Universidad de Valladolid

MÁSTER UNIVERSITARIO DE PROFESOR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS.

ESPECIALIDAD EN MATEMÁTICAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER

LAS MATEMÁTICAS DEL PLANETA TIERRA

DIRIGIDO POR: D. CARLOS MATRÁN BEA

REALIZADO POR: Dª. MARÍA LUISA LLANOS HUSILLOS

En Valladolid, a 30 de Junio 2014

INDICE

1. PLANTEAMIENTO DEL TRABAJO FIN DE MÁSTER

1.1. INTRODUCCIÓN

En este apartado se presentan diferentes puntos de vista que destacan la pertinencia de investigar y desarrollar propuestas didácticas innovadoras destinadas a tutelar a varios grupos de alumnos en el desarrollo de trabajos relacionados con las Matemáticas del Planeta Tierra.

Se comienza planteando los antecedentes que han motivado el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster, seguidos de la justificación que nos anima a su desarrollo y de los objetivos que se persiguen.

A continuación se muestra una lista de once propuestas, con temas tan diversos que van desde las el movimiento parabólico presente en diversos deportes hasta la determinación experimental de las pérdidas de carga debidas a la presencia de un elemento de un conducto.

Finalmente se desarrollan en profundidad los temas de "El reloj de Sol", "Las matemáticas de los deportes" y "La optimización matemática". En este apartado se muestra la propuesta didáctica para cada uno de ellos, describiendo las explicaciones que debe realizar el profesor, las actividades propuestas a los alumnos, así como la guía para que los desarrollen.

Finalmente se describen las conclusiones que se han obtenido de la realización del presente Trabajo Fin de Máster y las vías de trabajo de futuro que se abren a partir de éste.

1.2. ANTECEDENTES

El año **2013** ha sido declarado **Año de "Las Matemáticas en el Planeta Tierra"** por la UNESCO y por los institutos de investigación matemática de Norteamérica, a los que se han sumado otras instituciones relevantes, como la American Mathematical Society (AMS), la European Mathematical Society (EMS) o la International Mathematical Union (IMU). Las "Matemáticas del Planeta Tierra" (MPE2013), ha sido un proyecto a nivel mundial que se ha llevado a cabo a lo largo del año 2013. Desde su concepción en el año 2010, MPE2013 se ha convertido en una iniciativa que ha puesto de relieve las aportaciones de las matemáticas en la solución de grandes retos de la humanidad, incluidos desastres naturales tales como huracanes, terremotos y tsunamis, cambio climático, sostenibilidad y pandemias.

El objetivo del MPE2013 ha sido fomentar la participación de los matemáticos, los investigadores, profesores, estudiantes y de todo el público que juegue algún papel relacionado con las matemáticas en cuestiones que afectan al Planeta Tierra y a su futuro. Las estrategias han sido:

- ✓ Fomentar la investigación para identificar y abordar preguntas fundamentales acerca de nuestro planeta sobre las que las matemáticas puedan aportar una solución, incluyendo la comprensión del clima de la Tierra y el medio ambiente y hacer frente a su sostenibilidad.
- ✓ Animar a los profesores de matemáticas de todos los niveles a comunicar las cuestiones relacionadas con el Planeta Tierra a través de su instrucción y el desarrollo del currículo.
- ✓ Animar a los estudiantes de matemáticas y a los investigadores principiantes a abrir áreas de investigación relacionadas con el Planeta Tierra.
- ✓ Informar al público acerca de los roles que las matemáticas pueden desempeñar a la hora de abordar cuestiones relacionadas con el Planeta Tierra.

El tema MPE puede interpretarse en un sentido muy amplio, lo que ha dejado un amplio espacio para que muchos institutos y sociedades de todo el mundo hayan podido organizar actividades relacionadas con el tema. La Tierra es un planeta con procesos dinámicos en el manto, los océanos, y la atmósfera que provocan el clima, los desastres naturales, y los aspectos fundamentales que influyen en la vida y en los sistemas de soporte vital. Además de estos procesos naturales, los humanos han desarrollado sistemas de gran complejidad, incluyendo los sistemas económicos y financieros; marcos para la gestión de recursos, el transporte y la prestación de atención a la salud; y sofisticadas organizaciones sociales. La actividad humana ha aumentado hasta el punto de influir en el clima mundial, los impactos de la capacidad del planeta para alimentarse a sí mismo, y amenaza la estabilidad de estos sistemas. Las matemáticas están preparadas para desempeñar un papel esencial en el estudio de problemas planetarios, tanto como una disciplina fundamental y como un componente esencial de investigación multidisciplinar.

Matemáticas del Planeta Tierra 2013 ha tenido como objetivo el desarrollo de este papel de las matemáticas, proporcionando una plataforma para mostrar la esencial importancia de las matemáticas en problemas planetarios, a unir actividades actualmente dispersas entre instituciones, y crear un contexto para las matemáticas y desarrollos interdisciplinares que serán necesarios para hacer frente a una gran variedad de temas y conocer futuros retos. Las actividades de MPE se han llevado a cabo en todas las partes del planeta. Las actividades científicas han incluido talleres, grupos de investigación en colaboración, escuelas de verano y números especiales de revistas científicas. Sociedades científicas han celebrado reuniones sobre el tema o la voluntad de publicar artículos relacionados en sus boletines.

En paralelo con la parte científica, las actividades de divulgación han permitido concienciarnos del papel de las matemáticas en el estudio del planeta, dirigido al público, a los medios de comunicación, y a las escuelas. Éstas han incluido conferencias públicas, mesas redondas, programas de radio o televisión, exposiciones, artículos en periódicos, etc. Las actividades escolares han incluido carteles, temas especiales en las revistas, páginas web, exposiciones, actividades de divulgación a organizaciones de docentes, conferencias en las escuelas, aulas de proyectos, etc. La colaboración internacional ha maximizado la visibilidad de la iniciativa.

Las matemáticas desempeñan un papel fundamental para resolver los grandes retos del futuro más inmediato. Y aunque los matemáticos no sean los únicos científicos capaces de aportar soluciones a los grandes desafíos que afronta nuestro planeta, podemos decir que Gaia, si existiera, tendría una mente matemática.

Manuel de León (profesor de investigación de CSIC)

Una vez finalizado el año 2013, y viendo la exitosa acogida que ha tenido, se ha decidido que el proyecto del año internacional de las Matemáticas el Planeta Tierra 2013 (MPE2013), continúe desde el 1 de Enero del 2014 como el nombre del Matemáticas del Planeta Tierra (MPE). Los objetivos de este nuevo proyecto divulgativo siguen siendo los mismos, es decir, impulsar las relaciones entre las matemáticas y las ciencias de la Tierra, identificar los problemas de investigación en matemáticas fundamentales que afectan al Planeta Tierra, y llegar al conjunto de la ciudadanía.

Según Irina Bokova, directora general de la UNESCO, "*la iniciativa de las Matemáticas del Planeta Tierra (MPE) coincide estrechamente con los objetivos de la UNESCO de promover las ciencias y la enseñanza científica, sobre todo a través de nuestro Programa Internacional de Ciencias Básicas. Las matemáticas hacen que la investigación fundamental avance, además de jugar un papel importante en nuestras vidas diarias. Más que nunca hace falta que desarrollemos materiales relevantes de enseñanza y que transmitamos a todos los alumnos, un sentido de alegría ante el mundo maravilloso de las matemáticas y el potencial inmenso que encierra esta disciplina. En este sentido respaldamos esta iniciativa y estamos plenamente de acuerdo con la propuesta de que continúe este programa más allá del 2013.*"

A lo largo del curso académico 2013/2014 se ha llevado a cabo un concurso promovido por el Instituto de Investigación en Matemáticas de la Universidad de Valladolid (imUVa) denominado **"Concurso imUVa las Matemáticas del Planeta Tierra".** En este concurso podían participar grupos de alumnos (de entre 4 y 6 personas) del segundo ciclo de la ESO y de Bachillerato de Centros oficiales de enseñanza secundaria de las provincias de Palencia, Segovia, Soria o Valladolid. Cada grupo debía esta coordinado por un profesor de su centro. El concurso consistió en la elaboración de un trabajo original relacionado con el tema del concurso: "Las Matemáticas del Plante Tierra" y, en el caso de los 4 finalistas, su presentación pública. El formato fue libre, pero los materiales a presentar debían estar exclusivamente en formatos digitales. El objetivo de los trabajos era poner de manifiesto la presencia y la interacción de las matemáticas con cualquier aspecto del planeta Tierra en sentido amplio. Este vasto objetivo abarcaba desde la aparición de pautas matemáticas en la naturaleza, modelización de los fenómenos naturales, intervención de las matemáticas en la comprensión de cualquier aspecto de nuestro planeta, etc.

1.3. JUSTIFICACIÓN

Los antecedentes descritos y el interés personal de la autora por el tratamiento multidisciplinar de las matemáticas han motivado la realización de este Trabajo Fin de Máster.

1.3.1. Reflexión personal

Como motivación adicional tengo que incluir mi propia percepción a lo largo de mi participación en las prácticas de este Máster. La realización de este Máster para profesorado de secundaria me dio la oportunidad de apoyar el trabajo del profesor en clases de 2º y 4º de la ESO y 1º de Bachillerato durante un periodo de dos meses. Es evidente que un espacio de tiempo tan corto solo permite una experiencia muy acotada y quizá aporta una visión relativamente sesgada y no completa de la relación a tres bandas que se desarrolla en el aula entre el profesor, el alumnado y la propia materia impartida. A pesar de ello considero conveniente y necesario para la sustentación de este trabajo aportar mi propia reflexión.

De alguna forma también he intentado recuperar de mi memoria la forma en la que yo, como alumna, percibía las clases de matemáticas durante mis estudios de secundaria. He tratado de dar forma a estos recuerdos, analizando el comportamiento de los alumnos ante esta materia, y de los actuales profesores y comparándoles con la percepción que yo tengo de mi propia experiencia.

En la etapa educativa desarrollada en un instituto, se puede apreciar cómo la asignatura de matemáticas comienza siendo una ciencia bastante tangible. En los primeros cursos de la ESO prácticamente todos los conceptos que surgen tienen una aplicación real inmediata que se pone de manifiesto en las explicaciones.

Sin embargo, a medida que avanzan los cursos en los institutos, la dificultad que suponen las matemáticas va en aumento. Los conceptos matemáticos se van abstrayendo de la realidad, para acabar convirtiéndose en mera teoría. La aplicación de las matemáticas se deja a un lado para desarrollar conceptos teóricos cuya utilización se evidenciará en cursos superiores o en otras disciplinas. Habitualmente, en los últimos cursos de la Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato, un elevado número de alumnos muestra rechazo ante esta disciplina.

A todo ello cabría añadir que la asignatura de matemáticas de 4º de la ESO opción A, es una asignatura terminal para la mayoría de los alumnos que la cursan, enfocada a un Bachillerato de Humanidades o Sociales o Ciclos Formativos. Los alumnos en ocasiones muestran desánimo ante una asignatura, que según su apreciación, no les va a ser útil en el futuro. Por todo ello consideramos que una iniciativa como esta en el seno del curso podría ser muy positiva.

Las observaciones que he podido realizar a lo largo de las prácticas muestran que, por lo general, los profesores de matemáticas siguen empleando metodologías clásicas de clase magistral. Los recursos empleados en la mayoría de los casos no son otros que la pizarra y el libro de texto. Considero que es necesario un cambio en las aulas, en la docencia de una disciplina tan clásica como es las Matemáticas, pero que a la vez permite una gran versatilidad a la hora de ser impartida.

Viendo la necesidad de transformar esta sensación que presentan algunos alumnos ante las Matemáticas, se desarrolla el presente Trabajo Fin de Máster como una propuesta innovadora en la docencia de las Matemáticas destinada a alumnos de los cursos más elevados del instituto, en concreto enfocada al último ciclo de la ESO y a Bachillerato.

1.3.2. Descripción del TFM

En este trabajo se propone la presentación y posterior desarrollo en las aulas, o fuera de ellas, de diversos trabajos en los que se presentan las matemáticas como una herramienta para resolver situaciones reales que podamos encontrar en el Planeta Tierra.

El planteamiento que vamos a realizar consiste en proponer en cada aula, una serie de posibles trabajos que los alumnos, con la orientación y guiado del profesor, tendrán que desarrollar.

La presentación en el aula de las distintas propuestas se llevará a cabo a lo largo de una sesión completa. Se propondrá en cada caso, una introducción motivadora buscando atraer el interés de los estudiantes. Se plantearán temas de diversas índoles dentro del mundo que nos rodea, ya que somos conscientes de que los alumnos tienen diferentes intereses y motivaciones.

En esta introducción, se planteará que los trabajos se desarrollarán en pequeños grupos (de entre tres y seis alumnos, en función de las exigencias del trabajo en concreto que se vaya a desarrollar). A lo largo de los trabajos, se potenciará que los alumnos investiguen y realicen experimentos, para que constaten empíricamente la importancia que tienen las matemáticas en el ámbito de estudio. Consideramos que ambos aspectos son muy importantes de cara a que los alumnos comprendan la aplicación, la utilidad y el alcance que las matemáticas puedan tener en diversos campos.

Las finalidades que se persiguen con el desarrollo de estos trabajos se pueden clasificar en los dos apartados siguientes:

TRABAJOS COMO ACTIVIDAD COMPLEMENTARIA

Los trabajos que enmarcaríamos en esta categoría, son aquellos cuya carga de trabajo investigadora por parte de los alumnos, la extensión de los mismos, o la dedicación que requiere de los alumnos para su desarrollo, impliquen que se desarrollen fuera de las aulas. Se estima, que el desarrollo de estos trabajos tenga una duración de unos dos meses.

Estos trabajos podrán ir destinados a concursos programados por organizaciones externas al centro, como ha sido el “Concurso de las Matemáticas del Planeta Tierra” promovido por el imUVa. O como una propuesta del centro como actividad complementaria al normal desarrollo de la docencia en el aula. En este último caso, los trabajos podrían presentarse en un momento dado al resto del alumnado del curso que desarrolle la actividad, con algún tipo de compensación por su realización.

También son trabajos integrables en centros que disponen de Bachilleratos de investigación/excelencia. Estos Bachilleratos son una opción educativa dirigida a aquél alumnado que tenga interés en profundizar en los diferentes métodos de investigación y en el análisis de los problemas propios de cualquier investigación.

Estos trabajos deberán ser desarrollados por grupos de unos seis alumnos, quienes deberán organizarse para realizar el trabajo en grupo fuera del horario escolar. El profesor estará a disposición de los alumnos para dirigir el equipo y coordinar las tareas que deban ser realizadas.

Los objetivos didácticos que se persiguen con el desarrollo de estos trabajos, no se enmarcarían necesariamente en el currículo del curso al que pertenezcan los alumnos. Los conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del trabajo, podrían haberse visto en cursos previos, o ser considerablemente asequibles como para ser explicados expresamente para ese momento.

