13,8	8,0	4,5	2,1	1,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6	0,2	0,6	0,2	0,2	100	

Para descubrir si existieron diferencias significativas en el número de errores que cometieron los estudiantes dependiendo del centro, una prueba ANOVA muestra que, efectivamente, existieron esas diferencias (Tabla 4.9).

Tabla 4.9

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro*

Centro	N	Media	Estadístico de	ANOVA de
			Levene	un factor
			Sig.	Sig.
Magisterio	401	2,18	0,172	0,042*
Estadística	21	2,76		
Empresariales	113	2,87		
<b>Total</b>	<b>535</b>	<b>2,35</b>		

\* 95% Intervalo de confianza para la diferencia de medias

Posteriormente, ya que el estadístico de Levene mostró igualdad de varianzas ( $0,172 > 0,05$ ), se realizó una prueba de diferencia de medias

significativas (DMS) para determinar en qué categorías se encuentran esas diferencias (Tabla 4.10 y Tabla 4.11).

Tabla 4.10

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro, comparando los centros dos a dos*

<b>(I) Centro</b>	<b>(J) Centro</b>	<b>Diferencia de medias (I-J)</b>	<b>Sig.</b>
Magisterio	Estadística	-0,577	0,332
	Empresariales	-0,683*	0,016
Estadística	Magisterio	0,577	0,332
	Empresariales	-0,105	0,867
Empresariales	Magisterio	0,683*	0,016
	Estadística	0,105	0,867

\* 95% Intervalo de confianza para la diferencia de medias

Tabla 4.11

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al centro, comparando Magisterio con los otros centros*

<b>Centro</b>	<b>N</b>	<b>Media</b>	<b>Prueba de Levene para la igualdad de varianzas</b>		<b>Prueba T para la igualdad de medias</b>		
			<b>F</b>	<b>Sig.</b>	<b>t</b>	<b>gl</b>	<b>Sig.</b>
Magisterio	401	2,18	3,468	0,063	-2,518	533	0,012*
Otros	134	2,85					

\* 95% Intervalo de confianza para la diferencia de medias

En definitiva, comparando los resultados obtenidos por los estudiantes de los 3 centros, se observaron diferencias significativas entre los estudiantes de Magisterio y los de Empresariales, y entre los estudiantes de Magisterio y los de Empresariales y Estadística considerados conjuntamente, en ambos casos a favor de los de Magisterio que fueron los que menos errores cometieron. El siguiente gráfico muestra la media de errores cometidos en los tres centros (Figura 4.3).

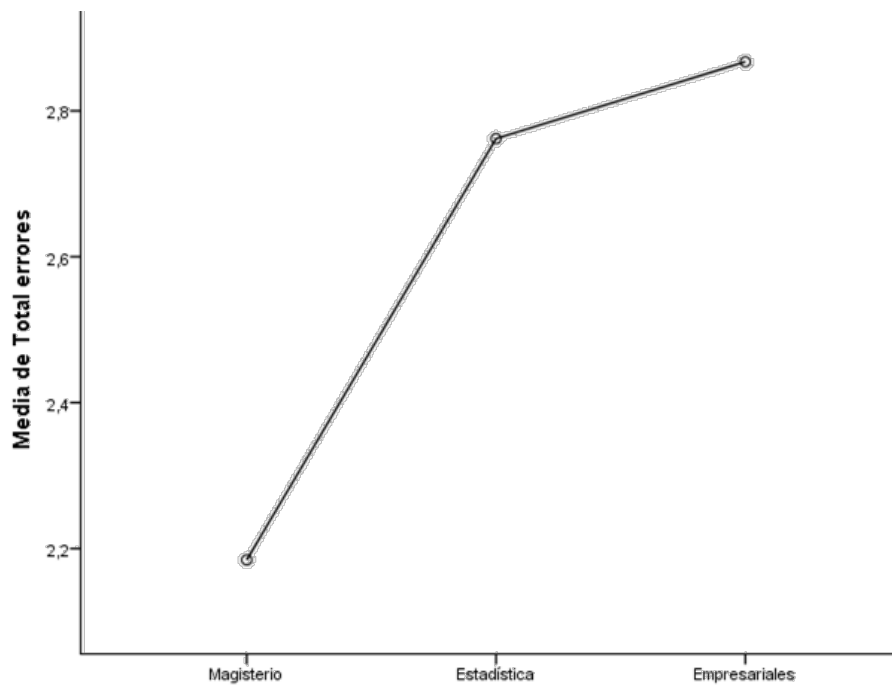


Figura 4.3. Media de errores en los tres centros

#### 4.1.4. Resultados según el curso

El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta el curso se muestra en la Tabla 4.12.

Tabla 4.12

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del curso*

		Número de errores por cuestionario																		
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	Total	
Curso	1	fr	64	57	48	39	20	10	3	4	3	1	1	3	1	0	1	0	1	256
		%	25,0	22,3	18,8	15,2	7,8	3,9	1,2	1,6	1,2	0,4	0,4	1,2	0,4	0,0	0,4	0,0	0,4	100
	2	fr	40	34	31	16	10	6	2	4	0	3	3	0	2	1	1	0	0	153
		%	26,1	22,2	20,3	10,5	6,5	3,9	1,3	2,6	0,0	2,0	2,0	0,0	1,3	0,7	0,7	0,0	0,0	100
	3	fr	25	29	18	19	13	8	6	2	2	1	1	0	0	0	1	1	0	126
		%	19,8	23,0	14,3	15,1	10,	6,3	4,8	1,6	1,6	0,8	0,8	0,0	0,0	0,0	0,8	0,8	0,0	100
Total	fr	129	120	97	74	43	24	11	10	5	5	5	3	3	1	3	1	1	535	
	%	24,1	22,4	18,1	13,8	8,0	4,5	2,1	1,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6	0,2	0,6	0,2	0,2	100	

No se descubrieron diferencias significativas ( $0,415 > 0,05$ ) en el número de errores cometidos por los estudiantes al completar cada cuestionario en función del curso (Tabla 4.13).

Tabla 4.13

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al curso*

Curso	N	Media	Estadístico de	ANOVA de
			Levene	un factor
			Sig.	Sig.
Primero	256	2,22	0,35	0,415
Segundo	153	2,37		
Tercero	126	2,60		
Total	535	2,35		

Considerando únicamente los estudiantes de Magisterio, que en primer curso estudiaron el algoritmo de las operaciones incluido el de la sustracción, para ver si este aspecto tuvo influencia, aunque se observa que el porcentaje de cuestionarios correctos disminuyó según se aumenta de curso, tampoco existieron diferencias significativas en función del curso en el que estaban los estudiantes cuando completaron el cuestionario (Tabla 4.14).

Tabla 4.14

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios de Magisterio al realizar el cuestionario organizados en función del curso*

		Total			Magisterio			Primaria+Ext+EF <sup>a</sup>			Primaria		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
Correcto	N	64	40	25	38	38	16	15	23	9	15	6	3
	%	25	26,1	19,8	34,2	26,6	21,9	30,6	22,3	34,6	30,6	26,1	42,9
Incorrecto	N	192	113	101	73	105	57	34	80	17	34	17	4
	%	75	73,9	80,2	65,8	73,4	78,1	69,4	77,7	65,4	69,4	73,9	57,1
Total por curso		256	153	126	111	143	73	49	103	26	49	23	7
<b>Recuento</b>		<b>535</b>			<b>327</b>			<b>178</b>			<b>79</b>		

<sup>a</sup>Muestra formada por los estudiantes de Educación Primaria, los estudiantes de la especialidad de Lengua Extranjera y los de la especialidad de Educación Física.

Observando los porcentajes por curso se puede ver que en los cursos más altos el porcentaje de cuestionarios correctos decreció con relación a los cursos más bajos, tanto en la muestra total como si, únicamente, se consideran los estudiantes de Magisterio. Pero si, entre los estudiantes de Magisterio no se consideran los de la especialidad de Infantil, que siguen una formación en Didáctica de las Matemáticas algo diferente que los de de las otras especialidades, se puede comprobar que, aunque el porcentaje de cuestionarios correctos decrece de primero a segundo, en tercero se produce un aumento de cuestionarios correctos con un porcentaje incluso superior que en los de primer curso. Esto puede ser debido a que los estudiantes de esas especialidades acababan de realizar sus prácticas en centros de Educación Primaria y, muy probablemente, habían tenido que enfrentarse de nuevo a la ejecución de algoritmos, lo que les habría permitido refrescar su conocimiento sobre los mismos.

#### 4.1.5. Resultados según estudios previos

El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta la rama de estudios de cada uno de ellos en los años previos a la Universidad fue (Tabla 4.15):

Tabla 4.15

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función de la rama de estudios de cada estudiante en los años previos de llegar a la Universidad*

		Número de errores																	Total
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	
C y T <sup>a</sup>	fr	30	28	24	12	5	4	1	1	1	0	2	1	0	1	1	1	0	112
	%	26,8	25,0	21,4	10,7	4,5	3,6	0,9	0,9	0,9	0,0	1,8	0,9	0,0	0,9	0,9	0,9	0,0	100
H y CS <sup>b</sup>	fr	70	55	47	44	24	18	6	7	3	4	3	1	2	0	1	0	0	285
	%	24,6	19,3	16,5	15,4	8,4	6,3	2,1	2,5	1,1	1,4	1,1	0,4	0,7	0,0	0,4	0,0	0,0	100
Otros <sup>c</sup>	fr	11	16	8	5	3	1	2	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	48
	%	22,9	33,3	16,7	10,4	6,2	2,1	4,2	0,0	2,1	0,0	0,0	2,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100
Total	fr	129	120	97	74	43	24	11	10	5	5	5	3	3	1	3	1	1	445 <sup>d</sup>
	%	24,1	22,4	18,1	13,8	8,0	4,5	2,1	1,9	0,9	0,9	0,9	0,6	0,6	0,2	0,6	0,2	0,2	100

<sup>a</sup> Ciencia y Tecnología, <sup>b</sup> Humanidades y Ciencias Sociales, <sup>c</sup> En otros se incluyen estudiantes que habían cursado bachillerato de Arte, Formación Profesional, BUP y COU. <sup>d</sup> El tamaño total en este caso es menor de 535 ya que no se han tenido en cuenta los valores perdidos.

No se apreciaron diferencias significativas al comparar los distintos grupos de estudiantes en función de sus estudios previos ( $0,459 > 0,05$ ). Sin embargo, a pesar de su escaso número (12, 2,7%), es de resaltar que el 50% de los que cursaron Bachillerato de Arte respondieron correctamente el cuestionario, el porcentaje más elevado en todos los casos en este sentido (Tabla 4.16).

Tabla 4.16

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido a los estudios previos de los estudiantes*

Estudios previos	N	Media	Estadístico de	ANOVA de
			Levene	un factor
			Sig.	Sig.
Ciencia y Tecnología	112	2,20	0,517	0,459
Humanidades y Ciencias Sociales	285	2,42		
Otros	48	1,98		
<b>Total</b>	445	2,32		

#### 4.1.6. Resultados según el tiempo empleado

El número de errores cometidos por los estudiantes universitarios teniendo en cuenta el tiempo empleado en rellenar el cuestionario se muestra en la Tabla 4.17.

Tabla 4.17

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios al realizar el cuestionario organizados en función del tiempo empleado en completarlo*

		Número de errores																	Total	
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20		
<b>Tiempo</b>	<2 <sup>a</sup>	fr	15	8	10	6	1	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	44
		%	34,1	18,2	22,7	13,6	2,3	4,5	2,3	0,0	0,0	0,0	2,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100
	2-3	fr	39	44	28	18	12	6	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	154
		%	25,3	28,6	18,2	11,7	7,8	3,9	1,3	0,6	0,6	0,6	0,0	0,0	0,0	0,6	0,0	0,0	0,6	100
	3-4	fr	44	36	29	10	12	7	5	0	2	1	1	0	0	0	2	0	0	149
		%	29,5	24,2	19,5	6,7	8,1	4,7	3,4	0,0	1,3	0,7	0,7	0,0	0,0	0,0	1,3	0,0	0,0	100
	4-5	fr	19	22	17	22	6	6	2	3	0	1	0	2	0	0	0	0	0	100
		%	19,0	22,0	17,0	22,0	6,0	6,0	2,0	3,0	0,0	1,0	0,0	2,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100
	>5	fr	7	10	11	16	11	2	1	6	2	2	3	1	3	0	0	1	0	76
		%	9,2	13,2	14,5	21,1	14,5	2,6	1,3	7,9	2,6	2,6	3,9	1,3	3,9	0,0	0,0	1,3	0,0	100
	<b>Total</b>	fr	125	119	95	72	42	23	11	10	5	5	5	3	3	1	2	1	1	523
		%	23,7	22,9	18,2	13,8	8,0	4,4	2,1	1,9	1,0	1,0	1,0	0,6	0,6	0,2	0,4	0,2	0,2	100

<sup>a</sup> En el intervalo 0-1 únicamente había dos cuestionarios, uno que tenía realizadas correctamente todas las sustracciones y otro que tenía errores. Ante ese escaso número, ambos cuestionarios se incluyeron con los del intervalo de 1-2 minutos.

La Figura 4.4 muestra la media de errores cometidos por los estudiantes universitarios en función del tiempo que tardaron en completar los cuestionarios.



