MEMORIA DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER DE SECUNDARIA. ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

JOSÉ ALBERTO REBOLLAR MORENO

SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

TUTOR: ALFONSO JESÚS POBLACIÓN SÁEZ

Universidad de Valladolid

Curso 2013-2014

VISTO BUENO DEL PROFESOR

INFORME DE NO PLAGIO

TABLA DE CONTENIDOS

1 Introducción

El objeto del presente trabajo es analizar la capacidad de algunos programas informáticos para ayudar a entender y aprender algunos conceptos geométricos en el aula y proponer una serie de prácticas para los alumnos de Secundaria, basadas en el libro de texto, que le ayuden en su aprendizaje de la geometría.

En primer lugar quisiera valorar positivamente los libros de texto, que por lo general están bastante bien estructurados y redactados e incluyen muchos ejemplos que permiten a los alumnos ir asimilando progresivamente cada uno de los capítulos de las asignaturas.

Mi experiencia como estudiante y como docente me hace por otro lado valorar mucho las clases. En ellas el profesor consigue generalmente acortar el tiempo de aprendizaje de las materias al alumno. Pero una buena explicación exige cierto esfuerzo del alumno para poderla asimilar. A veces esa asimilación resulta incompleta o deficiente y se requiere un tiempo de estudio personal en casa. Estoy convencido de que, también desde mi percepción personal, tomar apuntes durante la clase exige a los alumnos más atención y consigue un mayor aprovechamiento de las horas de clase.

Aunque la mayor parte de los centros de secundaria utilizan un libro de texto en el desarrollo de las clases, el alumno contempla la materia que se explica en clase como la que debe preparar para el examen. De tal modo que cuando un alumno no puede asistir a clase, deberá recuperar los apuntes de lo explicado por el profesor.

Los gráficos que generan los programas de Software Dinámico ayudan a entender las explicaciones y hacen más evidentes las explicaciones de la pizarra. Permiten al profesor mostrar de un modo vistoso, atrayente, y sobre todo, clarificador, ideas, conceptos, y facilitan la resolución gráfica de problemas. El alumno puede, sin necesidad de haber estado presente en clase, con las indicaciones adecuadas, reproducir fielmente lo explicado en el aula, sin los errores que pueden incorporar los apuntes tomados por un compañero. Estos programas constituyen por tanto un complemento ideal a los apuntes, el libro de texto, y las explicaciones del profesor.

2 Demostraciones gráficas en Geometría

Las pruebas gráficas en geometría son ilustrativas para gran parte de los resultados que se pueden representar y por tanto, bien justificadas, pueden servir para demostrar los desarrollos teóricos más complejos. Estas pruebas gráficas no quitan la necesidad de las demostraciones matemáticas rigurosas que en la historia de las matemáticas han permitido avanzar con seguridad en cada momento, y a veces han puesto de manifiesto errores que los gráficos escondían.

Los conceptos típicos de Geometría se concentran en el Bloque 4 de Secundaria y en el Bloque 2 de Bachillerato. Se imparten de un modo progresivo en la Enseñanza Secundaria y Bachillerato según la Normativa actualmente en vigor[1]. A modo de resumen recordatorio extraigo los conceptos geométricos más relevantes que se podrían tratar con herramientas de Software Dinámico:

a) En 1º ESO los conceptos geométricos de punto, recta, segmento, ángulo, paralelismo, perpendicularidad, mediatriz, bisectriz, altura, mediana, incentro, circuncentro, triángulos, cuadriláteros, polígonos regulares y circunferencias. Perímetros, áreas, arcos, sectores circulares, simetría axial.

b) Los conceptos geométricos que abarca 2º ESO los conceptos geométricos que abarca son los siguientes: Teorema de Pitágoras, semejanza, escalas y Teorema de Tales, geometría básica espacial con puntos, rectas, planos, ángulos diedros. Incidencias, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos en el espacio. Cuerpos geométricos elementales: cubo, prisma, pirámide, paralelepípedos, poliedros, cono, cilindro esfera. Composición y truncamiento de poliedros. Longitudes, Áreas, Volúmenes en el Sistema Internacional de Unidades.

c) 3º ESO revisa la geometría del plano y el concepto de lugar geométrico con alguna propiedad específica. Teorema de Tales para dividir segmentos proporcionales. Teorema de Pitágoras para resolver problemas. Traslaciones, giros y simetrías en el plano. Revisión de la Geometría en el Espacio. Planos de simetrías en Poliedros. Movimientos en Conos y Cilindros. La esfera terráquea, longitud y latitud. Áreas y Volúmenes.

[1]DECRETO 52/2007, de 17 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad de Castilla y León y DECRETO 42/2008, de 5 de junio, por el que se establece el currículo de bachillerato en la Comunidad de Castilla y León.

d) 4º ESO: Se estudia la Razón de Semejanza con el Teorema de Tales, y la resolución de medidas indirectas. Planteamiento y resolución de problemas geométricos cotidianos. Geometría Analítica Plana: el punto, la recta.
e) 1º BAC: La Geometría de los triángulos se completa con la Trigonometría. Se estudia el producto escalar, el módulo de un vector y la ortogonalidad. Se estudian analíticamente los lugares geométricos del plano. Cónicas: circunferencia, elipse, parábola, hipérbola, con su ecuación canónica.
f) 2º BAC se completa con el estudio analítico de la recta y el plano en el espacio, el producto escalar y vectorial y su significado geométrico. Incidencia, paralelismo, perpendicularidad, ángulos, distancias, áreas, volúmenes en el espacio.

La Geometría analítica proporciona tratamiento matemático numérico detallado. Los resultados y propiedades se podrán demostrar analíticamente y/o visualizar gráficamente. Trataremos de hacerlo de ambos modos, primero en la pizarra y a continuación en el ordenador con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

3 Entorno informático para el aprendizaje

Introducir el uso de ordenadores en las clases de Matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico para dar más claridad a las explicaciones. A veces las demostraciones teóricas no convencen a fondo al alumno porque no entiende del todo lo que se está demostrando. Dentro del campo de la Geometría existen ejercicios que se pueden desarrollar tanto numérica como gráficamente. Basta seleccionarlos con un poco de cuidado y preparar unas clases introductorias que permitan a los alumnos recibir las primeras nociones de manejo de esos programas.

Es necesario que el programa sea de fácil manejo, para que en una o dos horas los alumnos sean capaces de hacer los primeros ejercicios, y no se desmotiven. En ese tiempo, el software elegido debería permitir que el alumno se manejara con soltura con los objetos básicos del temario. Sus primeros pasos contemplarían la colocación de puntos dentro del sistema de ejes cartesiano. A continuación las rectas, semirrectas y segmentos que pasan por dos puntos, pasando después a representar rectas que se cortan perpendicularmente y otras paralelas entre si. Posteriormente, los polígonos regulares, las cónicas, etc., describiendo y comprobando diferentes propiedades sobre cada uno de estos conceptos.

4 Análisis de los resultados gráficos

Según el nivel académico en el que estemos y el tema que corresponda, se pueden plantear distintas finalidades y objetivos a conseguir.

El primer objetivo es mostrar a los alumnos que los resultados que se han desarrollado en la pizarra tienen sentido real cuando un programa los interpreta. En este estado sólo se capta la atención momentáneamente para verificar unos ejercicios concretos.

Un segundo objetivo, un poco más ambicioso, es conseguir que parte de las horas de matemáticas se dediquen a aprender a manejar un software gráfico con el que hacer algunas prácticas que tendrán su reflejo directo en la nota porque serán prácticas evaluables. Para ello los alumnos deberían tener al menos una hora a la semana de acceso al ordenador, ya sea de modo individual o en parejas, siempre que las condiciones del centro escolar lo permitan. Sería aconsejable que los alumnos instalaran el programa en casa para continuar fuera del aula las prácticas, mejorando en el manejo de la aplicación. Esto no pretende sustituir en absoluto las clases dadas en la pizarra, son necesarias para entender el fundamento matemático de cada una de las lecciones. Pero si queremos dotar a las prácticas de geometría dinámica de cierta relevancia, es preciso asignarles un peso adecuado en el desarrollo de la asignatura y en la evaluación.

Los resultados gráficos proporcionados por estos programas, en ocasiones, inducen al alumno a obviar la solución numérica. Es importante que el profesor les transmita la idea de que, siendo didácticamente relevantes porque ayudan a entender las situaciones, no son sustitutivos del razonamiento analítico.

5 Programas de simulación matemática en el Aula

Existe a disposición del profesor una amplia variedad de programas de geometría dinámica, algunos libres y gratuitos. Una primera tarea del docente sería seleccionar de entre todos ellos el que considere que más se ajuste a los objetivos fijados para desarrollar su tarea. En el presente trabajo hemos confrontado las prestaciones de los siguientes (en la referencia bibliográfica se indica la página oficial desde la que es posible descargar cada uno de ellos):

1. *CaRMetal.* [1]
2. *Cinderella.* [3]
3. *GeoGebra.* [5]

Se realizará una breve descripción de cada uno de ellos y una comparativa para elegir el más conveniente de acuerdo a los objetivos propuestos.

6 Un poco de historia de estos programas.

6.1 *CaRMetal*

CaRMetal es una aplicación interactiva de geometría dinámica libre, realizada con licencia GNU GPL, diseñada por el programador E. Hakenholz, en Java. Se basa en *C.a.R.* (*Compass and Ruler*), software desarrollado por Rene Grothmann en 1989. Se mantienen varias funcionalidades del programa *C.a.R.* pero utilizando una interfaz gráfica mejorada que ofrece acceso directo a numerosos efectos gráficos y matemáticos. Las construcciones se hacen usando una paleta principal, que contiene algunos atajos útiles de construcción, además de las herramientas de compás y una regla estándar. Estos incluyen las siguientes aplicaciones: mediatriz, círculo a partir de tres puntos, arco de circunferencia que para por tres puntos, y la sección cónica que pasa por cinco puntos no alineados, arco de circunferencia que para por tres puntos, y la sección cónica que pasa por cinco puntos. También son interesantes los apartados dedicados a los lugares geométricos, funciones, curvas paramétricas, y gráficos de funciones implícitas. En cuanto a la apariencia de los objetos representados dispone de las herramientas de grosor del elemento, color, etiqueta, y otros atributos (incluyendo la llamada propiedad magnética) que pueden definirse mediante un panel separado.

CaRMetal posee cinco paletas de colores para introducir en el fondo de la construcción: dos de colores saturados, otras dos de colores insaturados y otra de colores web. *CaRMetal* tiene un lenguaje de script (JavaScript) que permite al usuario construir figuras más complejas, como los fractales. Está disponible en varios idiomas (francés, Inglés, holandés español, alemán, italiano, portugués y árabe). En [1] y [2] puede consultarse una información más detallada.

6.2 Cinderella

Cinderella fue inicialmente desarrollado por Jürgen Richter-Gebert y Henry Crapo. El software original se creó en C Orientado a Objetos en la plataforma NeXT creada por la empresa de Steve Jobs cuando abandonó temporalmente la empresa *Apple*.

En 1996, el software fue reescrito en Java desde cero por Jürgen Richter-Gebert y Ulrich Kortenkamp. Esta versión ganó el Premio a la Innovación Multimedia en Learntec '97 en Karlsruhe, Alemania. Este galardón atrajo la atención de la editorial educativa alemana Heureka-Klett y la editorial científica Springer-Verlag de Heidelberg, que aceptaron producir una versión comercial del software. La versión de la escuela de *Cinderella* 1.0 fue publicado en 1998, e incluye cerca de 150 ejemplos, animaciones y ejercicios creados con *Cinderella*; la versión universitaria fue lanzada en 1999.

En 2006, una nueva versión de *Cinderella*, la 2, fue publicada sólo en versión *on-line*. El manual impreso para la versión actual 2.6 ha sido publicado por Springer-Verlag en 2012. Desde 2013, la versión Pro de *Cinderella* está disponible gratuitamente.

6.3 GeoGebra

Software matemático interactivo libre orientado a la enseñanza en colegios y universidades. Su creador, Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y lo continúa en la Universidad de Atlantic, Florida.

GeoGebra está escrito en Java y por tanto está disponible en múltiples plataformas.

Es básicamente un procesador geométrico y algebraico, que reúne geometría, álgebra, cálculo y estadística, por lo que puede ser usado también en disciplinas afines como física, proyecciones comerciales, estimaciones de decisión estratégica etc.

Con *GeoGebra* pueden realizarse construcciones a partir de puntos, rectas, semirrectas, segmentos, vectores, cónicas, etc., mediante el empleo directo de herramientas operadas con el ratón o la anotación de comandos en la Barra de Entrada, con el teclado o seleccionándolos del listado disponible. Todo lo trazado es modificable en forma dinámica: es decir que si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A.

GeoGebra permite el trazado dinámico de construcciones geométricas de todo tipo, así como la representación gráfica, el tratamiento algebraico y el cálculo básico con funciones reales de variable real, sus derivadas, integrales, etc.

7 Puntos a comparar en los programas dinámicos

Para tomar la decisión del programa sobre el que desarrollar las clases, se han seleccionado un conjunto de parámetros sencillos que se van valorando de un modo intuitivo y permiten establecer algunas pautas para la selección.

1. **La facilidad de descarga y de instalación**: Se puede exigir que las aplicaciones sean fáciles de descargar y de instalar, sin necesitar conocimientos excesivos de programación.
   a. *GeoGebra, Cinderella y CaRMetal* son aplicaciones que usan Complementos y Applets Java y se necesita que esté instalado en el ordenador. Esto implica cierto grado de ralentización en las ejecuciones que normalmente es asumible por la potencia de los equipos.
   b. *CaRMetal* es una aplicación nativa en Java y es la más lenta de las tres en ejecución.
2. **Uso intuitivo**: Se trata de comparar el tiempo necesario para poder empezar a usar la aplicación partiendo de cero.
   a. ***CaRMetal*****:** este programa tiene algunos inconvenientes de falta de versatilidad: No proporciona distancia entre objetos, ni el ángulo entre rectas. Posee los iconos agrupados por clases pero le faltan varios necesarios para hacer medidas.
   b. ***Cinderella***: No tiene el ajuste de la escala ni del zoom en la ventana gráfica de modo rápido. Todos los iconos aparecen sin orden.
   c. ***GeoGebra***: Tiene resueltos los problemas de los anteriores porque ajusta el zoom de modo correcto entre los ejes y los objetos. Permite medir las distancias. Posee los iconos ordenados por temas, empaquetados en varios grupos.
3. **Salidas de los Datos y ficheros**: Los ficheros de salida en los tres casos son captura directa de la pantalla.
   a. ***CaRMetal*** permite exportar el gráfico a eps, pdf, jpg y svg.
   b. ***Cinderella*** acepta los formatos pdf, pnp y jpg. También permite la exportación a HTML.
   c. ***GeoGebra*** puede exportar a formatos pdf, gif, eps, svg, pnp, emf.

4. **Potencia en 3D** en este Trabajo no será tratada, dado que el grueso de los temas del currículo de Secundaria es de geometría plana. Por otro lado, el estado actual de los entornos 3D para estos programas no está demasiado conseguido y podría distraer más que aclarar situaciones. En la aplicación *GeoGebra* se está preparando la Versión 5 que incluirá próximamente esta opción, si bien en el momento actual solo se puede descargar la versión Beta (*GeoGebra-Windows-Installer-4-9-272-0.exe*).
5. **Manejo del Zoom y del posicionamiento en el gráfico:** Estas funciones se usan constantemente mientras se va haciendo el trabajo. Por tanto es recomendable que sean fáciles de encontrar entre las funciones de los botones del ratón. Únicamente *GeoGebra* incorpora las dos funciones integradas. *CaRMetal* tiene el zoom integrado en el ratón pero no el movimiento por el gráfico. *Cinderella* no integra ni el zoom ni el movimiento en los botones del ratón.
6. **Herramientas disponibles:** El programa *CaRMetal* posee 12 grupos con 123 herramientas un poco ordenadas pero se echan en falta algunas fundamentales como las de medición de ángulos, áreas y longitudes. La aplicación *Cinderella* no posee grupos y tiene todas las 76 herramientas visibles simultáneamente, ordenadas por temas pero una detrás de otra. El más ordenado es *GeoGebra* que tiene 12 grupos con un total de 72 herramientas, teniendo visible la primera herramienta de cada grupo. Manteniendo el ratón pulsado sobre ella, se despliega el grupo y nos permite elegir una de las ocultas, pasando ésta a la primera posición de la tira.

7.1 Distancia de un punto a una recta.

A continuación, se elige un ejercicio sencillo con el que comparar la resolución que tendría lugar con cada uno de los programas elegidos. El enunciado puede ser el siguiente: Dada una recta *r* de ecuación general $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + C = 0$ y un punto cualquiera $\mathrm{P}(p_1, p_2)$ exterior a *r*, hallar la distancia a la recta desde dicho punto. Antes de representar la situación gráficamente, hacemos la resolución algebraica. Sabemos que la distancia se obtiene empleando una recta auxiliar que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta *r*. Esa recta auxiliar *s* corta a *r* en el punto $\mathrm{Q}(q_1, q_2)$.

A partir de la ecuación general de *r* conocemos el Vector director $Vd(-B, A)$ y de él obtenemos un Vector Normal de módulo unitario a la recta *r*, cuyas coordenadas vienen dadas por:

$$Vn = \left(\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right)$$

Vn será paralelo al vector *PQ* cuyo módulo es la distancia *d* que buscamos ya que al efectuar el producto escalar entre los vectores se tiene que

$PQ \bullet Vn = d = |PQ|\ |Vn|\ cos(0) = |PQ|.$

Operando tenemos lo siguiente:

$$d = \left|(q_1 - p_1, q_2 - p_2) \bullet \left(\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2)}}, \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right)\right| = \left|\frac{A(q_1 - p_1) + B(q_2 - p_2)}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right|$$

$$d = \left|\frac{Aq_1 + Bq_2 - Ap_1 - Bp_2}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right|,$$

en valor absoluto por ser la distancia siempre positiva.

Por otro lado sabemos que el punto Q debe satisfacer la ecuación de la recta *r* y por tanto sustituyendo sus coordenadas en la ecuación tenemos que A q_1 + B q_2 + C = 0. Despejando se obtiene que C = − A q_1 – B q_2. Sustituyendo en la expresión de la distancia tendremos que

$$d = \left|\frac{-C - Ap_1 - Bp_2}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right| = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\right|.$$

Aplicaremos el caso general a un ejercicio concreto:

4º ESO	Dada la recta *r* que para por los puntos A(−4,4) y B(0, −4), y el punto exterior a ella C(6,4), calcular: a) La ecuación general de la recta *r*. b) La recta *s* que sea perpendicular a *r* que pase por *C*. c) El punto de intersección con *r*. d) La distancia del punto C a la recta *r*.

a) Partimos de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos: Empleamos la ecuación continua que se obtiene a partir de un punto (el punto A por ejemplo) y un vector director que obtenemos a partir de A y B:

$$\frac{x - X_A}{X_A - X_B} = \frac{y - Y_A}{Y_A - Y_B} = \frac{x - (-4)}{-4 - 0} = \frac{4 - 4}{4 - (-4)}; \Longrightarrow 8x + 4y + 16 = 0; \Longrightarrow r: 2x + y + 4 = 0$$

b) La ecuación de la recta perpendicular a *r* que pase por el punto C se deduce a partir del vector director *Vd* = (−B, A) = (−1, 2), obtenido de la ecuación general de *r* cuya forma es A*x* + B*y* + C' = 0. El vector normal será Vn = (A, B) = (2, 1).

