Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro (México)

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos (Chile)

Noraísa González González, Escuela Secundaria General Mariano Matamoros (México)

Recibido el 27 de noviembre de 2016; aceptado el 6 de septiembre de 2017

Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica

Resumen

La validación del conocimiento construido en Matemáticas es una parte epistemológicamente importante en el proceso metodológico que se conoce como demostración matemática. Su enseñanza incluye procesos complejos y obstáculos que aparecen a lo largo del desarrollo cognitivo del individuo. Con el uso de Software de Geometría Dinámica (SGD), es posible diseñar actividades orientadas a promover la producción de conjeturas y justificaciones en ambientes geométricos, y que facilitarían su aprendizaje. En este trabajo presentamos los tipos de esquemas de argumentación de alumnos de Secundaria (14-15 años) cuando trabajan en el desarrollo de justificaciones matemáticas a partir de exploraciones. Se muestra cómo los alumnos centran su atención en características figurales que resultan irrelevantes en procesos de demostración deductiva. Asimismo, se discute el tipo de propuestas didácticas que deben diseñarse e implementarse para facilitar en los alumnos el desarrollo de esquemas de argumentación analíticos que implican deducciones.

Palabras clave. Geometría dinámica, justificaciones geométricas, aprendizaje de la demostración.

Esquemas argumentativos de estudantes do ensino médio em ambientes de geometria dinâmica

Resumo

A validação do conhecimento construído em matemática é uma parte epistemologicamente importante no processo metodológico e é conhecida como a prova matemática. Seu ensino inclui processos complexos e obstáculos que aparecem ao longo do desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Usando software de geometria dinâmica (SGD), é possível projetar attividades para promover a produção de conjecturas e justificaçãos em atividades ambientes geométricos e que facilitam a sua aprendizagem. Neste artigo, apresentamos os tipos de esquemas de argumentação de estudantes do ensino médio (14-15 anos), quando trabalham no desenvolvimento de justificativas matemáticas das verificações. Ele mostra como os alunos centrar a sua atenção sobre características figurativas que são irrelevantes no processo da prova dedutiva. Além disso, o tipo de propostas educacionais de ser concebido e implementado para facilitar os alunos no desenvolvimento de esquemas de raciocínio analítico envolvendo deduções é discutido.

Palavras chave. Geometria dinámica, justificaçãos geométricas, aprendizagem de prova.

Para citar: Larios Osorio, V., Pino-Fan, L. R. y González González, N. (2017). Esquemas argumentativos de estudiantes de secundaria en ambientes de geometría dinámica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 39-57.

Argumentative schemes of middle school students in dynamic geometry environments

Abstract

The validation of mathematical knowledge is an epistemologically important part of the methodological process known as mathematical proof. Its teaching includes complex processes and obstacles that appear along the cognitive development of the individual. The use of Dynamic Geometry Software (DGS) makes possible to design activities aimed at promoting the production of conjectures and justifications in geometric environments that facilitate learning. In this paper, we present the types of argumentation schemes of high school students (14-15 years) when they are working on the development of mathematical justifications from explorations. It is shown how students focus their attention on figural features that are irrelevant in the process of deductive proof. We also discuss the type of educational proposals to be designed and implemented to facilitate students in developing analytical reasoning schemes involving deductions.

Key words. Dynamic geometry, geometric justifications, learning of proof.

Schémas argumentatifs élèves du secondaire dans environnements de géométrie dynamique

Résumé

La validation des connaissances accumulées en mathématiques est une partie épistémologiquement importante dans le processus méthodologique et est connu comme la preuve mathématique. Son enseignement inclut des processus complexes et les obstacles qui apparaissent le long du développement cognitif de l'individu. Avec l'utilisation de Software pour Géométrie Dynamique (SGD), il est possible de concevoir visant à promouvoir la production de conjectures et de justifications dans les activités des environnements géométriques et qui facilitent leur apprentissage. Dans cet article, nous présentons les types de schèmes d'argumentation des élèves du secondaire (14-15 ans) lors du travail sur le développement des justifications mathématiques des analyses. Il montre comment les élèves se concentrent leur attention sur les caractéristiques figurées qui ne sont pas pertinents dans le processus de la preuve déductive. En outre, le type de propositions éducatives à être conçu et mis en œuvre pour faciliter les étudiants dans le développement de systèmes de raisonnement analytique impliquant des déductions est discutée.

Paroles clés. Géométrie dynamique, justifications géométriques, apprentissage du preuve.

1. Introducción

El uso de las computadoras en ambientes educativos es cada vez más amplio. Se hace necesario pensar en estrategias que permitan integrarlas en el proceso didáctico de una manera apropiada y eficaz. La integración en el aula no es trivial ni transparente ya que implica un trabajo del alumno por aprender a usar la herramienta y otorgarle un significado y uso adecuados en el proceso de internalización (Bartolini & Mariotti, 2008; Rabardel, 2002), y del profesor por estudiar los fenómenos asociados al uso de la herramienta (Hitt, Cortés, & Rinfret, 2012). Si bien estas herramientas pueden ayudar a resolver (o disminuir) algunos problemas, involucran otros problemas que tienen que ser tomados en cuenta. En particular, el Software para Geometría Dinámica (SGD) se ha mostrado como mediador semiótico entre conocimiento geométrico y pensamiento del alumno (Larios & González, 2010): influye en el aprendizaje de la Geometría y conlleva la emergencia de fenómenos cognitivos específicos (Larios, 2005). El SGD es un software diseñado para el estudio, el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría en ambientes dinámicos que consideran tres rasgos (Finzer & Jackiw, 1998): 1) la manipulación es directa; 2) el movimiento es continuo; y 3) el ambiente es inmersivo. En ese trabajo se ha usado la versión de SGD denominada Cabri.

El SGD ha resultado ser una herramienta útil para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría por medio del diseño de actividades que permitan la exploración y la observación de propiedades que pueden llevar a la producción de justificaciones deductivas que conduzcan a la construcción de la demostración geométrica (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013, p. 194). Esto es necesario para el aprendizaje matemático de los alumnos por la importancia que tiene la demostración en la ciencia matemática y en su desarrollo cognitivo (Bloch, 2000; Rav, 1999). Sin embargo este mismo aprendizaje presenta obstáculos, tanto desde el punto de vista de la demostración en sí, como del estudio de los objetos geométricos, lo que lleva a ahondar en el estudio sobre su aprendizaje y la problemática relacionada, tal como señalan Fiallo et al. (2013).