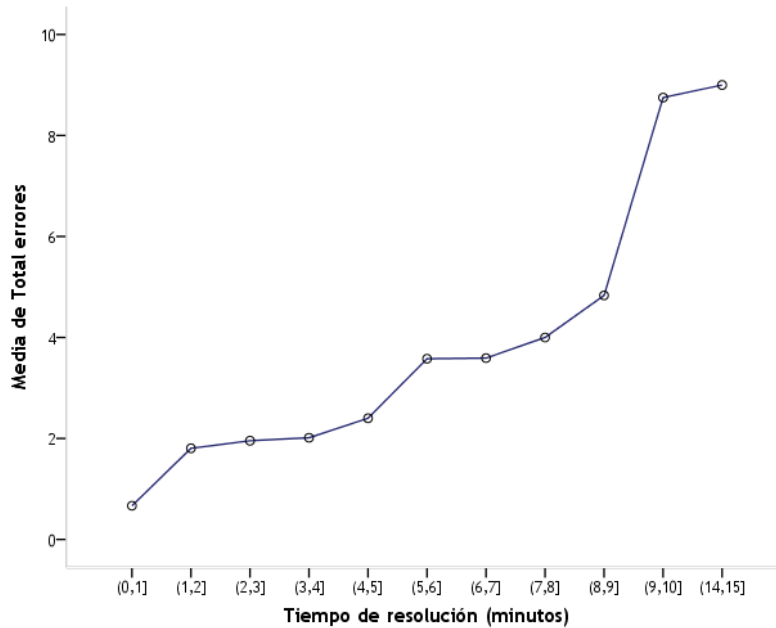


Figura 4.4. Media de errores de los estudiantes universitarios en función del tiempo que tardaron en completar los cuestionarios

Al comparar los grupos de intervalos de tiempo que emplearon los estudiantes para completar el cuestionario, para ver si existían diferencias entre ellos, para descubrir dónde estaban las diferencias y observando el estadístico de Levene (Tabla 4.18) que indicó que no se puede asumir varianzas iguales, se pasaron pruebas post hoc, concretamente la de Tamhane (Tabla 4.19), de manera que se observaron diferencias significativas entre los estudiantes que menos tardaron en completar el cuestionario (intervalo 0-2) y los que más tiempo emplearon (intervalo más de 5 minutos) en el sentido de que los que más tiempo tardaron cometieron más errores. También existieron diferencias significativas entre los que tardaron entre 2 y 3 minutos y más de 5 minutos, entre los que tardaron entre 3 y 4 minutos y más de 5 minutos, y entre los que tardaron entre 4 y 5 minutos y más de 5 minutos. Es decir existieron diferencias significativas entre los estudiantes que tardaron menos de 5 minutos y los que emplearon más de 5 minutos (Tabla 4.18 y Tabla 4.19).

Tabla 4.18

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al tiempo que los estudiantes emplearon en su resolución*

Tiempo	N	Media	Estadístico de	ANOVA de un
			Levene	factor
			Sig.	Sig.
<2	44	1,73	0,000	0,000
(2, 3]	154	1,95		
(3,4 ]	149	2,01		
(4,5 ]	100	2,40		
>5	76	4,05		
Total	523	2,34		

Tabla 4.19

*Estadísticos para descubrir diferencias significativas del número de errores referido al tiempo, comparando los tiempos dos a dos*

	(I) tiempo	(J) tiempo	Diferencia de	Sig.
			medias (I-J)	
Tamhane	(0,2]	(2,3]	-0,227	0,999
		(3,4]	-0,286	0,997
		(4,5]	-0,673	0,553
		>5	-2,325*	0,000
		<hr/>		
	(2,3]	(0,2]	0,227	0,999
		(3,4]	-0,059	1,000
		(4,5]	-0,445	0,770
		>5	-2,098*	0,000
	<hr/>			
	(3,4]	(0,2]	0,286	0,997
		(2,3]	0,059	1,000
		(4,5]	-0,387	0,893
		>5	-2,039*	0,000
	<hr/>			
	(4,5]	(0,2]	0,673	0,553
(2,3]		0,445	0,770	
(3,4]		0,387	0,893	
>5		-1,653*	0,004	
<hr/>				
>5	(0,2]	2,325*	0,000	
	(2,3]	2,098*	0,000	
	(3,4]	2,039*	0,000	
	(4,5]	1,653*	0,004	

## 4.2. Sustracciones en las que se cometieron más errores

De las 10700 sustracciones analizadas se observó que los 535 estudiantes, al completar cada uno de ellos el cuestionario, cometieron errores en 1258 sustracciones, lo que supone el 11,76% del total de ellas. Estos errores se distribuyeron por sustracciones de la siguiente manera (las sustracciones del cuestionario se numeraron de izquierda a derecha y de arriba abajo; Tabla 4.20):

Tabla 4.20

*Número de errores cometidos por los estudiantes universitarios en cada una de las 20 sustracciones del cuestionario*

<b>Sustracción</b>	<b>Número de errores</b>	<b>Porcentaje de los cuestionarios</b>
Sustracción 13	128	23,9% <sup>a</sup>
Sustracción 11	107	20,0%
Sustracción 9	94	17,6%
Sustracción 19	91	17,0%
Sustracción 20	88	16,4%
Sustracción 10	85	15,9%
Sustracción 15	82	15,3%
Sustracción 18	80	15,0%
Sustracción 16	76	14,2%
Sustracción 17	70	13,1%
Sustracción 14	53	9,9%
Sustracción 5	52	9,7%
Sustracción 12	47	8,8%
Sustracción 3	41	7,7%
Sustracción 1	40	7,5%
Sustracción 7	39	7,3%
Sustracción 6	31	5,8%
Sustracción 8	26	4,9%
Sustracción 2	20	3,7%
Sustracción 4	8	1,5%
<b>Total sustracciones erróneas: 1258</b>		

<sup>a</sup> Por ejemplo, la sustracción 13 se resolvió erróneamente por 128 estudiantes universitarios de los 535 que completaron los cuestionarios, lo que supone el 23,9% de los estudiantes universitarios.

Las diez sustracciones que generaron un mayor número de errores permiten observar diversos aspectos (Tabla 4.21).

Tabla 4.21

*Sustracciones ordenadas por las que los estudiantes universitarios cometieron más errores (solo las 10 con más errores)*

Sust. <sup>a</sup> . 13	Sust. 11	Sust. 9	Sust. 19	Sust. 20	Sust. 10	Sust. 15	Sust. 18	Sust. 16	Sust. 17
1813	6591	716	10012	8001	1564	9007	2006	4015	702
-215	-2697	-598	-214	-43	-887	-6880	-42	-607	-108

<sup>a</sup> Sust. = Sustracción.

Una causa que pudo haber influido en los errores cometidos por los estudiantes universitarios es la estructura de las sustracciones del cuestionario. Atendiendo a las sustracciones que incluyen llevadas, ya se ha explicado que se necesitaba realizar llevadas para resolverlas en 17 de las 20, 17 incluyen estas 10 en las que se cometieron más errores. Además de ello, por ejemplo, en las sustracciones 13, 11 y 19 se puede descubrir que en todas ellas existe una columna donde minuendo y sustraendo incluyen el mismo número (el 1 en unos casos y el 9 en otros), en las sustracciones 19, 20, 15 y 18 hay varios ceros seguidos en el minuendo y en las sustracciones 13, 19 y 10 hay un 1 en el minuendo y un espacio en blanco en el sustraendo, aunque únicamente en la 10 ese 1 se ve afectado por una llevada. La sustracción 9 no se ajusta a ninguna de esas estructuras pero, al igual que algunas de las anteriores, involucra 1 y 9 (1 sobre 9). Profundizando en esas peculiaridades estructurales, a continuación se organizan las 10 sustracciones en un gráfico donde se relacionan el minuendo y el sustraendo de todas ellas (m = minuendo, s = sustraendo, S = Sustracción, Figura 4.5).

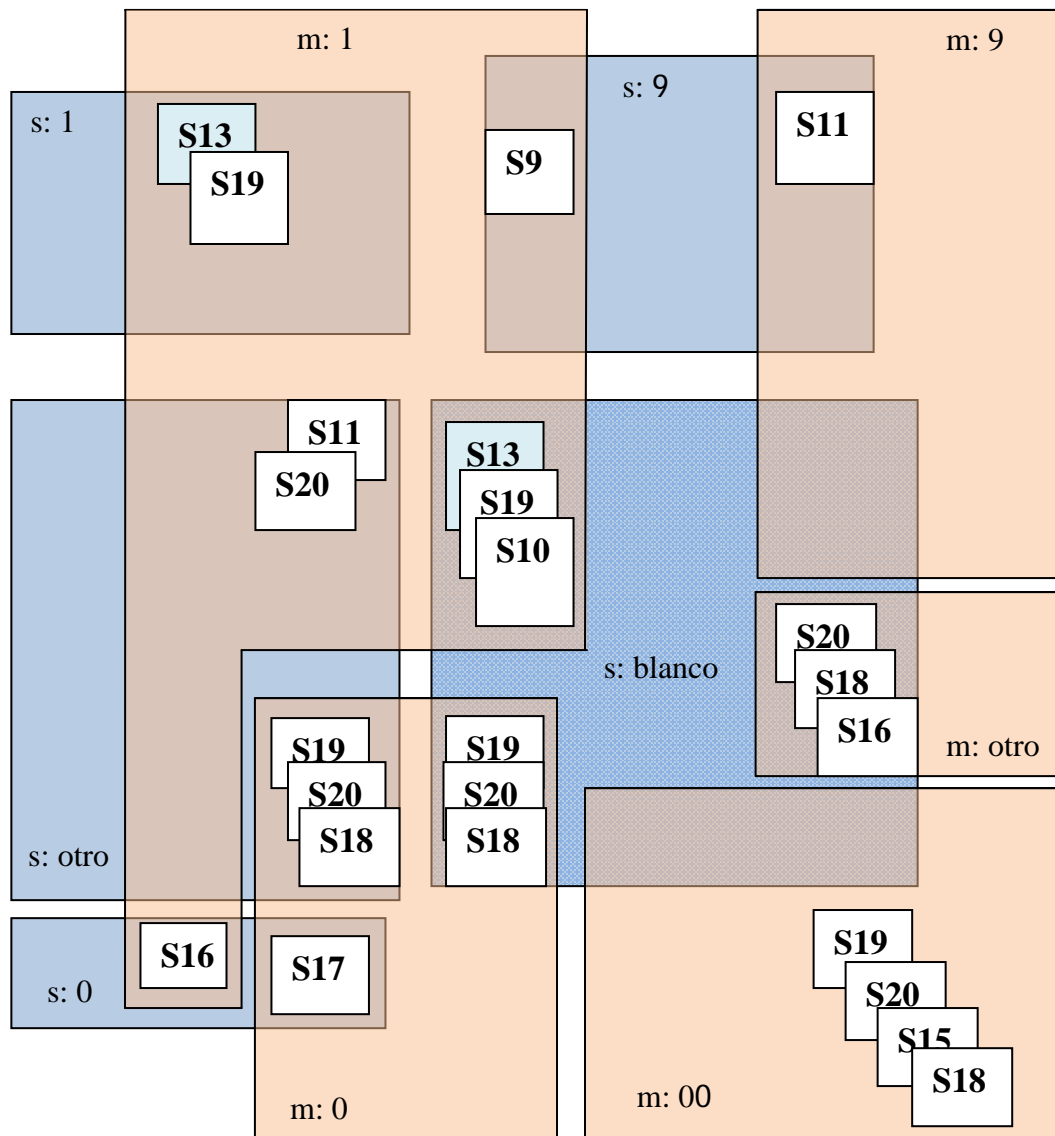


Figura 4.5. Organización de las 10 sustracciones en que se cometieron más errores en función de su estructura atendiendo a los números que incluyen en el minuendo y en el sustraendo.

Nota: m: 1, 9, 0, 00 y otro, significa que la sustracción contiene en el minuendo, en cada caso, un 1, 9, 0, 00, u otro valor distinto de los anteriores.

s: 1, 9, 0, 00 y otro, significa que la sustracción contiene en el sustraendo, en cada caso, un 1, 9, 0, 00, u otro valor distinto de los anteriores.

**SX**, Sustracción número X

La Figura 4.5 muestra que, atendiendo al sustraendo, el mayor número de sustracciones en que se cometieron errores tenían una estructura en que el sustraendo tiene menos dígitos que el minuendo (6 de ellas). Referido al minuendo, el mayor número de sustracciones en que se cometieron más errores tenían una estructura que incluía un 1 en el minuendo (7 de ellas).

En otro sentido, considerando los tipos de errores que se produjeron en cada una de esas 10 sustracciones en que se cometieron más errores se obtiene lo siguiente (sólo se reflejan los 7 errores que más se produjeron, Tabla 4.22; para ver a qué se corresponde cada tipo de error, ver Tabla 4.23 y Tabla 4.24).

Tabla 4.22

*Tipos de errores que se cometieron en las 10 sustracciones en las que se produjeron más errores*

Número de sustracción	Total errores (%)	Tipos de errores más frecuentes	Ejemplo de error en cada sustracción	Número de errores de cada tipo
<b>Sustracción 13:</b> 1813-215=1598	128 (23.9%)	Error 81	1813 – 215 = 598 1813 – 215 = 608	56 (25,11%)
		Error 12	181 3 – 215 = 598	50 (22,42%)
		Error 5	1813 – 215 = 1608	22 (9,83%)
		Error 122	1813 – 215 = 1597	12 (5,38%)
		Error 19	1813 – 215 = 1607	11 (4,93%)
		Error 6	1813 – 215 = 1618	10(4,48%)
		Error 33	1813 – 215 = 1698	10(4,48%)
<b>Sustracción 11:</b> 6591 – 2697 =3894	107 (20.0%)	Error 40	6591 – 2697 = 3904	37 (15,16%)
		Error 69	6591 – 2697 = 3994	33 (13,52%)
		Error 122	6591 – 2697 = 3899	28 (11,47 %)
		Error 45	6591 – 2697 = 3804	13 (5,33%)
		Error 89	6591 – 2697 = 3894	10 (4,1%)
		Error 301	6591 – 2697 = 3794	10(4,1%)
		Error 7	6591 – 2697 = 4014	8(3,28%)
<b>Sustracción 9:</b> 716 – 598=118	94 (17.6%)	Error 33	716 – 598 = 218	40 (30,1%)
		Error 122	716 – 598 = 116	22 (16,54%)
		Error 302	716 – 598 = 114	8 (6,01%)
		Error 19	716 – 598 = 117	5 (3,76%)
		Error 32	716 – 598 = 208	4 (3,01%)
		Error 40	716 – 598 = 128	4(3,01%)
		Error 47	716 – 598 = 108	4 (3,01%)
<b>Sustracción 19:</b> 10012-214=9798	91 (17.0%)	Error 5	10012 – 214 = 9808	14 (7,33%)
		Error 80	10012 – 214 = 10798	14 (7,33%)
		Error 34	10012 – 214 = 19798	11 (5,76%)
		Error 75	10012 – 214 = 10798	11 (5,76%)
		Error 33	10012 – 214 = 9898	10 (5,24)
		Error 28	10012 – 214 = 19798	9 (4,71)
		Error 122	10012 – 214 = 9998	9 (4,71)