Sin embargo, en la Ley de Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, se incorpora un nuevo Bloque al currículo de Matemáticas denominado **Procesos, Métodos y Actitudes en Matemáticas**, en el que se podrían enmarcar los trabajos propuestos en esta sección. En este bloque, algunos de los contenidos que se incluyen son los siguientes:

- ✓ Elaboración y presentación oral y/o escrita de informes científicos sobre el proceso seguido en la resolución de un problema o en la demostración de un resultado matemático.
- ✓ Realización de investigaciones matemáticas a partir de contextos de la realidad o contextos del mundo de las matemáticas.
- ✓ Elaboración y presentación de un informe científico sobre el proceso, resultados y conclusiones del proceso de investigación desarrollado.

- ✓ Práctica de los proceso de matematización y modelización, en contextos de la realidad y en contextos matemáticos.
- ✓ Confianza en las propias capacidades para desarrollar actitudes adecuadas y afrontar las dificultades propias del trabajo científico. Utilización de medios tecnológicos en el proceso de aprendizaje

Estos trabajos serán siempre de carácter voluntario, pero tratando, en su introducción, que participe el mayor número posible de alumnos. Se realizará algún tipo de compensación para aquellos que quieran participar en esta actividad.

TRABAJOS INTEGRADOS EN LA DOCENCIA

Este tipo de trabajos se incluirán a lo largo de la práctica docente como introducción a los nuevos temas, fomentando la inquietud de los alumnos desde el comienzo de un nuevo tema. Consideramos que es muy conveniente introducir cada unidad con una propuesta motivadora para que los alumnos contextualicen los nuevos conceptos que se le van a introducir. En estos casos se partirá siempre de los conocimientos previos de los que dispone el alumno, ya sea de la misma materia como de otras disciplinas.

Se trata de trabajos más sencillos, realizables en la medida de lo posible en horas lectivas, o a lo sumo invirtiendo una tarde para la realización de experimentos o breves investigaciones. Para el desarrollo de estos trabajos los alumnos se agruparán en equipos de 2 o 3 alumnos, para que de esta manera todos participen activamente.

En este TFM, se plantean una serie de propuestas enfocadas, como ya se ha comentado, al segundo ciclo de la ESO y a Bachillerato. Las actividades propias de este tipo de trabajos integrados en la docencia, requerirán su adaptación en función del nivel al que finalmente vayan destinados.

Los objetivos didácticos perseguidos con el desarrollo de estos trabajos, serán los propios de la unidad a la que van a servir de introducción, a los que cabría añadir todos los objetivos genéricos que se presentan en el siguiente apartado.

1.4. OBJETIVOS

Los objetivos buscados en este Trabajo Fin de Máster son realizar una recopilación de temas y materiales para describir una serie de propuestas didácticas innovadora en el transcurso del desarrollo de la docencia de matemáticas.

En cada uno de los trabajos propuestos se persigue una serie de objetivos generales al margen de los objetivos didácticos que se buscan en cada uno de ellos:

MOTIVACIÓN Y ACERCAMIENTO A LAS MATEMÁTICAS

El principal objetivo de estos trabajos es conseguir motivar a los alumnos sobre la importancia que tienen las Matemáticas en diversos ámbitos de la vida. Atraer el interés de los estudiantes hacia esta disciplina a través de la observación y experimentación de su utilidad en diversas situaciones reales.

En el Decreto 42/2008 por el que se establece el Currículo de Bachillerato de la Comunidad de Castilla y León, se puede encontrar en su introducción y objetivos, constantes alusiones a enfocar la docencia de las matemáticas hacia situaciones cotidianas, de la vida real y con conexiones con otras ciencias:

*"Aunque se desarrollen con independencia de la **realidad física**, tienen su origen en ella y son de suma utilidad para representarla. Nacen de la necesidad de resolver problemas prácticos y se sustentan por su capacidad para tratar, explicar, predecir y modelar **situaciones reales** y dar rigor a los conocimientos científicos. Su estructura se halla en continua evolución, tanto por la incorporación de nuevos conocimientos como por su constante **interrelación con otras áreas**, especialmente en el ámbito de **la ciencia y la técnica**"*

*"1. Comprender y aplicar los conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones diversas que permitan avanzar en el estudio de las propias matemáticas y de **otras ciencias**, así como en la resolución razonada de problemas procedentes de **actividades cotidianas y diferentes ámbitos del saber**."*

"4. Apreciar el desarrollo de las matemáticas como un proceso cambiante y dinámico, con abundantes conexiones internas e ***íntimamente relacionado*** *con el de* ***otras áreas del saber****."*

APRENDIZAJE A TRAVÉS DEL DESARROLLO DE LOS TRABAJOS GUIADOS

Consideramos que el aprendizaje por descubrimiento guiado es una valiosa herramienta metodológica que no podemos desaprovechar, máxime en un área que se presta especialmente para ello. Además de adquirir conocimientos, se trata de fomentar la capacidad de resolver situaciones variadas, en las que por supuesto los conocimientos son básicos para afrontar las mismas, pero donde las estrategias utilizadas van a ser las determinantes para su resolución. La construcción personal de estrategias es una de los pilares del "aprender a aprender", trata de capacitar para resolver situaciones, siendo éstas de lo más variadas, y para ello va a ser determinante la metodología que se utilice en nuestras clases.

TRABAJO EN EQUIPO

Mediante el desarrollo de estos trabajos se persigue fomentar la dinámica de trabajar en equipo. Hoy en día las tendencias laborales y la necesidad de reducir costes, han motivado a las empresas a hacer uso de los equipos como forma de trabajo habitual. Alcanzar y mantener el éxito en las organizaciones modernas requiere talentos prácticamente imposibles de encontrar en un solo individuo.

Trabajar en equipo permite la integración de las actividades desarrolladas por los diferentes componentes del grupo. Para que el trabajo en equipo se desarrolle correctamente, es preciso que todos los alumnos se responsabilicen y compartan las tareas que se han de realizar. Es necesaria una buena coordinación para el desarrollo de las actividades. Así como una buena planificación para alcanzar, entre todos, el objetivo común.

Todos los integrantes del equipo deben saber que son parte de un grupo, por lo que para que el trabajo se desarrollo correctamente, los alumnos deben reunir las siguientes características:

- ✓ Ser capaces de establecer relaciones satisfactorias con el resto de compañeros. Debe existir una correcta cohesión entre los miembros del equipo.
- ✓ Ser leales consigo mismo y con los demás.
- ✓ Tener espíritu de autocrítica y de crítica constructiva.
- ✓ Tener sentido de responsabilidad para cumplir con los objetivos.
- ✓ Tener capacidad de autodeterminación, optimismo, iniciativa y tenacidad.
- ✓ Tener inquietud de perfeccionamiento, para la superación.
- ✓ En el equipo debe existir buena comunicación interpersonal para el correcto desarrollo de la tarea.

A todo lo anterior, cabría añadir que la experiencia nos ha mostrado que a los alumnos les gusta trabajar en equipo. Personalmente, a lo largo de mi experiencia en un instituto durante las prácticas, pude apreciar cómo cada actividad que se desarrollaba en pequeños grupos tenía una gran acogida por parte de los estudiantes.

PENSAMIENTO LÓGICO Y REFLEXIVO

En la enseñanza en general, pero especialmente en la docencia de matemáticas, consideramos que es necesario que el profesor se encargue de que el alumno sea capaz de pensar reflexivamente, de razonar y dejar de aprender mediante procesos repetitivos y mecánicos, que no inducen al pensamiento.

Nos gustaría prescindir en gran medida de procesos repetitivos, evitando aquellos cuya resolución es mecánica. De esta manera, se consigue que el alumno se aprenda las fórmulas, mecanice un método de resolución, lo memorice, realice númerosos ejercicios similares y finalmente acabe aprobando la materia. Si se sigue este proceso, no se estimula un pensamiento reflexivo. No se despierta en el estudiante la curiosidad y el que se pregunte para qué le sirve esa fórmula, cómo se ha obtenido el resultado, dónde se va a aplicar, qué podría crear él con ese conocimiento. Simplemente acepta una fórmula porque así lo dice su profesor, su libro o internet.

Consideramos que es tarea del profesor despertar la curiosidad de los alumnos, plantear conflictos cognitivos que favorezcan el pensamiento crítico y reflexivo del alumno.

Desarrollar un pensamiento lógico, implica el desarrollo del actividades secuenciales y relacionadas entre sí, hasta llegar a dar respuestas coherentes al planteamiento de un problema concreto.

UTILIZACIÓN DE MATERIALES Y RECURSOS SENCILLOS

Siendo conscientes de que actualmente cuesta renovar los equipos, vamos a tratar de emplear, siempre que sea posible, materiales y recursos sencillos.

El principal recurso que se va a necesitar para el desarrollo de estos trabajos es un ordenador con conexión a internet, con el que los alumnos puedan realizar las investigaciones necesarias para encontrar las soluciones a las actividades. Siempre que sea necesario, el instituto pondrá a disposición de los alumnos un aula de informática en la que puedan trabajar conjuntamente.

Así mismo, será necesario el uso de algún programa informático como GeoGebra que les permitirá obtener una visión considerablemente más clara de las actividades que están desarrollando.

El trabajo en grupo requiere en muchos casos de un espacio de trabajo en el que todos los integrantes del equipo puedan realizar una puesta en común del trabajo individual. Siempre que sea posible se tratará de que el centro facilite un lugar de trabajo fuera del horario lectivo.

EXPERIMENTACIÓN

No se trata solo de aprender, sino de comprender. La mejor forma de asimilar unos conocimientos es mediante la propia experiencia. Por este motivo, creemos que una buena práctica para motivar y conseguir nuestros objetivos, que no son otros que ayudar a que los alumnos comprendan las matemáticas, es mediante la experimentación personal.

Ya hemos comentado que a través de este trabajo se pretende fomentar el pensamiento reflexivo de los alumnos, una buena manera de que ellos mismos se hagan preguntas, es mediante la experimentación. Al margen de que la construcción de instrumentos o aparatos es de por sí una actividad motivadora para los alumnos, su manejo y experimentación les va a permitir descubrir empíricamente resultados que hasta el momento se daban por sentado. Es cierto que las demostraciones permiten asegurar que un resultado es cierto, sin embargo en la mayoría de los casos, los alumnos olvidan las demostraciones o simplemente no las prestan la atención suficiente.

Por todo ello, a lo largo del desarrollo de los sucesivos trabajos que aquí se presentan, se va a tratar que los alumnos puedan experimentar siembre que sea posible. Se va a fomentar la participación de todos los integrantes del grupo en las actividades que impliquen la experimentación.

Sin embargo, en algún ejemplo será razonable subdividir al grupo, y que cada uno de los subgrupos se dedique a una actividad, potenciando la posterior puesta en común de los resultados obtenidos por cada subgrupo.

INTRODUCCIÓN DE NUEVAS TECNOLOGÍAS

Actualmente nos encontramos inmersos en un mundo rodeado de tecnología. El mundo que nos rodea se ha transformado gracias a la tecnología, allá donde miremos se aprecia esta oleada tecnológica. No tiene sentido continuar con un sistema educativo tradicional, con unos recursos en las aulas tradicionales, ya que se trata de una metodología, hoy en día, obsoleta.

Es preciso incorporar a las aulas herramientas que mejoren la calidad de la enseñanza y favorezcan el interés y la participación de los estudiantes. En empleo de Tecnologías de la Información y Comunicación (TICS), en el seno de la enseñanza como elementos pedagógicos, permite aprovechar una amplia variedad de recursos.

Los jóvenes de hoy en día necesitan estar conectados a la red constantemente, no “pueden” dejar a un lado el teléfono móvil para mantener una conversación. Las nuevas tecnologías y las redes sociales le han restado protagonismo a nuestra presencia en vivo. La intriga que provoca la comunicación que obtenemos a través de Internet nos provoca una atención que las conversaciones en directo parecen ya no alcanzar.

Cada uno de los trabajos que en este documento se presentan, tratan, en la medida de lo posible, de incluir el uso de las nuevas tecnologías para su desarrollo. Se emplearán programas informáticos, de uso habitual en esta etapa educativa como es el programa GeoGebra. Se empleará este programa, ya conocido por los estudiantes para no incluir una carga adicional a la que ya supone el desarrollo en sí de los propios trabajos.

Tal y como plantea el currículo actual (Decreto 52/2007 de la ESO de Castilla y León)

El uso de la tecnología informática es, hoy en día, una necesidad en amplios espectros de la sociedad. En un futuro inmediato el desconocimiento de aspectos básicos de esta tecnología será causa de discriminación funcional en la vida cotidiana. De otra parte, dicha tecnología es en la actualidad un recurso didáctico de primer orden, que debe ser puesto a disposición de profesores y alumnos. Algunos contenidos del currículo de Matemáticas son el campo ideal para introducir, de forma motivada, métodos informáticos, pero teniendo en cuenta siempre que estos métodos son un medio y no un fin en si mismos.

La utilización de la calculadora y las herramientas informáticas permite proponer y resolver problemas de la vida real que, por la exigencia de cálculos engorrosos, estaban ausentes de la actividad matemática; además, estos recursos tecnológicos facilitan la búsqueda de regularidades numéricas y la formulación de conjeturas. También ofrecen un amplio campo para la formulación de nuevos problemas a partir de las potencialidades y limitaciones de estos recursos (operar con números que tienen más cifras de las que caben en la pantalla, dibujar figuras geométricas con distintos programas, analizar juegos de estrategia, etc.). Las tecnologías de la información y de la comunicación han de constituir una herramienta cotidiana en las actividades de enseñanza y aprendizaje del área de Matemáticas, como instrumento de trabajo para explorar, analizar e intercambiar información.

INVESTIGACIÓN

Creemos que es importante introducir a los estudiantes en la construcción de un conocimiento científico y profesional, alcanzable todo ello con la realización de pequeñas investigaciones. Se busca que el alumno indague sobre temas vinculados a los temas propuestos, aprendiendo a reflexionar y plantear dudas y cuestionamientos.

Entre los objetivos desarrollados en el Decreto 42/2008 de Castilla y León se encuentran alusiones a la investigación:

"3. Utilizar las estrategias características de la ***investigación científica*** *y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y* ***aceptación o rechazo de las conjeturas****, comprobación de los resultados obtenidos) para* ***realizar investigaciones*** *y en general* ***explorar situaciones y fenómenos nuevos****."*

"7. Mostrar actitudes asociadas al ***trabajo científico*** *y a la* ***investigación matemática****, tales como la* ***visión crítica****, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el interés por el trabajo cooperativo y los distintos tipos de razonamiento, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la* ***apertura a nuevas ideas****."*

2. PRESENTACIÓN DE LOS TEMAS PROPUESTOS

2.1. EL RELOJ DE SOL. Matemáticas tradicionales

El reloj de sol es un instrumento para muchos desconocido, y que para su comprensión requiere analizar los movimientos de rotación y de traslación de la Tierra, así como el efecto que produce la inclinación del eje de rotación de la Tierra respecto al plano del movimiento de traslación alrededor del Sol, y el debido a la forma de su órbita.