En este artículo presentamos resultados de un estudio con alumnos de Secundaria (14 y 15 años) en México, en los que se muestran los tipos de justificaciones que proponen al involucrarse en actividades diseñadas para construir demostraciones en ambientes de Geometría Dinámica. Estos resultados evidencian cómo, tras más de una década en los ambientes escolares mexicanos, los alumnos proponen diversas maneras de justificar sus observaciones que no necesariamente se aproximan a la idea de demostración deductiva. Lo anterior proporciona información que puede ser aprovechada para orientar el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza de la demostración matemática como medio de validación del conocimiento.

El artículo se ha estructurado en cinco partes. En la primera se presenta un contexto general del papel de la Geometría en la escuela Secundaria, considerando tres aspectos relacionados con visualización, razonamiento y realización de construcciones. En las dos secciones siguientes se describen las condiciones del experimento de enseñanza: en primer lugar se presenta el contenido y la estructuración de las actividades diseñadas para el experimento en el que participaron los alumnos; y en segundo lugar se describe el grupo de alumnos participantes. La penúltima sección exhibe los resultados más representativos del trabajo para llegar a las conclusiones.

2. Geometría en la escuela Secundaria

La necesidad de la enseñanza de la Geometría desde los primeros años escolares responde en buena medida al papel que esta rama de las matemáticas desempeña en la vida cotidiana. Un conocimiento geométrico básico permite ubicarnos en el espacio físico que nos rodea, calcular distancias, distinguir formas y tradicionalmente se ha aprovechado como el campo para el desarrollo del pensamiento lógico deductivo en el ambiente escolar (Duval, 2005). En México se plantea curricularmente en Secundaria con la finalidad de que el alumno observe propiedades geométricas, lleve a cabo construcciones geométricas, proponga argumentos y justificaciones de los hechos observados y de las construcciones realizadas, utilizando propiedades de una manera tendiente a la deducción (SEP, 2011, p. 23). Esta visión coincide en parte con los tipos de procesos cognitivos que Duval (1998, p. 38) considera que involucra la Geometría: visualización, procesos de construcción con herramientas y razonamiento. Tomaremos esto como base para desarrollar a continuación el marco de referencia teórico.

2.1. Visualización

Una parte importante del estudio de la Geometría y de las Matemáticas en general es lo que se percibe por medio de la vista y las imágenes mentales que se producen a partir de ello. Lo primero se relaciona con la visión y lo segundo con la visualización. Se trata de procesos diferentes (Duval, 2003) que conllevan diversas dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas (Gonzato, 2013). La confusión entre los dos procesos contribuye a que se crea que la representación (en papel o computadora) es el objeto geométrico que se está estudiando. No obstante, pareciera que esta confusión es "necesaria" para el aprendizaje, pues si separamos al objeto geométrico de sus representaciones, no tenemos manera de acceder a él, pero si no lo separamos corremos el riesgo de confundir ambas cosas (Duval, 2006). En términos semióticos la representación (*dibujo*) sirve al individuo para acceder al objeto (*geométrico*) a través del otorgamiento de *significados*, todo esto dentro de un contexto que le da sentido. Laborde y Capponi (1994) también hacen esta diferenciación pero al *significado* lo denominan figura:

> Consiste en el emparejamiento de un referente dado a todos sus dibujos, es entonces definida como el conjunto de parejas formadas por dos términos, el primer término es el referente, el segundo es uno de los dibujos que lo representan que es tomado del universo de todos los dibujos posibles del referente. (p. 168)

Establecer esta diferencia entre estos tres elementos permite aprovechar como soporte la *Teoría de los Conceptos Figurales* de Fischbein (1993), donde los objetos geométricos son una mezcla de aspectos *figurales* (en referencia a características ligadas con la representación y que corresponden al *dibujo*) y de aspectos *conceptuales* (en referencia a las restricciones lógico teóricas del *objeto geométrico*), por lo que son precisamente *conceptos figurales*: "Los objetos de investigación y manipulación en el razonamiento geométrico son entonces entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición y tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales tales como idealidad, abstracción, generalidad y perfección" (p. 143). Los *conceptos figurales* son el equivalente de las *figuras* en el sentido que proponen Laborde y Capponi (1994).

2.2. Procesos de construcción con Geometría Dinámica

En cuanto a los procesos de construcción, en este trabajo el enfoque está centrado en la Geometría Dinámica utilizando la computadora como herramienta. El software que se utiliza (SGD) se caracteriza por la posibilidad de manipulación directa y continua de representaciones geométricas. Ello permite el diseño de ambientes de exploración y observación de muchos casos que, de otra manera, quedan reservados a personas con elevada capacidad de visualización. Este tipo de software permite diseñar actividades y ambientes que ayuden a los alumnos a estudiar situaciones matemáticas sin tener que hacer mucho énfasis en procesos mecánicos y de graficación que se le pueden dejar a la herramienta computacional. Según Ursini (2006, p. 25): "las matemáticas escolares dejan así de ser una simple mecanización de procedimientos y se vuelven, más bien, un espacio para la reflexión y el desarrollo de conceptos".

La principal característica del SGD es el dinamismo que se refleja en la operación de *arrastre*, que permite los rasgos de una manipulación directa y continua de objetos matemáticos (Finzer & Jackiw, 1998). Esta operación, como elemento de una herramienta que funciona como mediador semiótico entre objetos geométricos e individuos, no siempre cumple con la función para la cual fue concebida en términos de un experto en Geometría, pero puede ser utilizado como medio para que el alumno siga un proceso no necesariamente lineal (avances y retrocesos), que le lleve a desarrollar habilidades de razonamiento y de observación al permitir diferenciar progresivamente entre *dibujo* (representación) y *figura* (relación conceptual entre dibujo y objeto geométrico). Todo esto debe ser considerado para diseñar actividades o ambientes utilizando SGD, pues su uso cambia las condiciones en el proceso de aprendizaje y, por tanto, de enseñanza. Problemas que vale la pena ser retomados en clase con la tecnología papel y lápiz se vuelven triviales utilizando software.