La ecuación de s será entonces *s: x − 2y + C' = 0*, donde podremos obtener C' sustituyendo el punto C del enunciado: 6 − 2 x 4 + C' = 0, que nos da C' = 2. Por tanto tendremos la ecuación de la recta *s: x* − 2*y* + 2 = 0.

c) El punto de intersección entre las rectas *r* y *s* lo obtenemos resolviendo el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que se nos plantea:

r: $2x + y + 4 = 0$

s: $x - 2y + 2 = 0$

Su multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda tendremos:

$4x + 2y + 8 = 0$ sumada a $x - 2y + 2 = 0$ obtenemos que $5x + 10 = 0$ y por tanto $x = -2$. Sustituyendo en la primera tenemos $2(-2) + y + 4 = 0$. Por tanto $y = 0$. El punto de corte será Q(−2, 0)

d) Finalmente la distancia entre dos puntos la obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras, a la diferencia de sus coordenadas:

$$d = \sqrt{(6-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8.94\,.$$

Aplicando el desarrollo anterior tendremos:

$$d = \left|\frac{A\,p_1 + B\,p_2 + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}\right| = \left|\frac{8\cdot 6 + 4\cdot 4 + 16}{\sqrt{8^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{48 + 16 + 16}{\sqrt{80}}\right| = \frac{80}{\sqrt{80}} = \sqrt{80} = 8.94$$

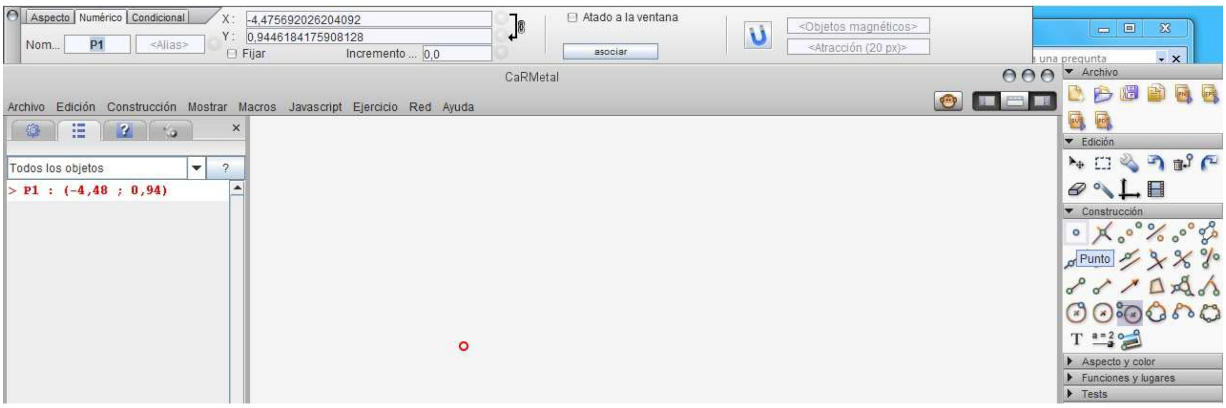
Vayamos a la representación gráfica, utilizando cada uno de los programas que hemos considerado.

Parece claro que lo primero es representar los objetos que intervienen en el enunciado del problema, la recta y el punto. A continuación, se traza una recta auxiliar perpendicular a la recta dada que pase por el punto dado. Calculamos el punto de intersección y posteriormente la distancia entre los dos puntos.

7.2 *CaRMetal*

Esta aplicación posee las herramientas agrupadas en 12 grupos, siendo los más importantes los situados en la parte más alta. Por este orden aparecen los desplegables:

- **Archivo**, que posee ocho iconos: nuevo archivo, abrir archivo, guardar, copiar al portapapeles y exportar a png, eps, svg y pdf.
- **Edición** con diez iconos: mover, seleccionar objetos, editar objeto, borrar ultimo objeto, deshacer borrar, ocultar objeto, mostrar objeto oculto, mostrar cuadricula y animar un punto
- **Construcción**, que posee veintisiete iconos. Los mas importantes son el de crear punto, la intersección entre líneas, punto medio, simetría axial, simetría central, traslación, recta, semirrecta, recta paralela, recta perpendicular, mediatriz, bisectriz, segmento, polígono, ángulo, circulo realizado de varios modos, texto, fórmula e imagen.
- **Otras barras desplegables son: Aspecto y color, Funciones y Lugares, Tests, Controles, Aspecto de rejilla, Histórico, Fondo: color e imagen, tamaño y precisión numérica.**



En este caso se dibuja una recta con la herramienta *Recta a partir de 2 puntos*.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27

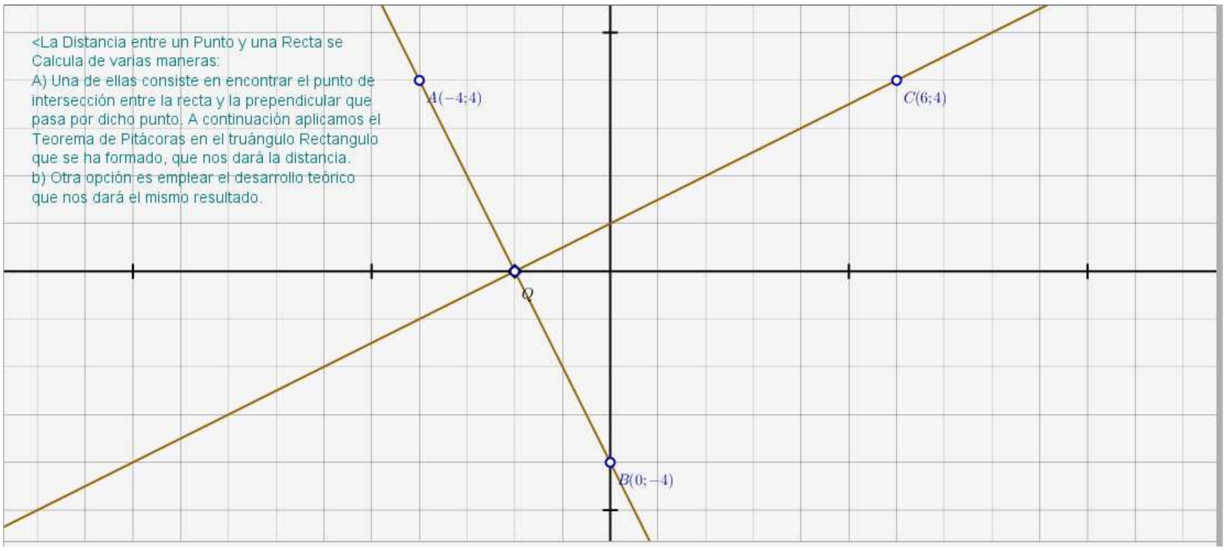
Utilizamos la herramienta nº 7 de la paleta llamada *Construcción*. Podemos cambiar el aspecto de la recta con la paleta *Edición*:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Para editar las propiedades seleccionamos la herramienta nº 1. En la parte superior aparecen todas las opciones de personalización que podemos cambiar.

A continuación se dibuja un punto externo a la recta, P_1, utilizando la herramienta nº 1 de la paleta de *Construcción*. Después con la herramienta *recta perpendicular a otra recta que pase por el punto* P_1 (herramienta nº 10 de la paleta de *Construcción*) dibujamos la recta auxiliar. Marcamos a continuación el punto intersección entre las dos rectas que se obtiene mediante la herramienta nº 2 de la paleta de *Construcción*.

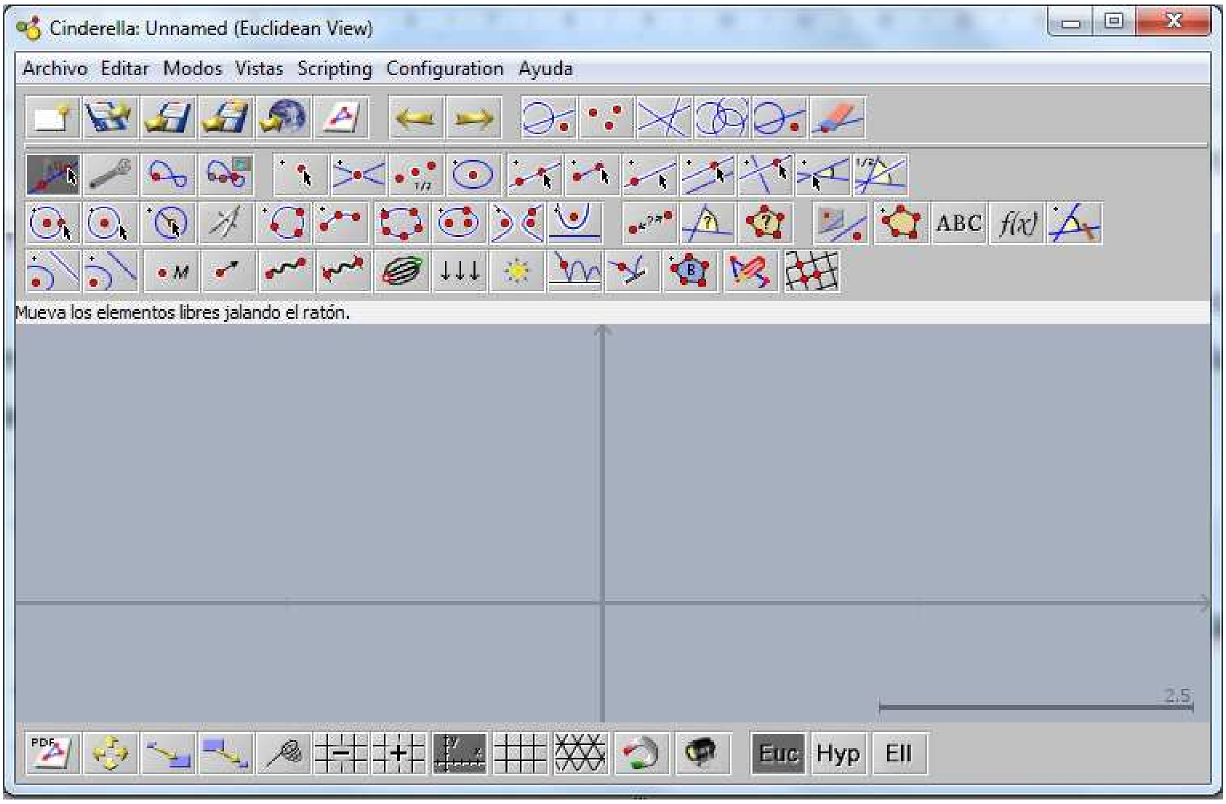
El software *CaRMetal* no nos proporciona el valor de la distancia. Únicamente nos testea si hay perpendicularidad entre las dos rectas. Si pulsamos en la herramienta que representa la cara de un mono, el dibujo se mueve manteniendo la perpendicularidad entre rectas. Es el que menos prestaciones nos da de los tres:



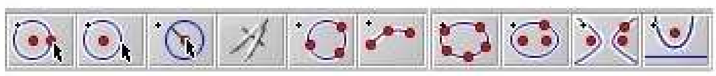
El ratón nos permite hacer zoom con la ruleta central pero no es posible mover el dibujo para ver otra zona. Esta es una característica muy estandarizada en los programas para Windows que se echa de menos. Tampoco nos permite reducir el tamaño de la ventana gráfica, quedando bloqueada en su máximo tamaño sin otras posibilidades.

7.3 Cinderella

Nombraremos únicamente algunas de las herramientas que sean más usuales de esta aplicación que son necesarias para comenzar a dibujar elementos básicos. La pantalla de inicio posee las barras de herramientas con todos los iconos visibles:



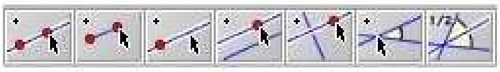
Extraemos del gráfico algunas de las herramientas más usuales:



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

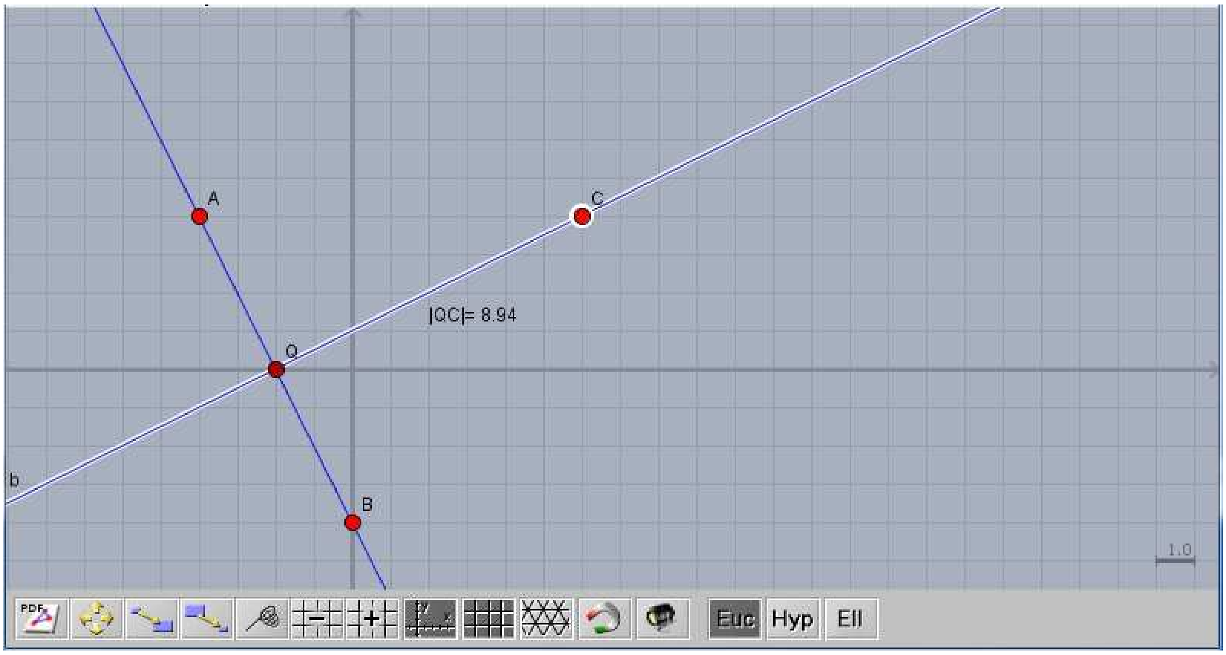
11 12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24 25 26



27 28 29 30 31 32 33

Para comenzar, se traza la recta *r* que pasa por los puntos A y B, utilizando la herramienta nº 27. A continuación señalamos un punto exterior a la recta con la herramienta nº 23. Seguidamente tenemos que representar una recta perpendicular a la recta inicial y para ello empleamos la herramienta nº 31. El punto exterior a la recta *r* se ha denotado por C; trazamos la recta perpendicular *b* y marcamos el punto de corte Q entre las dos rectas con la herramienta nº 24. Finalmente medimos la distancia entre los dos puntos con la herramienta nº 11. Si modificamos C podemos comprobar dinámicamente cómo varia la distancia.



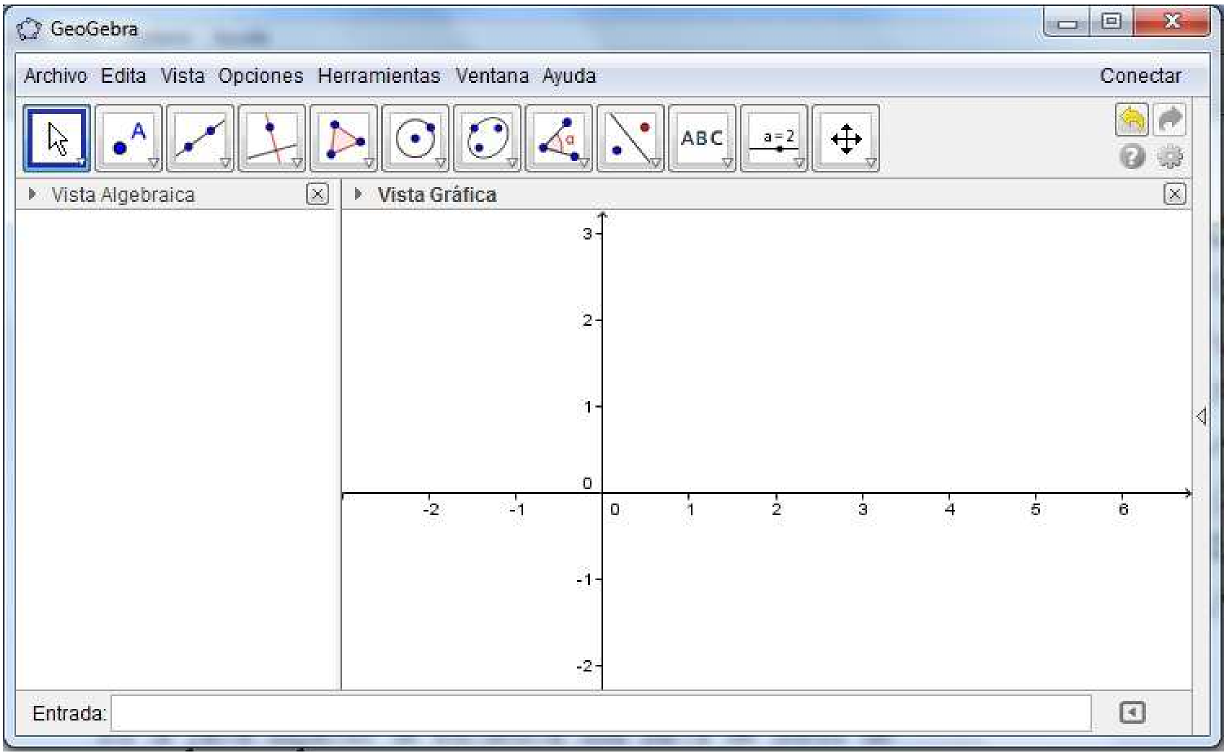
Se echan en falta las funciones más estandarizadas de movimiento del dibujo con el ratón. La más extendida, el zoom, no está disponible, ni es configurable. Tampoco funciona el desplazamiento por el dibujo.

7.4 *GeoGebra*

Finalmente analizamos las herramientas disponibles del programa *GeoGebra*. Existen muchos tutoriales completos del programa pero en pocas líneas pasaremos a describir sus características más interesantes, y el procedimiento más rápido para realizar ejercicios de geometría dinámica de modo sencillo y didáctico.

En primer lugar estimamos conveniente tener activas las vistas algebraica y gráfica y la entrada en línea de comandos. Aparecen inicialmente 12 iconos desplegables que guardan 72 herramientas gráficas agrupadas. Se citarán las más interesantes para realizar ejercicios gráficos con estudiantes de secundaria, además de ir describiendo cómo proceder para realizar los primeros ejercicios mediante geometría dinámica.

En la parte derecha de la pantalla de inicio tenemos los botones de deshacer y rehacer que sirven para eliminar los pasos anteriores o volverlos hacia delante, respectivamente. La interrogación indica la llamada al menú de ayuda y el dibujo del engranaje las opciones de configuración más típicas como son las unidades de medida y la elección de Grados o Radianes para los ángulos.



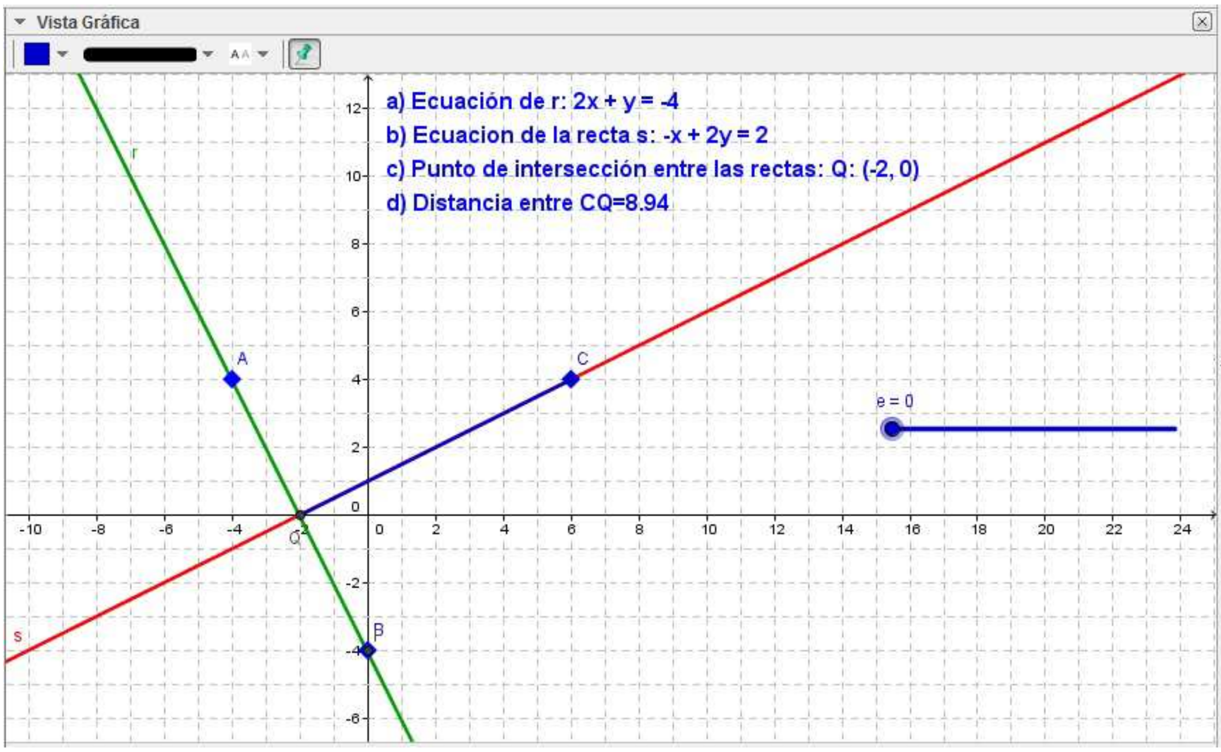
Los pasos principales a tener en cuenta para realizar los primeros gráficos dinámicos en *GeoGebra* son los siguientes:

a) leer y entender bien el enunciado para **realizarlo ordenadamente**. A este respecto, y considerando el nivel en el que nos encontramos, que los alumnos pueden no haber manejado nunca un ordenador, etc., el profesor facilitará un guión detallado de cómo realizar la práctica paso a paso.