2.1.1. Descripción del tema

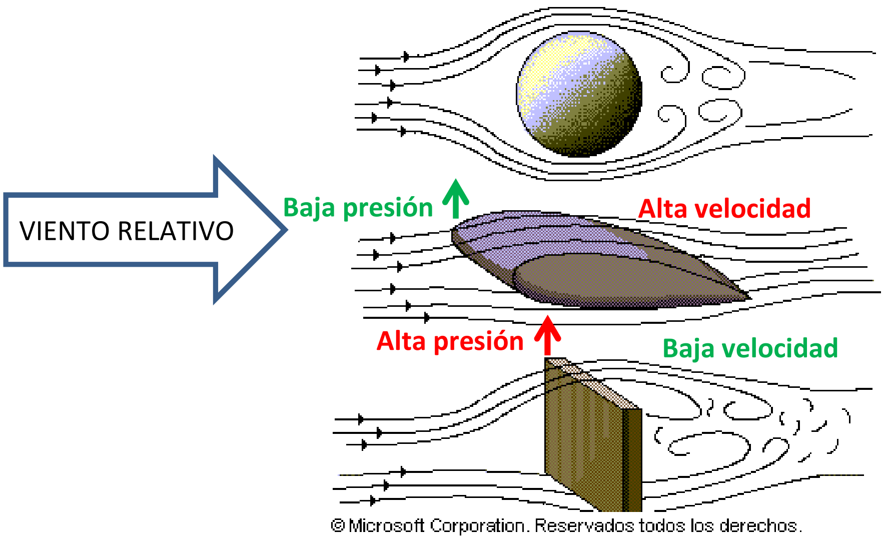
- ✓ A lo largo de este trabajo, se va a analizar los movimientos de rotación y traslación de la Tierra, los efectos que tienen sobre la evolución de las sombras y cómo se puede aprovechar para medir el paso del tiempo.
- ✓ Se va a determinar experimentalmente la dirección del polo Norte, para a continuación posicionar correctamente el reloj de sol construido. Se van a construir dos relojes de sol, uno previamente graduado y otro sin graduar para comparar la variación de los ángulos que va formando la sombra del estilete a medida que avanza el día (medición cada hora).
- ✓ Se analizará la relación entre la hora solar y la hora de un reloj mecánico en la misma localidad y en el mismo momento. Se expondrán los conceptos necesarios para comprender las diferencias existentes, debidas a la inclinación del eje de rotación de la Tierra, y a la forma de la órbita por la que se mueve la Tierra en el movimiento de traslación.

2.2. IMPORTANCIA DE LA AERODINÁMICA

El mundo del automovilismo se posiciona como uno de los mayores intereses de una parte de la sociedad. La forma de los coches ha ido evolucionando con el paso de los años. Uno de los motivos que influye en la evolución de la estética de los coches, es la búsqueda de mejorar su aerodinámica. Con este trabajo se va a analizar en qué consiste este concepto de aerodinámica, y la evolución que han ido sufriendo los coches con el paso del tiempo para mejorarla.

2.2.1. Descripción del tema

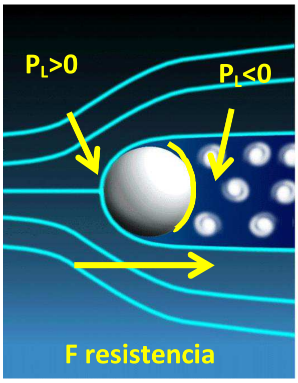
- ¿Qué es la aerodinámica? ¿Cómo se puede cuantificar la aerodinámica de los objetos? La aerodinámica consiste en estudiar la forma de los objetos, en este caso de los coches, para que el flujo del aire que rodea al elemento en su movimiento sea lo más provechoso posible. Cuando un objeto cruza el aire, lo divide como una cuchilla, y ese aire pasa dividido por ambos lados del objeto. Pues bien, la relación y las diferencias entre el aire de un lado y el aire del lado opuesto generan enormes fuerzas.

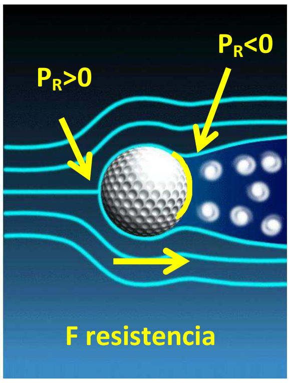


- Existen diversas fuerzas que influyen en la aerodinámica de un coche. La fuerza de sustentación (vertical), la fuera de resistencia aerodinámica (horizontal), y la fuerza lateral (que es la fuerza según la dirección perpendicular al plano de simetría del objeto). Para el estudio de la aerodinámica, se emplean coeficientes adimensionales que dependen de la forma del objeto, de las propiedades del fluido, o de la velocidad del objeto.

- En la evolución de los coches se puede apreciar la influencia de la aerodinámica como se puede apreciar en las siguientes imágenes:

- El estudio de los flujos laminares y turbulentos han sido muy útiles para el diseño de las pelotas de golf. La rugosidad de las pelotas de golf general un flujo de aire turbulento en su estela que permite un mayor avance de la bola frente a pelotas lisas.





- Estos resultados pueden extrapolarse a otros fluidos como es el agua. La hidrodinámica ha servido para mejorar, entre otras cosas, los cascos de los barcos. Alfio Quarteroni (director de la Cátedra de Modelización Computación Científica en el Instituto Federal de Tecnología de Suiza y director científico en el Laboratorio de Modelización y Computación Científica del Politécnico de Milán) en una entrevista realizada a El País plantea otra aplicación. *Cuando un nadador se sumerge en el agua lleva un bañador que, en función de su forma, ofrece más o menos resistencia a su movimiento. El problema es que el diseño óptimo de dicho traje de baño no es intuitivo. Uno podría pensar que para reducir la resistencia sería necesario ofrecer menos fricción al agua, pero al estudiar el problema más detenidamente vemos que la fricción no es lo más* *importante, sino la turbulencia que provoca el nadador en torno a sí mismo mientras nada. Lo necesario es un bañador que minimice dicha turbulencia.*

2.3. LAS MATEMÁTICAS Y LOS DEPORTES.

El deporte es un fenómeno social que atrae la atención del alumnado. Sus reglas, estrategias, movimientos, resultados y clasificaciones contienen muchos elementos matemáticos. En las diversas especialidades deportivas podemos encontrar variadas ocasiones para motivar a los estudiantes con situaciones que las matemáticas ayudan a comprender mejor.

2.3.1. Descripción del tema

- ✓ El movimiento parabólico se encuentra presente en multitud de deportes. Algunos de ellos implican el lanzamiento de pelotas o balones como son el baloncesto, futbol, tenis o golf. Sin embargo hay otros deportes en los que también se pone de manifiesto como el salto con pértiga o el lanzamiento de martillo. A lo largo de este trabajo se va a estudiar el lanzamiento parabólico desde un punto de vista experimental.

- ✓ En el ciclismo, es fundamental la preparación de la etapa previa a realizar la competición. Gracias al estudio de la altimetría, es posible analizar la variación de la pendiente de la carretera para encontrar estrategias a la hora de llevar a cabo la prueba.

- ✓ En las pruebas de atletismo es muy importante conocer la geometría de la pista para poder determinar la posición de salida de cada atleta, para compensar la diferencia de longitud de cada calle en las zonas curvas. En particular, nos centraremos en el estudio de la geometría de la pista para la prueba de atletismo de 400m.

- ✓ Mediante la experimentación, se analizará la geometría de un balón de futbol, realizando la construcción a partir de un icosaedro.

2.4. GLOBAL POSITIONING SYSTEM (GPS)

Hoy en día la mayoría de los alumnos tiene, o conoce la utilidad de un GPS, pero seguro que muy pocos, o incluso ninguno, entiende el funcionamiento de uno de ellos. Con este trabajo se pretende dar una visión matemática del funcionamiento de un GPS.

2.4.1. Descripción del tema

El sistema GPS (Global Positioning System) está compuesto por al menos 24 satélites orbitando alrededor de la Tierra. Cada satélite tiene un reloj, todos ellos perfectamente sincronizados entre sí. La posición de los satélites es conocida en todos los tiempos. Los satélites envían señales repetidas periódicamente. El receptor está equipado con un reloj y al menos cuatro canales, recibe las señales de al menos cuatro satélites, incluyendo las medidas, en su reloj, de los tiempos de tránsito de por lo menos cuatro señales. Sin embargo, el reloj del receptor, no tiene por qué estar necesariamente sincronizado con el reloj de los satélites, por lo que estos tiempos son tiempos de tránsito ficticios. Esto produce un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas: las tres coordenadas del receptor, y el desplazamiento de tiempo entre el reloj de los satélites y la del registro. Este sistema de ecuaciones tiene dos soluciones, una de las cuales es la ubicación real del receptor.

El GPS se utiliza en geografía para medir la altura de las montañas y medir su crecimiento. Se han utilizado para establecer la altura oficial del monte Everest y confirmar que efectivamente es la montaña más alta de la Tierra.

Un proceso de resolución es el siguiente:

1) El GPS envía una señal de radio al primer satélite y éste a su vez traza imaginariamente una esfera con centro en las coordenadas de S_1 (x_1, y_1, z_1) y radio d_1, y supone que el punto se encuentra en la superficie lateral de esta esfera (superficie azul de la imagen).

2) Luego el GPS envía una señal de radio al segundo satélite y éste traza una segunda esfera con centro en S_2 (x_2, y_2, z_2) y radio d_2 y determina que el punto

se encuentra dentro de la ***circunferencia*** (verde) que se forma de la intersección de las superficies laterales de las esferas S_1 y S_2.

3) Luego el GPS hace lo propio con el tercer satélite y éste traza una tercera esfera con centro en S_3 (x_3, y_3, z_3) y radio d_3 la cual, al interceptarla con la circunferencia ya encontrada nos dará dos posibles puntos como solución (A y P_0).

4) Por último el GPS manda una última señal al cuarto Satélite el cual trazará una cuarta esfera desde S_4 (x_4, y_4, z_4) y radio d_4 de donde se hallará el punto P_0 de coordenadas (x_0, y_0, z_0) con lo cual se encontrará así el punto buscado.

✓ El problema se reduce a calcular las distancias d_1, d_2, d_3, d_4, mediante una resolución vectorial. Además para determinar las distancias del GPS a los 4 satélites se usa una de las reglas del movimiento rectilíneo uniforme diferencial: $d_i = t \cdot c \pm \Delta$

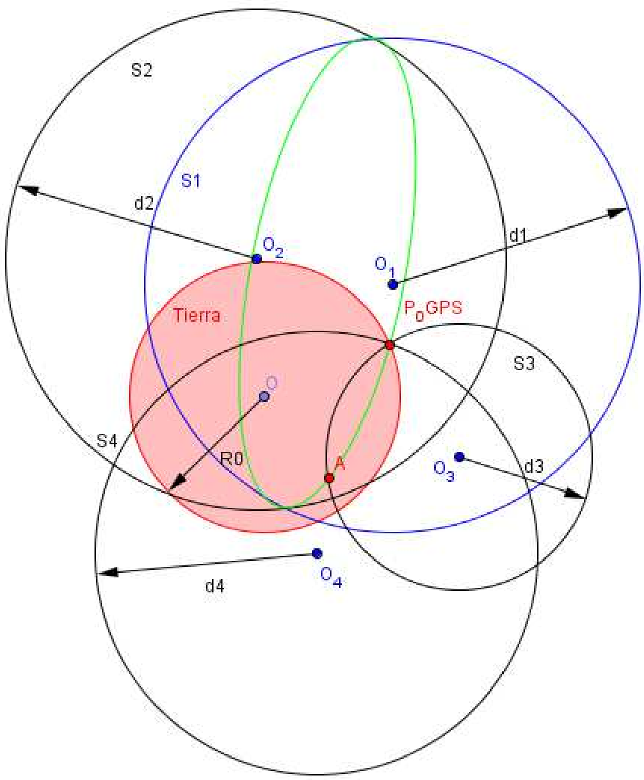
Donde

t = Diferencia del tiempo marcado por el reloj entre los puntos (tiempo de viaje de la señal)

c = Velocidad de las ondas electromagnéticas, en este caso de radio, que es la misma que la de la luz (c = 299.792.458 m/s).

Δ= Error que se admite ya que la señal no viaja en el vacío.

- ✓ **Experimentación**: Mediante el uso de programas informáticos como GeoGebra se realizará la representación de las esferas que crearía cada satélite y sus intersecciones.



2.5. LA EVOLUCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

La mayoría de los estudiantes tienen acceso a internet, ya sea a través de un ordenar, de sus teléfonos móviles o de tablets. La sociedad hace uso de internet, realiza búsquedas en Google, se entretiene con las redes sociales, sin plantearse cómo es posible que todo ello funcione. Y más aún, sin preguntarse qué matemáticas se esconden detrás de la pantalla de nuestro ordenador.

Las matemáticas, tal y como plantea Alfio Quarteroni (director científico en el Laboratorio de Modelización y Computación Científica del Politécnico de Milán), *tienen una gran aplicación en el campo de la medicina para ayudar a mejorar la calidad de vida de las personas; en concreto, para entender mejor las enfermedades del cerebro, como el alzhéimer. Tenemos que entender mejor la manera en que las neuronas trabajan y se comunican, lo que puede hacerse a través de modelos matemáticos para predecir también su evolución. Hay otra gran área en que podrían trabajar más, y son* *las catástrofes meteorológicas. Son muy difíciles de modelar y predecir por la enorme complejidad y estabilidad de los modelos que matemáticamente los representan, pero es un buen campo en el que desarrollar nuevas herramientas.*

2.5.1. Descripción del tema

- ✓ Las matemáticas no son una ciencia finita que ya se haya desarrollado completamente. A medida que avanzamos en el tiempo, hemos podido ver cómo las matemáticas han ido evolucionando. Actualmente nos encontramos en una situación en la que las teorías matemáticas existentes no permiten abordar completamente los problemas que se plantean.

- ✓ En este tema se propondrán actividades de investigación en las que se muestren brevemente la evolución de las matemáticas a lo largo del tiempo. Con la matemática clásica, se hacía uso de las matemáticas principalmente para resolver problemas físicos. Actualmente, con la llegada de internet y los buscadores como Google, entre otros campos, surgen nuevos retos para las matemáticas.

- ✓ El algoritmo que emplea Google en cada proceso de búsqueda, ha ido evolucionando con el paso del tiempo. El algoritmo original, se denominó PageRank y fue desarrollado por Larry y Sergey en Standford. El PageRank se basa en una serie de algoritmos matemáticos utilizados para asignar de forma numérica (por orden) la relevancia de las distintas páginas web que pueden indexar los motores de búsqueda.