Número de sustracción	Total errores (%)	Tipos de errores más frecuentes	Ejemplo de error en cada sustracción	Número de errores de cada tipo
<b>Sustracción 20:</b> 8001 – 43=7958	88 (16.4%)	Error 77	8001 – 43 = 7968	13 (8,67%)
		Error 34	8001 – 43 = 8958	12 (8%)
		Error 80	8001 – 43 = 8058	12 (8%)
		Error 122	8001 – 43 = 7956	11 (7,33%)
		Error 28	8001 – 43 = 8958	10 (6,67%)
		Error 75	8001 – 43 = 8058	10 (6,67%)
		Error 38	8001 – 43 = 7957	8 (5,33%)
<b>Sustracción 10:</b> 1564 – 887=677	85 (15.9%)	Error 122	1564 – 887 = 657	31 (21,68%)
		Error 44	1564 – 887 = 777	17 (18,89%)
		Error 51	1564 – 887 = 1777	13 (9,09%)
		Error 9	1564 – 887 = 2 451	9 (6,29%)
		Error 29	1564 – 887 = 897	8 (5,59%)
		Error 81	1564 – 887 =787	8 (5,59%)
		Error 80	1564 – 887 = 1677	7 (4,89%)
<b>Sustracción 15:</b> 9007 – 6880 = 2127	82 (15.3%)	Error 34	9007 – 6880 = 3127	30 (19,87%)
		Error 28	9007 – 6880 = 3117	28 (18,54%)
		Error 36	9007 – 6880 = 3227	13 (8,61%)
		Error 39	9007 – 6880 = 3227	13 (8,61%)
		Error 56	9007 – 6880 = 1127	8 (5,3%)
		Error 307	9007 – 6880 = 2113	7 (4,63%)
		Error 306	9007 – 6880 = 2117	7 (4,63%)
<b>Sustracción 18:</b> 2006 – 42 = 1964	80 (15.0%)	Error 12	2006 – 42 = 1954	33 (24,81%)
		Error 56	2006 – 42 = 964	18 (13,53%)
		Error 75	2006 – 42 = 2064	11 (8,27%)
		Error 80	2006 – 42 = 2064	10 (7,52%)
		Error 115	2006 – 42 = 2064	7 (5,26%)
		Error 122	2006 – 42 = 1963	7(5,26%)
		Error 28	2006 – 42 = 2964	6 (4,51%)
<b>Sustracción 16:</b> 4015 – 607 = 3408	76 (14.2%)	Error 12	4015 – 607 = 3308	19 (12,5%)
		Error 90	4015 – 607 = 3308	16 (10,53%)
		Error 86	4015 – 607 = 4308	13 (8,55%)
		Error 80	4015 – 607 = 4408	12 (7,89%)
		Error 40	4015 – 607 = 3418	11 (7,24%)
		Error 65	4015 – 607 = 4608	9 (5,92%)
		Error 115	4015 – 607 = 4408	9 (5,92%)
<b>Sustracción 17:</b> 702 – 108 = 594	70 (13.1%)	Error 34	702 – 108 = 694	26 (23,21%)
		Error 122	702 – 108 = 596	10 (8,93%)
		Error 28	702 – 108 = 694	9 (8,03%)
		Error 76	702 – 108 = 604	7 (6,25%)
		Error 36	702 – 108 = 604	6 (5,36%)
		Error 19	702 – 108 = 603	5 (4,46%)
		Error 22	702 – 108 = 614	4 (3,57%)
<b>Total</b>	<b>901 (71.6%)</b>			

Algunas observaciones:

- En la resta número 11 se observó que la mayoría de las veces los errores 40 y 69 se produjeron de manera conjunta (31 veces).

Tabla 4.23

*Descripción de cada tipo de error (VanLehn, 1990) cometido en las sustracciones efectuadas. (Adaptado de Sánchez, 2005)*

<b>Error</b>	<b>Nombre</b>	<b>Descripción</b>
Error 5	1-1=0 After Borrow	Si una columna tiene un 1 en el minuendo y en el sustraendo y se le pide prestado, el estudiante escribe 0 como respuesta a esa columna.
Error 6	1-1=1 After Borrow	Si una columna tiene un 1 en el minuendo y en el sustraendo y se le pide prestado, el estudiante escribe 1 como respuesta a esa columna.
Error 7	Add Borrow Decrement	En vez de decrementar, el estudiante suma 1, llevándose para la próxima columna si es necesario.
Error 9	Add Instead Of Sub	El estudiante suma en lugar de sustraer.
Error 12	Always Borrow	El estudiante pide prestado en cada columna sin tener en cuenta si es necesario.
Error 19	Borrow Across Top Smaller Decrementing To	Cuando pide a una columna con minuendo menor que el sustraendo, el estudiante añade 10 al dígito del minuendo de la columna actual y decrementa en 1 esa columna. Además el estudiante salta cualquier columna con cero sobre cero o blanco en el proceso de llevada.
Error 22	Borrow Across Zero Over Zero	En lugar de pedir prestado a un cero que está sobre cero, el estudiante salta esa columna para pedir prestado a la siguiente.
Error 28	Borrow From All Zero	Al pedir prestado a uno o más ceros, el estudiante cambia todos los ceros a nueve, pero no hace el decremento del dígito que no lleva cero en el minuendo.
Error 29	Borrow From Botton	El estudiante pide prestado al dígito del sustraendo en lugar de al del minuendo.
Error 32	Borrow From One Is Nine	Al pedir prestado a un 1, el estudiante lo cambia a 9 en lugar de a 0.
Error 33	Borrow From One Is Ten	Al pedir prestado a un 1, el estudiante lo cambia a 10 en lugar de a 0.
Error 34	Borrow From Zero	Al pedir prestado a un cero, el estudiante cambia el cero a 9 pero no continua la captación de recursos en la columna siguiente.
Error 36	Borrow From Zero Is Ten	Al pedir prestado a un cero, el estudiante cambia el cero a 10 pero no hace el decremento en la columna siguiente
Error 38	Borrow Into One =Ten	Cuando una columna de la forma 1-N necesita un préstamo, el estudiante cambia el 1 a 10 en vez de añadirle 10.
Error 39	Borrow No Decrement	Al pedir prestado, el estudiante agrega diez correctamente, pero no hace el decremento en la columna siguiente.



<b>Error</b>	<b>Nombre</b>	<b>Descripción</b>
Error 40	Borrow No Decrement Except Last	El estudiante olvida el decremento a no ser que la columna que ha de ser decrementada sea la columna más a la izquierda en la sustracción.
Error 44	Borrow Into Once	El estudiante hace el primer robo correctamente en un problema. Después solo hace la adición de 10 y omite el decremento.
Error 45	Borrow Skip Equal	Cuando hay que pedir prestado, el estudiante salta las columnas donde el minuendo y sustraendo son iguales.
Error 47	Borrow Treat One As Zero	Al pedir prestado a un 1, el estudiante trata el 1 como si fuera un 0. Esto es, cambia el 1 a 9 y decrementa el número que está a su izquierda.
Error 51	Borrowed From Don't Borrow	Cuando hay dos préstamos seguidos, el estudiante hace el primero correctamente, pero con el segundo no hace el decremento (aunque agrega diez correctamente).
Error 56	Decrement By One Plus Zeros	Cuando hay que pedir prestado a uno o varios ceros, el estudiante decrementa el número a la izquierda del cero(s) con un 1 extra por cada cero al que ha pedido prestado.
Error 65	Diff 0-N=N	En columnas 0-N el estudiante no pide prestado y escribe N como respuesta.
Error 69	Diff N-N=N	Siempre que hay una columna con el mismo número en el minuendo y sustraendo, el estudiante escribe ese número como respuesta.
Error 75	Don't Decrement Zero Over Blank	El estudiante no pide prestado a un cero que está encima de un espacio en blanco.
Error 76	Don't Decrement Zero Over Zero	El estudiante no pide prestado a un cero que está encima de un cero.
Error 77	Don't Decrement Zero Until Botton Blank	Al pedir prestado a un cero, el estudiante cambia el cero a 10 en lugar de a 9, a no ser que el cero esté sobre un espacio en blanco, en cuyo caso lo hace correctamente.
Error 80	Forget Borrow Over Blanks	El estudiante no decrementa la llevada en un número que esté sobre un espacio en blanco.
Error 81	Ignore Leftmost One Over Blank	cuando la columna izquierda del ejercicio tiene un uno que está encima de un espacio en blanco y el estudiante ignora esa columna.
Error 86	N-N After Borrow Causes Borrow	El estudiante pide prestado en columnas de la forma N-N (después de haberle robado).
Error 89	N-N=9 Plus Decrement	Cuando una columna tiene el mismo número en el minuendo y el sustraendo, el estudiante escribe 9 como respuesta y decrementa la siguiente columna a la izquierda, incluso cuando la llevada no es necesaria.
Error 90	Once Borrow Always Borrow	Una vez que el estudiante a pedido prestado, él continúa pidiendo en cada columna del ejercicio.
Error 115	Treat Top Zero As Ten	En una columna 0 – N el estudiante no pide prestado, en su lugar trata el 0 como si fuera un 9.
Error 122	Cálculo	Errores de hechos numéricos, por ejemplo $8-3=6$ .

Tabla 4.24

*Descripción de nuevos tipos de error cometidos en las sustracciones efectuadas observados en este trabajo.*

<b>Error</b>	<b>Nombre</b>	<b>Descripción</b>
Error 301 <sup>a</sup>	Decrementa 2 en la segunda llevada	Cuando se necesitan dos préstamos seguidos, el primero lo hace correctamente, pero en el segundo decrementa dos unidades.
Error 302	Si $T < B$ . Suma en vez de restar y decrementa	Cuando $T < B$ en la columna de las unidades, suma en lugar de restar y decrementa una unidad en la columna siguiente.
Error 306	$N - 0 = N$ y Decrementa	$N - 0 = N$ y decrementa una unidad en la columna siguiente.
Error 307	$N - 0 = 0 - N$ y decrementa	$N - 0 = 0 - N$ y decrementa la llevada en la columna siguiente; si en vez de un cero es otro número realiza sustrayendo menos minuendo y decrementa la llevada en la columna siguiente.

<sup>a</sup> Para realizar el análisis, se utilizó la centena = 3 para numerar y distinguir los errores nuevos observados en este trabajo de los previamente catalogados en VanLehn, 1990.

Por ejemplo, para entender la Tabla 4.22 conjuntamente con la Tabla 4.23, en la sustracción 13 (1813-215) los errores más frecuentes fueron: 81 (56 veces, Ignore Leftmost One Over blank), 12 (50 veces, Always Borrow), 5 (22 veces,  $1 - 1 = 0$  After Borrow), 122 (12 veces, Cálculo), 19 (11 veces, Borrow Across Top Smaller Decrementing To), 6 (10 veces,  $1 - 1 = 1$  After Borrow), 33 (10 veces, Borrow From One Is Ten).

Para descubrir si los errores cometidos en esas 10 sustracciones se repetían se organizó la siguiente tabla (Tabla 4.25):

Tabla 4.25

*Tipos de errores cometidos en las diez sustracciones en que los estudiantes cometieron más errores*

Error	Sust 9	Sust 10	Sust 11	Sust 13	Sust 15	Sust 16	Sust 17	Sust 18	Sust 19	Sust 20
4						x		x	x	x
5				x					x	
6				x				x	x	
9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
12		x		x	x	x	x	x		
19	x	x	x	x		x	x		x	x
22							x			x
28					x		x	x	x	x
29	x	x	x	x	x		x		x	x
32	x								x	
33	x			x			x		x	x
34					x		x	x	x	x
36					x	x	x	x	x	
39	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
40	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
44	x	x	x		x	x	x			x
45			x	x			x			
47	x					x			x	
51		x			x					
56					x		x	x	x	x
61	x		x	x		x	x		x	x
65					x	x		x	x	x
69			x							
75								x	x	x
76							x			
77							x		x	x
80		x				x		x	x	x
81		x		x					x	
86						x				
89			x	x			x		x	
90				x		x				
100	x	x	x	x		x	x	x	x	x
109							x	x		
115						x		x	x	x
122	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
301			x	x			x			
302	x	x	x						x	x
304	x	x	x	x		x	x		x	x
306					x					
307					x					
308			x							
<b>Total</b>	<b>14</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>18</b>	<b>15</b>	<b>18</b>	<b>23</b>	<b>18</b>	<b>27</b>	<b>22</b>

Estos resultados muestran que las 10 sustracciones generaron un número similar de tipos de errores en cantidad, aunque sobresalen la 17, 19 y 20 que generaron un número más grande que la mayor parte de ellas.

Si se observa la Tabla 4.25, aparecen errores que no han sido explicados en estudios previos (su significado se explica en la Tabla 4.26).

Tabla 4.26

Definición de algunos errores que no habían aparecieron previamente

<b>Error</b>	<b>Nombre</b>	<b>Descripción</b>
Error 4	0 – N = N Except After Borrow	El estudiante cree que 0 – N es N excepto cuando a la columna se le ha pedido prestado.
Error 61	Decrement On First Borrow	La primera columna que necesita un préstamo es decrementada antes de hacer la sustracción.
Error 100	Smaller From Larger With Borrow	Cuando hay que pedir, el estudiante hace el decremento correctamente, pero sustrae el dígito menor del mayor.
Error 109	Top Instead Of Borrow From Double Zero	Si una columna necesita pedir a múltiples ceros, el estudiante escribe en dígito del minuendo como respuesta a esa columna.
<b>Nuevos errores observados en esta investigación</b>		
Error 304	Si $T < B$ Incrementa en 1 las unidades y decrementa la llevada	Cuando $T < B$ en la columna de las unidades incrementa en uno el resultado y decrementa la llevada en la siguiente columna
Error 308	Error 40 + Error 69	Cuando el estudiante comete el error 40 y 69 conjuntamente

En otro sentido, comparando estos resultados con los de estudiantes de Primaria, las 10 sustracciones en las que los estudiantes universitarios cometieron más errores al completarlas fueron casi las mismas que las sustracciones en las que se cometieron más errores por estudiantes de Primaria, como reflejan algunos estudios. Por ejemplo, en los resultados de Sánchez (2005), utilizando el mismo cuestionario de VanLehn, las sustracciones en que los estudiantes de Primaria cometieron más errores, ordenadas de mayor a menor número de errores, fueron 19, 20, 18, 17, 13, 16, 10, 15, 11, 12, 14, 9, 8, 6, 5, 7, 3, 2, 4, 1. En concreto, tanto en estudiantes universitarios como de

Primaria, las 10 sustracciones en las que se cometieron más errores fueron las mismas, salvo el orden, en los casos 19, 20, 18, 17, 13, 16, 10, 15, 11, a lo que se añade la 9 para estudiantes universitarios y la 12 para estudiantes de Primaria. La sustracción 9 es aquella que parecía seguir un formato diferente a las demás según se ha explicado anteriormente. Además, en ambos casos, entre las cinco sustracciones en que se cometieron más errores están la 13, 19 y 20.