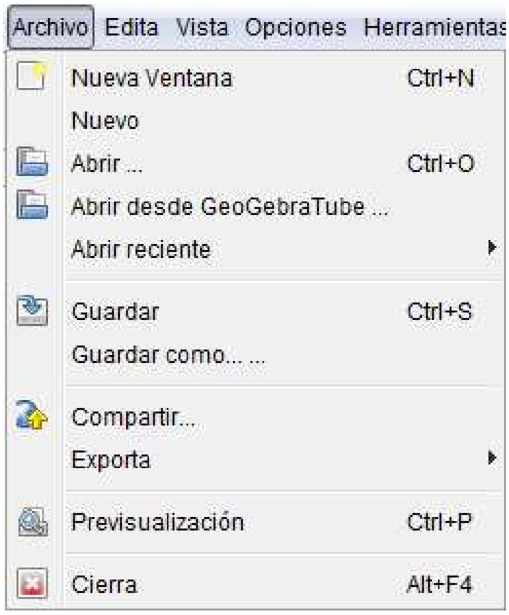
b) Para poder aprovechar las capacidades dinámicas de *GeoGebra*, se utilizará con frecuencia un **deslizador nombrado por la letra e**, que nos servirá de ayuda para modificar las coordenada x del punto C (en el caso concreto que nos ocupa) y conseguir posteriormente que la figura varíe de modo autónomo.

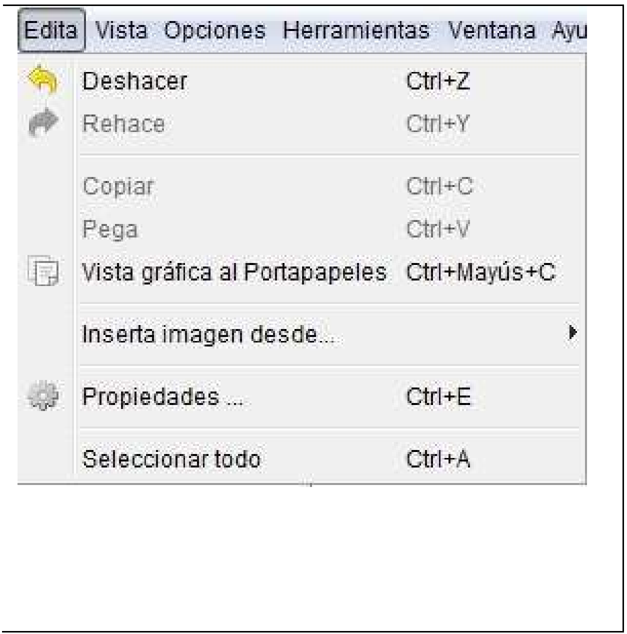
c) La gráfica que generamos con *GeoGebra* nos permite introducir la ecuación de los puntos y las rectas a través de la línea de comandos. Primero introducimos los puntos A = (−4, 4), B = (0, −4) y después se representa la recta r, definida por esos puntos.

d) A continuación dibujamos en punto C = (6, 4). Trazamos por C una recta perpendicular a r y marcamos el punto de intersección entre las rectas con la letra Q. Calculamos la distancia entre Q y C. Para hacer dinámico el dibujo empleamos el deslizador e definido, entre el valor 0 y 3 con saltos de 0.01, con variación oscilante, que actúa como variable auxiliar. Definimos C = (6 + e, 4), para percibir cómo va cambiando la distancia a lo largo de la recta r según varia e.



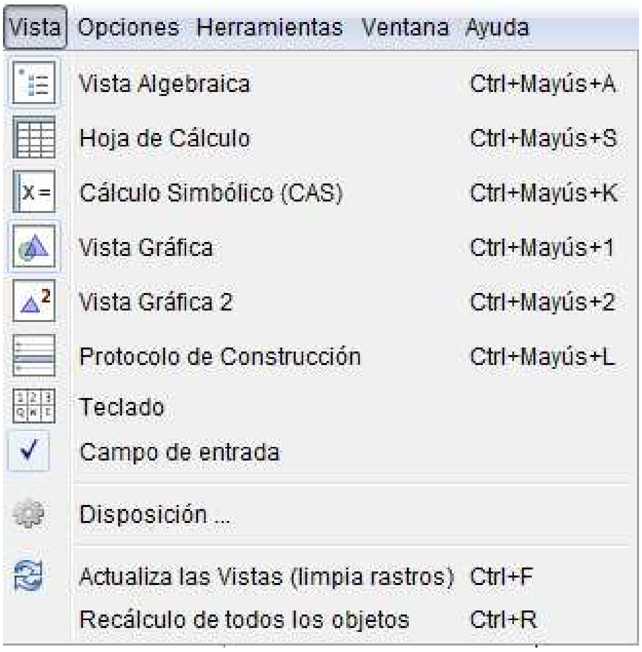
Los seis menús de cabecera de GeoGebra son los típicos de casi todos los programas para Windows, con algunos contenidos específicos:





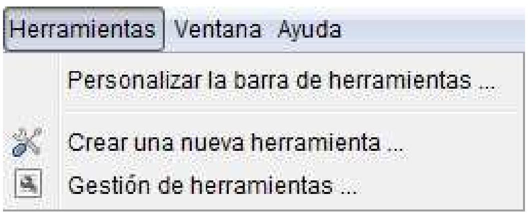
Archivo: tiene las opciones de abrir, guardar, y exportar como las más interesantes. No se pretende utilizar todas exhaustivamente, solo las más necesarias.

Edita: Deshacer e insertar imagen desde un archivo, y seleccionar todo el dibujo de una vez, serán las opciones que se emplearán.



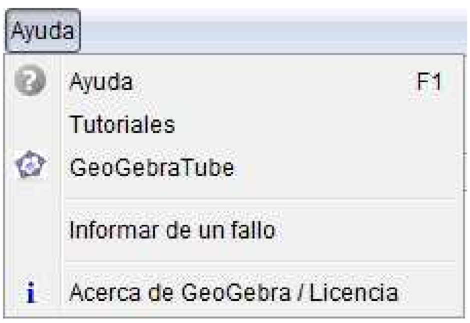
Vista: Nos muestra otras vistas posibles que se usarán esporádicamente. También incluye la activación del campo de entrada de datos por la línea de comandos, que nos será bastante útil.

Opciones: Sirve para configurar algunos parámetros del dibujo.



Herramientas: Para personalizar las barras de herramientas y crear una propia.

Ventana: Permite abrir dos gráficos a la vez.

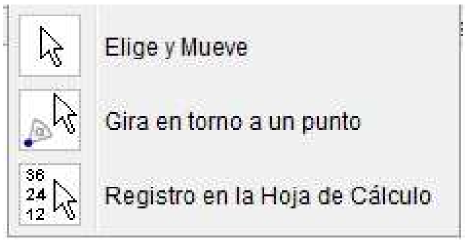


Ayuda: Acceso en Internet al sitio Web de *GeoGebra*.

Las herramientas más útiles para nuestros propósitos, son las siguientes:

HERRAMIENTAS DE PUNTOS:

HERRAMIENTAS DE MOVIMIENTO:



Punto: Sitúa puntos en el plano. Los nombra con letras mayúsculas correlativamente, aunque se puede personalizar con el botón derecho a través de la opción *Propiedades*. También se puede introducir mediante la línea de comandos para darle unas coordenadas concretas.

Punto en Objeto: se usa para definir un punto dentro de un objeto geométrico; se utilizará en una recta generalmente.

Intersección: herramienta para determinar el punto exacto de corte entre rectas, curva o entre recta y curva.

Punto medio: como su propio nombre indica, se usa para determinar el punto medio entre puntos.

Entre las herramientas de movimiento, la más útil es **Elige y Mueve**: que permite seleccionar y trasladar un determinado objeto.

HERRAMIENTAS DE OBJETOS:

HERRAMIENTAS DE RECTAS:

Recta: Representa la recta que pasa por dos puntos dados. Se nombra automáticamente con letras en minúscula a no ser que se personalice con el botón derecho, en las *Propiedades*. También se puede introducir a partir de la línea de comandos con su ecuación correspondiente: $Ax + By + C = 0$.

Las herramientas **Segmento y Semirrecta** representan esos objetos a partir de los puntos de referencia.

Recta perpendicular: Se representa a partir de un punto y la recta sobre la que incidir.

Recta paralela: igualmente la usaremos con un punto y una recta de referencia.

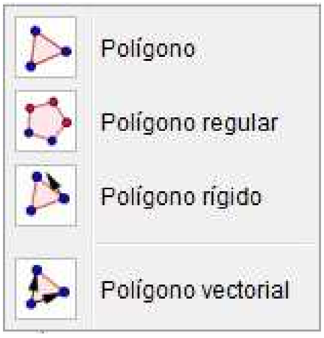
Mediatriz: Divide un segmento en dos partes iguales mediante una recta perpendicular.

Bisectriz: Divide los ángulos mediante una recta.

Tangentes: a Circunferencias y curvas en general.

HERRAMIENTAS DE CIRCUNFERENCIAS:

HERRAMIENTAS DE POLÍGONOS:



Polígono: Representa el polígono determinado por varios puntos.

Polígono regular: A partir del número de lados que se le indique, y la distancia entre dos vértices, representa el polígono regular correspondiente.

Circunferencia dado Centro y un punto, es bastante usada por ser muy cómoda y rápida. También se puede introducir por línea de comandos su ecuación canónica.

Circunferencia dado el centro y el radio, análoga a la anterior.

Compás: Sirve para trazar una circunferencia tomando el radio entre dos puntos.

Circunferencia con tres puntos: Seleccionamos tres puntos y nos dibuja la circunferencia que pasa por ellos y nos de su ecuación, incluyendo el centro y el radio que ha sido necesario.

Arcos y sectores de circunferencias.

HERRAMIENTAS DE PROPIEDADES:

HERRAMIENTAS DE CÓNICAS:

A partir de los focos y los ejes (o la directriz, en el caso de la parábola), *GeoGebra* nos permite representar **Elipses**, **Hipérbolas** y **Parábolas**, dándonos además la ecuación general.

Cónica por 5 puntos: dibuja una curva a partir de cinco puntos y calcula su ecuación general.

Angulo: Nos mide el ángulo entre dos rectas.

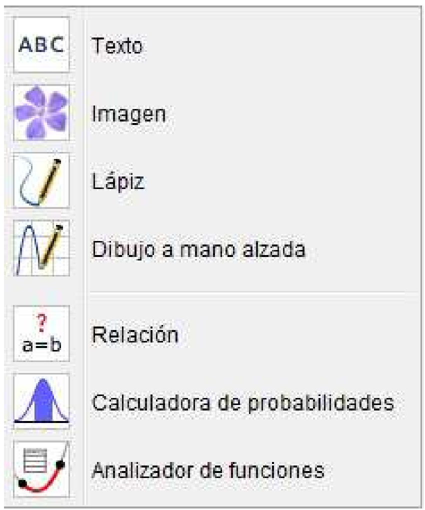
Distancia o Longitud: Nos da su valor de modo aproximado.

Área: Aproxima el valor de una superficie cerrada.

Pendiente: Aproxima el valor de la pendiente de una recta.

HERRAMIENTA DE SIMETRÍAS:

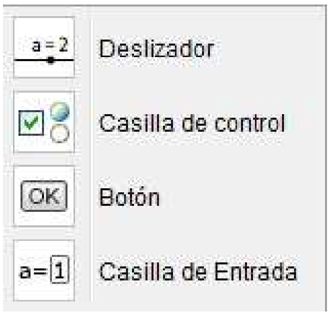
HERRAMIENTAS DE TEXTO:



Simetría axial: Se obtiene seleccionando los puntos y objetos de la simetría, y el eje.
Simetría Central: Nos hace la simetría de un punto respecto del centro de simetría.
Texto: Permite introducir comentarios y observaciones en las representaciones gráficas.

HERRAMIENTA DE ZOOM:

HERRAMIENTA DESLIZADOR:



Deslizador: Es una variable que puede tomar varios valores en un intervalo según la posición del cursor. Es muy importante para realizar ejercicios de geometría dinámica. Mediante los deslizadores podemos variar dinámicamente un parámetro y obtener variaciones de representación gráfica y movimiento a una determinada velocidad.
Desplazar vista: Nos permite movernos a través de la vista. También se consigue manteniendo pulsado el botón central del ratón y arrastrándolo.

7.5 Conclusiones

Los tres programas considerados tienen una larga historia de desarrollo y numerosas versiones que han ido mejorando el producto y haciéndolo cada vez de un manejo más sencillo y potente.

Los resultados de la comparación nos llevan a elegir *GeoGebra* con diferencia sobre los otros dos porque es el más completo en todos los aspectos considerados. Además a igualdad de tiempo utilizado, considero que se alcanza un aprendizaje más rápido y de un modo más sencillo e intuitivo que con *Cinderella* y *CaRMetal*. El menú de ayuda desarrollado para *GeoGebra* está mucho más completo, aspecto esencial para trabajar con alumnos de Secundaria.

Por otro lado, *GeoGebra* ha generado una amplísima bibliografía y ficheros para múltiples conceptos y aplicaciones matemáticas (no exclusivamente para Secundaria). Asimismo se han multiplicado los grupos de trabajo con una intensa actividad de mejora y puesta en común, ampliando cada vez más su campo de acción. En este trabajo quiero mantener mi compromiso de originalidad y por tanto todos los ficheros que he incorporado, los he realizado personalmente y están pensados exclusivamente para este fin [5].

8 Software dinámico en la ESO

Se trata de aplicar en una unidad didáctica el uso de programas de geometría dinámica. En concreto platearemos actividades y ejercicios de geometría plana para los cuatro cursos de la ESO, dejando como posible ampliación de este trabajo otro más específico dedicado a los cursos de Bachillerato.

8.1 Introducción Contextual

El contexto en el que aplicamos el software dinámico es el de una clase general de matemáticas de cualquiera de los cuatro cursos de Secundaria. Se trata de enseñar a los alumnos la capacidad de los programas gráficos para explicar, resolver cálculos, realizar gráficos complejos y conseguir que los alumnos lo lleguen a manejar de un modo adecuado a su edad con cierta destreza.

Con la prioridad de cumplir el temario que marca la Consejería de Educación para cada uno de los cursos, se planificarán las clases en las que usaremos los recursos informáticos. El objetivo inicial es que al menos una hora a la semana se realicen practicas preparadas con el ordenador durante el periodo que contemple la parte de geometría del currículo (si bien podría extenderse al curso completo en caso de permitirlo el desarrollo de la asignatura y las posibilidades del centro) con el fin que lleguen a familiarizarse con el programa y en casa complementen o acaben las prácticas propuestas.

8.2 Contribución a las competencias Básicas

Atendiendo al RD 1631/2006 del MEC sobre la ESO y D 52/2007 JCyL sobre ESO.

CB2. C. Matemática: Aprenderán a calcular, relacionar y razonar sobre conceptos e ideas matemáticas, empleando los símbolos y el lenguaje matemático según su nivel. Pensar una segunda forma de resolver problemas, ahora de modo gráfico, permite a los alumnos entender la geometría de un modo más profundo, y por tanto, alcanzar mejores resultados académicos.

CB4. C. Digital: Aprovecharemos una aplicación informática que ayude a realizar con agilidad cálculo mental con ejercicios sencillos, con velocidad progresivamente creciente. En esta era tecnológica, es aconsejable incorporar la potencia de la informática para aprender matemáticas de un modo vistoso y atrayente.

8.3 Sobre los Objetivos Específicos

OE1. Mejorar la capacidad de Razonamiento Reflexivo, porque aplicando la inteligencia en la resolución de problemas con programas se mejora la capacidad de razonar matemáticamente.

OE2. Aplicar herramientas matemáticas como Software y Calculadoras. Con este software comprobaremos que el razonamiento matemático teórico es correcto y lo verificaremos con el uso del ordenador. Hay plataformas móviles como Android e iOS que permiten el uso de aplicaciones de geometría dinámica.

OE6. Adquirir hábitos racionales de trabajo (Horario de Estudio, Orden, Tareas). El trabajo en el ordenador nos exige intensidad y orden que se van obteniendo a base de tesón e intensidad.

OE9. Utilizar los medios tecnológicos para calcular: PC y calculadora. En la actualidad los alumnos están fuertemente atraídos por los medios electrónicos y audiovisuales y por tanto los conocen y usan muchas horas al día. Se trata ahora de aprender a utilizar herramientas de software para entender geometría en particular y matemáticas en general.

OE11. Elaborar estrategias generales para situaciones concretas (**PISA**). Se necesita pensar un guión de trabajo que sirva de estrategia para realizar los gráficos dinámicos.

OE12. Actitud positiva en la resolución de problemas y confiar en el poder de la propia capacidad, sin desanimarse ante lo difícil (**PISA**). Pueden aparecer problemas complejos que nos van a exigir inventiva y una búsqueda de soluciones para encontrar los procedimientos en cada ejercicio. Lo normal es que los ejercicios sean difíciles y lejos de desanimarnos hemos de buscar sus soluciones.

8.4 Objetivos Didácticos

Se trata de aplicar en cada curso el uso de ordenador y de un programa de software dinámico, para conocer su funcionamiento y resolver ejercicios del libro de texto mediante una herramienta gráfica de gran potencia.

Para conseguirlo dedicaremos varias clases durante el curso, repartidas entre los temas de geometría de cada uno de los cursos de ESO. Inicialmente se buscará el uso del aula de informática, que deberá tener instalados los programas necesarios, principalmente *Java* y *GeoGebra*. Si es posible los grupos serán de dos alumnos para que ambos se puedan apoyar y resolver dudas mutuamente. Si no hubiera aula de informática cambiaríamos la estrategia para trabajar principalmente en casa, individualmente.

Sabiendo que la dificultad de cada curso será creciente progresivamente, y que los contenidos van cambiando de año en año, se pueden citar algunos puntos concretos como conceptos básicos interesantes:

- Saber dibujar rectas perpendiculares y paralelas a otras dadas.
- Saber realizar mediciones de Longitudes y Ángulos.
- Saber cambiar las propiedades de los objetos, tales como su nombre, el aspecto, el color, el grosor.
- Saber hacer uso de los deslizadores, aplicándolos en diversos ejemplos.
- Tener nociones básicas de las propiedades dinámicas de los objetos, tales como la oscilación, el Valor inicial, el Valor final, el incremento de la variable.

8.5 Contenidos Generales

Las clases que contengan las prácticas del software dinámico serán, siempre que se disponga, en un aula de informática y constarán de una estructura estándar, con un guión en el que se detalle una explicación de los ejercicios a realizar y los pasos a seguir. Éstos, inicialmente muy sencillos, irán aumentando progresivamente su dificultad hasta alcanzar los niveles exigidos en el curso correspondiente. Cada grupo los realizará a su ritmo. Se intentará que durante la hora de clase se puedan resolver los obligatorios, aunque la práctica contendrá algún ejercicio más para que aquellos con mayor facilidad en el manejo del ordenador no se queden sin tarea, sin nada que hacer.

A continuación se muestran, a modo de ejemplo, unas posibles prácticas para cada uno de los cursos de enseñanza secundaria obligatoria. En algunos casos, utilizando los conceptos y resultados explicados en clase, se propondrán ejercicios un poco más complejos, pero perfectamente asumibles gracias al software. En el disco adjunto a esta memoria se adjuntan los ficheros utilizados en formato ggb utilizados por *GeoGebra*.