2.3. Razonamiento, argumentaciones y justificaciones

El tercer proceso mencionado por Duval (1998), el razonamiento, se manifiesta en el estudio de la Geometría, en el desarrollo de justificaciones que lleven a la construcción de demostraciones. Para el nivel Secundaria los alumnos podrían comenzar a desarrollar demostraciones deductivas en el sentido matemático, pero la formación previa no aporta un soporte firme. En este trabajo se considera el término ‘demostración’ en un sentido pragmático de realizar justificaciones que permitan validar el conocimiento matemático, haciendo referencia a un contexto escolar específico. Esto implica poner el acento en aspectos que no sólo están relacionados con el producto y su formalismo, sino en el proceso mismo de construcción. Así, conviene determinar las características de una justificación para que pueda ser considerada una demostración en la escuela. Se deben considerar los aspectos semánticos mencionados, pero también ampliar las características a aspectos sintácticos de escritura y expresión. Por ello, consideraremos que en el contexto escolar la demostración matemática es una serie de argumentos matemáticos que (González & Larios, 2012): hacen referencia a un hecho matemático; tienen como función primaria la de convencerse a sí mismo y a otros, para proporcionar una explicación del hecho matemático; se comunican mediante formas conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que pueden ser aprendidas; se basan en enunciados aceptados en la comunidad escolar explícita o implícitamente; y se organizan según formas de razonamiento válidas o correctas, en particular el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos.

Se podría esperar que las justificaciones que cuentan con estas características puedan ser producto de exploraciones u observaciones. Se ha visto que cuando los alumnos exploran situaciones, plantean conjeturas y luego construyen demostraciones, aparece una unidad cognitiva en el proceso. A esta noción Boero, Garuti y Mariotti (1996) la denominaron *unidad cognitiva de teoremas*. Con ella se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal. Estas etapas comienzan con una *exploración de una situación* dada, tras la observación se *produce una conjetura* o el planteamiento de una propiedad, en busca de una justificación al respecto se realiza *otra exploración* y se termina encadenando argumentos que permitan *demostrar* (validar o justificar) la propiedad observada. Según estos autores, el planteamiento de actividades basándose en esta noción permite a los alumnos construir demostraciones que bien pueden cumplir con la caracterización mencionada, pues “su razonamiento deductivo comparte muchos aspectos con la construcción de una prueba matemática. Además, la actividad completa ejecutada por los estudiantes comparte muchos aspectos con el trabajo de los matemáticos cuando producen conjeturas y pruebas en algunos campos matemáticos” (Boero et al., 1996, p. 126). Estas características resultaron adecuadas para diseñar actividades para trabajar con alumnos del nivel Secundaria, las cuales se describirán más adelante.

Harel y Sowder (1998) y Harel (2007) propusieron una categorización de los esquemas de prueba individuales al relacionar la demostración con la idea de justificación como un proceso que implica dos aspectos: *convencimiento* o *determinación* como proceso para eliminar la dudas propias acerca de la verdad de una afirmación, y *persuasión* como proceso para convencer a otros sobre la verdad de esa afirmación. Flores (2007) y Flores, Gómez y Flores (2010) adaptaron dicha propuesta al estudio de argumentos producidos por profesores de bachillerato cuando justificaron soluciones de problemas geométricos. Observaron similitudes en las maneras de argumentar de los profesores de bachillerato en México con respecto a los estudiantes del estudio de Harel y Sowder (1998), pero hablaron de *esquemas de argumentación*, en lugar de esquemas de prueba, por ser "el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema" (Flores, 2007, p. 71). Considerando lo anterior, Flores et al. (2010, p. 28) han propuesto la siguiente categorización de esquemas de argumentación:

- Autoritarios. Las argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna *autoridad*, e.g. libro de texto, instructor del curso, compañero.
- Simbólicos. El estudiante utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar a concluir. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
- De recuento fáctico o simplemente fácticos. En los que estudiante o profesor hace un recuento de lo hecho a manera de explicación o justificación de algún resultado, y expone una serie de pasos a manera de algoritmo.
- Empíricos. El estudiante se apoya en hechos físicos o en un dibujo. El dibujo o hecho físico es un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- Analíticos. El estudiante sigue una cadena deductiva sin por ello llegar a una conclusión válida. Las proposiciones siguen estructuras del tipo *si-entonces*.

Estas categorías ayudaron a estudiar los argumentos que formularon los alumnos considerados en este trabajo en ambientes de Geometría Dinámica.

3. Actividades del experimento de enseñanza

Las tareas que se diseñaron están relacionadas con la geometría del triángulo, en particular las medianas, el baricentro, el triángulo medial y la relación entre estos elementos. Se aprovechó para explorar la circunferencia como lugar geométrico. Con las tareas se buscó el uso explícito de habilidades de observación de propiedades, de visualización de objetos geométricos y de razonamiento deductivo. Las dos primeras habilidades pueden permitir al alumno, llevar a cabo observaciones de propiedades o rasgos invariantes de una situación u objeto. En cuanto a la última, es posible que este tipo de razonamiento permita establecer relaciones causa efecto en los fenómenos de la vida diaria, de la ciencia y de la escuela. Así mismo, cada tarea buscaba la observación de propiedades y la justificación de éstas o de procedimientos, por lo que se tomó como base la noción de *unidad cognitiva de teoremas*. La secuencia fue la siguiente:

- Planteamiento de una situación. Se realiza por medio de una consigna textual y generalmente con un archivo nuevo, aunque puede iniciarse con un archivo construido. Se presentan preguntas que permiten iniciar el trabajo de exploración.

- Construcción de la situación. A partir de la situación planteada se realiza la construcción utilizando el software a fin de llevar a cabo exploraciones. Es posible que este paso, el anterior y el siguiente se fusionen si se realiza la construcción geométrica a la vez que el planteamiento y la exploración inicial.

- Exploración (dirigida) de la situación. Aprovechando la construcción y el software se inicia una exploración por parte de los alumnos, dirigida a través de preguntas escritas y la intervención del investigador que puede orientar a través de supuestos y preguntas.

- Explicitación de los alumnos de propiedades observadas. El propósito de la exploración es que los alumnos observen propiedades geométricas específicas a fin de proponer las justificaciones relacionadas, por ello es necesario que expliciten esas propiedades y no se queden como una suposición por parte del investigador. Por medio de preguntas y consignas en las hojas de trabajo se pide esto, mientras que el investigador puede preguntar, a modo de entrevista a fin de clarificar respuestas.