- ✓ Para el cálculo del PageRanke de cada página, es necesario hacer un estudio matricial. En la tabla de doble entrada se asignará un 1 si una página está relacionada con otra y un 0 si no lo están, o hablamos de la misma página.

	Facebook	Wikipedia	Youtube
Facebook	0	1	1
Wikipedia	1	0	1
Youtube	1	1	0

El proceso consiste en tratar esta tabla como una matriz, y a partir de ahí calcular el vector que tenga por componentes es valor de PageRanke de cada página. Para ellos se lleva el problema a uno de autovalores y autovectores, cuya solución implica resolver un sistema de tantas ecuaciones e incógnitas como páginas se quiera relacionar en el problema de partida. Al realizar el proceso con millones de páginas, es preciso hacer uso de métodos numéricos para aproximar la solución.

- ✓ En este trabajo se plantea una limitación de las matemáticas y la necesidad que emplear aproximaciones y métodos numéricos para su resolución.

  En el siguiente vídeo se muestra el desarrollo matemático del algoritmo de Google. https://www.youtube.com/watch?v=FNjQ-itLuBY

2.6. OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA (AUTOBUSES DE VALLADOLID)

El medio de transporte más utilizado para los jóvenes en la ciudad de Valladolid es el autobús. Todos los alumnos conocen cómo funciona y cuáles son sus puntos fuertes y débiles. Sin embargo, ¿se habrá preguntado algún alumno cómo se diseña una línea de autobús? ¿Cuáles podrían ser los aspectos más influyentes a la hora de realizar este diseño?

2.6.1. Descripción del tema

- ✓ A lo largo de este trabajo se muestran una serie de problemas sencillos relacionados con cómo optimizar el diseño del trazado de una línea de autobús. Estos problemas se podrán resolver geométricamente haciendo uso de la programación lineal.

- ✓ Con este trabajo se pretende poner de manifiesto la utilidad de la programación matemática no solo para el problema de la optimización de los tiempos o los recorridos de una línea de autobús, sino también su aportación a la resolución de problemas de otras índoles. Algunos de estos problemas son la planificación de viajes, en los que sea necesario elegir qué medio de transporte me permite optimizar el trayecto o el coste.

2.7. FORMAS GEOMÉTRICAS EN TU CIUDAD

Los alumnos suelen criticar las matemáticas alegando que “no sirven para nada”, con este trabajo se pretende que los alumnos observen las matemáticas de su alrededor, de los aspectos cotidianos de la ciudad en la que viven.

2.7.1. Descripción del tema

Mi propuesta es realizar una excursión por la ciudad descubriendo aquellos aspectos en los que se ven reflejadas las matemáticas.

- ✓ Búsqueda de la geometría en las plantas y flores de Campo Grande.
- ✓ Análisis de la forma que describe el agua en su movimiento al salir de las fuentes.
- ✓ Análisis de los movimientos en el plano que podemos encontrar en los mosaicos de las Iglesias.
- ✓ Percatarse de la importancia que tienen las matemáticas en la sincronización de los semáforos, determinar las frecuencias más adecuadas de cada uno de ellos. Para todo ello es necesario hacer un estudio de los flujos de tráfico más importantes a lo largo del día, los puntos críticos, etc.
- ✓ La mayor parte de las alcantarillas son circulares, en vez de cuadradas o rectangulares. El motivo es su geometría, en el siguiente vídeo se aprecian algunos aspectos relacionados con el círculo en la ciudad:

2.8. ANÁLISIS DIMENSIONAL

Suele resultar costoso memorizar fórmulas o leyes físicas. Sin embargo, gracias al estudio dimensional somos capaces de deducir o verificar una determinada ecuación. Es preciso conocer las magnitudes fundamentales, (sus definiciones y unidades), en función de las cuales se puede expresar cualquier magnitud derivada. El análisis dimensional hace uso del hecho de que las dimensiones pueden ser tratadas como magnitudes algebraicas.

2.8.1. Descripción del tema

- ✓ Análisis de las magnitudes fundamentales. Las principales magnitudes fundamentales son: La masa, cuya unidad de medida en el Sistema Internacional es el kilogramo; El tiempo, cuya unidad básica es el segundo; la Longitud, que tiene por unidad en el SI el metro.

- ✓ Principio de homogeneidad de una ley física: Para que una ley física sea válida debe ser consistente dimensionalmente.

- ✓ A lo largo del trabajo se plantearán actividades como:

    - Se quiere conocer la ecuación que describe la velocidad de un cuerpo en caída libre. En primer lugar identifica las magnitudes que consideres que van a intervenir en este proceso. (parece lógico que dicha velocidad de caída dependa de la altura a la que se le deja caer, la fuerza que ejerce la gravedad, a lo que alumnos de secundaria puede que añadieran la masa del cuerpo). Plantear la ecuación dimensional y comprobar si todas las magnitudes que se habían propuesto ciertamente intervienen en el proceso.

    - La tercera Ley de Kepler implica una relación entre el período de un planeta (T), su radio (R), la constante G de gravitación de Newton (cuyas unidades son Nm^2/kg^2 y la masa del sol (M). Escribir la ecuación para que sea dimensionalmente correcta.

2.9. AEROGENERADORES

Una aeroturbina o aeromotor es todo mecanismo o ingenio que transforma la energía del viento en energía mecánica. A su vez, esta energía mecánica se puede transformar en otros tipos de energía haciendo uso de dispositivos especiales. De este modo podemos obtener energía eléctrica haciendo uso de un generador eléctrico a partir de la energía mecánica del rotor, y entonces denominamos al aparato conjunto que realiza esta transformación como **aerogenerador**.

2.9.1. Descripción del tema

- ✓ ¿Cuántas palas tiene un aerogenerador? ¿De qué depende tomar esta decisión? Existen diferentes configuraciones de turbinas eólicas: monopala, bipala, tripala, multipala. El aumento del número de palas disminuye la velocidad de rotación, aumenta el rendimiento y encarece el precio de estas turbinas. Turbinas con menos de tres palas extraen menos energía y son más ruidosos (debido a que las cuchillas deben girar más rápido). Los que tienen más de tres palas podrían capturar más energía, pero sólo alrededor de un tres por ciento más, lo que no justifica el aumento del costo.

- ✓ La Energía ni se crea ni se destruye, solo se transforma. Hasta los aeromotores más modernos, son incapaces de transformar el cien por cien de la energía que posee el chorro de aire que los atraviesa, pues han de obedecer las leyes físicas y termodinámicas. Por este motivo su rendimiento será siempre menor que la unidad. Pero, además, hay que señalar que en cuanto a extracción de la energía del viento hay otra limitación establecida por el límite de Betz.

- ✓ ¿Qué porcentaje de la energía eólica puede extraer una turbina? Cálculos y las leyes de conservación proporcionan la justificación para la ley de Betz, que establece que ningún aerogenerador puede capturar más del 60% de la energía en el viento. Las turbinas modernas extraen generalmente entre el 40-50%.

2.10. PRUEBA DEL CARBONO 14. DATACIÓN DE FÓSILES

Los paleontólogos, cuando descubren un fósil, son capaces de estimar cuántos años tenía el animal al que perteneció en el momento de su muerte. Gracias al desarrollo de este trabajo descubriremos cuáles son los modelos matemáticos que permiten conocer la edad de un fósil.

2.10.1. Descripción del tema

- ✓ El Carbono 14 es un elemento radiactivo que se encuentra en los seres vivos en la misma proporción que la existente en la atmósfera. Cuando los seres vivos mueren, dejan de renovar su carbono a partir de entonces decae, con una razón de 0,00012 por cada año que pase.

- ✓ Los elementos radiactivos en la naturaleza se desintegran con una tasa de variación constante. $P'(t) = k \cdot P(T)$. El alumno deberá deducir cuál sería la expresión que determina la cantidad de elemento presente en un instante: $P(t) = C \cdot e^{kt}$.

- ✓ Si se denomina P_0 a la cantidad de elemento existente en el instante de la muerte (momento que consideraremos que empieza a contar el tiempo), deducir la expresión de la cantidad de Carbono 14 existente en un fósil en función del tiempo:
  $P(t) = P_0 \cdot e^{kt}$, donde k es la razón con la que disminuye el elemento en un fósil.

- ✓ La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo necesario para que una cantidad de ese elemento se reduzca a la mitad. Algunas de las actividades que se propondrán a los alumnos serán:

  - En 1947 se descubrió Lascaux, Francia, una cueva con pinturas murales prehistóricas. Se encontró un trozo de carbón de madera que contenía un 20% de carbono 14 que hay en los seres vivos. ¿Cuántos años tienen esas pinturas?

  - Una isla del Pacífico está contaminada por residuos de una explosión nuclear. Si el estroncio 90 es 100 veces el nivel que los científicos consideran seguro, es decir, 100 S siendo S el valor seguro. ¿Cuántos años deberán pasar para que la isla sea nuevamente segura para la ocupación humana? La vida media del estroncio 90 es de 28 años.

2.11. CÁLCULO EXPERIMENTAL DE PÉRDIDAS DE CARGA

La presión que tiene un fluido, va disminuyendo a medida que pasa a través de una tubería. Cuando se va a diseñar una instalación, es necesario conocer las pérdidas de presión que supone cada uno de los elementos que componen la tubería para asegurar que al final del trayecto, por ejemplo en un grifo de tu casa, el fluido llegue con la presión deseada.

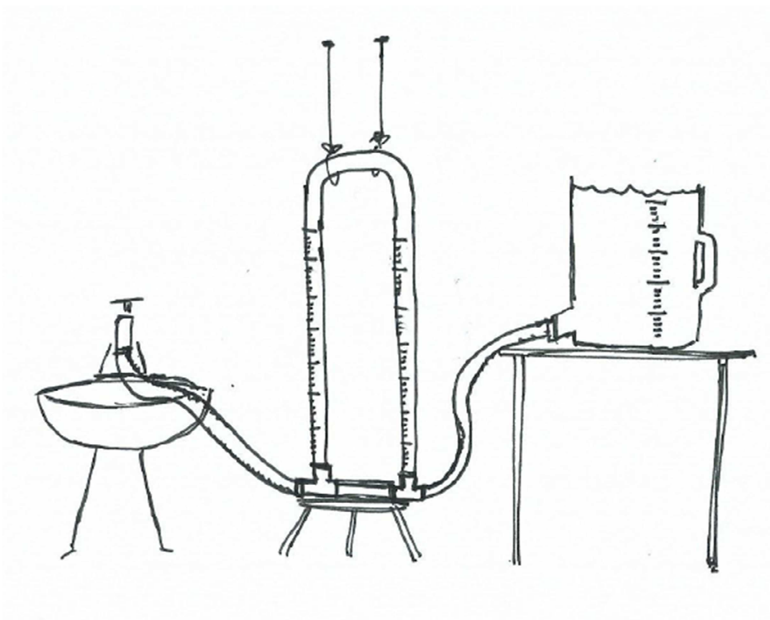
2.11.1. Descripción del tema

- ✓ Todos los elementos que se puedan colocar en una tubería de una instalación, produce una diferencia de presión (pérdida de carga) entre los puntos situados aguas arriba y abajo del elemento. Experimentalmente se demuestra que esta caída de presión, es directamente proporcional a cuadrado del caudal que circula por ella. $dP = P_E - P_S = k \cdot Q^2$

- ✓ Un filtro es uno de los elementos que producen pérdidas de carga en una instalación. El diseñador de la instalación, a la hora de solicitar a un fabricante un filtro, le pregunta por la curva que relaciona la caída de presión producida con el caudal que fluye por la tubería. Habitualmente, cada elemento dispone de una tabla con los coeficientes de pérdidas en función del caudal, sin embargo hay ocasiones en que estos datos no están tabulados y es preciso calcularlos experimentalmente.

- ✓ Una de las actividades que se propondrán en el desarrollo de este trabajo será el cálculo experimental de la perdida de carga producida por una pinza que estrangula un conducto por el que circula agua.

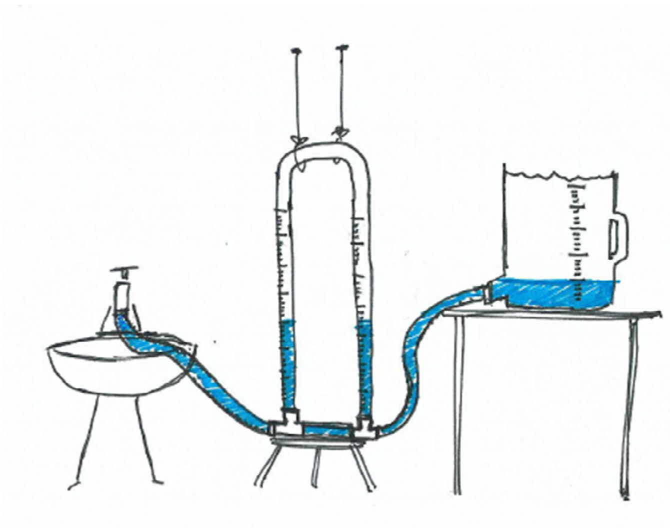
    - Los materiales necesarios son: una manguera transparente que conectaremos a un grifo y que descargará el agua en un depósito con una graduación para medir su volumen. A lo largo de la manguera se realizarán dos perforaciones en las que colocaremos dos T para unir en ella otro trozo de manguera graduada en forma de U tal y como se muestra en la siguiente figura. En esta situación ambas mangueras se encuentran llenas de aire y a presión atmosférica.



- Una unidad de medida de la presión es el *metro de columna de agua*. Este medida de presión de un fluido, en este caso de agua, se calcularía como $P = \rho g h$ donde ρ es la densidad del agua (1000 kg/m^3), g es la aceleración de la gravedad (9,8 m/s^2), y h la altura de la columna de agua (en metros). (Comprobar analizando las unidades que ambos lados de la igualdad son coherentes dimensionalmente hablando).