Relacionando estos resultados de las sustracciones en que los estudiantes universitarios cometieron más errores con las variables del estudio, en concreto sexo, edad, centro, curso, estudios previos y tiempo empleado, no hubo diferencias significativas en ninguno de los casos salvo en la variable sexo.

Referido al sexo, al contrastar medias se mostraron diferencias significativas en la sustracción 11 ( $0,02 < 0,05$ ), una en la que se produjeron más errores, 6591-2697, donde hay que pedir prestado a una columna del tipo 9 sobre 9. A un nivel de significación del 90%, además, se establecieron diferencias significativas en las sustracciones 8 ( $0,05 < 0,1$ ) y 10 ( $0,09 < 0,1$ ), esta última está también entre aquellas en las que más errores se cometieron. Aunque no de manera significativa, se observa que en la mayoría de las sustracciones, salvo en las 5, 6 y 18, las mujeres resolvieron las sustracciones con un porcentaje mayor de respuestas correctas que los hombres.

### **4.3. Tipología de los errores cometidos por los estudiantes universitarios**

La tipología de los errores cometidos en las 1258 sustracciones que los estudiantes universitarios efectuaron erróneamente, de las 10700 sustracciones que completaron, se organizaron en función de cada tipo de error, ordenados por los que más se produjeron, siguiendo la categorización de VanLehn (1990, sólo se consideraron los 50 errores que más aparecieron; Tabla 4.27).

Para analizar si esos tipos de errores estaban relacionados con las características de las sustracciones en las que se produjeron, se organizaron en función de ello (sólo se consideraron las 10 sustracciones en las que se produjeron más errores, Tabla 4. 28).

Tabla 4.27

*Tipos de errores que se cometieron en las sustracciones que completaron los estudiantes universitarios organizados por las veces que aparecieron*

Error <sup>a</sup>	Nombre	Frec	% de las 1.258 que presentan este error
Error 122	Cálculo	212	16,85
Error 12	Always borrow	140	11,13
Error 39	Borrow no Decrement	96	7,63
Error 34	Borrow From Zero	94	7,47
Error 40	Borrow no Decrement except Last	91	7,23
Error 80	Forget Borrow Over Blanks	78	6,20
Error 81	Ignore Left Most One Over Blank	71	5,64
Error 28	Borrow From All Zero	67	5,33
Error 33	Borrow From One Is Ten	67	5,33
Error 19	Borrow Across Top Smaller Decrementing To	54	4,29
Error 94	Smaller From Larger	50	3,97
Error 115	Treat Top Zero As Ten	50	3,97
Error 9	Add Instead of Sub	48	3,82
Error 69	Diff $N - N = N$	48	3,82
Error 5	$1 - 1 = 0$ After Borrow	47	3,74
Error 7	Add Borrow Decrement	43	3,42
Error 29	Borrow From Bottom	39	3,10
Error 44	Borrow Only Once	37	2,94
Error 56	Decrement By One Plus Zeros	34	2,70
Error 302	Si $T < B$ suma en vez de restar esa columna y decrementa	34	2,70
Error 65	Diff $0 - N = N$	32	2,54
Error 75	Don't decrement zero over blank	32	2,54
Error 308	$E40 + E69$	32	2,54
Error 304	Si $T < B$ Incrementa 1 las unidades y decrementa .	31	2,46
Error 100	Smaller From Larger With Borrow	30	2,38
Error 36	Borrow from zero is ten	29	2,30
Error 4	$0 - N = N$ except after borrow	27	2,15
Error 86	$N - N$ after borrow causes borrow	26	2,07
Error 90	Once borrow always borrow	26	2,07
Error 89	$N - N = 9$ plus decrement	25	1,99
Error 123 <sup>b</sup>	No diagnosticable	24	1,91
Error 61	Decrement on first borrow	21	1,67
Error 6	$1 - 1 = 1$ after borrow	20	1,56
Error 79	Double Decrement One	19	1,51
Error 95	Smaller From Larger Except Last	19	1,51
Error 77	Don't decrement zero until bottom blank	18	1,43
Error 8	Add Borrow Decrement Without Carry	17	1,35
Error 51	Borrowed From Don't Borrow	17	1,35
Error 20	Borrow Across Zero	15	1,19
Error 45	Borrow Skip Equal	15	1,19
Error 306	$N - 0 = N$ y Decrementa La Columna Siguiente	15	1,19
Error 307	$N - 0 = 0 - N$ y decrementa la columna siguiente	15	1,19
Error 38	Borrow Into One = ten	14	1,11
Error 47	Borrow Treat One As Zero	14	1,11
Error 301	Dos prestamos seguidos, en el segundo decrementa 2.	13	1,03
Error 24	Borrow Add Is Ten	12	0,95
Error 54	Copy Top In Last Column If borrowed From	12	0,95
Error 108	Top Instead Of Borrow	12	0,95
Error 30	Borrow From Botton Instead Of Zero	11	0,87
Error 50	Borrow won't recurse Twice	11	0,87

<sup>a</sup> Se utilizó la centena = 3 para catalogar los nuevos errores observados en esta investigación.

<sup>b</sup> No diagnosticable.

Tabla 4.28

*Tipos de errores que se cometieron en las 10 sustracciones en que se cometieron más errores*

Error	Sust 9	Sust 10	Sust 11	Sust 13	Sust 15	Sust 16	Sust 17	Sust 18	Sust 19	Sust 20	Total
4						x		x	x	x	4
5				x					x		2
6				x				x	x		3
9	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
12		x		x	x	x	x	x			6
19	x	x	x	x		x	x		x	x	8
22							x			x	2
28					x		x	x	x	x	5
29	x	x	x	x	x		x		x	x	8
32	x								x		2
33	x			x			x		x	x	5
34					x		x	x	x	x	5
36					x	x	x	x	x		5
39	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
40	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
44	x	x	x		x	x	x			x	7
45			x	x			x				3
47	x					x			x		3
51		x			x						2
56					x		x	x	x	x	5
61	x		x	x		x	x		x	x	7
65					x	x		x	x	x	5
69			x								1
75								x	x	x	3
76							x				1
77							x		x	x	3
80		x				x		x	x	x	5
81		x		x					x		3
86						x					1
89			x	x			x		x		4
90				x		x					2
100	x	x	x	x		x	x	x	x	x	9
109							x	x			2
115						x		x	x	x	4
122	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10
301			x	x			x				3
302	x	x	x						x	x	5
304	x	x	x	x		x	x		x	x	8
306					x						1
307					x						1
308			x								1

Se observa que, en esas 10 sustracciones en las que se produjeron más errores, en todas ellas se produjeron el error 9, error 39, error 40 y error 122. Además, en 7 o más de esas 10 sustracciones se produjeron el error 19, error 29, error 44, error 61, error 100 y error 304.

Una vez analizados los tipos de errores producidos por los estudiantes universitarios, intentado descubrir si la tipología de errores cometidos por esos estudiantes universitarios tenía relación con aspectos relacionados con el momento en que se aprendió el algoritmo, es decir, si la tipología de errores se mantiene en el tiempo, inicialmente los resultados obtenidos se compararon con los que estudiantes de Primaria cometieron sistemáticamente (Sánchez, 2005) cuando completaron el mismo cuestionario de VanLehn (1990; Tabla 4.29).



Tabla 4.29

*Comparación de los tipos de errores más frecuentes que los estudiantes universitarios cometieron en las sustracciones que completaron con relación a estudiantes de Primaria en el estudio de Sánchez (2005).*

Error	Frec. E. U. <sup>a</sup>	Orden según frecuencia E. U. <sup>a</sup>	Orden según frecuencia S <sup>b</sup>	Errores Sistemáticos <sup>c</sup>
Error 122	212	1	1	
Error 12	140	2	6	*
Error 39	96	3	2	*
Error 34	94	4		*
Error 40	91	5		*
Error 80	78	6	18	*
Error 81	71	7		*
Error 28	67	8		*
Error 33	67	9		*
Error 19	54	10	4	
Error 94	50	11	21	*
Error 115	50	12		
Error 9	48	13	10	
Error 69	48	14		
Error 5	47	15	3	*
Error 7	43	16	19	
Error 29	39	17		
Error 44	37	18		*
Error 56	34	19		
Error 302 <sup>d</sup>	34	20		
Error 65	32	21	20	*
Error 75	32	22		
Error 308	32	23		
Error 304	31	24		
Error 100	30	25		
Error 36	29	26	12	*
Error 4	27	27		
Error 85	26	28		
Error 89	26	29		
Error 88	25	30		
Error 123 <sup>e</sup>	24	31		
Error 61	21	32		
Error 6	20	33	17	*
Error 79	19	34		
Error 95	19	35		
Error 77	18	36		
Error 8	17	37	16	
Error 51	17	38		
Error 20	15	39	5	
Error 45	15	40		
Error 306	15	41		
Error 307	15	42		
Error 38	14	43		*
Error 47	14	44		
Error 301	13	45		

<sup>a</sup>EU = Estudiantes Universitarios, <sup>b</sup>S=Sánchez (2005), <sup>c</sup>Errores sistemáticos en estudiantes de Educación Primaria según Sánchez, 2005. <sup>d</sup>Se utilizó la centena = 3 para catalogar los nuevos errores observados en esta investigación. <sup>e</sup>No diagnosticable.

Se observa que la mayor parte de los errores más frecuentes que cometieron los estudiantes universitarios al realizar sustracciones coincidían con aquellos que se produjeron en Educación Primaria en el estudio de Sánchez (2005). Aún más, como el estudio de Sánchez (2005) relacionó los errores producidos por los estudiantes durante los diversos cursos de Educación Primaria, para descubrir aquellos que se mantenían durante esos años de escolarización de manera que se convertían en errores sistemáticos, los resultados de este trabajo muestran que los errores que cometieron los estudiantes universitarios fundamentalmente coincidían con aquellos errores considerados sistemáticos (considerar que el error 76, observado en Sánchez 2005 como error sistemático, no aparece en la Tabla 4.29 ya que en este estudio con estudiantes universitarios se observó en sólo 7 ocasiones y ocupó la posición 60 en cuanto a frecuencia de aparición). Esto es interesante porque parece indicar que los errores cometidos en Educación Primaria se mantienen con el tiempo a pesar de los años pasados desde que los estudiantes universitarios cursaron la Educación Primaria obligatoria y la multitud de ocasiones que, con seguridad, realizaron sustracciones con diversos objetivos, tanto en su vida cotidiana como académica.

Posteriormente, incidiendo en la sistematicidad, los resultados obtenidos en este trabajo se compararon con los de los estudios existentes que tuvieron como objetivo analizar los errores cometidos al efectuar sustracciones en la línea de este trabajo, en concreto, los de Young y O'Shea (1981), Brown and VanLehn (1982) que denominaron Teoría de la Reparación (Repair Theory), VanLehn (1990) que llamó Teoría de Sierra (Sierra's Theory), y Sánchez (2005). Los resultados comparativos pueden verse en la Tabla 4.30, en la que se ha añadido una columna con los resultados totales numéricos del estudio que se presenta. Hay que mencionar que en cada uno de los resultados de estas investigaciones aparecen otros tipos de errores, usualmente diferentes en cada caso y en algún caso más frecuentes que los que se consideran, pero para poder estudiar la sistematicidad solo se consideraron aquellos tipos de errores que se generaron en todos los trabajos y que fueron, precisamente, los señalados en VanLehn (1990, p. 202) y que, posteriormente, consideró Sánchez (2005).

Tabla 4.30

Comparación de los errores observados en los trabajos existentes que tuvieron como objetivo analizar los errores cometidos al efectuar sustracciones

(Adaptada de Sánchez, 2005)

YO <sup>a</sup>	RT <sup>b</sup>	ST <sup>c</sup>	S <sup>d</sup>	EU <sup>e</sup>	Frec EU	Bug
		+	+	+	4	Always-Borrow-Left
		+		+	4	Blank-Instad-Of-Borrow
		+		+	3	Borrow-Across-Second-Zero
+	+	+	+	+	15	Borrow-Across-Zero
		+		+	4	Borrow-Don't-Decrement-Unless-Botton-Smaller
		+		+	10	Borrown-From-One-Is -Nine
		+	+	+	67	Borrow-From-One-Is-Ten
+	+	+	+	+	94	Borrow-From-Zero
+				+	67	Borrow-From-all-Zero
	+	+	+	+	29	Borrow-From-Zero-Is-Ten
	+	+	+	+	96	Borrow-No-Decrement
		+	+	+	91	Borrow-No-Decrement-Except-Last
		+		+	14	Borrow-Treat-One-As-Zero
	+			+	2	Can't -Subtract
		+			0	Doesn't Borrow-Except-Last
+				+	3	Diff-0 - N = 0
+			+	+	32	Diff-0 - N = N
+			+	+	48	Diff-N - N = N
+				+	7	Diff-N - 0 = 0
		+			0	Don't- Decrement-Zero
		+	+	+	78	Forget-Borrow-Over-Blacks
		+		+	5	N-N-Causes-Borrow
		+		+	2	Into-Do-Units
	+	+		+	10	Quit-When-Botton-Blank
+	+	+		+	50	Smaller-From-Larger
		+		+	19	Smaller-From-Larger-Except-Last
	+	+		+	5	Smaller-From-larger-Instead-Of-Borrow-From-Zero
		+		+	10	Smaller-From-larger-Instead-Of-Borrow-Unless-Botton-Smaller
		+			0	Stops-Borrow-at-Multiple-Zero
+	+	+			0	Stops-Borrow-at-Zero
	+			+	2	Stutter-Subtract
	+	+		+	6	Top-Instead-Of-Borrow-From-Zero
+	+				0	Zero-Instead-Of-Borrow
<b>10</b>	<b>12</b>	<b>25</b>	<b>10</b>	<b>28</b>		<b>Total</b>

<sup>a</sup>YO = Young y O'Shea 1981, <sup>b</sup>RT = Repair Theory Brown and VanLehn (1982), <sup>c</sup>ST= Sierra's Theory VanLehn (1990), <sup>d</sup>S=Sánchez (2005), <sup>e</sup>EU = Estudiantes Universitarios

Se observa que los estudiantes universitarios de este trabajo cometieron la mayor parte del tipo de errores que los estudiantes de Primaria realizaron según como se refleja en estudios previos, concretamente 28 de los 33 considerados. Además, en este trabajo hubo la mayor cantidad y variedad de tipos de errores cometidos si se relaciona con los estudios previos. Llama la atención el error 34, uno de los más frecuentes en estudios previos.