- Justificación de propiedades observadas. En algunas actividades se pide a los alumnos justificar propiedades que hayan observado. Se busca con el diseño de las actividades que las justificaciones avancen hacia una estructura deductiva. La interacción grupal se permite y el trabajo se realiza en parejas.

- Conclusión. Se proporciona en las hojas de trabajo una breve conclusión de las propiedades que se pretenden estudiar.

En ocasiones las etapas de *exploración*, *explicitación de propiedades* y *justificación*, se repiten en una sola actividad debido a la intencionalidad de cada una. Generalmente esto ocurre cuando se propone la exploración de varias propiedades relacionadas en una misma actividad, o la exploración de una propiedad que no resulta evidente y que necesita de un proceso progresivo de acercamiento. La Figura 1 indica la organización general y las relaciones mutuas de las seis actividades diseñadas.

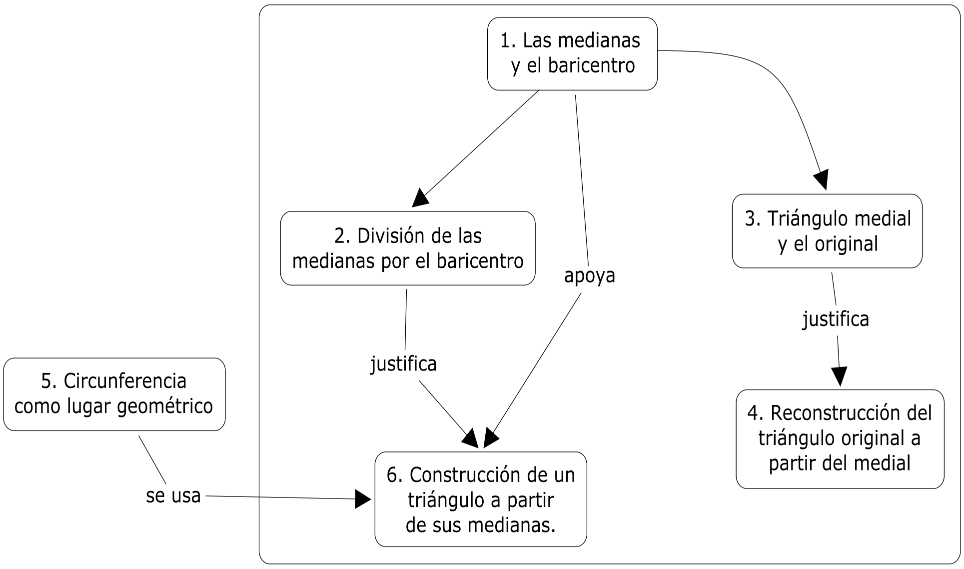

Figura 1. Relación entre las actividades propuestas

Actividad 1: Las medianas. En esta actividad orientada a la construcción de las medianas del triángulo y su concurrencia, así como la relación de éstas y el baricentro, los alumnos construyeron un triángulo y sus medianas, utilizando la opción *punto medio* para los lados del triángulo. Aprovechando el software se les pidió que modificaran el triángulo (arrastrar los vértices) y observaran lo que ocurre con las medianas, con el fin de que concluyeran la concurrencia de éstas. Con la opción para crear puntos de intersección crearon el baricentro, para lo cual debieron considerar el número de medianas necesarias. Se les preguntó si siempre hay concurrencia y que justificaran sus respuestas. Incluso que determinaran si dicha propiedad ocurre sin importar el tamaño o la forma del triángulo. Dado que el software sólo puede construir puntos de intersección de dos objetos lineales y no de tres, los alumnos determinaron cuántas medianas son suficientes para poder determinar el baricentro con el software.

Actividad 2: División de las medianas por el baricentro. Esta actividad se pensó para estudiar la propiedad en que el baricentro divide a las medianas en una razón constante 1:2, de manera que los alumnos formularan una justificación. Construyeron las medianas y el baricentro de un triángulo, tomaron medidas y modificaron las posiciones de los vértices para establecer la característica invariante que es la razón. Todo ello acompañado con el apoyo del profesor y la comunicación entre alumnos.

Actividad 3: El triángulo medial. En esta actividad se estudiaron las propiedades del triángulo medial y sus relaciones geométricas con el triángulo original a fin de establecer propiedades de paralelismo. Los alumnos construyeron un triángulo *ABC*, sus medianas (*AD*, *BE* y *CF*) y el baricentro (*G*). Después construyeron el triángulo *A*'*B*'*C*' con vértices en los puntos medios de *AG*, *BG* y *CG* (Figura 2). Midieron las longitudes de los lados y se buscó mediante orientación dirigida que aplicaran criterios de semejanza para establecer el paralelismo entre lados correspondientes de los diversos triángulos. Pudieron determinar la semejanza entre los triángulos construidos.

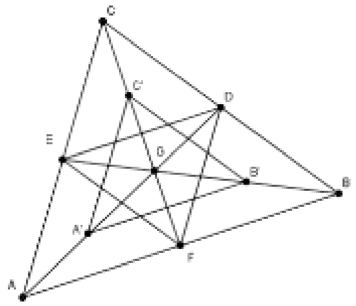

Figura 2. Construcción de la actividad 3

Actividad 4: El triángulo original y el medial. Con esta actividad se pretendió que los alumnos aprovecharan propiedades utilizadas en actividades previas, para que proporcionaran justificaciones fundadas en dichas propiedades para reconstruir un triángulo a partir de un triángulo medial dado. Comenzaron construyendo un triángulo *ABC* y luego un punto P_0 cualquiera. A partir de lo anterior se construyó P_1 como el punto reflejado con respecto a *A* y así P_0, *A* y P_1 están alineados y se crea el segmento que los contiene (Figura 3). Sigue el mismo procedimiento reflejando P_1 con respecto a *C* y obtener P_2, y finalmente P_3 reflejando el anterior con respecto a *B*. A los alumnos se pidió que exploraran las condiciones del triángulo original (*ABC*), los puntos construidos (P_0, P_1, P_2 y P_3) y los segmentos que los unen, con el fin de lograr que P_0 y P_3 coincidieran y se formara un triángulo. Observaron que los lados correspondientes de ambos triángulos son paralelos entre sí, además de que los vértices del triángulo original son los puntos medios del triángulo recién construido. Esta actividad implicó el uso de procesos de razonamiento que involucran la previsión en el resultado y las condiciones necesarias para que ocurra algo a partir de propiedades. También implicó el uso de procesos de visualización, porque se necesitó considerar construcciones auxiliares que, al no estar visibles, constituyeron una dificultad.