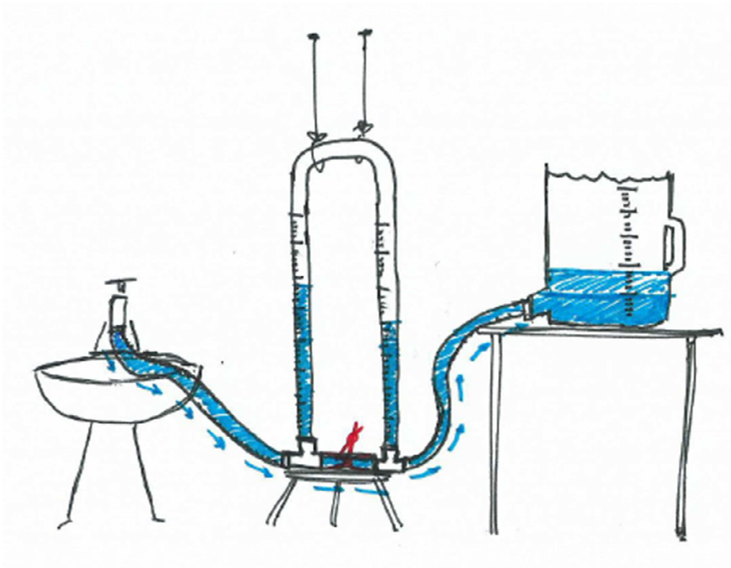
- Se realizará un primer llenado de agua, con el grifo a baja presión, hasta que el agua llegue a la marca realizada en el depósito que indica el inicio de la medición de volumen. Lo que se podrá observar experimentalmente, es que a medida que llenamos la manguera, el agua va a ascender a través de la U por ambos picajes generando una burbuja de aire en su interior. Esta burbuja de aire sufrirá una disminución de su volumen a medida que aumenta su presión siendo por tanto superior a la presión atmosférica. Cuando el agua llegue a la marca del depósito y el sistema quede en equilibrio, podremos observar que la altura del agua a través de la U es la misma por ambas entradas. El significado es que en una situación de fluidoestática, la presión de ambos puntos es la misma. Además la altura alcanzada por el agua en la U será menor que el nivel del depósito, por encontrarse éste a presión atmosférica y el aire comprimido en el interior de la U a mayor presión.

$$\left.\begin{array}{l} P_A = \rho g h_A \\ \\ P_B = \rho g h_B \end{array}\right\} si \;\; h_A = h_B \rightarrow \; P_B = P_A$$



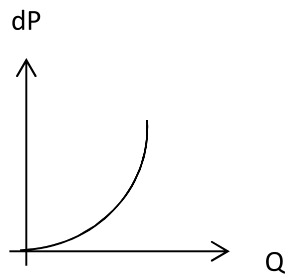
- A continuación se colocará una pinza en medio de los dos picajes, que realice un pequeño estrangulamiento en la manguera pero sin llegar a bloquearla. El siguiente paso consiste en abrir el grifo, una parte del grupo medirá el caudal y la otra la caída de presión debido a la presencia del estrangulamiento. La <u>medida del caudal</u> se realizará anotando qué volumen se llena en el depósito a lo largo de un minuto. La <u>medida de la caída de presión</u> se realizará midiendo la diferencia de altura a la que se encuentra el agua en ambas patas de la U. En este caso, el punto B tendrá menor presión que el punto A y por tanto la altura a la que llega el agua en este punto será mayor que la que existe en el punto B.

$$dP = P_A - P_B = (P_{aire} + \rho g h_A) - (P_{aire} + \rho g h_B) = h_A - h_B$$



- Repetir el proceso variando la posición del grifo para generar una tabla con los datos de cuatro caudales y pérdidas de presión diferentes. A continuación representar gráficamente los datos obtenidos, ésta es la gráfica solicitada por el diseñador de la instalación. Se puede observar que la gráfica obtenida es una parábola. Posteriormente calcular el coeficiente de pérdidas (k) del estrangulamiento.

dP (bar)	**Q (m^3/min)**	**k**
dP_1	Q_1	
dP_2	Q_2	
dP_3	Q_3	
dP_4	Q_4	



3. DESARROLLO DIDÁCTICO DE TEMAS PROPUESTOS

A lo largo del desarrollo de cada uno de los temas, se va a perseguir, en todo momento, la participación de los alumnos que constituyen el grupo de trabajo mediante el guiado del profesor. Para ello, la práctica docente se va a basar en preguntas directas a los alumnos buscando en sus respuestas el desarrollo de un razonamiento lógico.

3.1. EL RELOJ DE SOL. Matemáticas tradicionales

3.1.1. Objetivos didácticos de este tema

Mediante el desarrollo de este tema, se persiguen una serie de objetivos didácticos:

- ✓ Relación interdisciplinar: mediante el desarrollo de este trabajo, se pone de manifiesto la importancia de las matemáticas en otras disciplinas como es en este caso la astronomía. Así mismo se puede observar la íntima relación que existe entre las matemáticas y la medida del tiempo.
- ✓ Los alumnos van a poder poner de manifiesto el papel que han realizado las matemáticas a lo largo de la historia en los temas que tratamos, como por ejemplo cómo empleando matemáticas elementales se pudo realizar la primera aproximación del radio Terrestre.
- ✓ A través de las actividades los alumnos van a ir deduciendo cómo fueron surgiendo las diferentes medidas del tiempo a lo largo de la Historia, en función de las observaciones que iban realizando.
- ✓ Mediante la experimentación, van a poder apreciar los aspectos de influyen en la construcción y colocación de un reloj de sol.

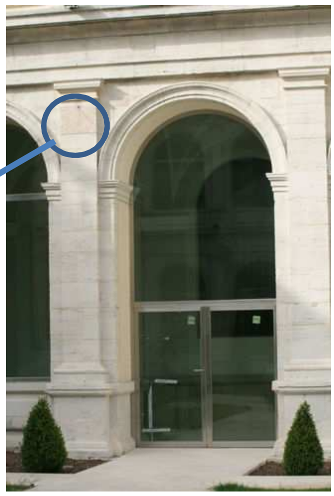
3.1.2. Introducción motivadora

Seguro que todos los alumnos han visto en alguna ocasión un reloj de sol. En Valladolid capital podemos encontrar varios. Se puede apreciar cómo existe gran diversidad, unos se encuentran situados en el suelo, otros en paredes, según la orientación de la pared tiene una u otra forma, a continuación se muestra algunos de los relojes de sol que podemos encontrar en Valladolid:

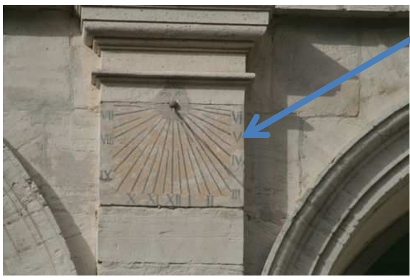
1) Monasterio del Prado: Reloj de sol (izquierda) y reloj de luna (derecha)

2) Parquesol

3) Los Santos, Pilarica



4) Monasterio de Agustinos Filipinos



¿Alguna vez os habéis fijado en la hora marcada por un reloj de sol? ¿La habéis comparado con la que muestra vuestro reloj mecánico? Si lo habéis hecho, habréis comprobado que las horas no coinciden, esto de debido a que en general, los relojes de sol proporcionan la hora solar, que difiere de la hora oficial que muestran nuestros relojes. Al finalizar este trabajo seremos capaces de conocer la hora oficial a partir de la hora solar.

A lo largo del desarrollo de este trabajo, vamos a descubrir las matemáticas que se ocultan tras la construcción de un reloj de sol.

3.1.3. Desarrollo del tema

<u>Actividad 1</u>: Si a lo largo de este trabajo queremos construir un reloj de sol, nos tenemos que realizar una serie de preguntas antes de comenzar, como por ejemplo: ¿Cómo funciona un reloj de sol? ¿El sol se encuentra siempre en la misma posición respecto de Valladolid? ¿Qué provoca el aparente movimiento del Sol? ¿La altura a la que se encuentra el Sol varía a lo largo del año? ¿A que es debida esta variación? ¿Qué podemos decir acerca de los periodos de luz y de oscuridad a lo largo del día? ¿Cómo evolucionan estos periodos a lo largo del año? ¿Qué causa la variación de las sombras de los objetos durante el día? Debate sobre cuáles creen que son los factores más influyentes en el funcionamiento de un reloj de sol.

Mediante esta actividad se espera que los alumnos lancen una tormenta de ideas sobre la percepción que ellos tienen, a pripori, sobre el funcionamiento de un reloj de sol. De esta manera se observará los conocimientos previos que tienen los alumnos en relación con este tema, para, partiendo de ellos, poder desarrollar el tema acorde con el nivel del grupo.

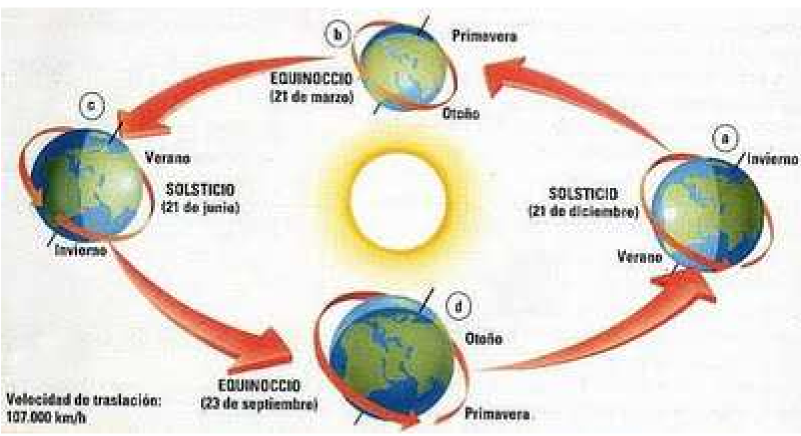
Con estas preguntas se pretende que los alumnos sean capaces de analizar que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, o el aparente movimiento del Sol entorno a la Tierra provoca variaciones en la luminosidad que recibimos. Se pretende poner de manifiesto la influencia que tiene sobre la formación de las sombras el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, así como la importancia de la forma de la órbita del movimiento de traslación, y la situación del Sol en la misma.

El reloj de sol es un instrumento empleado para medir el paso de las horas. Está formado por una superficie con una escala (cuadrante) y un estilete (o gnomon) situado en el centro de la superficie, se emplea la sombra producida por el gnomon para indicar la posición del Sol.

En primer lugar, notamos que durante un día cualquiera existe un periodo de luz y otro de oscuridad. Se puede observar que a lo largo de los días más fríos los periodos de luz se acortan mientras que en los días más cálidos, los periodos luminosos aumentan. Además, en los meses de invierno se observa cómo el arco que recorre el Sol en su aparente movimiento es más pequeño que en el resto de meses. En el ecuador, los días duran prácticamente lo mismo a lo largo de todo el año.

Las variaciones de la duración de los periodos de luz y de oscuridad son el resultado del movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol. En su movimiento, la inclinación de su eje permanece constante en relación con el plano de su órbita, que es aproximadamente elíptico, situándose el Sol en uno de sus focos. La inclinación (η=23,5°) del eje de la Tierra en relación con el plano de su órbita alrededor del Sol y la forma elíptica de dicha órbita, son los causantes de la variación de la altura a la que se encuentra el Sol.

Además se puede observar cómo la sombra de cualquier objeto va variando a medida que pasan las horas, la sombra se acorta hacia el medio día, y se alarga hacia el atardecer.



LAS MATEMÁTICAS Y LA ASTRONOMÍA

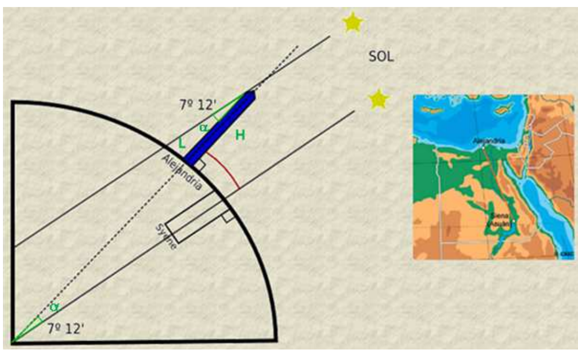
Con la actividad anterior, se ha puesto de manifiesto la relación que existe entre la posición relativa entre la Tierra y el Sol para el funcionamiento de un reloj de sol, por tanto, se observa una relación con la Astronomía.

En efecto, la relación que existe entre la Astronomía y las Matemáticas se remonta a muchos años antes de Cristo. A continuación se plantea una actividad que muestra un ejemplo de esta relación:

Actividad 2: Para el cálculo de la primera aproximación del radio de la Tierra, no fue necesario ningún tipo de instrumento, simplemente se empleó la sombra producida por una vara y matemáticas elementales. ¿Cómo pensáis que pudo realizarse esta medida en el s. III a.C.? Este cálculo fue realizado por Eratóstenes, director de la Biblioteca de Alejandría. Para la resolución de este problema, entre otras cosas necesitó conocer la distancia que existía entre Alejandría y Siena, para ello, contrató a un hombre para que midiese a pasos la distancia entre ellas. Realiza una investigación sobre la primera aproximación para calcular el radio de la Tierra.

A la hora de realizar esta pequeña investigación, se espera que los alumnos descubran cómo Eratóstenes (276 - 194 a.C.), empleando únicamente la geometría elemental, calculó de una forma asombrosamente aproximada la medida del radio de la Tierra.

Eratóstenes estando en la Biblioteca encontró un informe sobre observaciones realizadas en la ciudad de Siena, situada a 800 Km. al sur de Alejandría. En este informe, se indicaba que a mediodía del día del solsticio de verano (21 de Junio), los objetos no producían sombra. El motivo de esta afirmación, es que la ciudad de Siena se encuentra situada sobre la línea del Trópico, (en realidad a 33’ al Norte del Trópico de Cáncer).



Eratóstenes observó que en Alejandría, en el mismo momento del solsticio de verano los objetos sí que producían sombras.

Asumió que el sol se encuentra a gran distancia de la Tierra, y que la trayectoria de sus rayos al incidir en la Tierra podían considerarse paralelos.

A continuación calculó el ángulo que formaban los rayos del sol con la vertical en la ciudad de Alejandría. Tal y como se observa en la imagen anterior, por construcción este ángulo corresponde con el ángulo cuyo vértice se encuentra en el centro de la Tierra, y pasa por ambas ciudades:

$$\alpha \cong tg(\alpha) = \frac{L}{H} = 7^\circ\, 12'$$

Teniendo en cuenta que la distancia entre Alejandría y Siena era de 800 Km. obtuvo que la **longitud de la circunferencia** de la Tierra fuera:

$$Longitud = 360^\circ x \frac{800\ Km}{7{,}2^\circ} = 40.000\ Km$$

Con lo que el **radio** de la Tierra sería de: $\boxed{R = {}^{40.000}/_{2\cdot\pi} = 6.366\ Km}$ frente a los 6.371 Km. aceptados hoy en día.

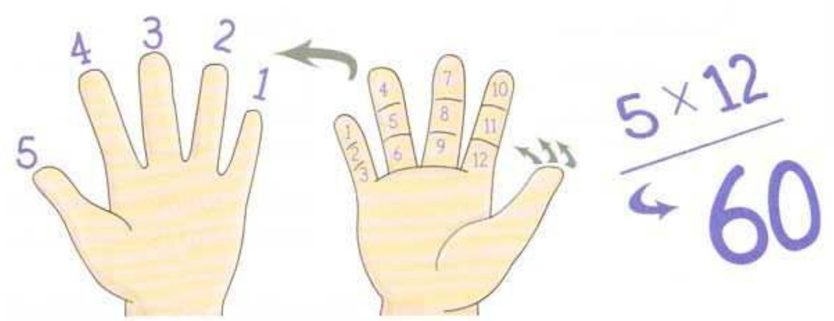
<u>**LAS MATEMÁTICAS Y LA MEDIDA DEL TIEMPO**</u>

A partir de este punto, el objetivo va a residir en guiar a los alumnos a que deduzcan el funcionamiento del reloj de sol. Para ello se va a partir del origen de la medida del tiempo, avanzando paso a paso hasta llegar a su construcción experimental.