Ahondando en esas coincidencias, se observa que el error 20 (Borrow-Across-Zero) y el error 34 (Borrow-From-Zero), que surgieron en todos estos trabajos, en ambos casos incluyen sustracciones relacionadas con el cero. Otros errores significativos son el error 36 (Borrow-From-Zero-Is-Ten), también relacionado con el cero, el error 39 (Borrow-No-Decrement), que implica decrementar la llevada y el error 94 (Smaller-From-Larger), el que se produce al restar el dígito menor del mayor independientemente de su posición en el minuendo o sustraendo.

## **CAPÍTULO 5. DISCUSIÓN**

En este apartado se discuten los resultados obtenidos cuando se analizaron los cuestionarios completados por estudiantes universitarios que incluían realizar 20 sustracciones. Aunque no se conocen estudios que analicen los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones, los resultados se compararán principalmente con otros trabajos que analizaron los errores que se producían al realizar sustracciones así como su tipología siguiendo a VanLehn (1990), especialmente en estudiantes de Primaria como, por ejemplo, los de Brown y Burton (1978), VanLehn (1990), Young y O'Shea (1981), Sánchez (2005) y López y Sánchez (2007, 2008).



En los resultados obtenidos, al analizar las respuestas de los 535 estudiantes universitarios cuando completaron el cuestionario de VanLehn (1990), se observa que únicamente el 24,11% de los estudiantes universitarios resolvieron correctamente las 20 sustracciones de su cuestionario, una cuarta parte. Si se acepta que cometer un error en una de ellas puede ser entendible, el 46,54%, de los estudiantes universitarios cometió un error como mucho, aproximadamente la mitad de la muestra, e incluso si puede aceptarse que podían cometer dos errores como máximo, lo consiguió el 64,67% de los estudiantes universitarios, unas dos terceras partes. En este último caso más benévolo, cometer como máximo dos errores, lleva a admitir que una tercera parte de los estudiantes universitarios no lo lograron, una cifra bastante elevada si se considera la sustracción como una de las operaciones elementales fundamentales que se aprende en las primeras edades escolares de la enseñanza obligatoria debido, fundamentalmente, a que es algo que se utiliza de manera usual en la vida ordinaria.

Estos resultados que indican que el 75,89% de los estudiantes universitarios cometieron errores al efectuar sustracciones son similares a los obtenidos con estudiantes de Primaria según se ha explicado anteriormente. Por

ejemplo, los estudiantes que participaron en el estudio de Brown y Burton (1978), un 40% completaron alguna de las sustracciones de forma errónea, las dos terceras partes en el de Young y O'Shea (1981) y el 73,4% en el estudio de Sánchez (2005).

Referido a los estudiantes universitarios, este hecho parece asombroso y conduce a preguntas tales como: ¿Los estudiantes que no aprenden a utilizar el algoritmo de la sustracción en Educación Primaria siguen sin saber utilizarlo completamente en cursos superiores e incluso cuando llegan a la Universidad? ¿No han existido filtros después de la enseñanza obligatoria que hayan obligado a esos estudiantes a perfeccionar la ejecución del algoritmo de la sustracción? Y, por otra parte, el hecho de que no se conozca el algoritmo en profundidad, ¿no ha sido inconveniente para que los estudiantes sigan superando cursos de manera suficiente? Sin olvidar, además, que se supone que estos estudiantes universitarios son un subgrupo de los estudiantes de Educación Primaria, los que cursan una enseñanza obligatoria para todos los ciudadanos, formado por aquellos que acceden a la Universidad, supuestamente aquellos con mayor capacidad intelectual, de trabajo o interés por seguir perfeccionando sus estudios y especializándose en algunos en concreto.

Estos resultados nos hacen dudar de si realmente la operación de sustracción es algo que realmente se utiliza en la vida ordinaria de manera habitual. De ser así, al tratarse de una operación elemental, no es entendible que se produzca un número tan elevado de errores. Quizás hoy en día, la ayuda de calculadoras hace que la necesidad de realizar sustracciones habitualmente en la vida ordinaria se convierta en algo no absolutamente necesario o, al menos, que los adultos no lo consideran como realmente necesario. Esto precisaría más investigación en diversos sentidos que podría incluso llegar a la posibilidad de replantear la enseñanza y aprendizaje de la sustracciones en la enseñanza obligatoria a través de diferentes metodologías didácticas y, quizás, también la de las demás operaciones elementales. Algunos trabajos recomiendan hacerlo en diferentes sentidos teniendo en cuenta esos aspectos (por ejemplo, Chamoso y Rawson, 2003; Martín Adrián, 2015).



Es obvio que las sustracciones se realizan, o deberían ser realizadas, casi a diario por cualquier ciudadano. Y no siempre se tiene una calculadora disponible o, al menos, no siempre se echa mano de ella para realizarla. Como educadores esta situación debe hacernos reflexionar sobre las causas de estos resultados. Realmente los ciudadanos, no todos pero muchos de ellos, ¿no realizan esas sustracciones habitualmente? ¿No reaccionan ante la gran cantidad de información que aparece constantemente en los medios de comunicación o, cuando realizan tareas cotidianas, muchas de las cuales exigen realizar sustracciones, las aceptan sin más sin siquiera comprobar si la información que reciben es correcta? Si así fuera, esa falta de espíritu crítico y de comprobación de lo que se recibe se convierte en algo preocupante que no se puede dejar como un aspecto anecdótico (más detalle, Sánchez García, 2013).

Referido al sexo, resulta llamativo que las mujeres completaran los cuestionarios con un número menor de errores que los hombres, estableciéndose diferencias significativas entre ambos grupos. No se pueden comparar estos resultados con otros similares al no haber investigaciones con las que poder contrastar los resultados. Muchos estudios con objetivos diversos consideraron el sexo como una de las variables de análisis y, aunque en algunos casos se establecieron diferencias que podían llegar a ser significativas, no siempre eran favorables a un determinado tipo de sexo. Por ejemplo, referido también a estudiantes universitarios, en el trabajo de Perez-Tyteca (2007) se concluyó que los hombres tenían actitudes hacia las matemáticas más favorables que las mujeres. En la investigación de Maroto (2015), también referido a estudiantes universitarios, se afirmó que no se puede decir nada sobre si los estudiantes de la muestra tenían actitudes más favorables hacia las matemáticas en función del sexo.

Otros aspectos llaman la atención. Parece que los estudiantes de Magisterio fueron los que mejor completaron el cuestionario con relación a los de Empresariales y los de Estadística, incluso estableciéndose diferencias significativas con ellos. Este hecho parece interesante. Los estudiantes de Magisterio suelen entrar en la Universidad con un nivel no demasiado elevado

según se constata en sus resultados académicos previos y como corroboran estudios nacionales e internacionales, a la vez que los estudios de Magisterio no suelen ser los más demandados en España, lo que hace que muchos estudiantes que acceden a ellos no lo hagan como primera opción (por ejemplo, Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent y Carrillo, 2015). Esto se comprobó en los estudiantes de este trabajo. Entonces, ¿a qué se deben esos resultados? ¿Podría ser a qué los estudiantes de Magisterio percibieron ese cuestionario como algo cercano a sus intereses, ya que ellos eran conscientes de que es una actividad que deben desarrollar en su futura labor profesional, algo que no sintieron los estudiantes de Empresariales o Estadística? Más investigación sobre ello sería aconsejable. ¿Podría ser que la cercanía de la tarea propuesta a sus intereses les motivara para intentar hacerlo lo mejor posible, algo que no sucedió con los estudiantes de Empresariales o Estadística? Diversos estudios reflejaron que, cuando se proponen tareas en contextos cercanos a los estudiantes, se consiguen mejores resultados con ellos (por ejemplo, Kramarski, Mevarech y Arami, 2002). Ello puede abrir vías a investigaciones futuras. Pero, sin embargo, y por otro lado, ¿no se entendía que la sustracción es algo que debe desarrollar cualquier ciudadano y, por tanto, cercano a todos ellos? Los estudiantes de Empresariales y Estadística también tienen que realizar sustracciones como ciudadanos, así como en su formación como estudiantes universitarios. ¿Esto no les hace percibir que efectuar sustracciones es algo que ellos realizan o deben realizar habitualmente? Más investigación sobre ello sería de interés.

Y, aún más, un subgrupo de los estudiantes de Magisterio, aquellos que acababan de realizar el practicum en los centros de Primaria, obtuvo mejores resultados al completar el cuestionario que los demás estudiantes de Primaria. Ello puede ser debido a lo que se explicaba anteriormente, a que percibieron realizar sustracciones como algo cercano a lo que ellos hacían, lo que vuelve a obligarnos a preguntarnos de nuevo: ¿Realizar sustracciones no es algo cercano para cualquier ciudadano, universitario o no? Es indudable que estos aspectos se alejan en parte de los objetivos más importantes de este trabajo pero, a la

vez, permiten abrir caminos a investigaciones futuras en muy diferentes sentidos.

Por otro lado, en los resultados de este trabajo se establecieron diferencias significativas entre los estudiantes que realizaron el cuestionario con relación al tiempo empleado en realizarlo. En esencia, cuando emplearon más de 5 minutos en completarlo, tuvieron más errores que cuando dedicaron menos de 5 minutos, de manera significativa. Ello parece indicar que, los que sabían realizar sustracciones de manera suficientemente adecuada, las hacían en poco tiempo mientras que, los que encontraban dificultades, no solo emplearon más tiempo sino que cometían más errores de los deseados. Cuando algo se sabe, se realiza sin dudar mientras que, cuando se duda, es porque se tienen dificultades en la aplicación del algoritmo. Ello puede indicar que, realmente, algunos estudiantes universitarios tenían dificultades en aplicar el algoritmo, y dudaban y, además, cometían errores. ¿Es posible que se les hubiera olvidado aplicar el algoritmo? No parece probable. Quizás se trataba de sustracciones más difíciles de resolver desde un punto de vista conceptual, pero la sustracción es una operación elemental que, a esas edades, no debe plantear complicaciones de nivel elevado. Analizar las peculiaridades de las dificultades que plantearon puede apuntar criterios para la enseñanza de la sustracción. ¿No realizan sustracciones usualmente? Quizás estemos llegando a la esencia del problema y es que, a esas edades, no se realizan usualmente sustracciones.

Estos hechos generales pueden concretarse en algunos aspectos. Por ejemplo, analizando las sustracciones en las que los estudiantes universitarios cometieron errores, lo hicieron en el 11,76% de ellas. Estos resultados son inferiores a los desarrollados con estudiantes de Primaria como los del estudio de Bennett (1976), que cometieron errores en el 22,2% de las sustracciones, y los de Sánchez (2005), en el 23,47% de ellas. Esto parece indicar que los estudiantes universitarios, aunque cometieron una cantidad de errores similar a los de Primaria, lo hicieron en un menor número de sustracciones. Esto sugiere que el número de errores cometido por cada estudiante universitario, por término medio, fue menor que los de los de Primaria ya que el porcentaje de estudiantes que cometieron errores, aunque similar en ambos casos, fue

superior en los estudiantes universitarios pero completaron más sustracciones correctamente.

En otro sentido, algunos trabajos mostraron que el proceso de resolución del algoritmo de la sustracción hace que un tipo de sustracción sea más difícil de resolver que otros (Bermejo, 1990). Es decir, la estructura de las sustracciones pudo tener influencia en los errores cometidos. Referido a las sustracciones en las que los estudiantes universitarios cometieron más errores al resolverlas, en los resultados de este trabajo se muestra que, además de que todas exigían pedir prestado como parece lógico, aquellas sustracciones que incluían una columna donde minuendo y sustraendo tenían el mismo dígito, había varios ceros seguidos o un uno en el minuendo, o el sustraendo tenía menos dígitos que el minuendo, fueron las que resultaron ser las más difíciles de resolver por los estudiantes universitarios. Esto es interesante porque podría abrir caminos para realizar propuestas educativas.

No se conocen investigaciones con estudiantes universitarios con las cuales poder comparar esos resultados. Pero es posible hacerlo con aquellas sustracciones en las que estudiantes de Primaria cometieron más errores como, por ejemplo, las del trabajo de Sánchez (2005), que fueron casi las mismas que las de este trabajo lo que significa que las sustracciones tenían las mismas características explicadas anteriormente (hay que recordar que se utilizó el mismo cuestionario de VanLehn, 1990). Profundizando en la estructura de esas sustracciones, la dificultad de resolverlas fue, debido principalmente a, que eran inversiones que exigían pedir prestado (algo que corroboró el estudio de Cebulski y Bucher, 1986), y a la dificultad de entendimiento del sistema posicional y del cero, como dígito y como número (Fiori y Zuccheri, 2005, Sánchez, 2005). Ello puede tener implicaciones educativas para considerar esos aspectos como fundamentales en la instrucción y aprendizaje del algoritmo de la sustracción. El método utilizado para aplicar el algoritmo de la sustracción también puede ser importante (en el trabajo de Fiori y Zuccheri, 2005, los estudiantes que resolvieron las sustracciones con el algoritmo australiano cometieron menos errores que los que utilizaron el algoritmo tradicional, aunque no existieron diferencias significativas). Hay que tener en cuenta que se

ha escrito mucho sobre la complejidad teórica que presenta una determinada sustracción para resolverla pero algo menos sobre los resultados obtenidos al efectuar sustracciones que muestran la dificultad para resolverlas desde la práctica real.

Por otro lado, en algunas de las sustracciones que realizaron los estudiantes universitarios, el resultado obtenido era superior al minuendo y eso, que debería llamar la atención a cualquier persona, conozca o no adecuadamente el algoritmo de la sustracción, parece que no se produjo en muchos estudiantes universitarios. Este hecho también se originó en los resultados obtenidos al analizar sustracciones que efectuaron estudiantes de Primaria (por ejemplo, Fiori y Zuccheri, 2005).