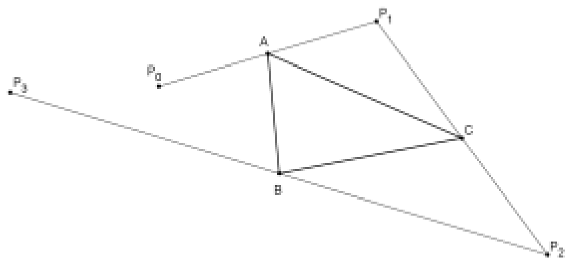

Figura 3. Construcción de la actividad 4

Actividad 5: La circunferencia como lugar geométrico. Esta actividad se dirigió a la aprehensión de la circunferencia como lugar geométrico de puntos equidistantes a uno fijo. Se consideró que esto permite el uso de la intersección de dos (o más) arcos como herramienta para obtener puntos que estén a una distancia dada de dos (o más) puntos fijos. Los alumnos construyeron un segmento con una longitud fija y anclado en un extremo a un punto fijo en el que se pudiera mover libremente el otro extremo. Aprovechando el arrastre, manipularon la construcción para determinar la curva resultante (circunferencia) y así por medio de preguntas explicitar las propiedades de esta con respecto a la equidistancia a un punto fijo.

Actividad 6: Construcción de un triángulo a partir de sus medianas. Esta actividad se orientó a la aplicación directa de observaciones de las actividades anteriores. Se pidió a los alumnos construir un triángulo a partir de tres medidas: la de un lado (*AB*) y las de las dos medianas que llegan a los extremos de esos lados. La construcción requirió obtener un punto (*G*, baricentro) ubicado en la intersección de dos circunferencias, luego obtener los puntos medios de los dos lados desconocidos y, por último, el tercer vértice del triángulo (Figura 4). Se les pidió que verificaran su construcción a través del “examen de arrastre” (Mariotti, 2006), el cual indica si una construcción es robusta. También justificaron sus procedimientos y construcciones, por lo que los alumnos debieron hacer referencia a las propiedades y construcciones de las actividades anteriores, particularmente la 2 y la 5. Así, esta actividad se convirtió en un espacio para conjuntar, explicitar y sistematizar las propiedades observadas.

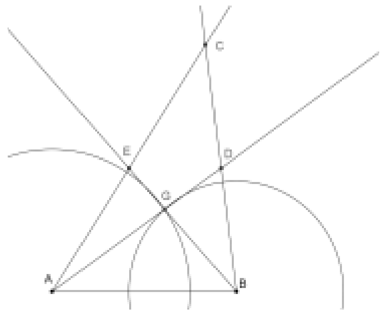

Figura 3. Construcción de la actividad 6

4. Alumnos, contexto y métodos

Los alumnos que participaron en las actividades son de una escuela pública de un medio suburbano en México. El grupo era de 48 alumnos del tercer grado de Secundaria (14 y 15 años de edad) del turno matutino. Eran estudiantes de un estrato socioeconómico medio y bajo con poco contacto con las computadoras excepto por el tiempo en la escuela. Las sesiones de trabajo se llevaron a cabo durante clases de matemáticas de 50 minutos. El grupo se organizó en equipos de dos o tres alumnos de acuerdo a sus afinidades personales. Esta organización se tomó considerando las sugerencias de proyectos llevados a cabo en instituciones públicas de México (Ursini, 2006; Ursini & Rojano, 2000), con lo cual “no se trata de que los alumnos trabajen de manera independiente, turnándose para usar la máquina; al contrario, esta organización pretende fomentar un ambiente de cooperación entre los alumnos y de intercambio de ideas” (Ursini & Rojano, 2000, p. 14). La escuela tiene una sala con una cantidad suficiente de computadoras para cada equipo de alumnos.

A fin de obtener la información para ser analizada, se recurrió a técnicas de observación participante y entrevistas semiestructuradas. Se recuperó la información para su análisis a través de las hojas de trabajo con las respuestas de los alumnos y sus archivos de Cabri. Así, mientras que las hojas de trabajo permitieron analizar procesos de solución, razonamiento y argumentación, los archivos de Cabri permitieron corroborar y clarificar respuestas y comentarios, mostrando un panorama de sus procesos de razonamiento, de visualización y del uso de la herramienta. Este análisis consideró una codificación de la información basada en el contenido de las justificaciones y los argumentos generados por los alumnos, la cual consideró como una referencia a los esquemas de argumentación (Flores et al., 2010) y a aspectos relativos con su construcción, contenido y estructura. Al ordenarse la información en categorías de los tipos de justificaciones y darle sentido (Álvarez-Gayou, 2005), se obtuvieron resultados que a continuación se exponen.

5. Resultados

Del análisis de la información obtenida con el trabajo de los alumnos, aparecieron aspectos que están relacionados con el trabajo en geometría, aunque no únicamente con la producción de justificaciones. Algunos de estos aspectos fueron el papel que jugó la intuición, el uso de la medición como medio de validación, la aparición de las llamadas *representaciones gráficas estereotipadas*, el uso del arrastre y la aparición de un discurso dinámico por parte de los alumnos. El interés en este trabajo es lo relacionado con la producción de justificaciones por parte de los alumnos en un ambiente de Geometría Dinámica. En este sentido, los alumnos desarrollaron los siguientes tipos de justificación: a) circulares; b) relativas al proceso de construcción; c) basadas en la experiencia; d) visuales; y e) con deducciones locales. Prácticamente no aparecieron esquemas de *argumentación autoritarios*. Esto se puede atribuir al hecho de que la actuación de la profesora y las actividades planteadas estuvieron orientadas a que los alumnos presentaran sus argumentos tras observar situaciones, buscando que ellos propusieran respuestas. Ahora bien, dado que el interés fue que los alumnos utilizaran propiedades geométricas, se esperaba que al finalizar los cursos de geometría utilizaran más las justificaciones basadas en deducciones, es decir, los esquemas de argumentación analíticos. Sin embargo, la mayoría de alumnos utilizaron justificaciones de los primeros tipos, los cuales están incluidos en los *esquemas de argumentación simbólicos*, *fácticos* y *empíricos*.