<u>Actividad 3</u>: ¿Cómo se ha dividido el tiempo a lo largo de la historia? Actualmente sabemos que existen años, meses, días u horas, pero ¿qué unidad de tiempo creéis que fue la primera en surgir? ¿Cómo pensáis que fueron surgiendo el resto a partir de la primera? Por ejemplo, cuando se tuvo que dividir la hora en unidades de tiempo más pequeño, se hizo uso de la base sexagesimal, dividiendo cada hora (o grado) en 60 minutos. Muchos años después llegó la división del minuto en 60 segundos.

El origen de la base decimal, la base duodecimal y la base sexagesimal fue el siguiente:

Es necesario remontarse a una época ágrafa en la que se contaba con los dedos. Si extendemos la palma de la mano derecha y contamos con el dedo pulgar cada una de las tres falanges de los dedos meñique anular corazón e índice, al acabar la cuenta tendremos 12 unidades, en lugar de las cinco obtenidas de contar exclusivamente los dedos. Si a cada 12 unidades asignamos un dedo de la mano izquierda, habremos obtenido 60 unidades al acabar la cuenta, con lo cual únicamente con 10 dedos tenemos la posibilidad de designar biunívocamente hasta 60 objetos con sólo señalar los dedos correspondientes de la mano izquierda, y la falange determinada de un dedo de la mano derecha. La base duodecimal y la sexagesimal quedan establecidas.



La medición del tiempo está íntimamente relacionada con los movimientos de la Tierra y lo que ello supone, las sucesivas apariciones y desapariciones de la Luna y el Sol.

Los hombres, en la Antigüedad, ya se percataron de que existían intervalos de luz y de oscuridad, y que si bien estos intervalos no tenían la misma duración, la suma de dos periodos de luz y oscuridad consecutivos permanecía prácticamente constante. De esta manera surgió la división del tiempo en días.

Además, habían observado, que la Tierra tardaba en dar una vuelta alrededor del Sol 365 días, a esta unidad de tiempo la denominaron año.

Ya se sabía que la Luna tarda 29 días y medio (aproximadamente 30 días) en dar una vuelta alrededor de la Tierra, y observaron que esto ocurría 12 veces al año. De esta manera se dividió el año en 12 unidades temporales, y cada una de ellas en 30 días obteniendo un año de 360 días. El año lunar (360 días aproximadamente) no se correspondía con el año solar (365 días aproximadamente) por lo que había cuatro días al año en los que reajustar el calendario. El círculo de 360 grados, lo dividieron en

12 sectores (signos del Zodiaco) de 30 grados cada uno. Dividieron el día en 12 horas, que posteriormente se convirtieron en 24 (12 para el día y 12 para la noche).

RELOJ SOLAR ECUATORIAL

Existen diversos tipos de relojes de sol, los más usuales son los de cuadrante horizontal y los de cuadrante vertical. En nuestra localidad, como ya hemos comentado, la duración entre los periodos de luz y de oscuridad no son los mismos a lo largo del año por lo que para que la construcción resulte más sencilla de entender, emplearemos un reloj de sol de cuadrante ecuatorial, lugar en el que prácticamente todos los días la duración de los periodos de luz y de oscuridad permanecen constantes, y las horas solares tienen la misma duración independientemente del día del año escogido.

Los relojes de sol de cuadrante ecuatorial se caracterizan porque el estilete debe estar inclinado (respecto de la horizontal) un ángulo igual a la latitud del lugar en el que nos encontremos, con lo que le estaremos posicionando paralelo al eje de rotación de la Tierra. Además en este tipo de relojes, el dial (o cuadrante, o superficie sobre la que mediremos el paso del tiempo) ha de ser perpendicular al estilete con lo que será paralelo al plano del ecuador. En estas circunstancias, cada hora que pasa implica que el desplazamiento angular de la sombra a través del dial permanezca constante a lo largo del día.

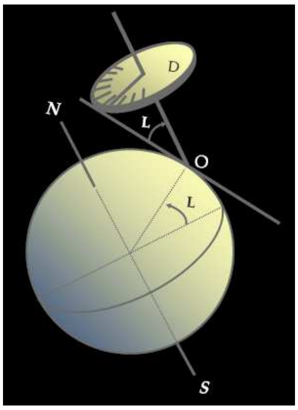
En el caso de los relojes verticales u horizontales, el paso de las horas no implica un avance angular uniforme a lo largo del día, sino que en las horas centrales las marcas se encuentran más juntas que en el resto de las horas del día. Su construcción, consiste en la proyección de las marcas que indican las horas en un reloj de cuadrante ecuatorial sobre el plano vertical u horizontal.

Actividad 5: En la situación anterior, ¿cómo deberían ser las marcas que debemos realizar en el cuadrante?

Como el estilete es paralelo al eje de rotación de la Tierra sobre sí misma, a lo largo de un día lo que va a ocurrir es que el Sol, en su movimiento aparente visto desde la Tierra, realice una rotación de 360° alrededor del estilete durante 24 horas. Si esos

360° les dividimos por las 24 horas, obtendremos que cada hora el Sol gira 15°, y también lo hará la sombra del estilete (15°/h) sobre el cuadrante.

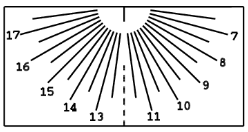
<u>Actividad 6</u>: Esta actividad consiste en construir un reloj de sol ecuatorial, marcando el paso de las horas experimentalmente para corroborar que efectivamente se encuentran distanciadas 15° las unas de las otras. El primer paso para su construcción será conocer la latitud de Valladolid.



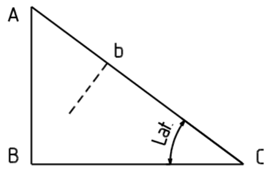
Para conseguir que la superficie del reloj sea paralela al plano del ecuador, tenemos que conocer la latitud del lugar en el que vayamos a colocar el reloj de sol. Una vez que conozcamos la latitud, colocaremos el estilete inclinado tantos grados como indique la latitud, y el cuadrante deberá colocarse perpendicular a él.

En el caso de Valladolid, la latitud es de 41,65°.

6.1. Construcción de dos relojes de sol, uno graduado y otro sin graduación. Para ello se seguirán las siguientes indicaciones. Para la realización de esta actividad se seguirá parcialmente la propuesta realizada por el departamento de física y química del IES Gaviota:

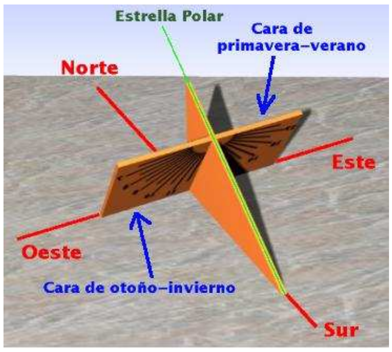


Para la construcción del cuadrante recortaremos en un cartón un rectángulo cuyo lado mayor sea el doble del lado menor. En el punto medio del lado mayor se realizará una ranura de longitud igual a la mitad del lado menor (línea punteada). Realizaremos otro cuadrante en el que graduaremos la superficie plana con marcas separadas 15° entre ellas.



Realizaremos dos estiletes. Para que la construcción y posterior empleo de lo relojes del sol resulte sencillo y práctico, les construiremos en forma de triángulo rectángulo, siendo el ángulo opuesto al vértice A, el correspondiente a la latitud a la que nos encontremos. Además la altura del triángulo sobre el lado $\overline{AC}$ (es decir la longitud $\overline{Bb}$) deberá medir lo mismo que el lado menos del cuadrante. Finalmente realizaremos una ranura en el segmento $\overline{Bb}$ partiendo de b y con longitud igual a la mitad del lado menor del cuadrante, con la finalidad de ensamblar ambas piezas. Al haber realizado la ranura del estilete siguiendo una altura del triángulo, aseguramos que al ensamblar las piezas una sea perpendicular a la otra.

Para finalizar, una vez construidas las dos piezas que formarán cada uno de los relojes de sol, deberemos ensamblarlas. Como nos encontramos en el hemisferio Norte, deberemos situar el estilete de cada reloj con el vértice A apuntando al Norte, tal y como indica la figura.

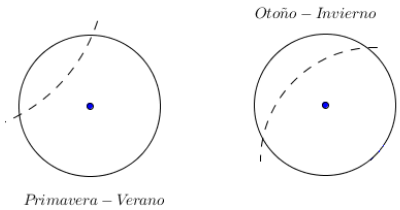


6.2. Un reloj de sol de cuadrante ecuatorial, el estilete debe estar orientado hacia el polo Norte (es decir, situado a lo largo del meridiano del lugar). Para conocer la posición exacta del polo Norte no podemos hacer uso de una brújula, ya que ésta nos indica la posición del polo Norte magnético, que dista considerablemente del polo Norte Real. Por ello esta actividad va a consistir en descubrir por dónde pasa el meridiano de Valladolid. Para el desarrollo de esta actividad habrá que seguir los siguientes pasos:

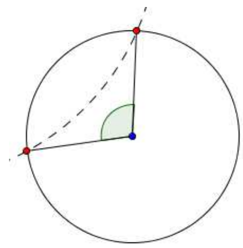
El Meridiano del Lugar, en nuestro caso Valladolid, nos marca el instante en el que son las 12 horas solares o mediodía. En este momento el Sol se encuentra en su posición más alta del horizonte. Además, señala la exacta dirección Norte-Sur. Los pasos a seguir serán los siguientes:

- Ir a un lugar bien llano. Preferentemente sin sombra durante la mayor parte del día.
- Sobre un papel blanco, en el que se ha trazado previamente una circunferencia de radio cualquiera, se clava una varilla vertical en el centro de la circunferencia.

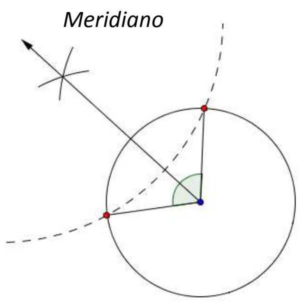
- Durante el transcurso de un día, el final de la sombra de la varilla sobre el suelo describe una curva como la que se muestra en la figura, se irá marcando en la hoja de papel esta trayectoria en intervalos de una hora. Finalmente se realizará una marca que indique los cortes de la trayectoria de la sombra con la circunferencia.



- A continuación se traza el ángulo que forma el punto donde se ha clavado la varilla al suelo (centro de la circunferencia), con los puntos en que la sombra del final de la varilla corta a la circunferencia.



- Se traza la bisectriz del ángulo. Esa línea corresponde al meridiano del lugar.
  El instante en que la sombra de la varilla pasa por el meridiano, son las 12 horas solares.

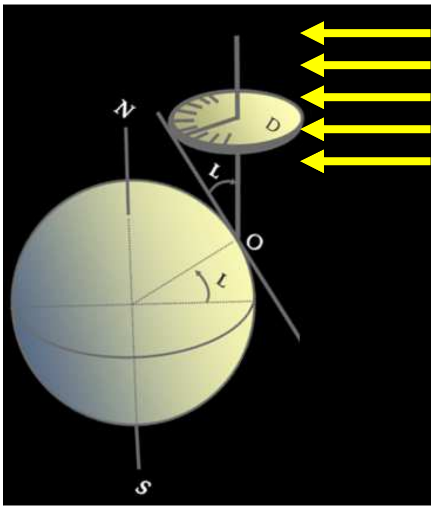


Una vez analizada la geometría que debe tener el reloj de sol de cuadrante ecuatorial, se darán unas aclaraciones sobre el movimiento de la Tierra para la correcta comprensión del funcionamiento del reloj de sol.

Debemos tener en cuenta, que debido a que el eje de rotación de la Tierra, en su movimiento de traslación, mantiene siempre su dirección hacia el Polo Norte (coincidiendo aproximadamente con la estrella Polar), y está inclinado 23°27’ respecto del plano de la órbita de traslación de la Tierra alrededor del Sol, el ángulo de incidencia de los rayos del Sol varía en función del momento del año en el que nos encontremos.

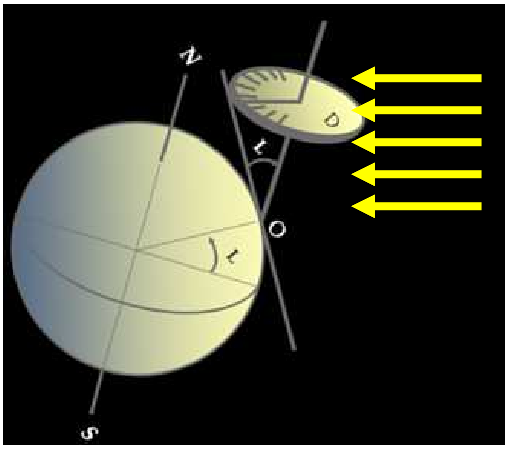
Vamos a distinguir tres situaciones diferentes que se dan a lo largo del año, teniendo en cuenta que nos encontramos en el hemisferio norte.

Equinoccio de primavera y de otoño.



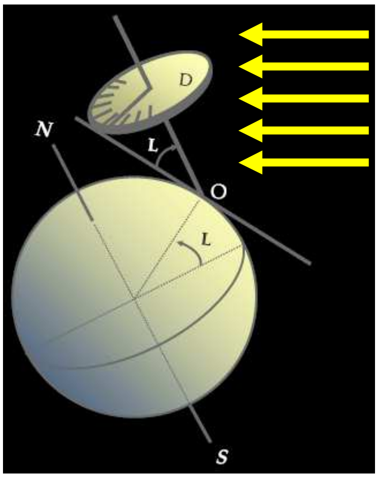
En estos dos días, los rayos del Sol inciden en la Tierra paralelos al plano del ecuador. Por tanto, fijándonos en nuestro reloj de sol, en estos días no se proyectará sombra sobre la superficie, y por tanto no podremos hacer uso del reloj. Estos dos días nos indicarán la entrada de la primavera y del otoño.

Durante primavera y verano



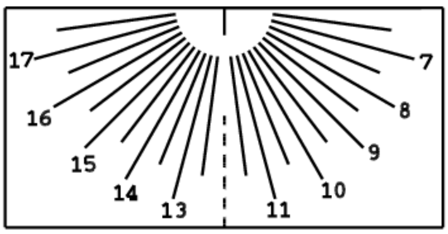
En el solsticio de verano los rayos del Sol inciden sobre la Tierra con un ángulo de 23°27' respecto al plano del ecuador. Desde el equinoccio de primavera hasta el de otoño, es decir, durante la primavera y el verano, la sombra del estilete se proyecta sobre la cara superior del cuadrante. La cara inferior permanecerá a la sombra.