8.5.1 Ejemplo para 1º ESO

8.5.1.1 Medianas y Baricentro

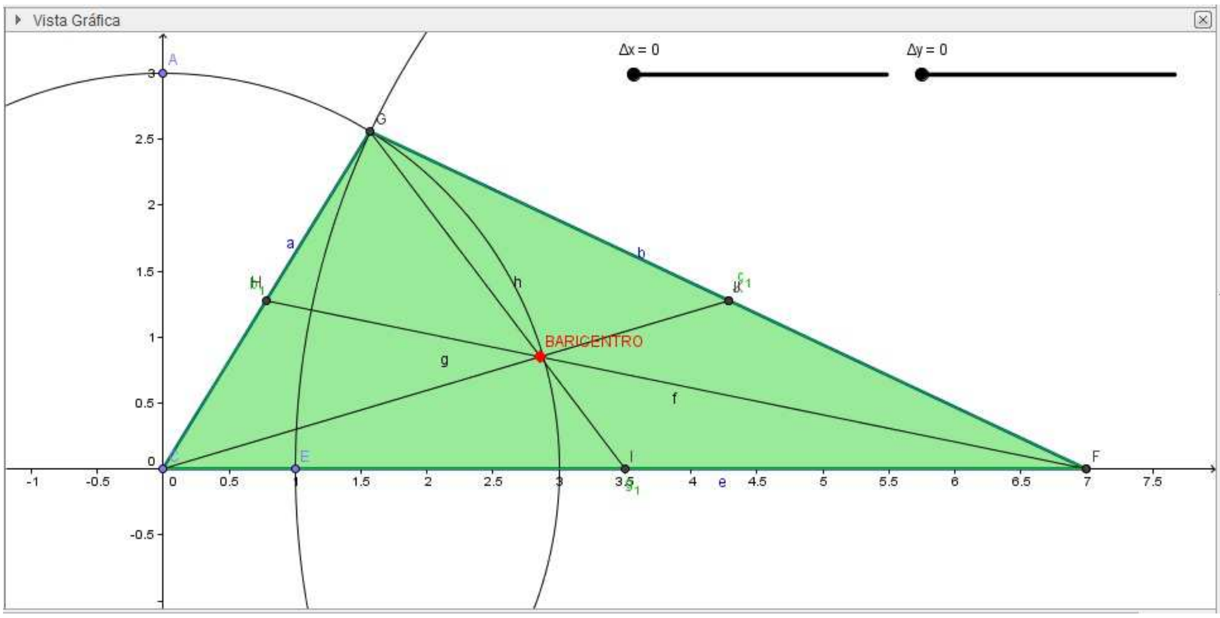
P4.1.A)	Dado un triángulo de lados 3, 5, 7 cm de longitud, dibujar sobre él las Medianas y el Baricentro. Introduce una variación de la posición de uno de los vértices y comprueba que tanto las Medianas como el Baricentro se recalculan automáticamente de modo correcto.
1º ESO	Ejercicio basado en el Nº 6 de la UD 12 Pág. 223 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL1]

Los pasos principales que deberán realizar los alumnos para realizar el ejercicio son los siguientes:

1) Dibujar un triángulo a partir de las longitudes de los lados no es una tarea tan elemental como puede parecer, y menos para alumnos de secundaria. En la resolución que hemos propuesto, comenzaríamos situando un vértice en el origen de

coordenadas, para disponer sobre el eje de abscisas una de las medidas. En nuestro caso hemos optado por la longitud mayor, la de 7 cm. Denotamos el segundo vértice como F. Utilizando una circunferencia auxiliar (con la herramienta *Circunferencia: centro y radio*) con centro en el origen y radio 3 cm. y después otra con centro en F y radio 5 cm. El punto en que se cortan ambas circunferencias, nos proporciona el tercer vértice del triángulo (se obtiene con la herramienta *Intersección*) y lo denotaremos por G.

2) Se trazan los lados del triángulo (herramienta *Segmento*) uniendo los vértices obtenidos.
3) Localizamos el punto medio de cada lado (herramienta *Punto medio o centro*) y a continuación se une cada punto medio con el vértice opuesto, trazando los tres segmentos. Así obtenemos las medianas.
4) Mediante la herramienta *Intersección*, localizamos el Baricentro.
5) Mediante el Menú *Opciones Avanzadas* podremos personalizar los segmentos importantes y ocultar los objetos no relevantes. En este caso, podemos modificar el aspecto de los segmentos *a*, *b*, *e* aumentando su grosor y cambiando su color. Análogamente con los objetos que se quieran destacar (Baricentro).
6) Para observar cómo se modifican los objetos calculados, emplearemos dos Deslizadores (herramienta *Deslizador*). Los colocaremos en la parte superior derecha. Con ellos introduciremos una variación (en el menú *Opciones Avanzadas* buscamos el objeto F y modificamos su valor en el apartado *Básico*) en la posición del vértice F que inicialmente estaba en la posición F(7, 0) y empleando los *Deslizadores* tendrá $F(6 + \Delta x, \Delta y)$.
7) Pulsando con el botón derecho del ratón sobre los deslizadores activamos la Animación que producirá un movimiento lento en la figura, manteniendo invariables las condiciones geométricas de su construcción.



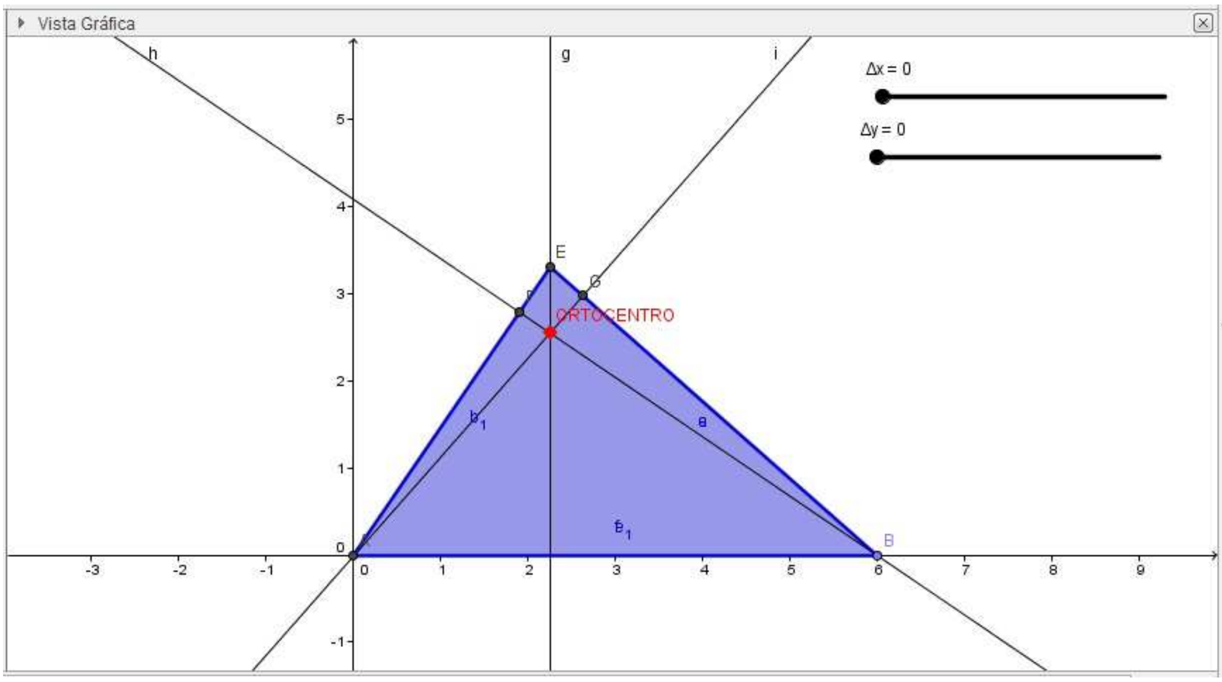
8.5.1.2 Alturas y Ortocentro

P4.1.A)	Dado un triangulo de lados 4, 5 y 6 m. de longitud, trazar sus alturas y determinar el Ortocentro. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
1º ESO	Ejercicio basado en el Nº 7 de la UD 12 Pág. 223 del Libro de Matemáticas [COL1]

De un modo similar al ejercicio anterior, los pasos que deben realizar los alumnos para realizar el ejercicio serán los siguientes:

1) Representar el triángulo partiendo de uno de los vértices que situamos en el origen de coordenadas, que denotaremos por A. A continuación sobre el eje de abscisas colocamos el vértice B a 6 cm de distancia. El tercer vértice lo determinamos empleando dos circunferencias auxiliares que posteriormente ocultaremos. La primera tendrá centro en A con radio 4 cm y la segunda centro en B con radio 5 cm (herramienta *Circunferencia con centro y radio*).
2) A continuación trazamos los lados (herramienta *Segmento*)
3) Seguidamente trazamos desde cada vértice la perpendicular al lado opuesto (herramienta *Recta perpendicular*). Estas tres alturas se cortan en el Ortocentro.

4) Destacaremos los objetos de interés, personalizándolos modificando los colores, el ancho, etc.
5) Para introducir el movimiento en el gráfico modificamos el vértice B(6, 0) en el que introducimos los valores de los Deslizadores: B(6 + Δx, Δy). Este cambio hará que el triángulo vaya cambiando, recalculándose alturas y ortocentro.



8.5.1.3 Bisectrices e Incentro

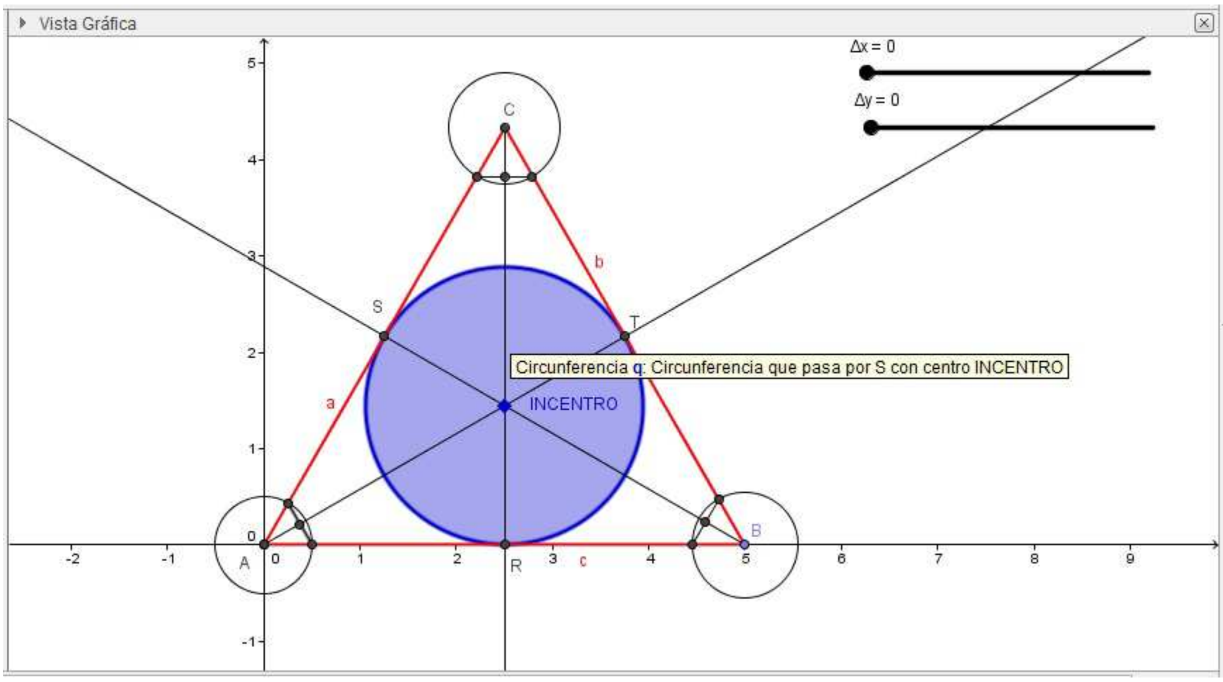
P4.1.B)	Dado un triángulo equilátero de lado 5 cm, dibujar las bisectrices, el Incentro y la circunferencia inscrita. Aplicar algún elemento dinámico al gráfico.
1º ESO	Ejercicio basado en el Nº 8 de la UD 12 Pág. 223 de Matemáticas [COL1]

Los pasos que deben seguir los alumnos en este ejercicio son los siguientes:

1) Representación del triángulo equilátero (herramienta *Polígono Regular*) de manera semejante a los casos anteriores.
2) Para trazar las bisectrices empleamos tres circunferencias auxiliares que luego ocultaremos, alrededor de los tres vértices. Los puntos de corte con los lados nos

servirán para trazar un segmento y encontrar su punto medio. A continuación trazamos la bisectriz (herramienta *Semirrecta*).

3) El punto de corte de las bisectrices es el Incentro que será el centro de la Circunferencia Inscrita. Como el triángulo se mantendrá siempre equilátero conocemos el punto de tangencia con los lados porque será el corte de cada bisectriz con el lado opuesto, y por tanto conocemos su radio.
4) Modificamos las propiedades de los objetos a resaltar y modificamos la posición del vértice B introduciendo en su definición, de la misma manera que en los casos anteriores los dos deslizadores.

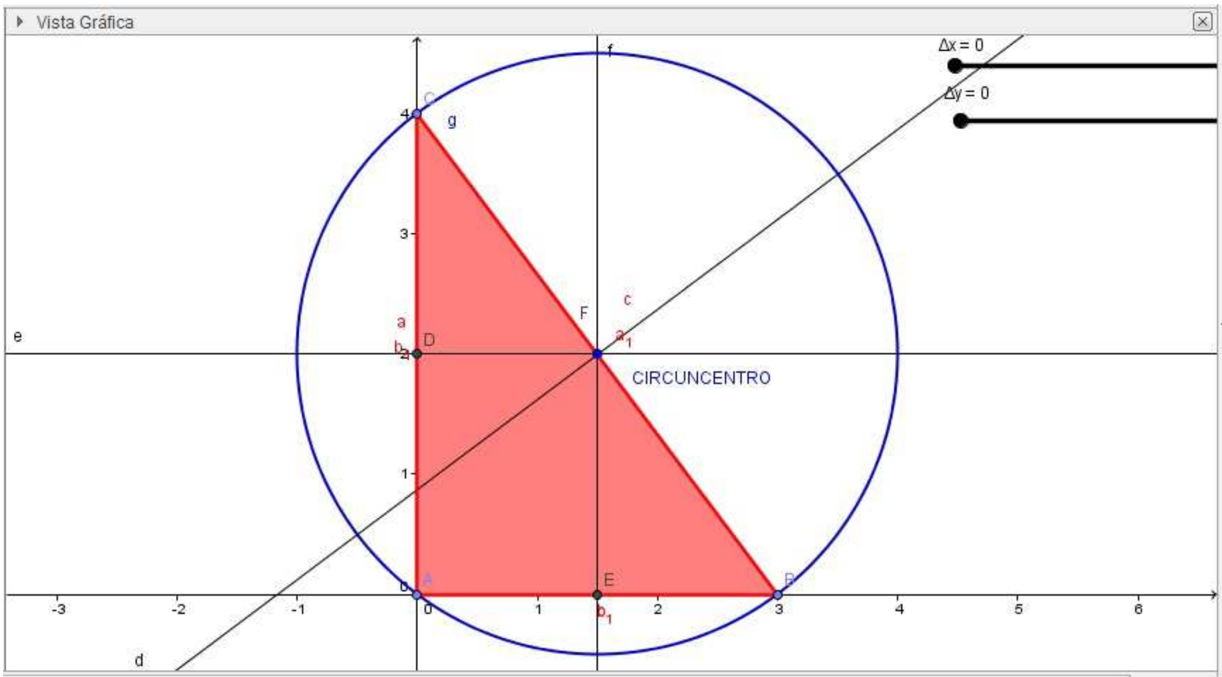


8.5.1.4 Mediatrices y Circuncentro

P4.1.B)	Dado un triángulo rectángulo de lados 3, 4, 5 cm de longitud, trazar las Mediatrices, el Circuncentro y la circunferencia circunscrita.
1º ESO	Ejercicio basado en el Nº 9 de la UD 12 Pág. 223 de Matemáticas [COL1]

Los pasos que deben seguir los alumnos para realizar el ejercicio son los siguientes:

1) Trazar el triángulo colocando un vértice en el origen de coordenadas (de este modo los ejes nos marcan ya el ángulo recto), situando sobre los ejes los lados de longitudes menores.
2) Seguidamente buscamos el punto medio de cada lado para trazar a partir de él una recta perpendicular a cada lado, que serán las Mediatrices.
3) El punto dende se cortan las Mediatrices es el Circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita, cuyo radio será la distancia a un vértice cualquiera.

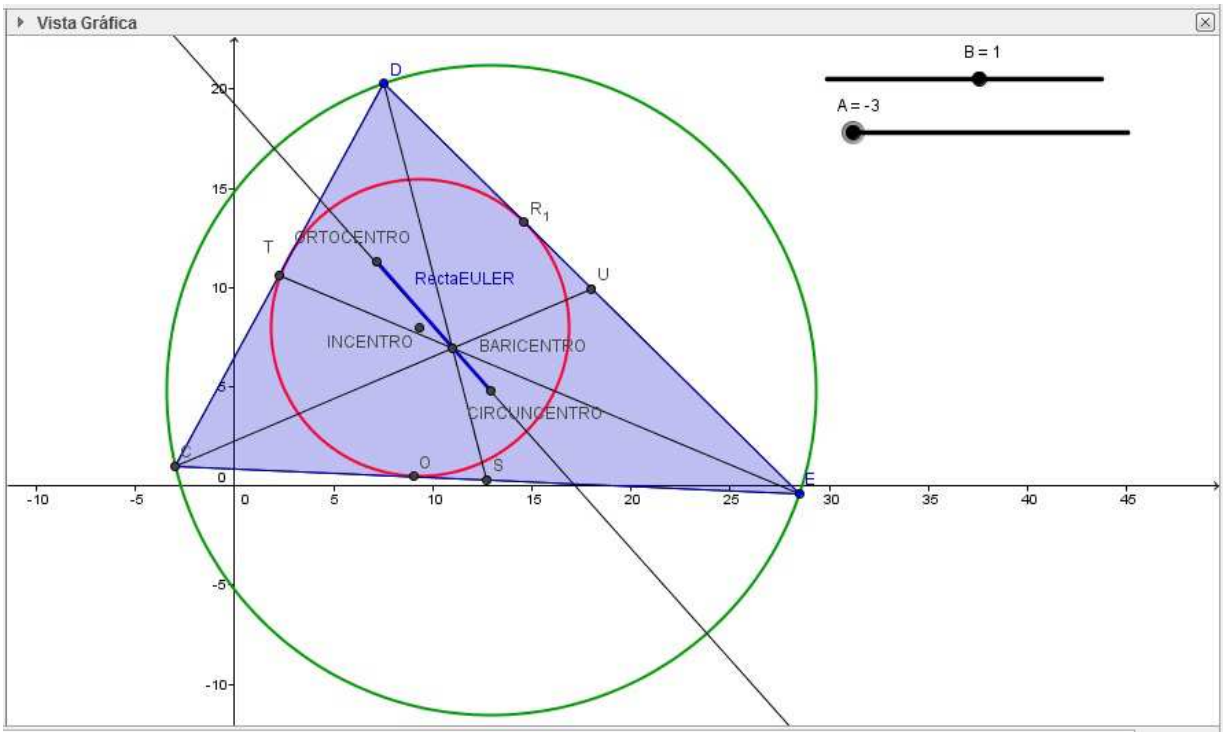


8.5.1.5 Recta de Euler

P4.1.C)	Dado un triángulo cualquiera, determinar su Ortocentro, Baricentro y Circuncentro para comprobar que siempre están alineados formando la denominada ***Recta de Euler***. Comprobar que el Incentro sólo pertenece a dicha recta en algunos tipos de triángulos como los equiláteros isósceles. Introducir algún elemento dinámico en el grafico.
1º ESO	Ejercicio basado en los 4 anteriores [COL1]

Para realizar este ejercicio los alumnos deben seguir los siguientes pasos:

1) Primero se traza un triángulo cualquiera y a continuación se dibujan las Bisectrices, Mediatrices, Alturas y Medianas.
2) El corte de las mismas nos permitirá obtener el Incentro, la Circunferencia Inscrita, el Circuncentro y la circunferencia Circunscrita, el Ortocentro y el Baricentro.
3) Trazamos la recta de Euler que pasa por el Ortocentro, el Circuncentro y el Baricentro.
4) Verificamos gráficamente que la recta de Euler solo pasará por el Incentro cuando el triángulo sea isósceles.
5) Cambiamos los colores y el grosor de los elementos destacados.
6) Introducimos los deslizadores para variar el tamaño del triángulo y comprobar cómo cambia la recta de Euler.