5.1. Justificaciones circulares

Resultaron muy comunes las justificaciones circulares que echan mano de argumentos que se utilizan a sí mismos para validarse. Un caso es el del equipo 07-23 (se mantienen los números que tenían asignados los integrantes de cada equipo en la lista de la profesora) cuando se justifica por qué el baricentro divide a cada mediana en dos segmentos con una razón fija:

> *La razón necesita ser la misma porque representa la proporción de cada mediana ya que si fueran diferentes el punto donde se cortan las medianas no sería el baricentro.*

Este tipo podría incluirse en los esquemas de argumentación simbólicos, pues se realiza un manejo de representaciones (gráficas o supuestas definiciones) que por sí mismas proporcionan el argumento pero no por hacer referencia al objeto matemático mencionado, es decir, “los símbolos o las manipulaciones no tienen un sistema potencial y coherente de referentes a los ojos del estudiante” (Harel, 2007, p. 67).

5.2. Justificaciones relativas al proceso de construcción

Una opción muy utilizada fue justificar los resultados obtenidos apoyándose en la descripción explícita del proceso de construcción, lo cual incluyó referencias a las opciones del software. Esto hace referencia a un *esquema de argumentación fáctico* desde el punto de vista de Flores et al (2010). Por ejemplo, en la actividad 3 se solicitó a los alumnos que relacionaran el triángulo medial de un triángulo (*DEF* en la Figura 2) y el triángulo *A*’*B*’*C*’. El equipo 03-44, cuando justificó dicha relación dijo:

> *Ambos están construidos por puntos medios pero el triangulo A’B’C’ está hecho por puntos medios de segmentos y el DEF está hecho por puntos medios del triángulo.”*

5.3. Justificaciones basadas en la experiencia

Algunos alumnos necesitan hacer referencias a casos concretos para justificar una observación general. Tal es el caso del equipo 19-33, que después de haber observado que el baricentro divide a las medianas en dos segmentos cuyas longitudes tienen una razón 2:1, en la actividad 2 lo justifican así (ver nombres de los puntos en la Figura 5):

Al unir un vértice con la mediana de su lado opuesto forma un segmento, al hacer lo mismo con los demás vértices, podemos obtener el punto de intersección y el segmento se divide, al observar las medidas, podemos ver que el segmento corto, es una tercera parte del segmento total ejem. AG=2/3 GD=1/3 1/3+2/3=1.

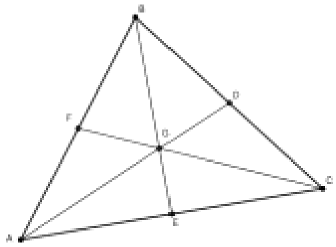

Figura 5. Construcción del ejemplo

La justificación es una descripción de lo realizado durante la construcción, pero a partir de "ejem.", los alumnos presentan una justificación basada en lo que tienen enfrente: el software les proporciona unas medidas que utilizan para mostrar que un segmento resultante de dividir *AD* por *G* representa dos terceras partes del segmento total, el otro es un tercio y, por tanto, los dos segmentos resultantes generan la unidad (segmento *AD*). Los mismos alumnos escribieron lo que aparece a continuación en la siguiente actividad y su archivo quedó como muestra la Figura 6:

¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que el segmento BB'? ¿Por qué?

El segmento GB' y EG. Porque todo el segmento está dividido en 3 partes iguales. Lo sé porque lo hice en el ejercicio pasado.

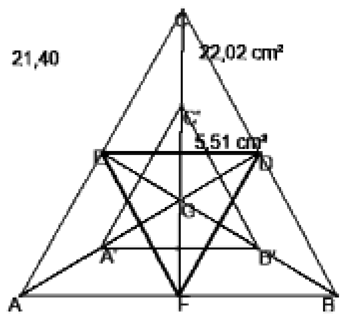

Figura 6. Construcción del ejemplo (tomada de González & Larios, 2012, p. 101)

Cuando usan la expresión "lo sé porque lo hice en el ejercicio pasado" y se revisa que en dicho ejercicio utilizan tercios para hacer la descripción del proceso, tenemos que dicho tratamiento tiene una influencia directa en su respuesta y la referencia explícita a la división en tres partes del segmento. Ello podría llevar a pensar que el uso o desuso del razonamiento deductivo tiene que ver con la percepción de los alumnos sobre la utilidad del mismo y con su capacidad de otorgarle una función operativa efectiva. Con todo, estas justificaciones se incluyen en las categorías de *esquemas de argumentación empíricos*. Esta categoría de esquemas según Harel y

Sowder (1998) incluye dos subcategorías porque los argumentos utilizados son de distinta naturaleza. En efecto, este tipo de justificaciones se pueden considerar en una subcategoría de *esquemas de argumentación inductivos*.

5.4. Justificaciones visuales

Las justificaciones visuales son un recurso utilizado por los alumnos, que se vincula a la representación gráfica de los objetos geométricos. La siguiente es una de las preguntas hechas al mismo equipo del ejemplo anterior en la misma actividad:

¿Cómo son sus lados del chico con respecto al grande?, por ejemplo, ¿cuál es la relación del lado B'C' y el lado BC? ¿En qué se parecen y cuáles son sus diferencias? ¿Por qué?

Se parecen en que tienen la misma forma pero su única diferencia era que son de distintos tamaños.

En esta actividad la intención era que los alumnos observaran el paralelismo entre los lados de los diferentes triángulos, pero ellos se percataron de la forma y el tamaño. Otro ejemplo es la respuesta del equipo 06-42 cuando comparan en la misma actividad el triángulo *ABC* y el medial:

¿Hay alguna similitud? ¿Alguna diferencia? ¿Tienen alguna característica o propiedad en común?

Que ambos triángulos están divididos en seis triángulos más pequeños de igual medida, su diferencia es únicamente su medida. El triángulo DEF está hecho a escala del triángulo ABC y viceversa pero puestos en diferente posición.

La justificación está basada en el tamaño y la posición de los triángulos, ni siquiera en la medición en sí. En la misma actividad el equipo 09-25-41 escribió:

Ahora bien, tienen tres triángulos construidos, el ABC, el A'B'C' y el DEF. ¿Los últimos dos, los dos chicos, tienen alguna relación o parecido entre sí? ¿Por qué?

Sí, porque los vértices de los dos triángulos se encuentran en el punto medio de segmentos diferentes.