Durante otoño e invierno

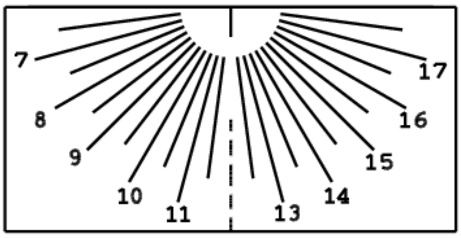


En el solsticio de invierno con un ángulo de 23°27' respecto al plano ecuatorial. Desde el equinoccio de otoño hasta el de primavera, es decir, durante el otoño y el invierno, la sombra del estilete se proyecta sobre la cara inferior del cuadrante, quedando la superior a la sombra.

Una vez realizadas estas aclaraciones, observamos que es necesario graduar el cuadrante por ambas caras, para así poder hacer uso del reloj de sol en todas las estaciones del año. Por tanto la graduación que debemos realizar serán, por ambas caras del cuadrante:



Para primavera y verano



Para otoño e invierno

<u>Actividad 9</u>: Una vez situados ambos relojes del sol (uno graduado y otro sin graduar) correctamente orientados, a partir del mediodía solar, (teniendo en cuenta que el medio día solar no corresponde con las 12 horas marcadas por nuestro reloj, sino que será el momento en que la sombra del estilete esté alineada con el meridiano de Valladolid), los alumnos se dividirán en dos grupos:

9.1. La mitad del grupo deberá realizar, en el reloj de sol no graduado, marcas sobre la cara del cuadrante correspondiente a partir del mediodía solar en adelante, cada hora indicada por nuestro reloj mecánico. A continuación se deberá comprobar si las marcas realizadas distan 15° las unas de las otras.

9.2. La otra mitad del grupo deberá apuntar, a partir del mediodía solar, cada hora que pase según el reloj solar la hora que indica dicho reloj y la hora indicada por un reloj mecánico. A continuación se comprobará si las horas marcadas por cada uno de los dos relojes (solar y mecánico) coinciden.

Tras la realización de esta actividad, los alumnos apreciarán (en función del día escogido para realizar la medición), que las marcas realizadas no distan exactamente de 15° sino que existirán pequeñas desviaciones. También observarán que la hora marcada por el reloj de sol no coincide con la proporcionada por un reloj mecánico. La siguiente actividad permitirá relacionar inequívocamente la relación entre la hora indicada por el reloj de sol y la hora marcada por los relojes mecánicos.

<u>HORA SOLAR Y HORA LEGAL</u>

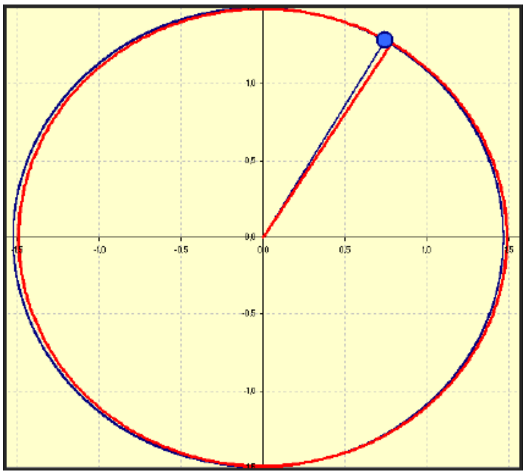
Existen tres factores que influyen en la diferencia observada entre la hora indicada por el reloj de sol y la hora marcada por un reloj mecánico:

<u>ECUACIÓN DEL TIEMPO</u>

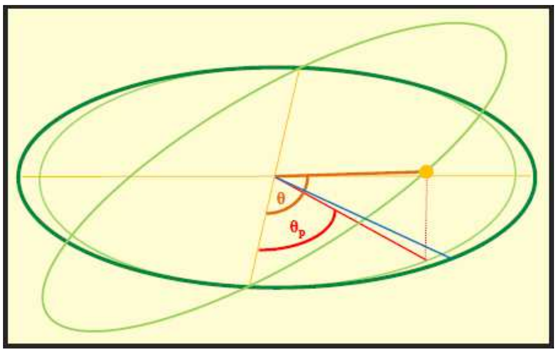
Si comparamos la hora marcada por el reloj de sol con la hora indicada con un reloj mecánica, observaremos que existen una serie de diferencias. Estas diferencias pueden ser cuantificadas experimentalmente si, a lo largo de un año, en el mismo momento cada día, marcamos el punto final de la sombra de una varilla vertical. La figura obtenida tiene la forma de un ocho alargado asimétrico que muestra la posición del sol a lo largo del año, esta figura se denomina analema.

Podríamos decir que nuestro reloj de sol nos proporciona la hora solar verdadera mientras que nuestro reloj mecánico nos muestra la hora oficial. El llamado *día solar medio* es el promedio entre todos los días verdaderos. Estas diferencias son la consecuencia de dos causas diferentes:

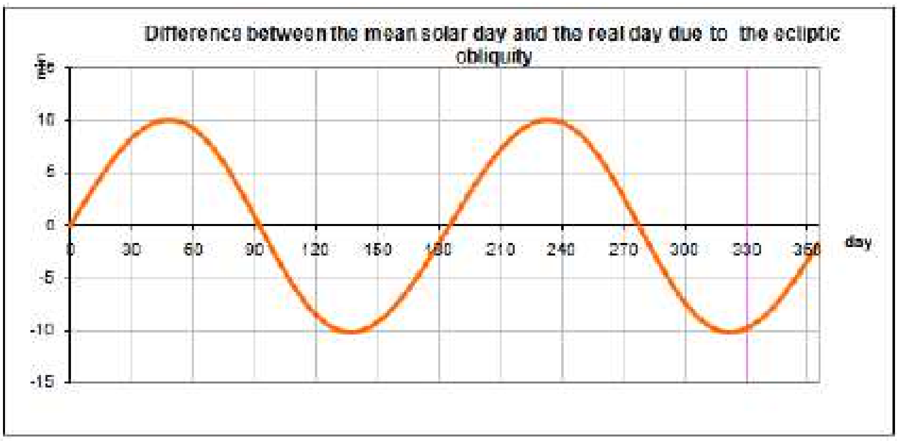
Influencia de la forma de la órbita de la Tierra. El plano del ecuador no es el mismo que el plano de la órbita de la Tierra alrededor del Sol, sino que está inclinado respecto de ella por lo que se denomina el ángulo de oblicuidad. La diferencia que existe es proporcional a la diferencia entre el ángulo de la posición de la Tierra en su trayectoria y un ángulo de referencia correspondiente a un movimiento circular uniforme. La siguiente imagen muestra la representación de la diferencia indicada, dando como resultado una forma sinusoidal de periodicidad anual y cuya amplitud máxima es de 7,6 minutos.



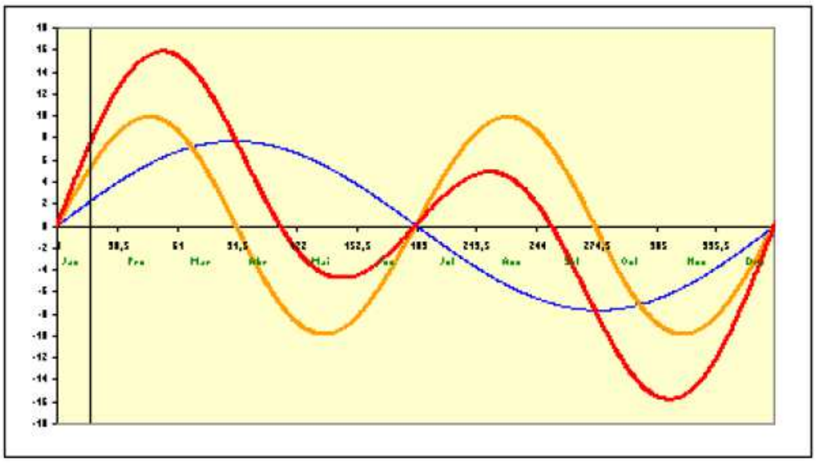
Influencia de la oblicuidad de la eclíptica. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es una elipse y no un círculo; por ello el movimiento aparente del Sol no es igual todo el año. El Sol parece moverse



más rápido cuando la Tierra está más cerca de él. La proyección del aparente movimiento del Sol en el plano del ecuador, no corresponde con un movimiento circular uniforme, y por tanto el ángulo proyectado θ_P no varía uniformemente en el tiempo. La diferencia entre la hora dada por el reloj de sol y la proporcionada por el reloj mecánico depende directamente de la diferencia diaria entre el ángulo θ_P y el ángulo correspondiente a un movimiento circular uniforme en el plano del ecuador. Representando estas diferencias, se obtiene un gráfico en el que se muestra una sinusoide con un periodo aproximadamente de 6 meses.



La llamada “*ecuación del tiempo*” se define formalmente como la diferencia entre la hora solar media y la hora solar verdadera y se obtiene como la suma de las dos gráficas anteriores.



En la siguiente tabla se muestran los datos correspondientes a la ecuación del tiempo para los días 5, 15 y 25 de cada mes.

	5 th	15 th	25 th
January	+ 5m 03s	+ 9m10s	+ 12m 12s
February	+ 14m 01s	+ 14m16s	+ 13m 18s
March	+ 11m 45s	+ 9m 13s	+ 6m 16s
April	+ 2m 57s	− 0m 14s	− 1m 56s
May	− 3m 18s	− 3m 44s	− 3m 16s
June	− 1m 46s	+ 0m10s	+ 2m 20s
July	+ 4m 19s	+ 5m 46s	+ 6m 24s
August	+ 5m 59s	+ 4m 33s	+ 2m 14s
September	− 1m 05s	− 4m 32s	− 8m 04s
October	− 11m 20s	− 14m 01s	−15m 47s
November	− 16m 22s	−15m 28s	−13m 11s
December	− 9m 38s	− 5m 09s	− 0m 13s

La ecuación del tiempo nos permite conocer la *hora solar media* a partir de la *hora solar verdadera*.

$$Hora\ solar\ media = Hora\ solar\ verdadera + Ecuación\ del\ tiempo$$

Puedes encontrar la ecuación del tiempo correspondiente a cualquier día del año en la página siguiente:

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/~04000134/fisiqui/relojsol/horas.htm

HUSOS HORARIOS

Todos los lugares de la misma longitud geográfica tienen el mismo tiempo solar medio. En cambio, en dos lugares con diferente longitud la hora solar media será distinta, hacia el Este la hora se va adelantando y, por el contrario, en la dirección Oeste se va retrasando. En la vida cotidiana también resultaría incomodo usar la hora solar media, deberíamos atrasar o adelantar los relojes incluso en viajes cortos en dirección Este-Oeste.

Para evitar ese inconveniente, se ha introducido lo que se denominan *husos horarios*, resultantes de dividir la Tierra en 24 zonas de 15°, lo que equivale a una hora de tiempo, y que van del Polo Norte al Polo Sur. Dentro de cada huso rige la misma hora, la correspondiente al meridiano central del huso horario correspondiente. Las líneas divisorias de los husos no son meridianos exactamente, sino que se adaptan a las fronteras de cada país, para que pueblos de una misma nación no tengan hora diferente.

La *hora legal* se rige por el meridiano central del huso horario correspondiente. En España (península y Baleares) el meridiano central de nuestro huso es el meridiano 0° ó de Greenwich.

Para pasar de la hora legal a la hora solar media habrá que determinar en grados la diferencia en tiempo entre la longitud del meridiano central del huso y la del lugar en cuestión y multiplicarla por cuatro (a cada grado de longitud le corresponde una diferencia de 4 minutos, 24x60 minutos / 360 grados = 4 minutos/grado).

De esta manera podremos calcular la hora legal (marcada por nuestros relojes mecánicos) partiendo de la hora del reloj de sol mediante la siguiente ecuación:

$$Hora\ legal = Hora\ solar\ verdadera + Ecuación\ del\ tiempo + (Longitud\ del\ lugar - Longitud\ del\ meridiano\ central\ del\ huso) \cdot 4(\text{minutos})$$

Teniendo en cuenta que las longitudes se expresan en grados y que la longitud será negativa si es longitud este.

AHORRO ENERGÉTICO

Finalmente, para aprovechar al máximo las horas de luz solar y así ahorrar energía, en muchos países se adelantó la hora. Ésta, que es la que utilizamos habitualmente, se denomina *hora oficial*.

En España la hora oficial lleva un adelanto de una hora en invierno sobre la hora legal, el último domingo de marzo a las 2 de la madrugada se adelantan los relojes 1 hora, con lo cual el adelanto es de 2 horas, hora ésta que se recupera el último domingo de Octubre (a las 3 de la madrugada se retroceden los relojes una hora).

$$\begin{aligned} Hora\ oficial = {} & Hora\ solar\ verdadera + Ecuación\ del\ tiempo \\ & + (Longitud\ del\ lugar \\ & - Longitud\ del\ meridiano\ central\ del\ huso) \cdot 4(\text{minutos}) \\ & + \ (2\text{ h de Abril a Octubre o 1 h el resto del año}) \end{aligned}$$

<u>Actividad 10</u>: Comprueba con los datos recogidos en la última actividad (9.2.) si la hora solar indicada por el reloj de sol (correctamente graduado) se corresponde con la hora marcada por un reloj mecánico tras aplicar las correcciones anteriores.

3.2. LAS MATEMÁTICAS Y LOS DEPORTES

3.2.1. Objetivos didácticos de este tema

Mediante el desarrollo de este tema, se persiguen una serie de objetivos didácticos:

- ✓ Reconocimiento de una función de tipo cuadrática como es la parábola en multitud de situaciones que se presentan en diversos deportes. Mediante la experimentación podrán comprobar el efecto que supone la variación del ángulo de tiro de un proyectil. Justificación de la trayectoria parabólica mediante las expresiones de los movimientos de un proyectil, buscando la relación interdisciplinar entre las matemáticas y la física.
- ✓ Tasa de variación media en un intervalo y tasa de variación instantánea aplicadas a la preparación de las etapas ciclistas.
- ✓ Estudio de la geometría de un balón de futbol. Construcción geométrica del poliedro que más se asemeje a una esfera.
- ✓ Analizar la geometría de una pista de atletismo calculando las posiciones iniciales de los atletas de una competición de velocidad de 400 m.

3.2.2. Introducción motivadora

A la hora de introducir este tema presentaría un vídeo de duración aproximada de 6 minutos.

https://www.youtube.com/watch?v=dyIFohEjkyM

A lo largo de este cortometraje humorístico, se puede apreciar cómo realizando una serie de cálculos matemáticos y físicos, una persona que a priori fallaba cualquier tiro, es capaz de encestar desde el medio campo de una cancha de baloncesto.

En algunos medios hemos podido escuchar que la velocidad máxima conseguida por el atleta Usaint Bolt fue de 10,4 m/s en el pasado Campeonato del Mundo de Berlín en 2009. Sin embargo, ¿este dato es real?