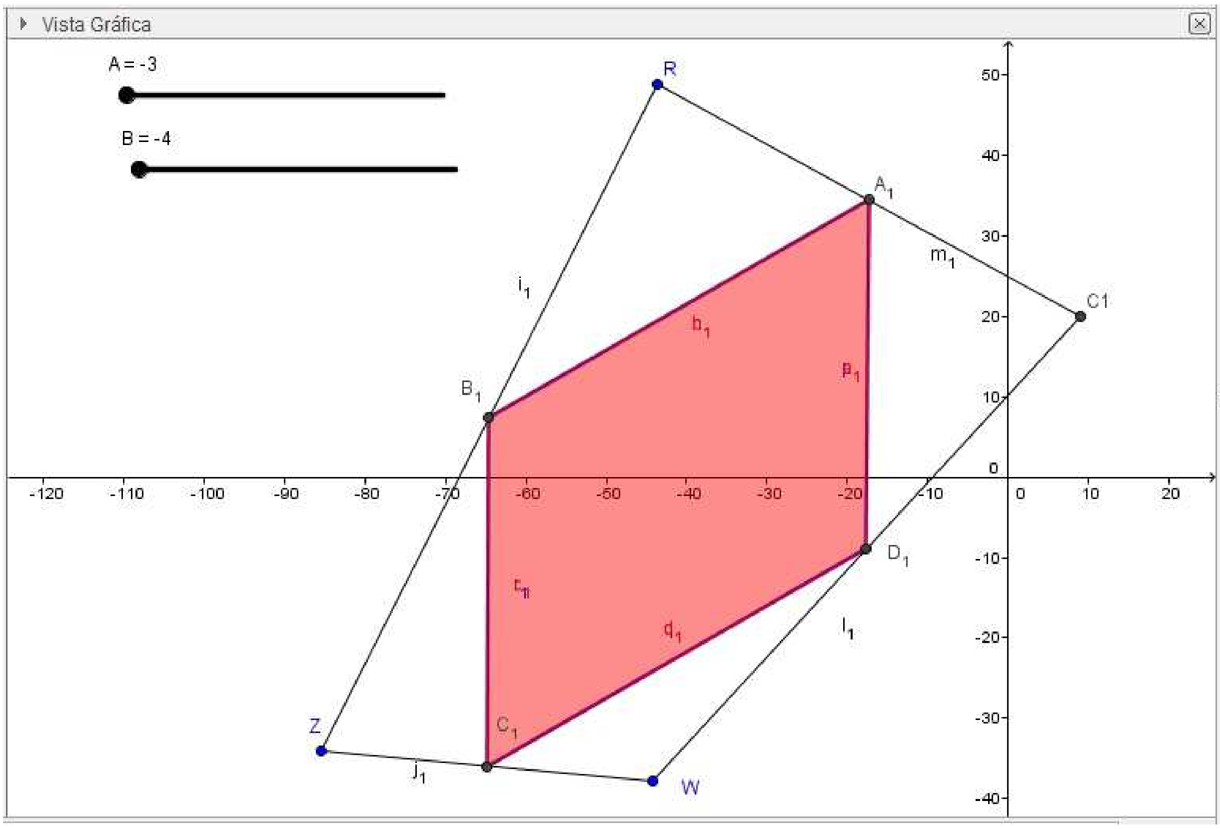
8.5.1.6 Medianas de un cuadrilátero

P4.1.D)	Dado un cuadrilátero cualquiera, trazar el polígono que une los puntos medios de los lados y comprobar que siempre se obtiene un paralelogramo para cualquier

	posición de los vértices originales.
1º ESO	Ejercicio sugerido y relacionado con los paralelogramos del Nº 19 de la UD 12 Pág. 234 [COL1]

Para resolver este ejercicio los alumnos deben seguir los pasos siguientes:

1) Primero trazamos un polígono cualquiera a partir de cuatro lados.
2) Hayamos los puntos medios de cada uno de los lados y los unimos consecutivamente.
3) Verificamos entonces que la figura obtenida es un paralelogramo.
4) Para introducir los deslizadores en la figura modificaremos uno de los vértices para que la figura cambie de forma, percatándonos de que no deja de formarse un paralelogramo en su interior.



8.5.2 Ejemplo para 2º ESO

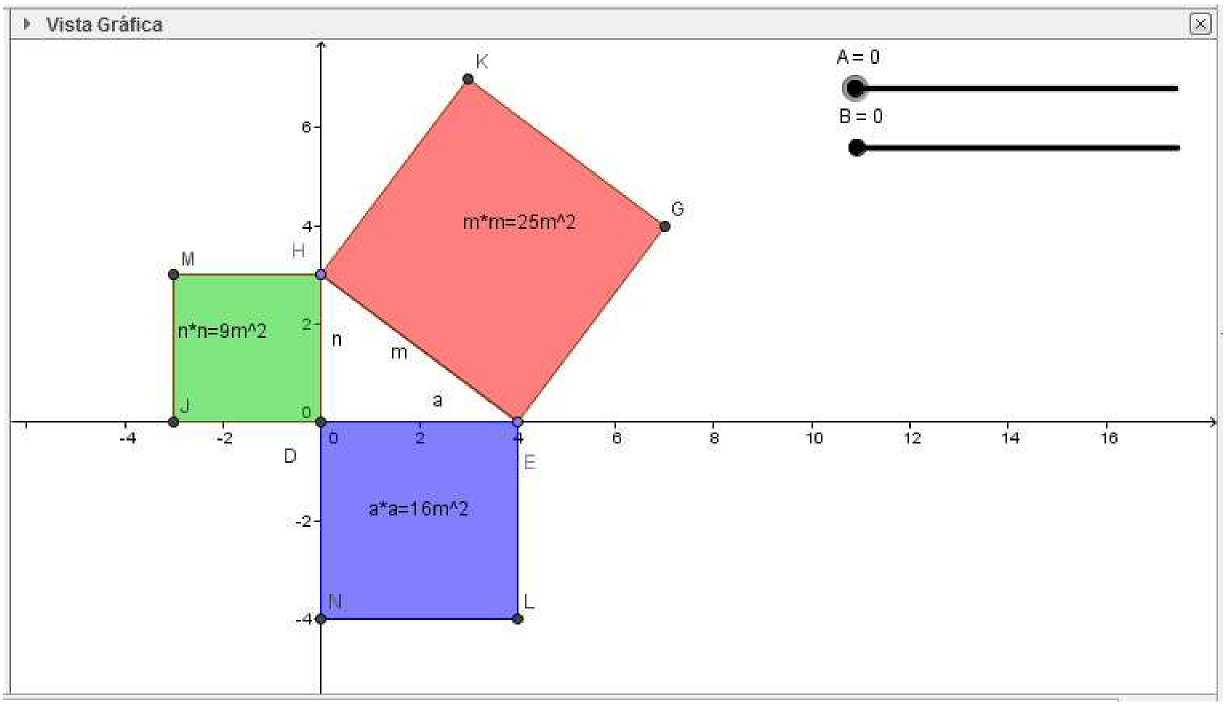
8.5.2.1 Teorema de Pitágoras

P4.2.A)	El área de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es de 9 m^2 y 16 m^2, respectivamente. Calcular el área del cuadrado que se obtendría a partir de la hipotenusa.
2º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 1, Pág. 179 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL2]

El procedimiento que debe seguir el alumno para realizar la práctica podría ser el siguiente:

1) Trazar el Triángulo Rectángulo. Para facilitar su representación puede ayudarse de los ejes de coordenadas.
2) A continuación se trazan rectas perpendiculares a los lados auxiliares, una por vértice. Posteriormente estas rectas se ocultarán.
3) Con centro en los vértices, se representan circunferencias auxiliares, y de longitud del lado. El punto de intersección de cada circunferencia con las rectas que pasan por los vértices nos determina las dimensiones de los cuadrados.
4) Representamos los cuadrados determinados de este modo sobre cada lado del triángulo.
5) Podemos etiquetar cada cuadrado (herramienta *Texto*), escribiendo por ejemplo *n*n* = para que el alumno recuerde con claridad tanto el teorema como la superficie del cuadrado. Éstas se determinan fácilmente mediante la herramienta *Área*, completando la anotación con el valor obtenido y las unidades, si se cree conveniente.
6) Con la utilidad *Opciones avanzadas* ocultamos los elementos que no aportan información relevante y cambiamos el color de los tres cuadrados para hacer al alumno más vistosa la representación.
7) Para incluir movimiento en la grafica, se modifica la definición del los vértices E y H añadiendo los valores que se estimen oportunos de los Deslizadores *A y B*

respectivamente para que al ir variando las dimensiones del triángulo se observe que el teorema sigue cumpliéndose.



8.5.2.2 Volumen de Cilindro, Esfera y Cono

P4.2.B)	Comprobar gráficamente que el volumen de un cilindro circular de diámetro de la base *d* = 1.5 *m* y altura 1.5 *m* es igual al volumen de una esfera de diámetro *d* = 1.5 *m*, más el volumen de un cono circular recto de diámetro de la base *d* = 1.5 *m* y altura *h* =1.5 *m*.
2º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 21, Pág. 216 de la UD 10 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL2]

El primer paso que debe dar el alumno para resolver este ejercicio es recordar las expresiones del volumen de los tres cuerpos. Verificar analíticamente el resultado no es complicado:

VOLUMEN DEL CILINDRO: $V_{CIL} = \pi R^2 h$

VOLUMEN DEL CONO: $V_{CON} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

VOLUMEN DE LA ESFERA: $V_{\mathrm{ESF}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Operando, se obtiene

$$V_{\mathrm{CON}} + V_{\mathrm{ESF}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi R^2 (h + 4R)$$

El alumno se percata con esta operación que el resultado no es cierto en general, sino que la altura del cono y el cilindro debe guardar alguna relación concreta con el radio de los tres sólidos. Es sencillo (en estos niveles lo más probable es que el profesor deba indicar la relación) comprobar que si $h = 2R$, la igualdad se verifica:

$$V_{\mathrm{CON}} + V_{\mathrm{ESF}} = \frac{1}{3}\pi R^2 (2R + 4R) = 2\pi R^3 = V_{\mathrm{CIL}}$$

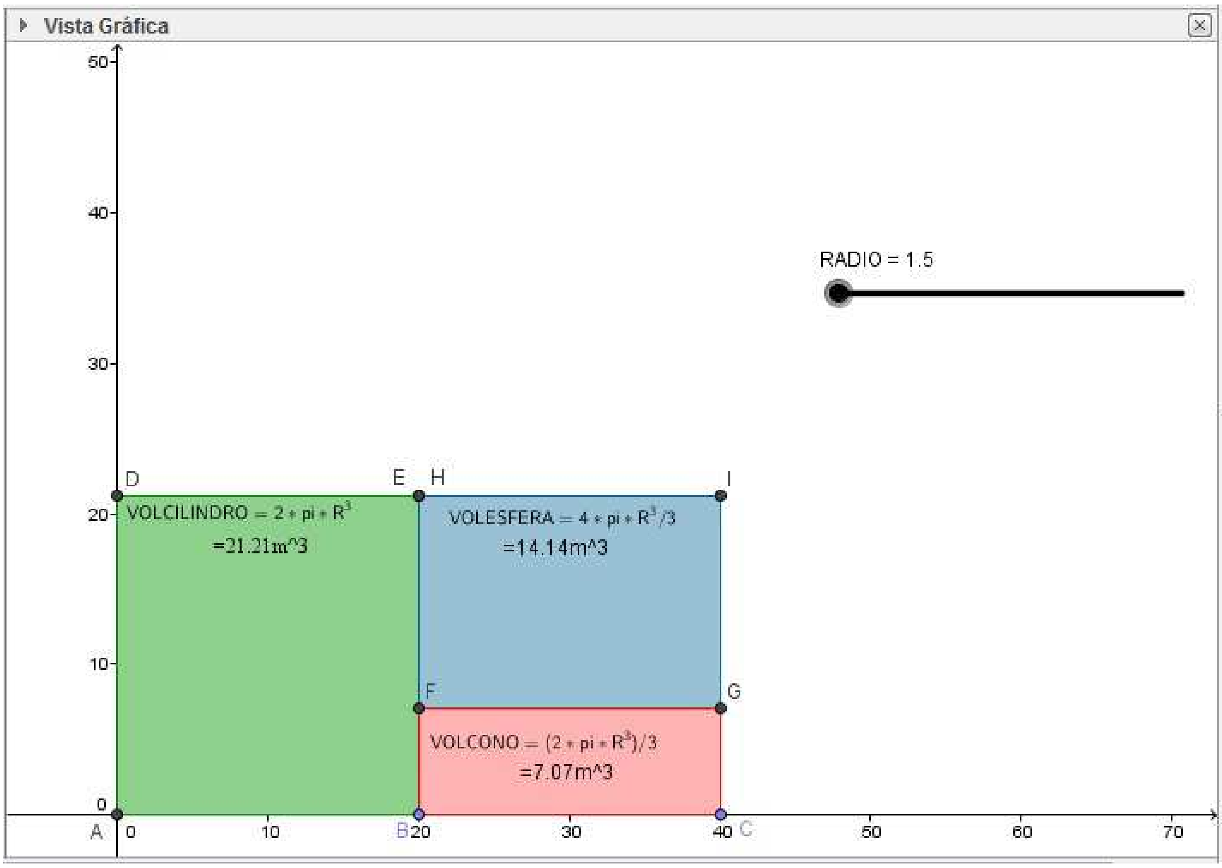
Los pasos que podríamos seguir para verificar este resultado gráficamente son los siguientes:

1) El primer paso es crear tres variables en las que vamos a almacenar el valor de los volúmenes de las tres figuras: *VOLCIL, VOLCON y VOLESF*. En la línea de comandos introduciremos $VOLCIL = 2\pi R^3$. Análogamente para las otras dos.
2) Formamos dos columnas en las que representaremos el volumen del cilindro con su altura a la izquierda y la suma del volumen del cono más el volumen de la esfera a la derecha.
3) Tomamos como ancho constante de las columnas el radio que nos da el enunciado de 1.5 m. El volumen del cilindro resulta ser de 21.21 m^3.
4) A continuación situamos los puntos que marcaran las cuatro esquinas de las columnas de anchura 20 *u*. Para el cilindro, escribimos en la línea de comandos:

   A = (0, 0); B = (20, 0); D = (0, VOLCIL); E = (20, VOLCIL).
5) Después realizamos la columna que corresponde al volumen del cono, compartiendo el vértice B ya dibujado: C = (40, 0); F = (20, VOLCON); G = (40, VOLCON).
6) Seguidamente formamos sobre la columna del cono la columna que corresponde al volumen de la esfera, compartiendo los vértices F y G:

   H = (20, VOLCON + VOLESF); I = (40, VOLCON + VOLESF).
7) Mediante la herramienta *Polígono* construimos los rectángulos que representen a cada una de las tres figuras.

8) Con la herramienta *Opciones avanzadas* modificaremos el color de cada uno de los rectángulos que hemos dibujado. Dentro de cada uno introducimos el texto con la fórmula del volumen y el resultado varía, según el valor del radio.
9) El radio se introduce mediante un deslizador que nombraremos como *RADIO*, cuyo valor inicial será de 1.5 m y su valor final de 2 m con incrementos de 0.01 m. De este modo podemos comprobar que la relación demostrada anteriormente entre los volúmenes se cumple.



8.5.2.3 Superficie de Cilindro, Esfera y Cono

P4.2.C)	Verificar gráficamente la relación entre la superficie total de una esfera de radio R = 2, un cilindro circular recto de radio R = 2 y altura h = 4, y un cono circular recto de radio R = 2 y altura h = 4.
2º ESO	Ejercicio basado en los problemas Nº 17 a), b) y d) Pág. 200 de la UD 9 del Libro

	de Matemáticas de Anaya [COL2]

Seguiremos un proceso análogo al de la práctica anterior, es decir, compararemos la superficie de cada uno de estos volúmenes expresando sus valores como superficie de rectángulos. De forma analítica, se tiene en este caso que

1) SUPERFICIE DEL CILINDRO:

$$S_{\mathrm{CIL}} = 2\,\pi\,R^2 + 2\,\pi\,R\,h = 2\,\pi\,R\,(R + h)$$

2) SUPERFICIE DE LA ESFERA: $S_{\mathrm{ESF}} = 4\,\pi\,R^2$

3) SUPERFICIE DEL CONO: $S_{\mathrm{CON}} = \pi\,R^2 + S_{\mathrm{LAT}}$

La superficie lateral del cono se calcula a partir de la longitud de la generatriz utilizando el teorema de Pitágoras, a partir de la altura y el radio de la base del cono:

$$GENERATRIZ = G = \sqrt{h^2 + R^2}$$

Operando tendremos:

$$S_{\mathrm{LAT}} == \frac{\pi\,G^2\;2\,\pi\,R}{2\,\pi\,G} = \pi\,R\,G\,.$$

Finalmente tendremos: $S_{\mathrm{CON}} = \pi\,R\,(R + \sqrt{h^2 + R^2})$

Para verificar el ejercicio gráficamente los alumnos pueden seguir el siguiente procedimiento:

1) Se crean tres variables de tipo deslizador que llamaremos:
   (1) *ALTURA* (definida de 1 a 12 cm con paso de 0.01 cm),
   (2) *RADIO* (definida de 1 a 4 cm con un incremento de 0.01 cm).
   (3) *ANCHURA* de las columnas (definida desde 1 hasta 10 cm con saltos de 0.01 cm)
2) A continuación asignamos a tres variables
   (1) $VOLCIL=2\,\pi\,RADIO\;\;(RADIO+ALTURA);$
   (2) $VOLESF = 4\,\pi\,RADIO^2;$
   (3) $VOLCON = \pi\,R\,(ALTURA^2 + RADIO^2)^{1/2}.$
3) Definimos cada uno de los rectángulos que contendrán una superficie equivalente a cada una de las figuras que representan:
   (1) La primera columna verde representa la superficie de un cilindro, con los vértices que siguen en las cuatro esquinas:

A = (0, 0); B = (ANCHURA, 0); E = (0, VOLCIL/ANCHURA);

F = (ANCHURA, VOLCIL/ANCHURA);

(2) La segunda columna, en color azul, representa la superficie de la esfera. Los vértices serán el B ya definido y los siguiente:

C = (2 ANCHURA, 0); H = (ANCHURA, VOLESF/ANCHURA);

I = (2 ANCHURA, VOLESF/ANCHURA).

(3) La tercera columna corresponde a la superficie del cono y sus vértices serán los siguientes, junto a C ya definido:

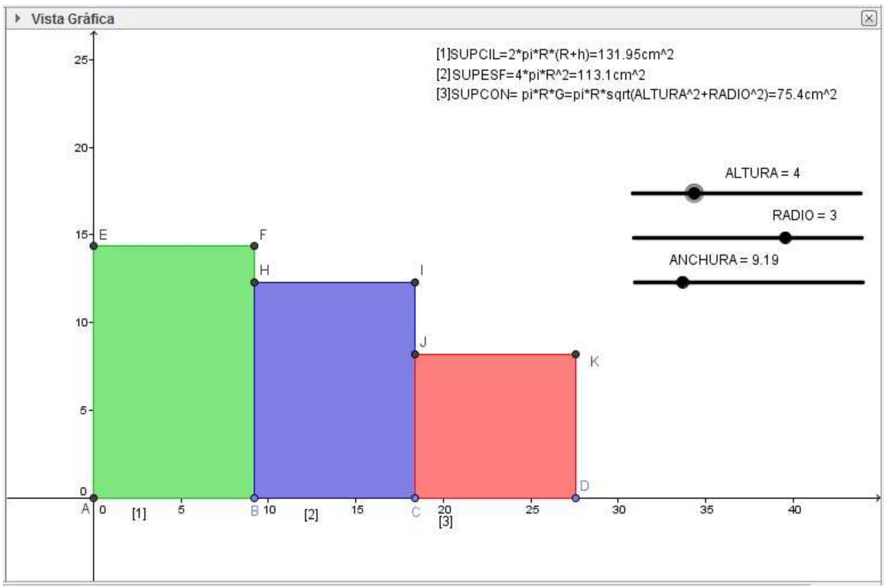
D = (3 ANCHURA, 0); J = (2 ANCHURA, VOLCON/ANCHURA);

K = (3 ANCHURA, VOLCON/ANCHURA).

4) Designados los vértices, construimos los rectángulos mediante la herramienta *Polígono*. A continuación insertamos el texto de cada fórmula de las superficies y tomamos como valor de la superficie la de cada polígono, que se obtiene con la herramienta *Área* de *GeoGebra*. De este modo, con solo pinchar dos veces dentro del polígono, automáticamente se calcula la superficie deseada.

5) Finalmente aprovechamos las propiedades dinámicas de *GeoGebra* para buscar qué altura debería tener el cilindro para tener la misma superficie que la esfera, obteniendo que si *ALTURA= RADIO* entonces *SUPCIL=SUPESF.*

6) Por otra parte las superficies del cono y de la esfera se igualan cuando *h = 2,83 RADIO*, redondeando a dos decimales, válido para cualquier radio.



8.5.3 Ejemplo para 3º ESO

8.5.3.1 Teorema de Tales y Simetría Central

P4.3.A)	Reducir la figura *ABCD* al 50% de su tamaño y realizar su simetría axial, empleando algún elemento de geometría dinámica.
3º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 30 Pág. 181 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL3]

Para realizar este ejercicio el alumno debe realizar los siguientes pasos:

1) Lo primero que hay que hacer es representar la figura *ABCD* que se da como dato, a partir de las coordenadas de sus vértices:

$$A = (-6, 2), B = (-2, 4); C = (-2, -1); D = (-4, 2).$$

Unimos con la herramienta *Polígono* los puntos *A, B, C, D* para delimitar la figura. Cambiamos sus propiedades por defecto: el color rojo y 50% de transparencia.
Inicialmente, se tomará el origen de coordenadas como punto central de la simetría.