Esa ausencia de sentido numérico en los estudiantes de Primaria puede suponer una escasa formación en ese sentido pero, al producirse en los momentos en que estaban aprendiendo el algoritmo, puede hacerlo parcialmente entendible, pero tiene difícil justificación con estudiantes universitarios al ser un proceso cuyo desarrollo debería estar suficientemente asentado. Podría ser debido a que los estudiantes universitarios no recibieron una formación adecuada en ese sentido aunque el paso de los años debería haber perfeccionado ese aspecto al tratarse de una operación elemental; sin embargo parece que no fue así. El hecho de provenir estos estudiantes de contextos educativos y formación diferentes, en lo relativo al proceso de aprendizaje del algoritmo de la sustracción, puede hacer pensar que ese problema es más general de lo que inicialmente podríamos indicar por lo que, quizás, se debe centrar la reflexión sobre la enseñanza inicial en las etapas de educación obligatoria donde se constata, en diferentes estudios como el llevado a cabo por Resnick (1987), que muchos niños interiorizan sólidamente la construcción de significados conceptuales del número de forma unitaria sin comprender el lugar posicional que ocupa el dígito dentro de la cantidad. Este hecho, trasferido a los impactantes resultados encontrados en esta investigación, hace que al menos se pueda dudar de los métodos instructivos llevados a cabo en las etapas de educación obligatoria para la enseñanza del

algoritmo. Por ello se deberían dirigir los esfuerzos hacia metodologías didácticas adecuadas al objeto de mejorar el aprendizaje de esta operación.

Por otra parte, el ejemplo anterior hace pensar que los alumnos universitarios que cometieron errores no habían comprendido de manera significativa los elementos que componen la base conceptual del algoritmo, y tampoco las relaciones entre los mismos, así como el espacio donde se incorporan las acciones para conseguir resolverlo de manera eficiente.

Concretamente, cuando alguien realiza una operación elemental o resuelve un problema, al terminar de hacerlo es lógico que se plantee si el resultado conseguido es adecuado al planteamiento de la operación o del problema que se le ha propuesto resolver (lo que se puede entender como la última fase de resolución de problemas de Polya, 1965, por ejemplo, visión retrospectiva). Los resultados de esta investigación hacen pensar que estos estudiantes universitarios no han tenido docentes que les hayan instruido de manera suficiente sobre la importancia de desarrollar esa fase de manera que, por ejemplo, en una sustracción nunca es posible que el resultado sea mayor que el minuendo. En caso de que así sucediera en un determinado momento, una adecuada visión crítica nos debería hacer pensar que algún error podría haberse producido en la resolución, lo que se entiende como sentido numérico, algo que se lleva trabajando en países como Reino Unido o Estados Unidos desde hace años pero que todavía debe profundizarse en España (por ejemplo, Baroody, 1989, Chamoso y Rawson, 2003). Sobre este aspecto, autores como Cobb y Wheatley (1988), Cobb, Yackel, Wood, Wheatley y Merkel (1988), Fuson (1992) y Kamii y Lewis (1991), entre otros, incidieron en que la enseñanza del algoritmo debiera ser abordada de manera comprensiva y, sobre todo, haciendo hincapié en el desarrollo del sentido numérico más que en la enseñanza estricta de los pasos del procedimiento. Hacía ahí podrían dirigirse alguna de las propuestas formativas para docentes que enseñan el aprendizaje de la sustracción.

Quizás esa peculiaridad no se produzca únicamente referido al aprendizaje del algoritmo de la sustracción y puede también referirse al aprendizaje de las

operaciones elementales e incluso más, en el desarrollo mismo del aprendizaje matemático y quizás el de las demás asignaturas. Quizás, incluso, esa escasez o ausencia de sentido numérico por parte de los estudiantes universitarios esté englobada en un aspecto más general, al que se hizo referencia con anterioridad: su ausencia de espíritu crítico. Esto, que puede entenderse en un contexto amplio y ambicioso con el objetivo de formar a los estudiantes como futuros ciudadanos, puede también incluir aspectos concretos como algo que se considera aparentemente mecánico, la ejecución de un algoritmo, pero que también exige un espíritu crítico y sentido común.

Referido al tipo de errores que cometieron los estudiantes universitarios cuando realizaron sustracciones, observando los 10 más frecuentes y a los que se añade el de Cálculo y por orden de frecuencia, los que también aparecieron en estudios previos con estudiantes de Primaria fueron (añadiendo en cada caso los estudios en que aparecieron frecuentemente): Cálculo (Bennett, 1976; Sánchez, 2005 y VanLehn, 1990), Always Borrow (Young y O'Shea, 1981 y Sánchez, 2005), Borrow No Decrement (Sánchez, 2005), Borrow From Zero (Brown y Burton, 1978) y Smaller From Larger (Brown y Burton, 1978 y Bennett, 1976, bajo el nombre Take Smaller). Entre esos errores que más cometieron los estudiantes universitarios, los que no se mencionaron en estudios previos fueron: Borrow No Decremen Except Last, Forget Borrow Over Blanks, Ignore Leftmost One Over Blank, Borrow From One Is Ten, Borrow From All Zero y Borrow Across Top Smaller Decementing To.

En concreto, profundizando en lo que significa la tipología de esos errores que los estudiantes universitarios cometieron más frecuentemente, y que coincidieron esencialmente con los que más cometieron los estudiantes de Primaria, algunos reflejan que los estudiantes, al efectuar la sustracción, pidieron prestado en cada columna sin tener en cuenta si eso era realmente necesario o, en otro sentido, añadieron 10 correctamente pero no tuvieron en cuenta la llevada en la columna siguiente (aspectos que corroboraron los resultados de Young y O'Shea, 1981 y Sánchez, 2005). Otro tipo de error cometido abundantemente fue que, para evitar la llevada, los estudiantes sustrajeron el dígito menor del mayor en cada columna sin tener en cuenta su

posición en el minuendo o sustraendo (error frecuente en los estudiantes del estudio de Brown y Burton, 1978; Young y O'Shea, 1981 y Sánchez, 2005). Más errores frecuentes cometidos por los estudiantes universitarios fueron aquellos relacionados con el 0, entre los que destaca Borrow From Zero (y el similar Borrow From All Zero, pero con varios ceros consecutivos), el tercer error más frecuente entre los estudiantes universitarios y el primero entre los de Primaria según Brown y Burton (1978). Es decir, al pedir prestado a un cero, los estudiantes lo cambiaron a 9 correctamente pero no continuaron decrementando la llevada en la columna a la izquierda. Otros errores remarcables fueron que trataron el cero como si fuera 10 o efectuaron  $0-N=N$  (este error apareció frecuentemente con estudiantes de Primaria; Brown y Burton, 1978, Young y O'Shea, 1981 y Sánchez, 2005). En otro sentido, otros errores producidos por los estudiantes universitarios estuvieron relacionados con que el sustraendo tuviese menos dígitos que el minuendo, que hubiese algún 1 en el minuendo o en el sustraendo (Forget Borrow Over Blanks, Ignore Leftmost One Over Blank y Borrow From One Is Ten), columnas donde el minuendo era igual al sustraendo (Sánchez 2005, 2012) y cuando el estudiante sumaba en vez de restar o añadía la llevada en vez de quitarla.

Además, en cuanto a la tipología de errores, al realizar el análisis se observó que los estudiantes universitarios, al efectuar las sustracciones, desarrollaron comportamientos repetitivos que llevaron a establecer nuevas categorías de errores que no se habían considerado anteriormente en estudios previos como, por ejemplo, cuando tenían que hacer varias llevadas consecutivas, en el primer paso restaban uno correctamente de la columna a la izquierda pero, en el segundo paso, restaban dos. De esta manera el número de tipos de errores aumentó en este trabajo respecto a los existentes, lo que supuso que el porcentaje de errores sin categorizar se redujo al 1,95% (frente al 5,88% de Sánchez, 2005 o el 11% de Young y O'Shea, 1981).

Atendiendo a la sistematicidad de los errores que se mantienen con el tiempo, un 13% de los estudiantes del trabajo de Cox (1975) cometieron errores sistemáticos al efectuar el algoritmo de la sustracción y, un año después, un 23% de esos estudiantes seguían cometiendo los mismos errores.



Sander (2001) concluyó que los errores que cometían los estudiantes de su investigación persistían incluso entre los estudiantes más aventajados y Sánchez (2005) mostró los errores que cometían los estudiantes de su trabajo y persistían con el tiempo, como se ha explicado en el capítulo anterior.

En concreto, comparando los resultados de este trabajo con el estudio de Sánchez (2005) se observa que, sin tener en cuenta el error de cálculo, los 8 errores más frecuentes cometidos por los estudiantes universitarios se corresponden con 8 de los 14 errores sistemáticos que se produjeron a lo largo de todos los cursos de 2º a 6º en Primaria (Sánchez 2005). Los seis errores sistemáticos restantes también aparecieron entre los que cometieron los estudiantes universitarios, aunque con menor frecuencia. Esto parece indicar que la tipología de los errores que se cometen al efectuar sustracciones se mantiene con el tiempo. Este resultado sorprende porque no parece lógico que los tipos de errores cometidos en las edades de aprendizaje del algoritmo no se hayan corregido con el tiempo aunque, quizás, puede tener sentido ya que el algoritmo de la sustracción no se volvió a trabajar por los estudiantes universitarios desde que se aprendió.

Por otro lado, algunos de estos errores sistemáticos producidos por los estudiantes universitarios pudieron haber sufrido transformaciones o haber sido englobados en otro tipo de error más general como, por ejemplo, Don't Decrement 0 Over 0, uno de los errores menos frecuentes entre estudiantes universitarios (no pedir prestado a un cero que esté sobre otro cero) pero que parece un caso particular de Borrow No Decrement (no pide prestado), que se sitúa en el segundo más frecuente. Algo parecido podría suceder con el error 1-1=1 After Borrow, que podría haberse transformado en una combinación del mismo tipo de error anterior Borrow No Decrement en combinación con Diff N-N=N. Esto puede suponer, quizás, que decir que la tipología de los errores que se cometen al efectuar sustracciones se mantiene con el tiempo se pueda matizar parcialmente y, para ser más precisos, se puede concluir que la tipología de errores que se cometen al efectuar sustracciones se mantiene con el tiempo excepto en algunos casos en que los errores producidos se transforman en otros tipos de errores con cierta similitud a los anteriores. Además,

corroborando esto, los estudiantes universitarios cometieron 28 de los 33 errores en las teorías de generación de errores existentes hasta el momento, donde coincidieron en los dos tipos de errores existentes en la totalidad de esas teorías, todos relacionados con el cero y pedir prestado al cero: Borrow From Zero (en lugar de pedir prestado al cero, lo cambia a 9, pero no continua la llevada la columna siguiente) y Borrow Across Zero (si hay que pedir prestado a un cero, el estudiante se salta esa columna para pedir a la siguiente).

En otro sentido algunos otros aspectos pueden ser interesantes. Por ejemplo, cuando los estudiantes universitarios completaban los cuestionarios, se observó cierta preocupación y manifiesta inseguridad en algunos de ellos cuando efectuaban sustracciones, a la vez que contaban con los dedos por debajo de la mesa e incluso uno dijo: “¡Uff!, si fueran sumas..., ¡pero restas!”. Aunque esto no está incluido en resultados, puede servir para reflexionar.

Finalmente, este trabajo unido al de Sánchez (2005) permiten mostrar que, en general, los errores cometidos al efectuar sustracciones son similares en diferentes contextos (algo que corrobora la investigación de Fiori y Zuccheri, 2005), aunque es indudable que si se considerasen aspectos más específicos ya fuera, por ejemplo, referidos al contexto cultural, metodológicos o al tipo de algoritmo utilizado al efectuar la sustracción, es probable que podrían surgir peculiaridades interesantes pero eso ya puede ser el objetivo de futuras investigaciones.

## **CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES**

En este capítulo se incluyen las conclusiones del estudio que analiza los errores que producen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones. Además de constatar si las hipótesis planteadas al inicio del mismo se corroboran o no, también se recogen algunas limitaciones del estudio, posibilidades de continuar el mismo y algunas implicaciones educativas.



En este trabajo se analizaron los errores que cometían estudiantes universitarios cuando efectuaban sustracciones, así como la tipología de dichos errores. Para ello se utilizó como instrumento el cuestionario de VanLehn (1990), que incluye 20 sustracciones. La muestra considerada incluía estudiantes universitarios de 3 centros diferentes: Magisterio, Ciencias Empresariales y Pymes y Estadística. Se tuvieron en cuenta si los estudiantes eran hombres o mujeres. Además, se consideraron otras variables como edad, centro, curso, estudios que los estudiantes habían realizado con anterioridad a ir a la Universidad y el tiempo que emplearon en completar el cuestionario. Se pretendía comparar los resultados con los errores y tipos de errores que cometían estudiantes de Primaria (a partir de los trabajos de Sánchez, 2005, López y Sánchez, 2007, 2008, VanLehn, 1990, y Young y O'Shea, 1981).

A la luz de los resultados obtenidos se puede afirmar que este trabajo permite avanzar en el conocimiento de los errores producidos por adultos en el algoritmo de la sustracción, una de las operaciones elementales fundamentales que se aprenden en los cursos de enseñanza obligatoria de la mayor parte de los países del mundo. Mucho se ha escrito e investigado sobre el algoritmo de la sustracción pero poco en relación con los errores que se cometen al realizarlas

y, en lo que se sabe, no hay estudios que analicen los errores que cometen estudiantes universitarios al realizar sustracciones. Por tanto, este estudio, aunque continúa otros previos, abre una nueva vía que puede ser continuada por otros trabajos como se explica posteriormente.