La justificación visual no es explícita, pero el hecho de que los vértices de dos triángulos estén a la mitad de los segmentos parece que proporciona suficiente información visual para justificar lo que ocurre. Al igual que en la subsección anterior, este tipo se puede incluir en los *esquemas de argumentación empíricos*, pero tiene la diferencia de que existe una referencia fuerte a la información figural proporcionada por los objetos, por lo que se denominan del subtipo *perceptual* (Flores, 2007).

5.5. Justificaciones con deducciones locales

Como se sabe (Fiallo et al., 2013; Flores et al., 2010; Hiele, 1986; Kuzniak, 2006), el razonamiento deductivo se utiliza en los niveles más altos de razonamiento en geometría, por lo que no es esperable que los alumnos de secundaria lo utilicen de manera natural. Con los alumnos participantes se podrían esperar deducciones locales principalmente. Según esto, se observaron algunas justificaciones que involucran deducciones incompletas y completas a nivel local. Un ejemplo con el que los alumnos pudieron haber recurrido al razonamiento deductivo a partir de sus observaciones, fue cuando se les preguntó el mínimo de medianas necesarias para construir el baricentro. La pregunta no es trivial pues para considerar éste último punto de vista se requiere considerar la propiedad de concurrencia de las medianas, mientras que desde el software resulta que si tres rectas (o segmentos) concurren, éste presenta problemas (no insalvables) para construir el punto de intersección. Hubo cuatro respuestas:

- Se necesitan dos porque con una no existe un punto de intersección entre rectas. Equipo 02-29-45: "Con dos medianas porque al trazar 2 líneas se cruzan muestran el punto de intersección (baricentro)". Si bien no hay una referencia explícita al software, tampoco lo hay al uso de la propiedad de concurrencia de las medianas. Esta fue la opción más considerada por los equipos de trabajo.

- Se necesitan dos porque así lo requiere el software para construir un punto de intersección. Equipo 20-22: "Se necesitan dos medianas, porque en un solo segmento no se puede trazar el baricentro necesitaríamos dos para que nos dé el punto de intersección entre los dos segmentos". Esta situación es similar a la anterior, pero con referencia explícita al software.

- Se necesitan dos porque se sabe que la tercera pasará por ese punto. Equipo 07-23: "Dos, porque ya sabemos que en el lugar donde se cortaron las primeras dos pasará la tercera mediana". Se retoma la propiedad geométrica de concurrencia de medianas.

- Se necesitan los tres. Equipo 05-24-47: "Son tres medianas porque donde se cruzan es donde se encuentra el punto *G*". Se evidencia una falta de referencia al uso del software, pero también pareciera que hay una carencia en la comprensión de la situación pues se resuelve repitiendo lo que ya se ha visto.

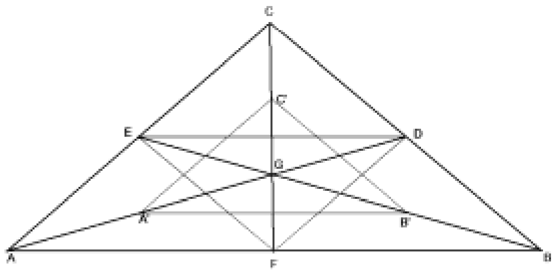

Figura 7. Construcción del ejemplo (en González & Larios, 2012, p. 95)

Otro ejemplo de razonamiento deductivo es el equipo 06-42 en la actividad 3, donde se realiza la construcción de la Figura 7. En este punto deben contestar:

¿Qué otro segmento en el triángulo medirá lo mismo que el segmento BB'? ¿Por qué?

GE. Porque del baricentro al punto medio de CA mide la mitad del segmento GB, por lo tanto el punto medio de GB equivale a la medida de GE.

Para ese momento, los alumnos previamente habían identificado por medio de mediciones que "del baricentro al punto medio de *CA* [que es *E*] mide la mitad del segmento *GB*". Saben que el punto medio de un segmento (*B*') lo divide en dos que miden la mitad que el original, aunque esto lo mantienen implícito. No obstante, no recurrieron a medir los segmentos; aprovecharon lo ya observado y lo aplicaron directamente. Este tipo de justificación corresponde a un *esquema de argumentación analítico*, pues aparecen cadenas de deducciones aunque sea a nivel local. Se obtienen conclusiones a partir de propiedades consideradas de manera casi inmediata. Con los alumnos del estudio se percibió el desarrollo de esquemas axiomáticos.

6. Reflexiones finales

Al estudiar geometría en un ambiente dinámico, los alumnos de tercer año de secundaria hacen más referencias a los aspectos figurales que a los conceptuales de los objetos geométricos (Larios & González, 2010). Esto es de esperar pues el proceso de aprendizaje es progresivo y no lineal, y requiere manipulación de representaciones –que hacen más referencia a los aspectos figurales y que requieren de representaciones gráficas estereotipadas– para otorgar significados adecuados a los objetos geométricos al hacer referencia a los aspectos conceptuales. Así, los alumnos ponen más atención a características (propiedades) de objetos geométricos –o más bien de representaciones–, que resultan irrelevantes para el proceso de justificación deductiva al proporcionar información que "estorba" (Larios, 2005):

- No se observan propiedades invariantes porque la representación (dibujo) está mal y no se perciben las propiedades (a diferencia del experto que hace dibujos pero se enfoca en el aspecto conceptual).
- Se observan propiedades que podrían provenir de fuentes externas, pero que "desaparecen" cuando se aplica el arrastre por los errores en la construcción (no es robusta). Los alumnos no se percatan de que la complicación está en su construcción y no en las propiedades geométricas.

Se hace necesario un tratamiento didáctico dirigido a la observación de propiedades geométricas (aspecto conceptual) y a la producción de justificaciones con deducciones locales inicialmente, para avanzar en los procesos de razonamiento. Esto requiere que el diseño de las actividades considere la producción de conjeturas y de argumentos que se hagan explícitos y se puedan comunicar. Valdría la pena desarrollar herramientas que permitieran al profesor sistematizar la observación del desarrollo de los alumnos para detectar el tipo de justificación que utilizan en un contexto en particular y así mejorar los procesos didácticos. Los esquemas de argumentación pueden ser parte de dicha herramienta, aunque hemos visto que requieren un análisis mayor y quizá con una mayor adaptación con respecto a la propuesta original de Harel y Sowder (1998). Por otro lado, durante este trabajo se percibió la necesidad de que los alumnos expliciten más sus observaciones y conclusiones cuando trabajan en el desarrollo de justificaciones y explicaciones a fin de que puedan intercambiar ideas, sostener y rebatir argumentos mediante razonamientos cercanos a la deducción.