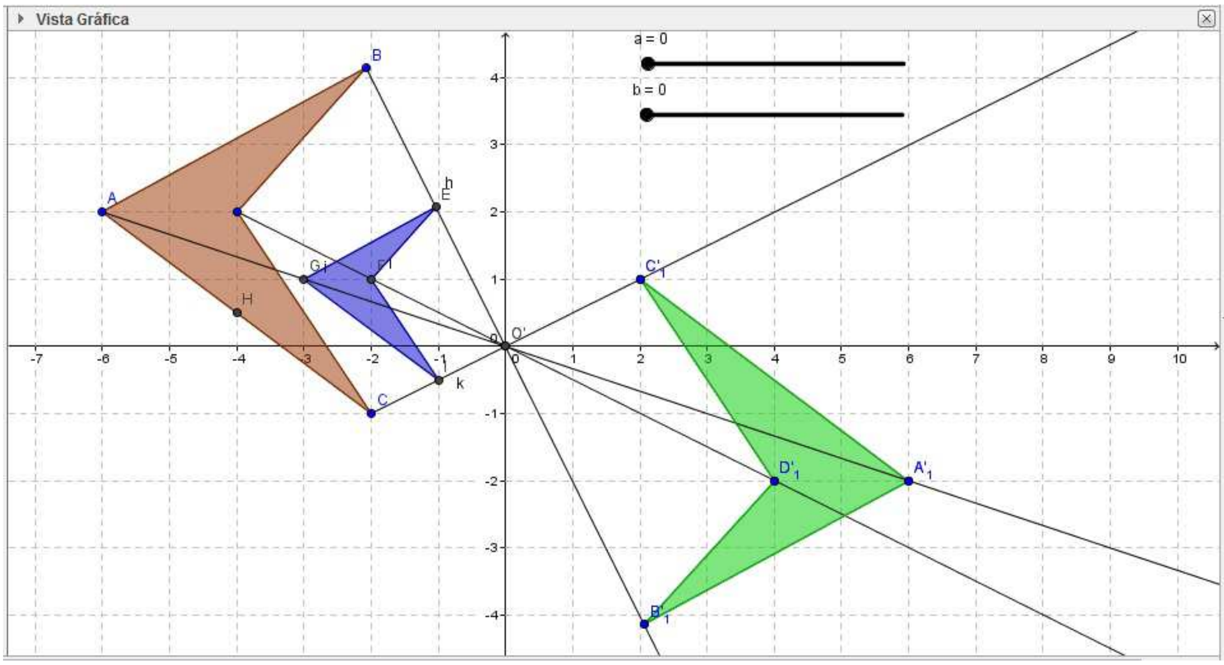
2) A continuación trazamos semirrectas que nacen en los puntos *A, B, C, D* y pasan por el origen de coordenadas.

3) Mediante la herramienta *Punto medio o centro* obtenemos los puntos medios de los segmentos determinados por los vértices *A, B, C, D* y el centro de simetría. Se obtienen así los puntos *E, F, G, I*, que unidos determinan el polígono que buscamos. Podemos cambiar sus propiedades para diferenciarlo del anterior, por ejemplo a color azul con un 50% de transparencia.

4) A continuación trazamos la figura simétrica de la primera respecto del origen de coordenadas empleando la herramienta *Simetría central* con la que obtenemos los vértices de la tercera figura *A', B', C', D'*, que unimos con la herramienta *Polinomio*. Editamos sus propiedades con el botón derecho y cambiamos a color verde y el índice de transparenta al 50%.

5) Para sacar partido de las capacidades dinámicas de la aplicación, introducimos dos deslizadores, que denotaremos por *a y b*, con valores comprendidos entre 0 y 3. El centro de simetría puede modificarse pinchando el ratón sobre él con el botón derecho

y seleccionando sus propiedades: *O'=(a, b).* De este modo cuando activemos la opción de movilidad en los deslizadores, las figuras se moverán de acuerdo al centro de simetría que salga en cada momento.



8.5.3.2 Simetría Axial y Giro

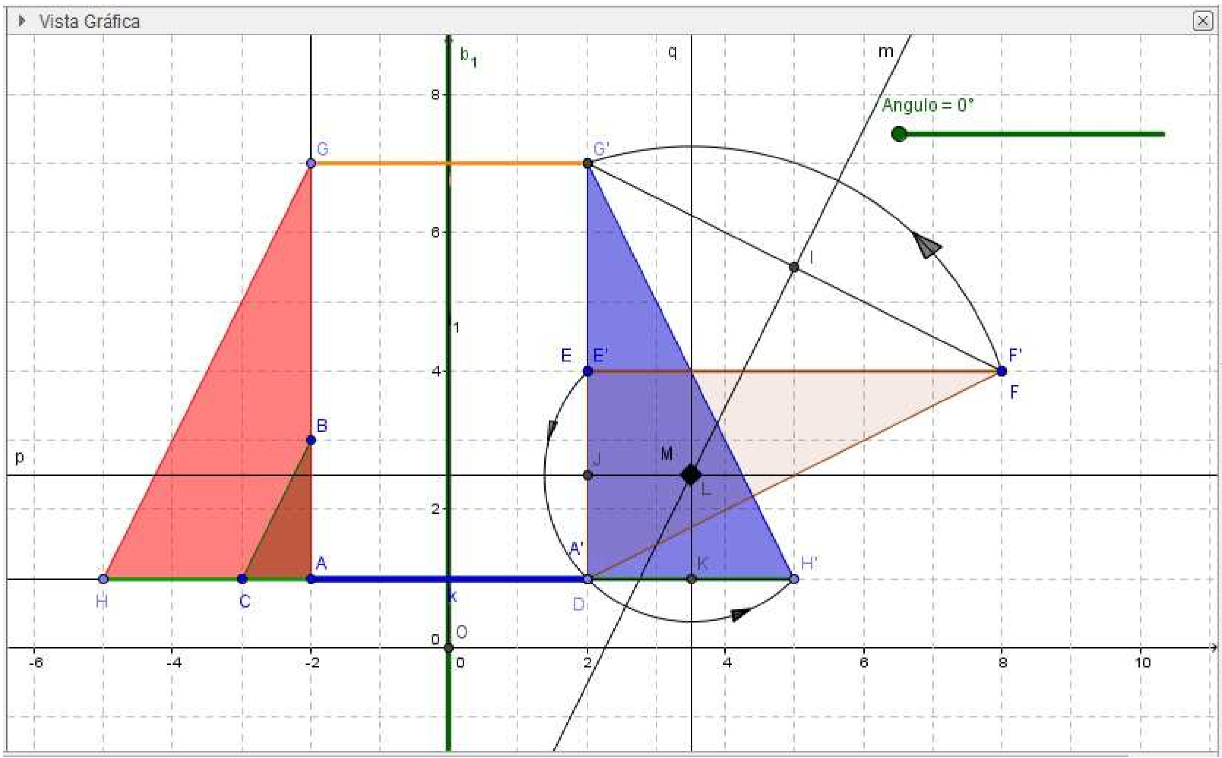
P4.3.B)	Explicar que transformaciones se deben realizar, sabiendo que son figuras semejantes, para pasar del triángulo A(−2, 1), B(−2, 3), C(−3, 1) al triángulo D(2, 1), E(2, 4), F(8, 4).
3º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 5 Pág. 175 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL3]

Los pasos que deben realizar los alumnos para hacer esta actividad son los siguientes:

1) Sabemos que los dos triángulos rectángulos son semejantes porque sus catetos son proporcionales, $K = \frac{6}{2} = \frac{3}{1} = 3$, por tanto sabemos que hay una combinación de transformaciones que nos permiten pasar de uno a otro manteniendo las reglas de semejanza. Resolvemos gráficamente esas transformaciones.

2) Lo primero que debemos hacer es representar ambos triángulos en los ejes coordenados, etiquetando sus vértices correctamente y uniéndolos con la herramienta *Polígono*.
3) Comparando las dos figuras semejantes observamos que hay varias transformaciones para pasar de una a otra: una ampliación primero, después una simetría axial y a continuación un giro. Vamos a ir paso a paso con cada movimiento.
4) El coeficiente de ampliación lo tomamos de los catetos homólogos que resultó con un valor de tres.
5) Hacemos gráficamente la ampliación empleando semejanza de triángulos con el teorema de Tales. Emplearemos como origen de semejanza en este caso el vértice *A* que posee el ángulo recto y trazaremos dos semirrectas con origen en *A* que pasen por *B* y *C*. Multiplicando la longitud del segmento *AB* por el valor de *k* obtenemos la longitud deseada, que etiquetamos con la letra *G*. En el otro cateto procedemos de la misma manera: multiplicamos la longitud del segmento *AC* por *k* para obtener el vértice H. Completamos el triangulo trazando el polígono que une sus vértices.
6) La segunda transformación que se ha producido es una simetría axial, con eje de simetría en la recta $x = 0$. Para resolverla dibujamos una recta que pase por el origen de coordenadas y sea perpendicular al eje *x*. A continuación empleamos la herramienta *Simetría axial* para hallar los puntos homólogos de A, G, H respecto de la recta $x = 0$, obteniendo los puntos A', G', H', respectivamente. Seguidamente trazamos el polígono que une estos vértices y cambiamos sus propiedades de color azul y opacidad 50%.
7) La siguiente transformación es un giro. Se observa que el ángulo de giro es de 90º pero no tenemos el centro de giro. Para hallarlo debemos unir al menos dos puntos homólogos; el centro estará en la mediatriz de la recta que los une porque ambos puntos homólogos equidistan del centro. Trazamos la mediatriz de las rectas *FG', EA' y DH'* y vemos que se cortan en el punto *M*, que será el centro de giro. Tras realizar esta operación con los tres arcos de circunferencia *FG', EA' y DH'*, concluyendo la comprobación de la semejanza.
8) Para introducir un elemento dinámico empleamos un deslizador que denominaremos *Ángulo*, con un valor inicial de 0º y otro final de 90º, con incrementos de 1º. El giro lo

redefinimos para cada uno de los puntos D, E, F con centro en M, y el deslizador *Ángulo*. Cambiamos el color del polígono y la opacidad al 50%. De este modo el triángulo recorrerá de modo gradual desde su posición horizontal hasta la vertical.



8.5.3.3 Semejanza y Giro

P4.3.C)	Razonar si los triángulos ABC y A'D'E' son semejantes: A(0, 0), B(−4, 1), C(−4, −1), A'(14, 8), D'(12, 0), E'(16, 0). Sabiendo que ambos tienen un ángulo de 28.07º, realizar las transformaciones necesarias (teorema de Tales, traslación, simetrías o giros), para transformar uno en otro. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
3º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 40 Pág. 181 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL3]

1) La semejanza de los triángulos isósceles se sigue al comprobar que los triángulos son isósceles con ángulo igual en los lados de la misma longitud.

2) Para representar los triángulos introducimos las coordenadas a través de la línea de comandos:

A = (0, 0), B = (−4, 1), C = (−4, −1), A' = (14, 8), D_1'= (12, 0), E_1'= (16, 0).

3) Calculamos el coeficiente de ampliación empleando la altura de cada triángulo y el lado desigual, porque al ser paralelos a los ejes es fácil medir su verdadera magnitud:

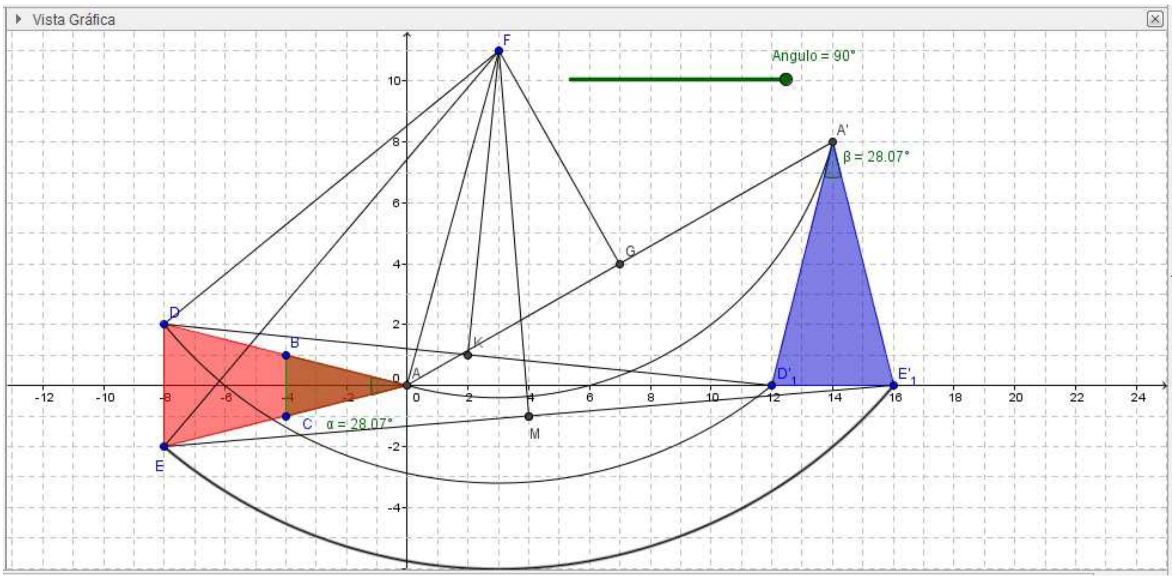
$$K = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2.$$

4) Representamos el nuevo triángulo ampliado con razón K = 2 obteniendo el triángulo de vértices ADE.

5) Seguidamente buscamos el centro de giro que debemos emplear para pasar de este triángulo al A'D'E'. Para obtenerlo trazamos los segmentos entre los puntos homólogos y dibujamos las tres mediatrices de los mismos. El centro de giro será el punto de corte de las tres rectas, que en el gráfico es el punto M.

6) A continuación para introducir un elemento de geometría dinámica empleamos la herramienta *Giro* y creamos una variable tipo Deslizador de tipo ángulo con amplitud de 0º a 90º, con incrementos de 1º en cada paso. Creamos los tres giros entre los vértices homólogos usando la nueva variable para expresar el ángulo de cada movimiento.

7) El movimiento dinámico se activa cuando sobre la variable *Ángulo* seleccionamos *Animación activada* con el botón derecho.



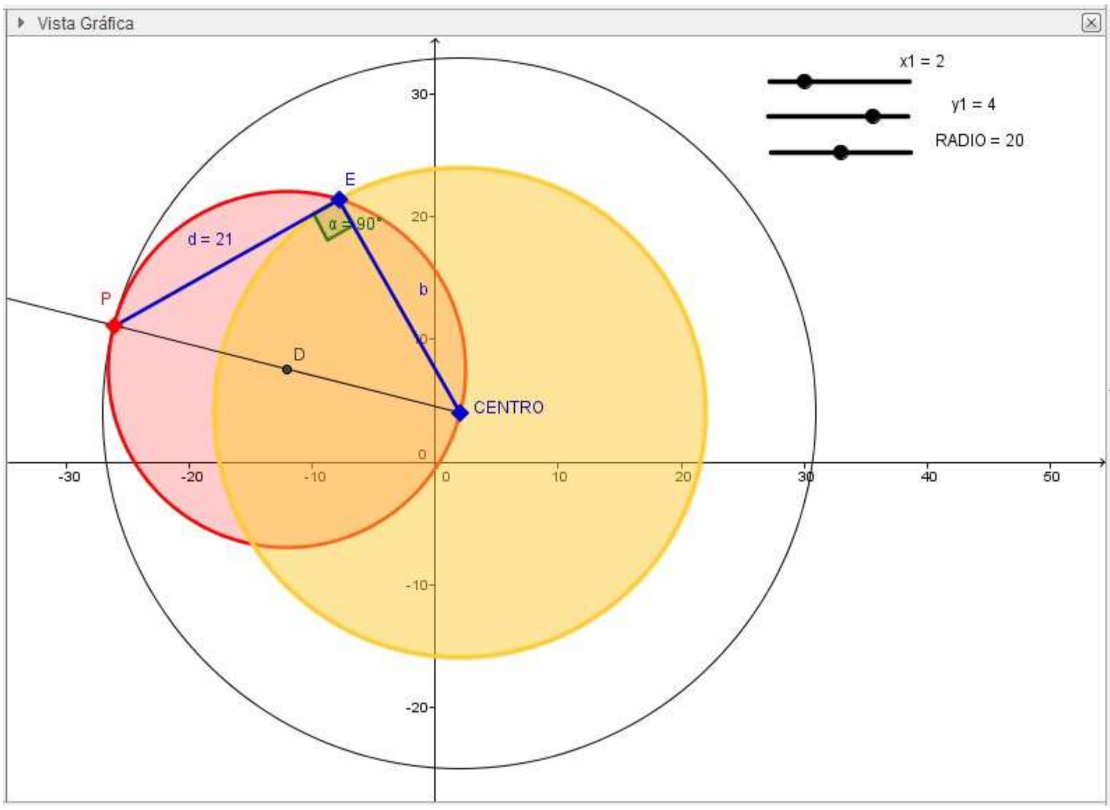
8.5.3.4 Distancia y Tangente a Circunferencia

P4.3.D)	Desde un punto P que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, se traza una tangente. Calcula la distancia de P al punto de tangencia. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
3º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 21 a) Pág. 160 de la UD 7 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL3]

Mediante *GeoGebra* vamos a representar gráficamente todos los elementos que se necesitan para el ejercicio: la circunferencia inicial con un radio de 20 cm, a 29 cm del centro de ésta colocamos un punto P desde el que queremos conocer la distancia al punto de tangencia E. Los pasos que debe seguir el alumno para realizar el ejercicio con *GeoGebra* son los siguientes:

1) En primer lugar vamos a crear tres variables de tipo deslizador, que llamaremos X1, Y1 (ambas van a variar de 1 a 5 cm con paso de 0.1 cm) y RADIO (que oscilará entre 15 y 25 cm), que nos permitirán introducir al final los efectos dinámicos en el gráfico. Definimos el centro de la circunferencia como CENTRO = (X1, Y1) y el RADIO = 20 cm.
2) Es posible introducir a través de la línea de comandos la orden de dibujo de esta circunferencia de dos formas posibles: la primera empleando la instrucción Circunferencia (CENTRO, RADIO); la segunda forma es emplear la ecuación canónica de la circunferencia: $(x - \mathrm{X1})^2 + (y - \mathrm{Y1})^2 = \mathrm{RADIO}^2$.
3) A continuación empleamos una circunferencia auxiliar de radio 29 cm, centrada en el mismo CENTRO que la anterior, empleando la herramienta *Circunferencia* con centro y radio.
4) Seguidamente elegimos un punto cualquiera de la segunda circunferencia con la herramienta *Punto en un Objeto* y le nombramos por P. Empleando la herramienta *Segmento* unimos el punto P con el CENTRO de la primera circunferencia.
5) Localizamos el punto medio entre P y CENTRO, denotándolo por D.
6) Seguidamente trazamos una circunferencia con centro en D y radio de longitud DP.
7) El punto de corte superior es el punto que estamos buscando y le etiquetamos por la letra E.

8) Para obtener la longitud del segmento EP empleamos la herramienta *Distancia* que nos marca en el caso inicial 21 cm.
9) Los efectos dinámicos en este caso nos permiten cambiar la posición del centro de la circunferencia inicial o su radio, viendo en cada caso la distancia real que se actualiza automaticamente.