En este contexto, las principales conclusiones de esta investigación son:

- Sólo una cuarta parte de los estudiantes universitarios realizaron correctamente las 20 sustracciones del cuestionario de sustracciones que completaron. Si se considera la posibilidad de completar correctamente el cuestionario admitiéndose hasta dos errores, sólo lo completaron unas dos terceras partes de los estudiantes.
- Hubo diferencias significativas referidas a la forma de completar correctamente el cuestionario dependiendo del sexo de los estudiantes universitarios (a favor de las mujeres), del centro en que cursaban estudios los estudiantes universitarios (a favor de los de Magisterio comparándolos con los de Empresariales y Estadística) y del tiempo que los estudiantes universitarios emplearon en completar los cuestionarios (entre los que tardaron en hacerlo menos de 5 minutos y los que emplearon más de 5 minutos).
- No hubo diferencias significativas referidas a la forma de completar correctamente el cuestionario dependiendo de la edad, curso y estudios previos de los estudiantes universitarios.
- La estructura de la sustracción tuvo influencia en los errores que cometieron los estudiantes universitarios, que coincidió con los que cometieron los estudiantes de Primaria, fundamentalmente en los aspectos que involucraban al cero y al sistema posicional.
- La tipología de los errores más importantes que se produjeron con los estudiantes universitarios, que esencialmente coincide con la de los estudiantes de Primaria, indica que, además del de cálculo que se corresponde a un manejo deficiente de las relaciones numéricas básicas, fueron debidos a deficiencias en el entendimiento del cero y el sistema posicional.

- Se categorizaron nuevas categorías de errores que se producen al efectuar sustracciones, que no se habían considerado previamente.
- Los errores que los estudiantes universitarios cometieron más frecuentemente se corresponden con los errores sistemáticos que cometían los estudiantes de Primaria, excepto en algunos casos en que los errores producidos se transformaron en otros tipos de errores con cierta similitud a los anteriores.

Como hipótesis se consideraron las siguientes:

**Hipótesis 1:** Los estudiantes universitarios cometen pocos errores al realizar sustracciones.

No se puede aceptar esta hipótesis 1. Los estudiantes universitarios cometen muchos errores al realizar sustracciones.

**Hipótesis 2:** La tipología de los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones es similar a la que se produce con estudiantes de Primaria. Es decir, los errores sistemáticos se mantienen a lo largo de todas las etapas de formación del estudiante

Se acepta esta hipótesis 2. La tipología de los errores que cometen estudiantes universitarios cuando realizan sustracciones es similar a la que se produce con estudiantes de Primaria de manera que los errores sistemáticos se mantienen con el tiempo aunque, en algunos casos, los errores producidos se transforman en otros tipos de errores con cierta similitud a los anteriores.

El estudio realizado ha permitido ahondar en los errores que se producen al efectuar sustracciones, especialmente referido a los que cometen estudiantes universitarios. Como limitaciones del estudio, hay que reconocer que la muestra se tomó por conveniencia y sería necesario ampliarla para poder generalizar los resultados. Sin embargo, los resultados son interesantes y parecen lógicos a partir de lo que se conoce del algoritmo de la sustracción. Los datos se recogieron de manera anónima, que impidió un posterior seguimiento de determinados casos especialmente llamativos mediante, por ejemplo, entrevistas individuales, que hubieran favorecido profundizar en la

forma en que se resolvieron las sustracciones y, a la vez, en las causas de los errores cometidos.

### **Como perspectivas de futuro:**

Sería interesante realizar una investigación que analice los errores que cometen personas adultas cuando realizan sustracciones, más concretamente indagar sobre la comprensión de los adultos del concepto de identidad y relaciones inversas. Incluso se podría ampliar con adultos de mayor edad. Ello podría ser de mucho interés ya que permitiría extender los resultados de este trabajo a los errores que cometen personas adultas que no han seguido los filtros para llegar a la Universidad por los motivos que fueran. Sin embargo, ese estudio quedaría aislado si no se conocen los errores y tipos de errores que cometen los estudiantes de secundaria, como continuación de una enseñanza obligatoria en España donde ya sólo utilizan la sustracción como operación elemental pero no su aprendizaje, e incluso los que cometen estudiantes de Bachillerato, enseñanza que ya no es obligatoria. Ello permitiría completar un ciclo referido al conocimiento de los errores que se producen al realizar el algoritmo de la sustracción. Si, como parece previsible, el número de errores y el tipo de errores es similar a los de estudiantes de Primaria y de estudiantes universitarios, ello permitiría cerrar, en cierto sentido, el conocimiento de la situación referido al aprendizaje de la sustracción de una manera longitudinal y permitiría abrir vías para, a partir de ese conocimiento, desarrollar actuaciones ya fuera para intentar mejorar el aprendizaje de la sustracción o incluso, si pareciera adecuado, modificar la forma en que se aprende al algoritmo de la sustracción, por ejemplo, reduciendo el aprendizaje de la mecanización del algoritmo y fortaleciendo el del sentido numérico al realizar la sustracción que podría permitir modificar la visión de esta operación elemental, en estos momentos puramente mecánica, como algo realmente crítico y reflexivo.

En todos los casos, descubrir qué tipo de errores se mantienen según se aumenta la edad y se convierten en sistemáticos puede aportar mucha información sobre el algoritmo de la sustracción, algo que se ha estudiado en



multitud de investigaciones pero que, a partir de los resultados de ésta y de otras relacionadas, se aporta una nueva perspectiva a lo que ya se conoce.

También sería interesante analizar cómo es posible que estudiantes universitarios cometan tantos errores al efectuar sustracciones y si realmente la sustracción es una operación que ellos necesitan de manera fundamental para su futura vida tanto profesional como ciudadana. Los resultados obtenidos en esta línea podrían incluso replantear la enseñanza y aprendizaje de la sustracción en las edades de Primaria así como el tiempo dedicado a ello.

Además, los resultados de este trabajo muestran una ausencia de sentido crítico de los estudiantes universitarios o, al menos, un aspecto que podría ser mejorado. Hacia ello podrían dirigirse diversas líneas de investigación en diversos sentidos.

Sin realizar estos trabajos, que parecen obvios para continuar el que aquí se presenta, es difícil plantear implicaciones educativas. Las que pueden sugerirse, únicamente en el marco de la investigación que se presenta, pueden ir dirigidas a buscar la mejora del aprendizaje del algoritmo de la sustracción a partir de los resultados de este estudio. Y esto podría hacerse en diversos sentidos. Por ejemplo, la más importante y de manera general debería ir dirigida a fortalecer el desarrollo del sentido numérico. Hay muchos trabajos en ese sentido como, por ejemplo, el de San Romualdo (2015). Entre otras cosas, aportó sugerencias para el aprendizaje del sentido numérico aunque no referido específicamente al algoritmo de la sustracción. Los trabajos de Chamoso y Rawson (2003) y Sánchez (2013) también son interesantes referido a ese aspecto.

En otro sentido, los aspectos de la estructura de la sustracción que crearon más dificultades a los estudiantes al resolverlas y, por tanto, conllevó que se produjeran más errores, fueron fundamentalmente los que involucraban al cero y al sistema posicional, lo que supone que esos son los aspectos fundamentales en los que hay que incidir para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la sustracción en las edades de Primaria.

Elaborar una propuesta concreta que conlleve la elaboración y puesta en práctica de metodologías didácticas que promuevan un aprendizaje más significativo, y una corrección de los errores cometidos a partir de los resultados de este trabajo, es algo que trasciende al que se presenta y se plantea como propuesta de trabajo futuro. Podría ir dirigido, por ejemplo, a proponer a los estudiantes de Primaria sustracciones realizadas, erróneamente o no, como, por ejemplo, las que completaron los estudiantes universitarios de este trabajo, para que descubran cuáles son erróneas y, referido a ellas, a qué se debe que se haya producido el error. A partir del trabajo de los estudiantes y sus percepciones, que puede ser en grupo, el docente puede analizar conjuntamente con ellos el tipo de error producido, lo que puede incidir de manera indirecta en el algoritmo que se debe desarrollar para realizar la sustracción y en la forma de hacerlo adecuadamente. Puede esperarse que esta forma de trabajo ayude a entender las causas de cada uno de los errores que se cometen al realizar sustracciones, a la vez que los estudiantes de Primaria están realizando sustracciones, lo que no exigiría dedicar tiempo extra al que ya se dedica para el aprendizaje del algoritmo. Una planificación adecuada de este trabajo que se propone puede ser un aspecto de mucho interés.

Preocupan, especialmente, a pesar de ser el grupo que menos errores cometieron, los resultados obtenidos por los estudiantes de Magisterio en este trabajo, ya que serán los futuros maestros encargados de la enseñanza y aprendizaje de esta operación en las aulas de Primaria. Si no dominan la comprensión del cero y del sistema posicional, difícilmente podrán trabajarlos en un aula de Primaria de manera adecuada y puede significar que se limitarán a hacerlo de manera memorística a partir de un conjunto de reglas que, probablemente, vengan dadas por un libro de texto. Por tanto, quizás sería interesante tener en cuenta la posibilidad de incidir en este aspecto y en su didáctica en el curriculum del Grado de dicha titulación universitaria.

## **REFERENCIAS**



---

## REFERENCIAS

- Anderson, J. R. (1976). *Language, memory, and thought*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Ashcraft, M. H. (1992). Cognitive arithmetic: A review of data and theory. *Cognition*, 44(1), 75-106.
- Ashlock, R. B. (1976). *Error Patterns in Computation*, 2<sup>d</sup> ed. Columbus, Ohio: Charles E. Merrill Publishing Co.
- Baroody, A. J. (1987). *Children's Mathematical Thinking. A developmental framework for preschool, primary, and special education teachers*. Nueva York: Teachers College Press.
- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(2), 141-157.
- Baroody, A. J. (1989). Manipulatives Don't Come with Guarantees. *Arithmetic Teacher*, 37(2), 4-5.
- Baroody, A. J. (1989). Kindergartners' mental addition with single-digit combinations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 159-172.
- Bélangier, M. (1991). Les erreurs en arithmétique. Un siècle de présomption méricaine. *Petit x*, 26, 49-71.
- Ben-Zeev, T. (1995). The nature and origin of rational errors in arithmetic thinking. Induction from examples and prior knowledge. *Cognitive Science*, 19, 341-376.
- Bennett, M. (1976). *SUBSTITUTOR: A teaching program*. Unpublished project report. Department of Artificial Intelligence, University of Edinburgh.

- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas*. Barcelona: Paidós.
- Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda Parte). *Enseñanza de las Ciencias*, 9, 10-21. Traducción al español de Luis Puig.
- Brown, J. S. y Burton, R. R. (1978). Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills. *Cognitive Science*, 2(2), 155-192. Traducción Rodríguez, M.
- Brown, J. S. y VanLehn, K. (1980). Repair Theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science*, 4(4), 379-426.
- Brown, J. S. y Vanlehn, K. (1982) Towards a generative theory of “bugs.” En T. P. Carpenter, J. M. Moser, y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 117-135. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Brownell, W. A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. En *The teaching of arithmetic*, 1-31. New York: Teachers College, Bureau of Publications.
- Carpenter, T.P, Franke, M.L., Jacobs, V.R. y Fennema, E. (1996). Invention and understanding in the development of multidigit addition and subtraction procedures: A longitudinal study. *Annual meeting of the American Research Association*, New York.
- Castro, E., Rico, L., y Castro, E. (1987). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Cebulski, L. A. y Bucher, B. (1986). Identification and remediation of children's subtraction errors: A comparison of practical approaches. *Journal of School Psychology*, 24(2), 163-180.

- Chamoso, J. y Rawson, W. (2003). *A vueltas con los números*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.
- Cobb, P. y Wheatley, G. (1988). Children's Initial Understandings of Ten. *Focus on learning problems in mathematics*, 10(3), 1-28.
- Cobb, P., Yackel, E., Wood, T., Wheatley, G. y Merkel, G. (1988). Creating a problem-solving atmosphere. *Arithmetic Teacher*, 36(1), 46-47.
- Cooper, T. J., Heirdsfield, A. y Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. *Children's number learning*, 147-162.
- Cox, L. S. (1975). Systematic errors in the four vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6, 202-220.
- Creswell, J. W. (2008). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. SAGE Publications, Incorporated
- Davis, R. B. (1994). What mathematics should students learn?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 3-33.
- Downes, L. W., y Paling, D. (1958). *The Teaching of Arithmetic in Tropical Primary Schools*, 5. Oxford University Press.
- Engberg, M. E. y Wolniak, G. C. (2013). College student pathways to the STEM disciplines. *Teachers College Record*, 115, 1-27.
- Fagerlin, A., Zikmund-Fisher, B. J. y Ubel, P. A. (2005). How making a risk estimate can change the feel of that risk: Shifting attitudes toward breast cancer risk in a general public survey. *Patient Education and Counseling*, 57, 294-299.

- Fiori, C. y Zuccheri, L. (2005). An experimental research on error patterns in written subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, 60(3), 323-331.
- Friend, J. (1976). *Description of items to be used in addition/subtraction tests*. Internal Memo, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University.
- Fuson, K. C. (1986). Roles of representation and verbalization in the teaching of multi-digit addition and subtraction. *European Journal of Psychology of Education*, 1(2), 35-36.
- Fuson, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. En Grouws, D. A. (Ed), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*, 243-275. New York, NY, England: Macmillan Publishing Co
- Fuson, K. C. y Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first -and second- grade place- value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(3), 180-206.
- Fuson, K.C. y Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development*, 63, 491-506.
- Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I., Carpenter, T. P. y Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2) 130-162.
- Geary, D. C. (2011). Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in



- 
- mathematics. *Journal of Developmental and Behavioral Pediatrics*, 32, 250-263.
- Ginsburg, H. P., Klein, A. y Starkey, P. (1998). The development of children's mathematical thinking: Connecting research with practice. En Damon, W., Sigel, I. E., Renninger, K. A. (Ed), *Handbook of child psychology, 5th ed. Vol 4: Child psychology in practice*, 401-476. Hoboken, NJ, US: Wiley y Sons
- Groen, G. y Resnick, L. B. (1977). Can preschool children invent addition algorithms? *Journal of Educational Psychology*, 69(6), 645-652.
- Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New directions for child and adolescent development*, 1988(41), 55-70.
- Haviland, S. E. (1979). *Buggy's analysis of the TORQUE Wellesley Data*. Palo Alto, Ca.: Xerox Palo Alto Research Center working paper.
- Hecht, S. A., Vagi, K. J. y Torgesen, J. K. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. En D. B. Berch y M.M.M. Mazzocco (Eds.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*, 121–132. Baltimore, MD: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Hiebert, J. y Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction*, 14(3), 251–283.
- Hughes, M. (1986). *Children and number: Difficulties in learning mathematics*. Wiley-Blackwell.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. y Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, 45, 850-867.