Otros factores que se vieron involucrados en el trabajo de los alumnos que deben ser tomados en cuenta son el uso frecuente de la opción en el software para medir distancias o áreas. Se detectó que en ocasiones las actividades planteadas promueven esto, por lo que conviene buscar la manera en que la medición progresivamente pase de ser un medio que sirve como verificación y validación a uno que se utilice como herramienta heurística. De acuerdo con Duval (1999), este cuidado con la medición es necesario, pues "cuando la hipótesis incluye números como medidas de lados o segmentos, la aprehensión operativa es neutralizada y la figura cumple sólo una función ilustrativa o de apoyo. Incluso podemos tener un conflicto entre la figura y las medidas que lleve a una paradoja" (p. 99). Los alumnos en varias ocasiones aceptaron la igualdad de longitud de segmentos utilizando más la medición (con la herramienta del software) que las propiedades geométricas (e incluso ignorando éstas). Además, algunas metáforas como las de movimiento son introducidas. Los objetos geométricos en la computadora al ser arrastrados por el usuario pareciera que se desplazan por la pantalla. En la realidad geométrica no ocurre esto ya que un punto cualquiera en el plano (P) no cambia de lugar, sino que en todo caso se le aplica una operación (isometría) y se obtiene otro como imagen. En el software pareciera que es el mismo (incluso conserva el mismo nombre) y tanto profesor como alumno lo llaman igual.

Nuestro estudio, lejos de hacer desistir a los profesores de utilizar el software para Geometría Dinámica, muestra la necesidad de seguir realizando exploraciones al respecto para conseguir proponer estrategias a desarrollar en el aula. Las posibilidades son muchas y requieren que el profesor esté dispuesto a afrontar el reto de utilizar la herramienta computacional (en términos ventajosos y desventajosos), consciente de los fenómenos cognitivos que emergen y los obstáculos que aparecen (Larios, 2005).

Referencias

Álvarez-Gayou, J. L. (2005). *Cómo hacer investigación cualitativa*. México: Paidós.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). Nueva York: Routledge.

Bloch, E. D. (2000). *Proof and fundamentals*. Boston: Birkhäuser.

Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez, & L. Puig (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 121-128). Valencia: PME.

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: FCE.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Pitagora Editrice Bologna y Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-161). Rotterdam: Sense Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana, & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géomètrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, *10*(2), 5-53.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración*, *31*(2), 181-205.

Finzer, W. F., & Jackiw, N. (1998). *Dynamic manipulation of mathematical objects*. Disponible en: http://www.dynamicgeometry.com/General_Resources/Recent_Talks/Sketchpad_4.0_Talks/Dynamic_Manipulation.html.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*, 139-162.

Flores E., C., Gómez R., A., & Flores S., Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae*, *12*(2), 22-42.

Flores S., Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, *19*(1), 63-98.

González G. N., & Larios O., V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria*. Saarbrücken: Editorial Académica Española.

Gonzato, M. (2013). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de la visualización espacial*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in schools. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 65-78). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). Washington DC: AMS.

Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. Boston: Academic Press.

Hitt E., F., Cortés Z., C., & Rinfret, M. (2012). Utilisation des technologies dans la classe de mathématique au secondaire: des outils sous-exploités. En J.-L. Dorier, & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social. Actes du colloque EMF2012* (pp. 849-862). Ginebra: Université de Genève.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(2), 167-188.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(1-2), 165-210.

Larios O., V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica*. Trabajo de Tesis Doctoral. Cinvestav-DME México.

Larios O., V., & González G., N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, *13*(4), 147-160.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Rabardel, P. (2002). *People and technology. A cognitive approach to contemporary instruments*. Disponible en: http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/Groupes/Modele/Articles/Public/ART372105503765426783.PDF

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(3), 5-41.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: Secretaría de Educación Pública.

Ursini L., S. (2006). Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología (EMAT). En M. T. Rojano (Ed.), *Enseñanza de la Física y las Matemáticas con tecnología* (pp. 25-41). México: Secretaría de Educación Pública.

Ursini L., S., & Rojano C., T. (2000). *Guía para integrar los talleres de capacitación EMAT*. México: Secretaría de Educación Pública e Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa.

Agradecimientos

Proyecto de Investigación Fondecyt de iniciación Nº 11150014, CONICYT, Chile. Proyecto EDU2015-64646-P, MEC, España.

Referencias de los autores

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro, Maestría en Didáctica de las Matemáticas (México). vil@uaq.mx

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos, Departamento de Ciencias Exactas (Chile). luis.pino@ulagos.cl

Noraísa González González, Escuela Secundaria General "Mariano Matamoros", USEBEQ (México). norai11@yahoo.com

Argumentative schemes of middle school students on dynamic geometry environments

Víctor Larios Osorio, Universidad Autónoma de Querétaro (México)

Luis Roberto Pino-Fan, Universidad de Los Lagos (Chile)

Noraísa González González, Escuela Secundaria General Mariano Matamoros (México)

Knowledge validation in Mathematics is an epistemological main issue in the mathematics methodological process known as mathematical proof. Its learning includes complex processes and obstacles which appear throughout individual cognitive development. This learning process may be studied taking into count aspects like activities, technology used for explorations, arguments structure and content and types of justification. In this paper we present the types of justification produced by middle school Mexican students (14-15 year-olds) during their work within a Dynamic Geometry Software (DGS) environment. The teaching and learning of Geometry in the teaching experiment is accomplished with activities that allow explorations and observations of properties in order to promote deductive reasoning. We considered a pragmatic approach to the notion of proof as mathematical knowledge validation and an analysis of argumentation schemes produced by students. We observed more references to figural than to conceptual aspects in relation to the common manipulation of representations. This finding points to complexity of the learning of proof inasmuch as students often paid exclusive attention to features of drawings (objects' representations) which are irrelevant for deductive justification. It became clear that students should be encouraged to make explicit their observations and conclusions when they are working on the development of justifications and explanations, so that they can exchange ideas, support their own arguments and refute others' arguments through deduction-based reasoning. It would be worth developing tools which allow teachers to systematize the observation of students' development in order to detect the type of justification that they use in particular contexts. This would allow the teachers to be able to implement more adequate didactic processes.