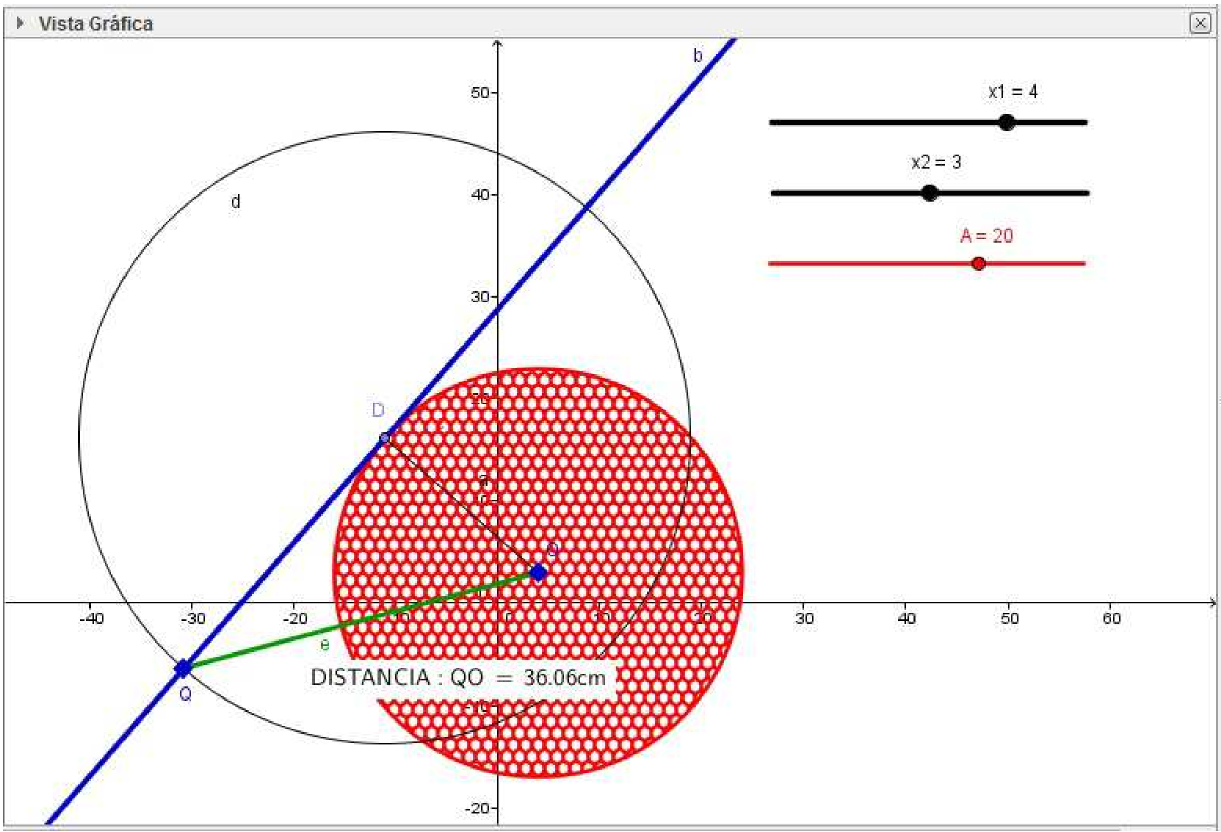


8.5.3.5 Distancia al centro de una Circunferencia

P4.3.E)	Trazar una tangente a una circunferencia de radio 20 cm desde un punto Q exterior a ella, sabiendo que la distancia entre Q y el punto de tangencia es de 30 cm. Hallar la distancia de Q al centro de la circunferencia. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
3º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 21 b) Pág. 160 de la UD 7 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL3]

Los pasos que debe seguir el alumno para resolverlo gráficamente son los siguientes:

1) Introducimos tres deslizadores para obtener los efectos dinámicos al final de la representación. $x1$ e $y1$, variando entre uno y cinco cm con un paso de 0.1 cm, que serán las coordenadas de la circunferencia. Los introducimos a través de la línea de comandos mediante la expresión O = ($x1$, $y1$). El tercer deslizador lo etiquetaremos como A y tendrá rango de valores entre 15 y 25 cm con saltos de 0.1 cm. Servirá para variar el radio de la circunferencia.
2) A continuación trazamos la circunferencia con la herramienta *Circunferencia* indicando el centro y el radio, utilizando las variables ya definidas: centro O y radio A.
3) Seguidamente trazamos un radio cualquiera y etiquetamos con la letra D el punto de corte con la circunferencia.
4) Trazamos una recta, *b*, perpendicular al radio trazado que pase por el punto D.
5) Se representa una circunferencia auxiliar con centro en D y radio 30 cm, la distancia entre Q y D como indica el enunciado.
6) Dibujamos un segmento entre los puntos Q y O y obtenemos su longitud con la herramienta *Distancia*, dando el valor 36.06 cm.
7) Destacamos con distintos colores los objetos más destacables del gráfico empleando la herramienta *Opciones*. En el gráfico adjunto se han agrandado los puntos O y Q, y se han representado en azul saturado, la circunferencia y su deslizador en rojo saturado, la recta tangente a la circunferencia se ha aumentado de grosor y se ha marcado en azul saturado; asimismo se ha hecho con el segmento QO en verde claro. Estas modificaciones tienen, como ya se ha comentado, el propósito de que los alumnos perciban con más detalle los elementos que permiten resolver la situación propuesta y puedan recordarlos de un simple vistazo.
8) Finalmente se activa el movimiento de los deslizadores para que modifique el centro y el radio de la circunferencia, comprobando cómo se recalcula la distancia en cada caso.



8.5.4 Ejemplo para 4º ESO

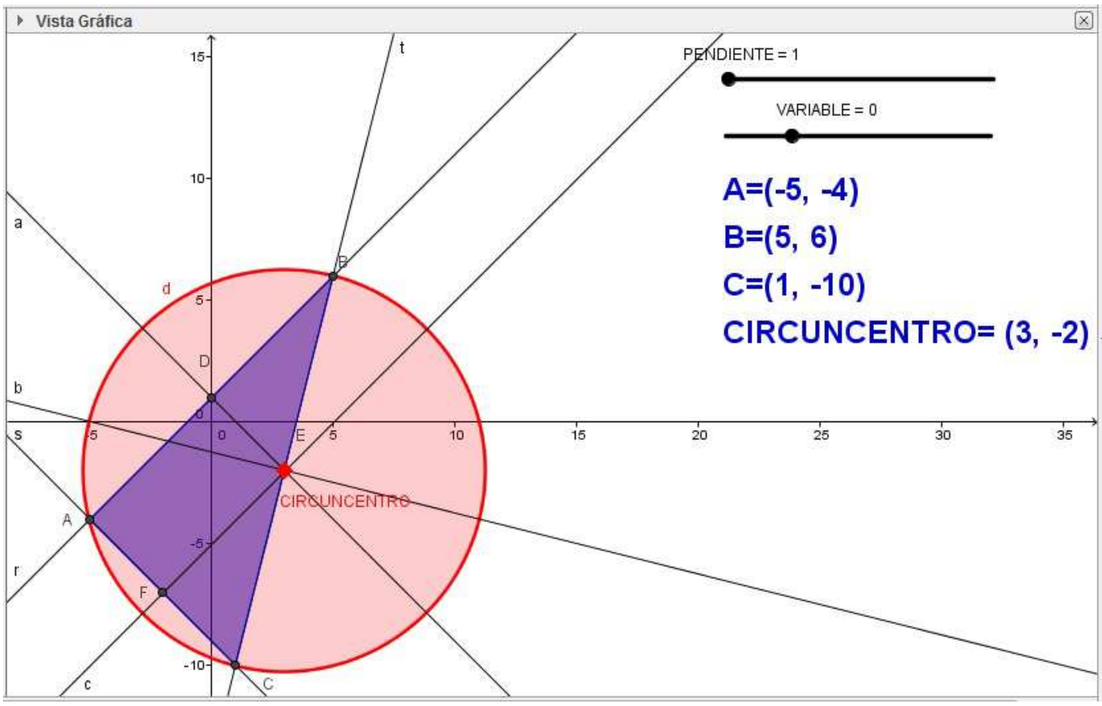
8.5.4.1 Hallar el Circuncentro de un triángulo determinado por tres rectas.

P4.4.A)	Las rectas *r*: $x - y + 1 = 0$; *s*: $x + y + 9 = 0$; *t*: $4x - y - 14 = 0$ forman un triángulo ABC. a) Calcular las coordenadas de los vértices. b) Hallar el circuncentro. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
4º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 61 a) y b) de la Pág. 183 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL4]

Los pasos que debe realizar el alumno en este ejercicio son los siguientes:

1) Crear dos variables de tipo deslizador para introducir efectos dinámicos en las figuras: Variable *PENDIENTE* que oscila entre 1 y 2, con incremento de 0.01 para variar la pendiente de la recta *r* y un segundo llamado *VARIABLE* que nos modifica la ordenada en el origen de la recta *r*.

2) A continuación dibujamos las tres rectas empleando la línea de comandos, *r: PENDIENTE**x – y + 1 + VARIABLE = 0; s:* $x + y + 9 = 0$; *t:* $4x + y – 14 = 0$. Ponemos como valor inicial de los Deslizadores *PENDIENTE* = 1 *y VARIABLE* = 0 para que se inicie el ejercicio como está descrito en el libro.
3) Una vez dibujado el triángulo, calculamos los vértices empleando la herramienta *Intersección* que nos proporciona directamente los puntos A = (–4, –5), B = (5, 6), C = (1, – 10).
4) Seguidamente buscamos los puntos medios de los lados con la herramienta *Punto medio o centro*, denotándolos por D, E, F.
5) Continuamos dibujando la recta perpendicular a cada uno de los tres lados del triángulo que pase por los puntos medios con lo que obtenemos las rectas *a, b, c*.
6) El punto en el que se cortan estas tres rectas en el circuncentro, centro de la circunferencia circunscrita, que pasa por los tres vértices del triángulo. Lo determinamos con la herramienta *Intersección*.
7) Trazamos la circunferencia circunscrita empleando la herramienta *Círculo con centro y punto*, tomando como centro el circuncentro y como punto cualquiera de los vértices del triángulo.



8.5.4.2 Teorema de Varignon

P4.4.B)	Calcular la coordenadas de los puntos medios de los lados y de las diagonales del cuadrilátero ABCD, siendo sus coordenadas: A(4, 6), B(– 2, 3), C(– 4, – 4), D(5, – 2). Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
4º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 4 a) de la Pág. 180 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL4]

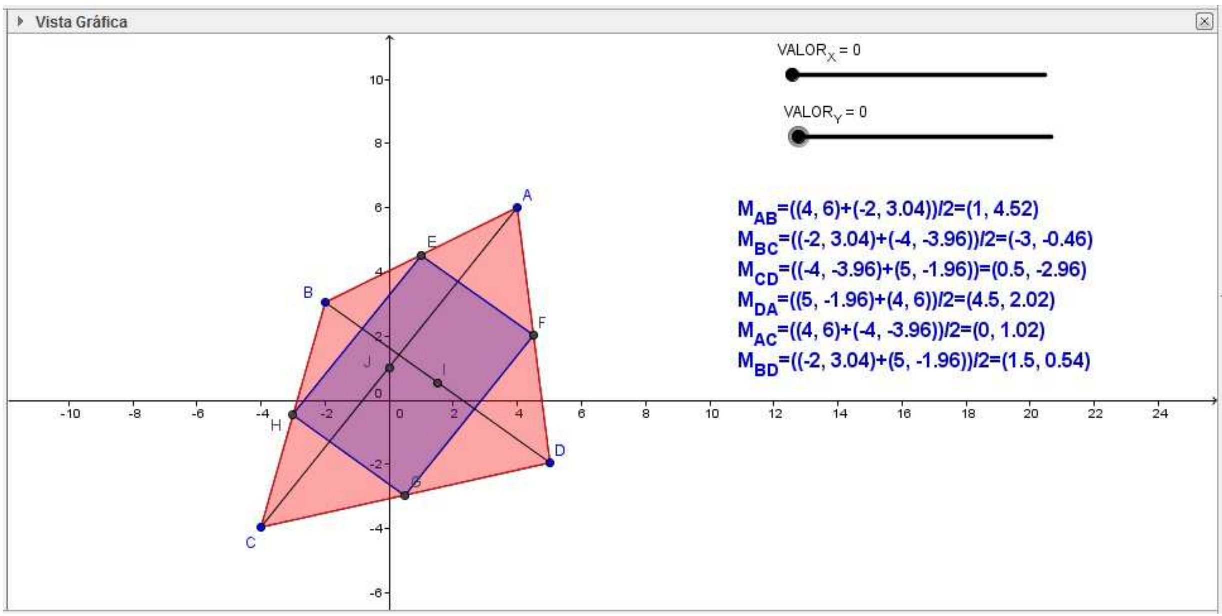
Los pasos que debe realizar el alumno en este ejercicio son los siguientes:

1) En primer lugar debemos fijar la posición de los cuatro puntos con las coordenadas que nos indica el enunciado. Emplearemos la línea comandos.
2) A continuación empleamos la herramienta *Segmento* para trazar los cuatro lados del cuadrilátero.
3) Seguidamente se trazan las diagonales del cuadrilátero.
4) Aplicamos ahora la herramienta de punto medio para encontrar los puntos medios de los seis segmentos dibujados.
5) Mediante la herramienta de texto, podemos describir a un lado de la pantalla el valor obtenido de cada punto medio: por ejemplo el punto E será el punto medio del segmente de extremos A y B, denotado por M_{AB}. Escribiremos la operación que se hace en su cálculo (semisuma de las coordenadas de los extremos). Para sacar partido de las posibilidades dinámicas de *GeoGebra*, en lugar de escribir el nombre de los puntos, pinchamos con el ratón en el punto en la vista algebraica. Así obtenemos una actualización inmediata de los cálculos. Lo mismo hacemos con el resto de puntos medios.
6) Representamos los polígonos resultantes uniendo los vértices A, B, C, D, y E, F, G, H. Los diferenciamos cambiando su color e índice de opacidad.
7) Para introducir los efectos dinámicos vamos a modificar los puntos A y D empleado dos variables de tipo deslizador llamadas VALOR_X y VALOR_Y que variaremos, por ejemplo, entre 0 y 3 unidades con saltos de 0.01.

   A = (4 + VALOR_X, 6 + VALOR_Y); D = (5 – VALOR_X, –2 + VALOR_Y).

De este modo, cuando activamos la animación en los deslizadores, la figura parte de los valores iniciales del enunciado y va oscilando, pero el gráfico nos devuelve los valores de los puntos medios en cada caso.

8) Se observa en los dos cuadriláteros que sea como sea la forma del mayor, en el cuadrilátero interior siempre obtenemos un paralelogramo, cumpliéndose el teorema de Pierre Varignon, que nos informa además que el área de ese paralelogramo es la mitad del área del cuadrilátero exterior.

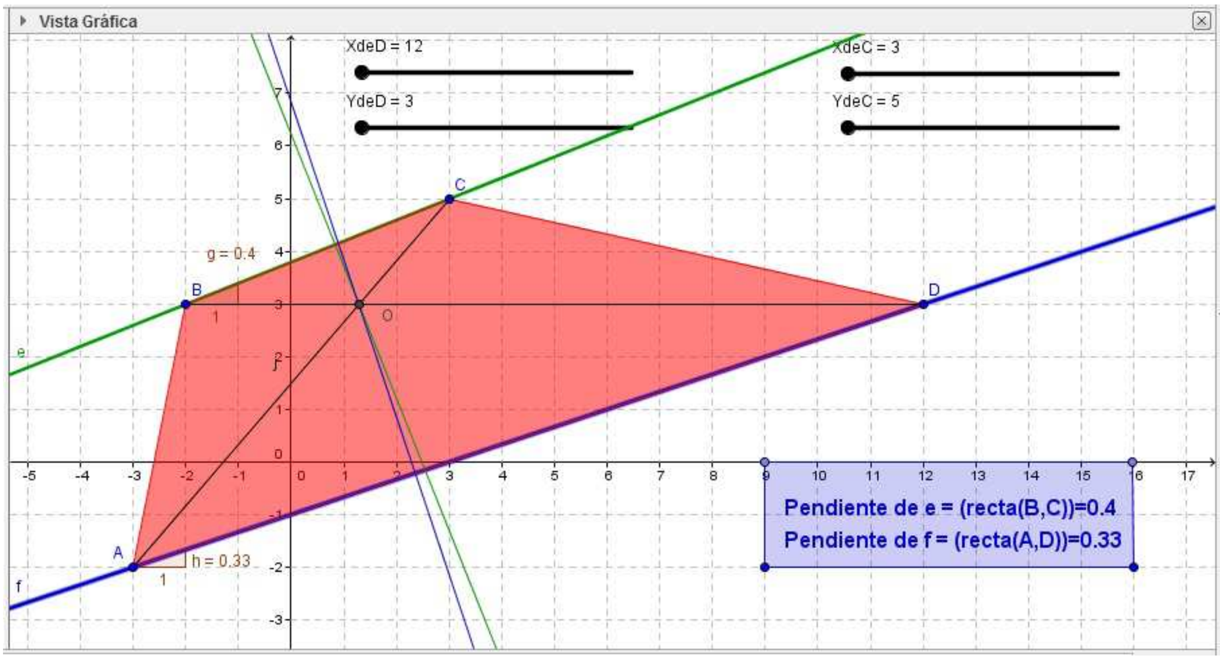


8.5.4.3 Comprobación de un trapecio.

P4.4.C)	La figura de vértices A(– 3, – 2), B(– 3, 3), C(3, 5), D(12, 3) forma un paralelogramo que parece un trapecio. Comprobar si lo es y, en caso contrario, modificar los vértices C y D para que los lados correspondientes sean paralelos. Introducir algún elemento dinámico en el gráfico.
4º ESO	Ejercicio basado en el problema Nº 59 de la Pág. 183 de la UD 8 del Libro de Matemáticas de Anaya [COL4]

Los pasos que debe realizar el alumno en este ejercicio son los siguientes:

1) Se representa la figura del cuadrilátero inicial, introduciendo en la línea de comandos cada unos de los cuatro vértices. Los dos primeros los introducimos según los proporciona el enunciado: A = (–3, –2); B = (–2, 3). Para los vértices C y D emplearemos variables de tipo deslizador, dos para cada vértice: XdeC estará comprendida entre los valores 3 y 6 e YdeC estará comprendida entre 5 y 8, con incrementos de 0.01, de modo que podremos escribir C = (XdeC, YdeC). De modo semejante definimos otros dos deslizadores para el vértice D: XdeD comprendido entre 12 y 18 e YdeD comprendido entre 3 y 6, ambas con incrementos de 0.01. De este modo podremos escribir D = (XdeD, YdeD).
2) A continuación trazamos con la herramienta *Polígono* el cuadrilátero ABCD. Lo vamos a colorear con una opacidad del 50% de color rojo saturado.
3) Seguidamente realizamos dos rectas auxiliares *e* y *f* que nos permitirán conocer la pendiente de los lados BC y AD, obteniendo en este caso inicial los valores de 0.4 y 0.33, respectivamente. Por tanto inicialmente no son lados paralelos.
4) Para poder leer de modo continuo la pendiente de los dos lados empleamos un recuadro de texto con la leyenda "Pendiente *e* = (recta (BC))=g" y de modo semejante "Pendiente *f* = (recta (AD)) = h".
5) Trazaremos las diagonales del polígono, que se cruzan en el punto O, como rectas auxiliares y dibujaremos dos rectas perpendiculares a los lados que estamos estudiando que pasen por el punto O, coloreándolas como el lado que les corresponde.
6) Empleado los deslizadores creados y los elementos auxiliares vamos a poder obtener las coordenadas adecuadas de C y D para que las pendientes de sus lados sean iguales.
7) Finalmente obtendremos que para C(3, 5), el vértice D debe estar entre algunos de los siguientes valores de coordenadas para que las pendientes de ambos lados sean de 0.4: (12, 4), (13, 4.4,; (14, 4.8), (15, 5.2), (16, 5.6), (17, 6).
8) Para el caso de mantener constante el vértice D(12, 3) las dos pendientes se igualarán a 0.33 si C toma estas coordenadas: (4, 5), (5, 5.3), (6, 5.6), (7, 6), (8, 6.3), (9, 6.6).



8.5.4.4 Ejercicio Olimpiada

Finalmente se incluye un ejemplo de práctica a partir de un ejercicio propuesto en una olimpiada internacional, con la que se pretende demostrar como *GeoGebra* permite afrontar a los alumnos, a partir de conceptos y definiciones conocidas por los alumnos de Secundaria retos más complejos.

Se construyen los triángulos equiláteros *ABK*, *BCL*, *CDM*, *DAN* dentro del cuadrado *ABCD*. Demostrar que los puntos medios de los cuatro segmentos *KL*, *LM*, *MN*, *NK* y los puntos medios de los ocho segmentos *AK*, *BK*, *BL*, *CL*, *CM*, *DM*, *DN*, *AN* son los doce vértices de un dodecágono regular. (Problema propuesto en la decimonovena Olimpiada Matemática Internacional, tomado de [KLA]).

Resolución Clásica

El ejercicio puede resolverse mediante argumentos de geometría clásica o de geometría analítica.

Teniendo como referencia la construcción final realizada con *GeoGebra*, llamemos *O* al centro del cuadrado. Las diagonales *AC* y *BD* son ejes de simetría al igual que las rectas que pasan por M y K y por L y N. Un giro alrededor de O de cualquier múltiplo de 90º deja la figura invariable. Basta por tanto con razonar con la porción del plano acotado por las semirrectas OA y OL. Sean P_1, P_2, P_3 los puntos medios de AK, LM y AN, respectivamente.