- Kamii, C. y Lewis, B. A. (1991). Achievement Tests in Primary Mathematics: Perpetuating Lower-Order Thinking. *Arithmetic teacher*, 38(9), 4-9.
- Kilpatrick, J. (1981). The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 2(2), 22-29.
- .Klein, A. S., Beishuizen, M. y Treffers, A. (1998). The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(4) 443-464.
- Kramarski, B., Mevarech, Z. R. y Arami, M. (2002). The Effects Of Metacognitive Instruction On Solving Mathematical Authentic Tasks. *Educational Studies in Mathematics* 49, 225–250.
- Lankford, F. G. (1972). *Some computational strategies of seventh grade pupils*. Charlottesville, VA: University of Virginia.
- Laird, J. E., Newell, A. y Rosenbloom, P. S. (1987). SOAR: An architecture for general intelligence. *Artificial intelligence*, 33(1), 1-64.
- LeFevre, J. A., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Sadesky, G. S. y Greenham, S. L. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General*, 125, 284–306.
- LeFevre, J. A., Greenham, S. L. y Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11, 95–132.
- Lipkus, I. M., Samsa, G. y Rimer, B. K. (2001). General performance on a numeracy scale among highly educated samples. *Medical Decision Making*, 21, 37–44.
- López, R. y Sánchez, A. B. (2007). Los componentes generadores de errores algorítmicos. Caso particular de la sustracción. *Revista de Educación*, 344, 377-402.

- López, R. y Sánchez, A. B. (2008). Evolutionary processes in the development of errors in subtraction algorithms. *Educational Research and Reviews*, 3(7), 229-235.
- López, R. y Sánchez, A.B. (2009). Análisis del error sistemático en la sustracción. *Enseñanza de las Ciencias* 27(1), 54.
- Loveless, T. (2003). Trends in math: The importance of basic skills. *Brookings Review*, 21, 40–43.
- Maroto, A. (2015). *Perfil Afectivo-Emocional Matemático de los Maestros de Primaria en formación*. Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.
- Martín, A. R. (2015). La Educación Matemática en Primaria en el siglo XXI. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León. (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 113- 121. Academia de Artillería de Segovia: Junta de Castilla y León y Asociación Castellano y Leonesa de Educación Matemática Miguel de Guzmán
- Maza, C. (1991). *Enseñanza de la suma y la resta*. Madrid: Síntesis.
- Miller, K. (1984). Child as the measurer of all things: Measurement of procedures and the development of quantitative concepts. En C. Sophian (Ed.), *Origins of cognitive skills: The eighteenth annual Carnegie symposium on cognition*, 193–228. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Miller, K., Perlmutter, M. y Keating, D. (1984). Cognitive arithmetic: Comparison of operations. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 10(1), 46.
- Mitchell, J. H., Hawkins, E. F., Stancavage, F. B. y Dossey, J. A. (1999). *Estimation Skills, Mathematics-in-Context, and Advanced Skills in Mathematics: Results from Three Studies of the National Assessment of*

*Educational Progress 1996 Mathematics Assessment.* Education Publications Center (Ed Pubs), US Dept. of Education, PO Box 1398, Jessup, MD 20794-1244.

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2001). *Research in education: A conceptual introduction* (5ª ed.) New York: Addison Wesley Longman

McMillan, J. H. y Schumacher, S. (2005). *Investigación Educativa.* Madrid: Pearson Education.

Montes, M. A., Contreras, L. C., Liñán, M. C., Muñoz-Catalán, M C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación* 367, 36-62.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, 25-38.

Newell, A. y Simon, H. A. (1972). *Human problem solving.* Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Norman, D. A. (1981). Categorization of action slips. *Psychological review*, 88(1), 1-15.

Ohlsson, S. y Rees, E. (1991). The function of conceptual understanding in the learning of arithmetic procedures. *Cognition and Instruction*, 8(2), 103-179.

Pérez-Tyteca, P. (2007). *Las actitudes hacia las matemáticas de los alumnos de primer curso de la Universidad de Granada.* Granada: Comala.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Resnick, L. (1982). Syntax and semantics in learning to subtract. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Ed.). *Addition and subtraction: A developmental perspective*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.

- Resnick, L. B. (1984). Beyond error analysis: The role of understanding in elementary school arithmetic. En H. N. Cheek (Ed.), *Diagnostic and prescriptive mathematics: Issues, ideas, and insights*, 2-14. Kent, OH: Research Council for Diagnostic and Prescriptive Mathematics.
- Resnick, L. B. (1987). *Education and learning to think*. National Academies.
- Resnick, L. B. y Ford, W.W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós Ibérica; Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia, D.L.
- Resnick, L. B. y Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. En Glaser, R. (Ed.), *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Assoc.
- Rico, L. (1997). *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*, 50-55. Ed. ICE/Horsori Barcelona
- Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de las matemáticas e Investigación. En J. Carrillo Yáñez y L. Contreras, *Matemática española en los albores del siglo XXI*, 77-131. Huelva: Hergué
- Robinson, K. M., Arbuthnott, K. D. y Gibbons, K. A. (2002). Adults' representations of division facts: A consequence of learning history? *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 56, 302–309.
- Robinson, K. M. y Ninowski, J. E. (2003). Adults' understanding of inversion concepts: How does performance on addition and subtraction inversion problems compare to performance on multiplication and division inversion problems? *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale*, 57(4), 321.
- Robinson, K. M., Ninowski, J. E. y Gray, M. L. (2006). Children's understanding of the arithmetic concepts of inversion and associativity. *Journal of Experimental Child Psychology*, 94, 349–362.

- San Romualdo, S. (2015). *Representación de la magnitud numérica y su relación con la ejecución en matemáticas*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Sánchez, A. B. (2005). *Las dificultades cognitivas ("Buggy") en operaciones en las que intervienen algoritmos numéricos y su tratamiento educativo con programaciones hipermedia*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- Sánchez, A. B. (2012). The Interaction between Intuitive Interpretations, Linguistic Knowledge and Algorithmic Components in Children's (Aged 7-9) Subtraction Errors. *British Journal of Educational Research*, 2(1), 20-41.
- Sánchez, A. B. (2013). Errores algorítmicos. Procesos cognitivos y acciones educativas. *Teoría de la Educación. Revista Interuniversitaria*, 25(1), 215-235.
- Sánchez, A. B. y López, R. (2011). La transferencia de aprendizaje algorítmico y el origen de los errores en la sustracción. *Revista de Educación*, 354(1), 429-445.
- Sander, E. (2001). Solving arithmetic operations: a semantic approach. *Proceedings of the 23rd Annual Conference of the Cognitive Science Society*, 915-920. Edinburgh.
- Schoenfeld, A. H. (1991): On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? *Proceedings of the Symposium on methods at the annual meeting of the American Educational Research Association*, Chicago, April 1991.
- Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. En Holton, D. (ed.). *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study*, 221-236. Dordrecht: Kluwer Academic.

- 
- Sloman, A. (1974). On learning about numbers. *Proceedings of first AISB Conference, Sussex*.
- Starkey, P. y Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210(4473), 1033-1035.
- Thyne, J. M. (1954). *Patterns of error in the addition number facts*. London: University of London Press
- VanLehn, K. (1982). Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *The Journal of Mathematical Behavior*, 3(2), 3-71. Traducción Rodríguez, M.
- VanLehn, K. (1983). On the Representation of Procedures in Repair Theory. En Ginsburg, H. P. (ed.), *The Development of Mathematical Thinking*, 201-252. Nueva York: Academic Press
- VanLehn, K. (1988). Toward a theory of impasse-driven learning. En Mandl, H. y Lesgold, A. (Eds), *Learning Issues for Intelligent Tutoring Systems*, 19-41. New York: Springer-Verlag
- VanLehn, K. A. (1989). Learning events in the acquisition of three skills. En Olson, G. y Smith, E. (Ed.) *Proceedings of the Eleventh Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- VanLehn, K. (1990). *Mind bugs: The origins of procedural misconceptions*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Verschaffel, L. y de Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., y Laborde, C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education, Part I*, 99-137. Kluwer Academic Publishers.
- Woloshin, S., Schwartz, L., Byram, S., Fischhoff, B. y Welch, H. (2000). A new scale for measuring perceptions of chance: A validation study. *Medical Decision Making*, 20(3), 298-307.

Woods, P. y Hartley, J. R. (1971). Some learning models for arithmetic tasks and their use in computer based learning. *British Journal of Educational Psychology*, 41(1), 38-48.

Woods, S. S., Resnick, L. B. y Groen, G. J. (1975). An Experimental Test of Five Process Models for Subtraction. *Journal of Educational Psychology*, 67(1), 17-21.

Young, R. M. (1976). *Seriation by children: An artificial intelligence analysis of a Piagetian task*. Basel, Switzerland: Birkhauser

Young, R. M. (1977). Mixtures of strategies in structurally adaptive production systems: Examples from seriation and subtraction. *ACM SIGART Bulletin*, 63, 65-71.

Young, R. M. y O'Shea, T. (1981). Errors in Children's Subtraction. *Cognitive Science*, (5)2, 153-177. Traducción Rodríguez, M.



## **ANEXOS**

Anexo I. Glosario de nuevos errores observados en esta investigación

Anexo II. Errores observados ordenados según frecuencia



**Anexo I. Glosario de nuevos errores observados en esta  
investigación**



---

**NUEVOS ERRORES OBSERVADOS**


---

<b>Error</b>	<b>Nombre</b>	<b>Descripción</b>	<b>Ejemplo</b>	
Error 301	Decrementa 2 en la segunda llevada	Cuando se necesitan dos préstamos seguidos, el primero lo hace correctamente, pero en el segundo decrementa dos unidades.	6591 <u>- 2697</u> 3794	
Error 302	Columna Unidades: Si $T < B$ . Suma en vez de restar y decrementa	Cuando $M < S$ en la columna de las unidades, suma en lugar de restar y decrementa una unidad en la columna siguiente.	716 <u>- 598</u> 114	
Error 303	Columna Unidades: Si $T < B$ suma en vez de restar y no decrementa la llevada	Cuando $M < S$ en la columna de las unidades, suma en lugar de restar y no decrementa una unidad en la columna siguiente	311 <u>- 214</u> 105	
Error 304	Columna Unidades: Si $T < B$ Incrementa en 1 las unidades y decrementa la llevada	Cuando $M < S$ en la columna de las unidades, incrementa en uno el resultado y decrementa la llevada en la siguiente columna	6591 <u>- 2697</u> 3895	4015 <u>- 607</u> 3409
Error 305	Columna Unidades: Si $T < B$ Incrementa en 1 las unidades y decrementa la llevada	En la columna de las unidades, escribe como resultado el dígito del sustrando	8305 <u>- 3</u> 8303	8001 <u>- 4</u> 7953
Error 306	$N - 0 = N$ y decrementa	$N - 0 = N$ y decrementa una unidad en la columna siguiente	885 <u>- 205</u> 580	9007 <u>- 6880</u> 2117
Error 307	$N - 0 = 0 - N$ y decrementa	$N - 0 = 0 - N$ y decrementa la llevada en la columna siguiente. Si en vez de un cero es otro número realiza sustrando menos minuyendo y decrementa la llevada .	885 <u>- 205</u> 520	9007 <u>- 6880</u> 2113
Error 308	Error 40 + Error 69	Combinación de los errores 40 y 69 del glosario de errores de VanLehn	6591 <u>- 2697</u> 3994	

---



**Anexo II. Errores observados ordenados según  
frecuencia**





Tipos de error (VanLehn, 1990) observados ordenados según frecuencia.

<b>Orden</b>	<b>Error</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Orden</b>	<b>Error</b>	<b>Frecuencia</b>
1	Error 122	212	38	Error 51	17
2	Error 12	140	39	Error 20	15
3	Error 39	96	40	Error 45	15
4	Error 34	94	41	Error 306	15
5	Error 40	91	42	Error 307	15
6	Error 80	78	43	Error 38	14
7	Error 81	71	44	Error 47	14
8	Error 28	67	45	Error 301	13
9	Error 33	67	46	Error 24	12
10	Error 19	54	47	Error 54	12
11	Error 94	50	48	Error 108	12
12	Error 115	50	49	Error 30	11
13	Error 9	48	50	Error 50	11
14	Error 69	48	51	Error 216	11
15	Error 5	47	52	Error 32	10
16	Error 7	43	53	Error 63	10
17	Error 29	39	54	Error 92	10
18	Error 44	37	55	Error 98	10
19	Error 56	34	56	Error 110	9
20	Error 302	34	57	Error 113	9
21	Error 65	32	58	Error 82	8
22	Error 75	32	59	Error 215	8
23	Error 308	32	60	Error 76	7
24	Error 304	31	61	Error 68	7
25	Error 100	30	62	Error 99	7
26	Error 36	29	63	Error 305	7
27	Error 4	27	64	Error 21	6
28	Error 86	26	65	Error 84	6
29	Error 90	26	66	Error 88	6
30	Error 89	25	67	Error 109	6
31	Error 123	24	68	Error 22	5
32	Error 61	21	69	Error 31	5
33	Error 6	20	70	Error 83	5
34	Error 79	19	71	Error 87	5
35	Error 95	19	72	Error 96	5
36	Error 77	18	73	Error 303	5
37	Error 8	17	74	Error 13	4

<b>Orden</b>	<b>Error</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>Orden</b>	<b>Error</b>	<b>Frecuencia</b>
75	Error 15	4	90	Error 78	2
76	Error 27	4	91	Error 91	2
77	Error 53	4	92	Error 104	2
78	Error 59	4	93	Error 118	2
79	Error 105	4	94	Error 218	2
80	Error 117	4	95	Error 1	1
81	Error 18	3	96	Error 41	1
82	Error 23	3	97	Error 57	1
83	Error 26	3	98	Error 66	1
84	Error 48	3	99	Error 67	1
85	Error 64	3	100	Error 73	1
86	Error 97	3	101	Error 107	1
87	Error 213	3	102	Error 111	1
88	Error 123	24	103	Error 114	1
89	Error 52	2	104	Error 116	1

Se han nombrado los errores del 1 al 121 según los tipos establecidos por VanLehn, 1990. A los que se añadió el 122 para designar el error de cálculo y el 123 para aquellos no diagnosticables. Además, se asignó la centena igual a 2 para los errores generados por el programa Sierra y la centena igual a 3 para los nuevos errores observados en esta investigación.