Como $AK = AD$ y $\angle DAK = 90º - 60º = 30º$, tenemos que $\angle ADK = \angle AKD = 75º$. Por tanto los triángulos isósceles congruentes CDK, BCN, ABM, DAL tiene en la base ángulos de 75º – 60º = 15º. Por ello, los triángulos AML, BNM, CKN y DLK son todos equiláteros. Sea s la longitud de su lado.

El segmento OP_1, que une los puntos medios de los lados AK y AC en el triángulo ΔAKC es paralelo a KC y tiene longitud $1/2KC = ½\, s$. Por simetría, OL es paralelo a DC, así que $\angle LOP_1 = \angle DCK = 15º$. $\angle AOL = 45º$, con lo que $\angle P_1OP_2 = 30º$. Los segmentos AO y BO son perpendiculares; BO es la bisectriz del $\angle MBN$ y por tanto es perpendicular a MN. Por tanto MN es paralelo a AO y $OP_2 = MP_5 = ½\, s$, de donde, $OP_1 = OP_2$.

Por reflexión sobre la recta OA, se tiene que $OP_3 = OP_1$, $\angle P_2OP_3 = 30º$, $\angle P_3OM = 15º$. Haciendo una reflexión sobre la recta OM y añadiendo OP_4, OP_5 y OP_6 a la lista de segmentos de la misma longitud y $\angle P_3OP_4 = 2 \cdot 15º = \angle P_4OP_5 = \angle P_5OP_6$ a la lista de ángulos de 30º.

Finalmente una reflexión sobre LN produce el resto de la figura, obteniendo doce puntos sobre una circunferencia de radio $s/2$ y separados 30º en esa circunferencia, que son los vértices del dodecágono regular.

Si enfocáramos el ejercicio mediante geometría analítica fijando, por ejemplo, el centro O del cuadrado en el origen de un sistema de coordenadas en el plano, quedando los vértices con las siguientes coordenadas

$$A = (-2, -2),\ B = (2, -2),\ C = (2, 2),\ D = (-2, 2)$$

La altura del triángulo equilátero ABK, de lado 4, tiene longitud $2\sqrt{3}$, así que las coordenadas del punto K serán $K = (0, 2\sqrt{3}-2)$. Sucesivas rotaciones de 90º sobre O (obsérvese que B, C, D pueden obtenerse a partir de A por sucesivos giros de 90º alrededor del origen, en sentido contrario a las agujas del reloj), nos llevan a que

$$L = (2 - 2\sqrt{3}, 0),\ \ M = (0, 2 - 2\sqrt{3}),\ \ N = (2\sqrt{3}-2, 0).$$

Calculamos las coordenadas de los puntos medios P_1, P_2, P_3 de los segmentos AK, LM, AN, respectivamente, como semisuma de las coordenadas de los extremos, obteniendo

$$P_1 = (-1, \sqrt{3}-2),\ P_2 = (1-\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}),\ P_3 = (\sqrt{3}-2, -1).$$

Como $\sqrt{3}-2 < 0$ y $1-\sqrt{3} < 0$, P_1, P_2, P_3 están en el tercer cuadrante. Los otros nueve puntos pueden obtenerse a partir de P_1, P_2, P_3 mediante sucesivos giros de 90º sobre el origen O. Para probar que los doce puntos forman un dodecágono regular, es suficiente, por la simetría, probar que P_1, P_2, P_3 están a igual distancia de O, y que los lados P_1P_2, P_2P_3 y P_3P_4 del dodecágono tiene la misma longitud. P_4 es la imagen de P_1 bajo un giro de 90º y tiene por coordenadas $P_4 = (2-\sqrt{3}, -1)$. La igualdad $P_1P_2 = P_2P_3$ es consecuencia de la simetría con respecto a la diagonal AC del cuadrado.

Para demostrar lo que pretendemos, utilizamos la distancia

$$OP_1^2 = 1 + (\sqrt{3}-2)^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$OP_2^2 = 2(1-\sqrt{3})^2 = 8 - 4\sqrt{3}$$

$$OP_3^2 = (\sqrt{3}-2)^2 + 1 = 8 - 4\sqrt{3},$$

mientras que

$$P_1P_2^2 = (\sqrt{3}-2)^2 + (2\sqrt{3}-3)^2 = 28 - 16\sqrt{3}$$

$$P_3P_4^2 = (2\sqrt{3}-4)^2 = 28 - 16\sqrt{3},$$

lo que demuestra que todos los puntos medios están a distancia $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$ de O y que los lados del dodecágono tiene longitud $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Guión de la práctica

1.- Representa mediante *GeoGebra* un cuadrado. Etiqueta sus vértices como A, B, C y D respectivamente, siendo A la esquina inferior izquierda continuando en sentido contrario a las agujas del reloj.

2.- Construye los triángulos equiláteros ABK, BCL, CDM, DAN dentro del cuadrado $ABCD$. Etiqueta correctamente los vértices.

3.- Señala sobre el dibujo en color rojo los puntos medios de los segmentos KL, LM, MN, NK, etiquetándoles mediante P_{11}, P_2, P_5 y P_8, respectivamente.

4.- Señala a continuación, del mismo modo a lo realizado en el apartado anterior, los puntos medios (en otro color diferente) de los ocho segmentos AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN, etiquetándolos respectivamente mediante el subíndice que corresponda al vértice del dodecágono de modo que finalmente aparezcan en orden.

5.- Unir los vértices del dodecágono y comprobar si es regular.

Desarrollo y comentario de la práctica

1.- Primero preparamos el escenario:

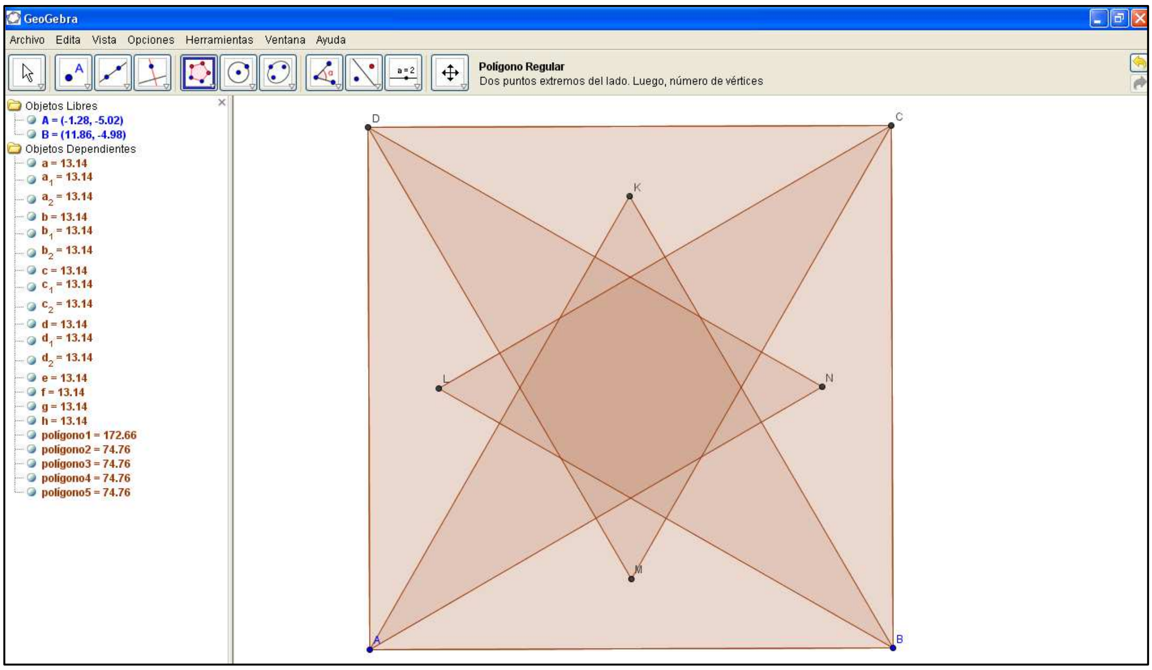
• Usando la Barra de Estilo (Menú Vista) ocultamos los ejes y la cuadrícula. Más adelante los mostraremos para verificar los datos de la geometría analítica.

• En Opciones, elegimos la última opción de *Atracción a Cuadrícula*: "Desactiva".

• Si hemos actuado con anterioridad sobre la vista gráfica, también es aconsejable (con clic derecho del ratón sobre ella) asegurar la *Vista Estándar*.

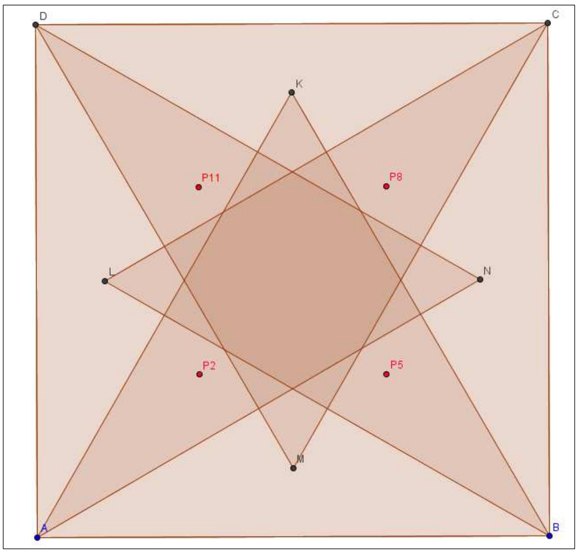
Se representa gráficamente el cuadrado utilizando el icono *Polígono* señalando los dos primeros puntos (conviene avisar a los alumnos de que comiencen con *A* y *B* para que *GeoGebra* asigne automáticamente el resto con las etiquetas deseadas) e indicando el número de vértices del polígono (4 en este caso). Se pretende que el cuadrado ocupe la mayor parte de la ventana posible por lo que se utiliza la opción *Desplazar Vista Gráfica* si fuera necesario.

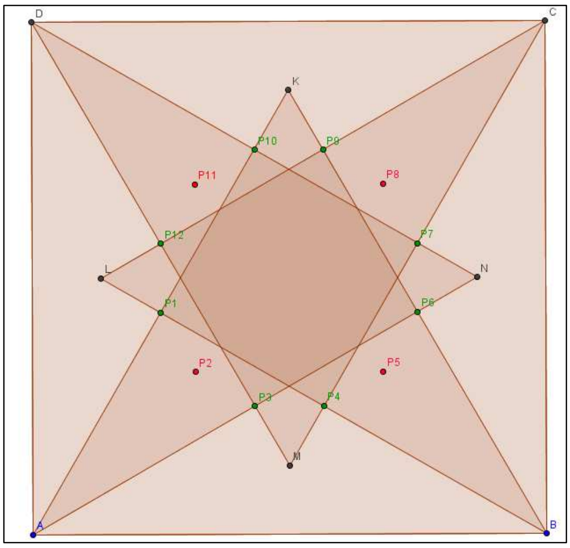
2.- Nuevamente, mediante la opción *Polígono Regular*, se van construyendo los triángulos



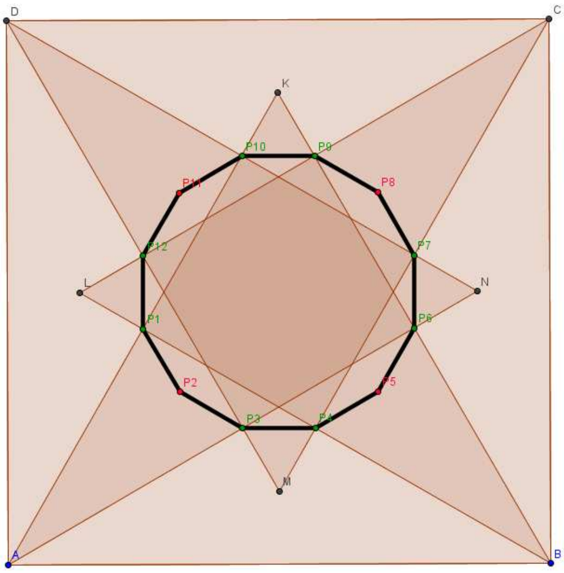
equiláteros y renombrando los vértices. Para no emborronar el gráfico, conviene eliminar la opción de nombrar los lados de los objetos que se van construyendo (*Opciones* / *Rotulado* / *Sólo los nuevos puntos*; si algún segmento ha sido etiquetado, basta pinchar sobre él con el botón izquierdo del ratón para desactivar la opción del Rótulo).

3, 4.- Mediante la opción *Punto Medio o Centro*, se van calculando los puntos pedidos.





5.- Utilizando *Segmento entre dos puntos*, se van uniendo los vértices. Damos un grosor mayor para que se aprecie mejor el resultado final.



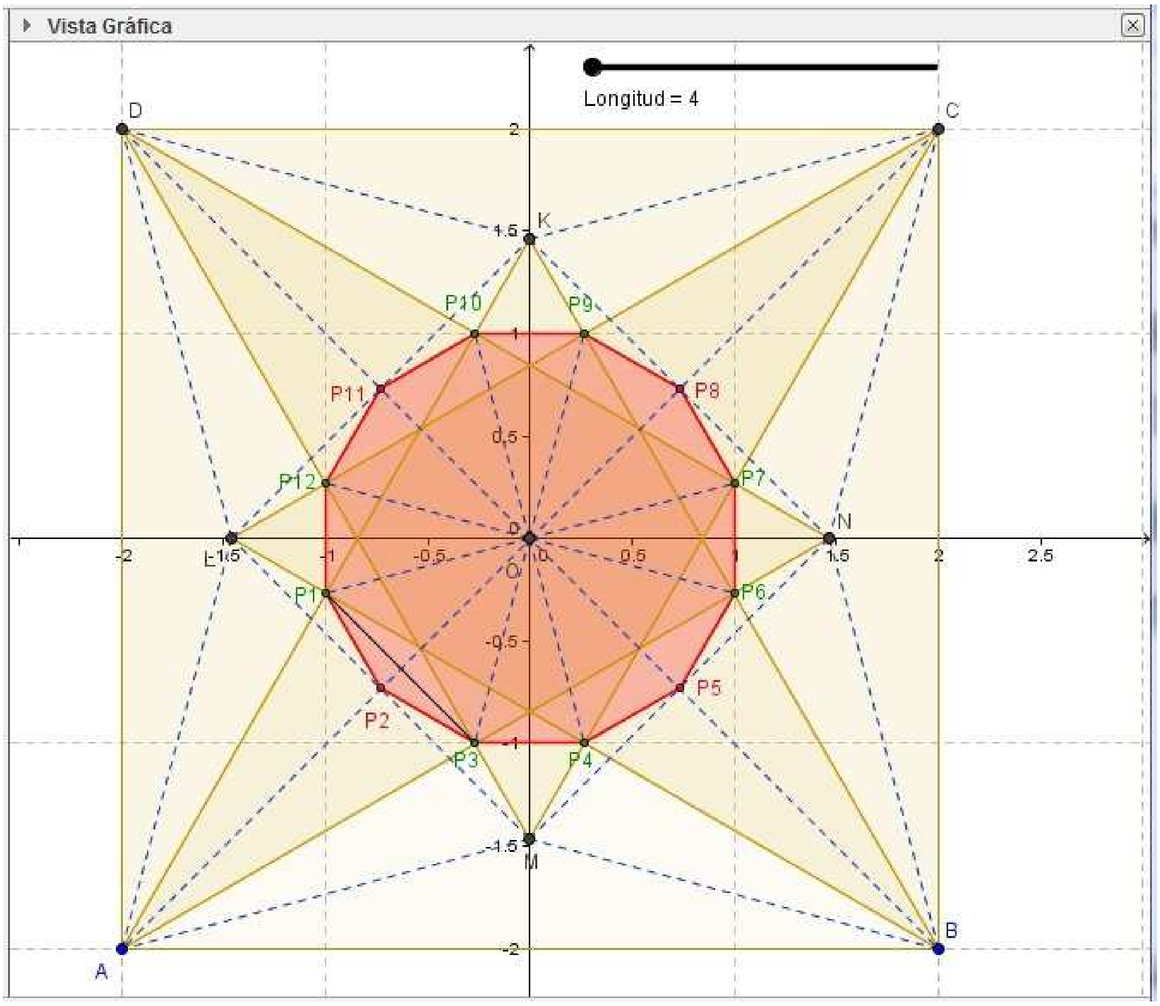
Para comprobar si se trata o no de un dodecágono regular, basta con utilizar la herramienta *Distancia o Longitud* en cada lado.

Mediante la opción *Elige y Mueve* sobre los puntos iniciales, *A* o *B*, es posible, gracias a *GeoGebra*, ir modificando el cuadrado original (no sólo haciéndolo menor; también girándolo) para verificar experimentalmente que el resultado es válido siempre.

6.- Introducimos un deslizador denominado *Longitud* para crear una figura dinámica, que oscilará entre 4 y 8, con saltos de 0.1. Redefinimos los dos vértices de la base:

A = (− Longitud/2, − Longitud/2),   B = (Longitud/2, − Longitud/2).

Al activar la animación del deslizador la figura cambiará de tamaño manteniendo sus proporciones.



9 Bibliografía

[COL1] Colera, J.; Gaztelu, I; Oliveira M. J.; Martínez, M. *Matemáticas 1º ESO*. Editorial Anaya Digital. 2010. ISBN: 978-667-0597-4

[COL2] Colera, J.; Gaztelu, I; Oliveira M. J.; Martínez, M. *Matemáticas 2º ESO*. Editorial Anaya Digital. 2012. ISBN: 978-84-678-0223-8

[COL3] Colera, J.; Gaztelu, I; Oliveira M. J.; Martínez, M. *Matemáticas 3º ESO*. Editorial Anaya Digital. 2011. ISBN: 978-84-667-1366-5

[COL4] Colera, José; Colera, Leticia; Gaztelu, Ignacio; Oliveira, María José; Martínez, María del Mar. *Matemáticas 4º ESO*. Editorial Anaya Digital. 2012. ISBN: 978-84-678-1153-7

[COL5] Colera, J.; Gaztelu, I; Oliveira M. J.; Martínez, M. *Matemáticas 1º BAC*. Editorial Anaya. 2008. ISBN: 978-84-667-7283-9

[COL6] Colera, J.; Gaztelu, I; Oliveira M. J.; Martínez, M. *Matemáticas 2º BAC*. Editorial Anaya. 2008. ISBN: 978-84-667-8249-4

[KLA] Klamkin, Murray S. *Olimpiadas Matemáticas Internacionales II*. Euler Editorial, colección *La tortuga de Aquiles*, pp. 61 – 65. Madrid, 1998. ISBN 84 – 85731 – 26 – 3.

10 Enlaces Web

[1] Página Oficial de *CaRMetal*: http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_es.html. Último acceso 16.07.2014.

[2] Página de *CaRMetal* en *Wikipedia*: http://en.wikipedia.org/wiki/CaRMetal. Último acceso 16.07.2014.

[3] Pagina Oficial de *Cinderella*: http://www.cinderella.de/tiki-index.php. Último acceso 16.07.2014.

[4] Página de *Cinderella* en la *Wikipedia*: http://en.wikipedia.org/wiki/Cinderella_%28software%29. Ultimo acceso 16.07.2014.

[5] Página oficial de *GeoGebra*: http://www.geogebra.org/cms/es/. Último acceso 16.07.2014.

[6] Biografía del autor de *GeoGebra* y algunos datos del programa: http://es.wikipedia.org/wiki/GeoGebra. Último acceso 16.07.2014.

[7] Página de los Institutos *GeoGebra* autonómicos: http://institutosgeogebra.es/. Último acceso 24.07.2014.

[8] Página de IES Arroyo de la Miel en Benalmádena, Málaga, de la Junta de Andalucía con los problemas resueltos de matemáticas para ESO y BAC, de la editorial Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/matematicas.htm. Último acceso 27.07.2014.

[9] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2008 de matemáticas 1º de ESO de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1eso/1esosolucionlibronuevo.htm. Último acceso 08.08.2014.

[10] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2008 de matemáticas 2º de ESO de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2eso/2esosolucionlibro2008.htm Último acceso 08.08.2014.

[11] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2007 de matemáticas 3º de ESO de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/3eso/3esosolucionlibronuevo.htm. Último acceso 08.08.2014.

[12] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2008 de matemáticas 4º de ESO de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/4esosolucionlibronuevo-b.htm Último acceso 08.08.2014.

[13] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2008 de matemáticas de ciencias y tecnología 1º de BAC de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/1bach/naturaleza/1bachnaturaleza2008.htm . Último acceso 08.08.2014.

[14] Enlace a los problemas resueltos del libro de 2008 de matemáticas de ciencias y tecnología 2º de BAC de Anaya: http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/2bach/naturaleza/solucioneslibronuevo/2bachnaturalezanuevo.htm. Último acceso 08.08.2014.