Los datos que tenemos son que el atleta, recorrió 100 m lisos en 9,58 s. Efectivamente, si dividimos el espacio recorrido entre el tiempo empleado, obtenemos que la velocidad fuera de 10,4 m/s. La pregunta es, ¿Esta velocidad que acabamos de calcular es la velocidad máxima? La respuesta es que no, dado que se trata de la velocidad MEDIA a la que realizó la prueba el atleta. Debemos tener en cuenta que parte del reposo, por tanto si de media corrió a una velocidad de 10,4 m/s, la velocidad máxima alcanzada por el atleta tuvo que ser mayor.

3.2.3. Desarrollo del tema

LANZAMIENTO PARABÓLICO

Las funciones aparecen en multitud de deportes. Los lanzamientos de balones o pelotas que implican un movimiento horizontal rectilíneo uniforme, combinado con un movimiento vertical uniformemente acelerado, se convierten en trayectorias parabólicas. Esto ocurre en deportes como baloncesto, futbol, tenis o golf.

Otro deporte en el que se pone de manifiesto una trayectoria parabólica es en el salto de altura con pértiga. En este deporte la máxima altura que alcanzará el saltador se corresponde con el vértice de la parábola del movimiento, es decir que el deportista debe conseguir mediante su salta que el listón que debe saltar coincida con el vértice de la parábola.

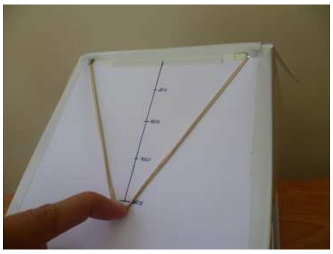
Actividad 1: La siguiente actividad consiste en calcular el ángulo con el que hay que lanzar un proyectil para conseguir la mayor distancia posible. Para ello vamos a realizar una experimentación y posterior cálculo matemático.

1) **Construcción de la plataforma de lanzamiento de una canica con posibilidad de variar el ángulo de tiro.**

   Para realizar esta construcción se empleará una caja de cartón fuerte. Se clavarán dos chinchetas alineadas entorno a las cuales se colocará una goma.

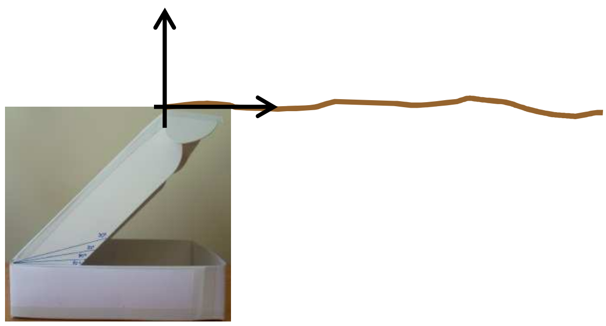
   A continuación, en el lateral de la caja se realizarán las posiciones a las que debe colocarse la tapa para que el ángulo de tiro sea el deseado. Con ayuda de un transportador de ángulos, se realizará una graduación desde 30° hasta 60°, con intervalos de 5°.

En la parte central de la caja se realizará una graduación de potencia, desde 0% hasta el 100%.


2) Colocación de la plataforma para la experimentación.

En un arenal (puede encontrarse en cualquier parque infantil), se colocará la arena de tal forma que la plataforma quede "hundida" para que la superficie de la arena quede alineada con la línea de reposo de la goma. Con ello se consigue que el inicio del movimiento parabólico esté a la misma altura que el lugar donde finalizará el movimiento, (y_0=0, x_0=0, x_{max}=0)



3) Realizar diversos lanzamientos de una canica, variando el ángulo de tiro y empleando siempre la misma potencia de tiro (100%). Medir las distancias que alcanza la canica en cada tiro. ¿Con qué ángulo se consigue la mayor distancia?

Con esta actividad se pretende que experimentalmente descubran que la mayor distancia que puede alcanzar un proyectil en un movimiento parabólico es empleando un ángulo de 45°.

4) Deduce la expresión de la expresión matemática de la trayectoria del proyectil, en función del ángulo de tiro y de la máxima distancia alcanzada. Para esta actividad vamos a suponer que la trayectoria es una parábola.

La expresión general de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, siendo x la variable que indica el desplazamiento horizontal e y la que indica el desplazamiento vertical.

En este caso, sabemos que la parábola va a estar abierta hacia abajo por lo que el valor del coeficiente a será un número negativo. También sabemos que cuando la $x = 0, la\ y = 0$, por lo que $c = 0$.

De esta manera la expresión de la parábola pasa a ser: $y = ax^2 + bx$.

También sabemos que cuando finaliza el movimiento, máximo desplazamiento horizontal, el valor de la coordenada $y = 0 \rightarrow 0 = x(ax + b) \rightarrow\ x_{max} = -b/a$, valor que se conoce experimentalmente.

Por otro lado, se conoce el ángulo de lanzamiento, y por tanto sabemos que la pendiente de la recta tangente a la parábola en el momento de iniciar el movimiento (derivada de la trayectoria en el origen de coordenadas), coincide con la tangente del ángulo de tiro:

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b; en\ el\ punto\ x = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = b = tg(\alpha)$$

Por tanto, si $b = tg(\alpha), como\ -b/a = x_{max}, \rightarrow a = -tg(\alpha)/x_{max}$.

Siendo la expresión que relaciona el desplazamiento vertical con el horizontal del proyectil:

$$\boxed{y = -tg(\alpha)/x_{max} \cdot x^2 + tg(\alpha) \cdot x}$$

5) **Escribe la expresión para el caso particular de que el ángulo de tiro sea de 45°, y las medidas experimentales:**

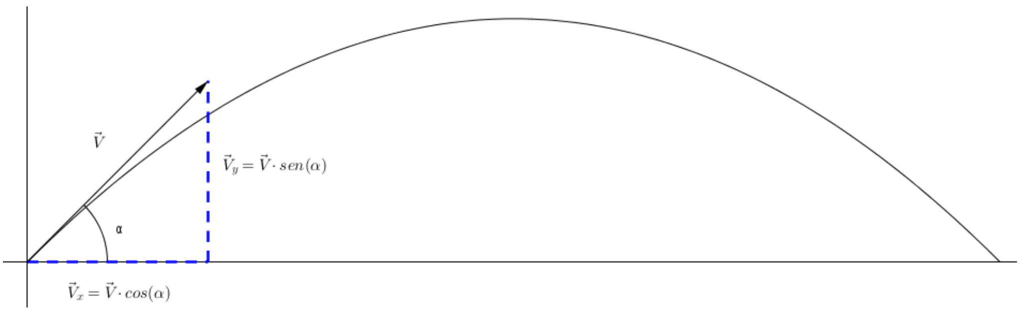
En este caso, partiendo de que el dato del desplazamiento máximo se ha calculado experimentalmente se tendría: $y = -1/x_{max} \cdot x^2 + x$

6) **Determinar experimentalmente la distancia que se alcanza al lanzar el proyectil con un ángulo de 30° y con uno de 60°. ¿Qué relación existe?**

Experimentalmente se puede comprobar que la distancia alcanzada en ambos casos es la misma. Se podría comprobar que la distancia alcanzada para ángulos de (45°+a) y (45°-a) es siempre la misma.

<u>Actividad 2</u>: Con esta actividad vamos a comprobar si la hipótesis de que la trayectoria del movimiento anterior era una parábola es cierto o no. Para ellos se va a analizar la relación que existe entre la expresión matemática, y las ecuaciones que rigen el movimiento del proyectil.

1) **Plantea las ecuaciones de desplazamiento y velocidad del movimiento horizontal (movimiento rectilíneo uniforme) y las del movimiento vertical (movimiento rectilíneo uniformemente acelerado).**



<u>Movimiento horizontal</u>: Se trata de un movimiento rectilíneo uniforme, en el que el desplazamiento es una magnitud vectorial igual a la componente horizontal de la velocidad inicial por el tiempo. Y la velocidad, es otra magnitud vectorial que surge de derivar el desplazamiento respecto del tiempo.

$$\vec{x} = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t\, \vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{V_x} = \frac{d(\overrightarrow{x})}{dt} = V_0 \cdot \cos(\alpha)\ \vec{\imath}$$

<u>Movimiento vertical</u>: Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este movimiento el desplazamiento está compuesto por la componente vertical de la velocidad multiplicada por el tiempo, más la componente propia del efecto de la gravedad. La velocidad de nuevo, surge de derivar el desplazamiento respecto del tiempo.

$$\vec{y} = (V_0 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2)\,\vec{j}$$

$$\vec{V_y} = \frac{d(\vec{y})}{dt} = (V_0 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) - g \cdot t)\,\vec{j}$$

2) A partir de las expresiones anteriores deduce la expresión que relaciones el desplazamiento horizontal con el vertical en función del ángulo de tiro, eliminando la dependencia del tiempo.

Despejando el tiempo en la expresión del desplazamiento horizontal y sustituyéndolo en la del desplazamiento vertical obtenemos:

$$y = V_0 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \frac{x}{V_0 \cdot \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{{V_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$$

$$\boxed{y = \mathrm{tg}(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{{V_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha)}}$$

Relacionando la expresión anterior con la expresión general de la trayectoria de la parábola que habíamos obtenido en la actividad anterior:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x = -tg(\alpha)/x_{max} \cdot x^2 + tg(\alpha) \cdot x$$

$$\boxed{a = -\frac{tg(\alpha)}{x_{max}} = -\frac{g}{2 \cdot {V_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha)}}$$

$$\boxed{b = tg(\alpha) = tg(\alpha)}$$

De las expresiones anteriores se obtendría que

$$x_{max} = \frac{{V_0}^2 \cdot \mathrm{sen}(2\alpha)}{g}$$

3) Calcula algebraicamente el ángulo α para el cual se obtiene el desplazamiento horizontal máximo. ¿Es el mismo que habías obtenido experimentalmente?

El desplazamiento máximo se obtiene en el momento en el que el proyectil toca la arena, es decir, cuando la componente vertical del desplazamiento se anula.

$$0 = \mathrm{tg}(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{{V_0}^2 \cdot \cos^2(\alpha)}$$

$$0 = {V_0}^2 \cdot 2 \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - g \cdot x$$

$$x_{max} = \frac{{V_0}^2 \cdot \mathrm{sen}(2\alpha)}{g}$$

Cabe destacar que hemos obtenido la misma expresión que la calculada anteriormente.

Para calcular el ángulo que produce el desplazamiento máximo, dividimos el desplazamiento con respecto al ángulo e igualamos a cero:

$$\frac{d(x_{max})}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{{V_0}^2 \cdot \mathrm{sen}(2\alpha)}{g}\right) = \frac{{V_0}^2 \cdot 2 \cdot \cos(2\alpha)}{g}$$

$$\frac{d(x_{max})}{d\alpha} = 0 \rightarrow \cos(2\alpha) = 0 \rightarrow 2\alpha = 90°$$

$$\boxed{\alpha = 45°}$$

En efecto el ángulo debe coincidir con el calculado experimentalmente.

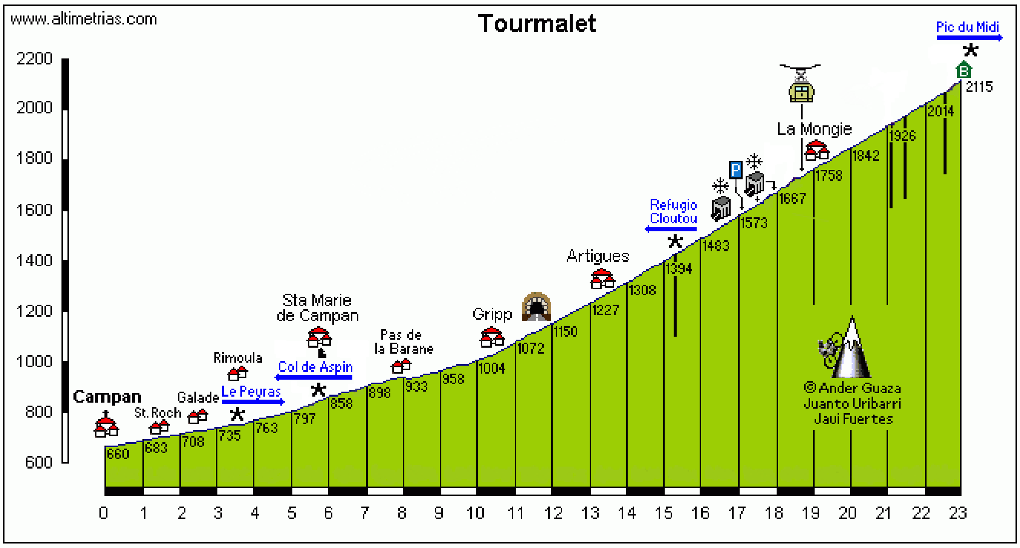
4) **Con los datos obtenidos experimentalmente, ¿cuál es valor de la velocidad inicial con la que es lanzado el proyectil, en el caso de 45°? ¿Y en el caso de 30°? ¿Y para el de 60°?**

   Con los datos de las distancias máximas alcanzadas por el proyectil para cada uno de los ángulos, y con la expresión del desplazamiento horizontal máximo, es inmediato deducir el valor de la velocidad inicial en cada caso:

$$x_{max} = \frac{{V_0}^2 \cdot \mathrm{sen}(2\alpha)}{g} \rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{x_{max} \cdot g}{\mathrm{sen}(2\alpha)}}$$

LAS PENDIENTES DEL TOUR DE FRANCIA

En el Tour de Francia, uno de los ascensos más complicados es el ascenso al Col du Tourmalet, con una altitud de 2.115 m. Previamente al comienzo de cada etapa, los ciclistas estudian detenidamente la gráfica de altimetría. En este tipo de gráficas, se muestran las cotas de altitud alcanzada en cada punto kilométrico, y la pendiente media subida en cada kilómetro:



<u>Actividad 3</u>: A lo largo de esta actividad vamos a analizar algunos de los factores que influyen a la hora de preparar es ascenso a un puerto de montaña.

1) **¿Cuál es el desnivel total del ascenso del Tourmalet? Si tuvieras que comparar la dificultad que supone ascender a dos puertos con el mismo desnivel, ¿qué otro factor tendrías en cuenta para realizar dicha comparación? Calcula la pendiente media de este puerto de montaña.**

   Con esta actividad, se busca que los alumnos observen la diferencia entre la tasa de variación de la altitud, y la tasa de variación media.

   La tasa de variación nos muestra el desnivel de la prueba:

$$TV = 2.115 - 660 = 1.455m$$

   A la hora de comparar dos puertos que tienen el mismo desnivel, la dureza no sería la misma, sería más duro aquél que subiera el mismo desnivel en menos kilómetros, es decir el que tuviera mayor pendiente. La tasa de variación media determina la pendiente promedio del puerto.

$$TVM = \frac{(2.115 - 660)m}{23.000\ m} = 6{,}22\ \%$$

2) **La pendiente media, nos da una información acerca de la dureza general de la prueba. Sin embargo, es posible que en ningún momento la pendiente sea realmente del 6,22%, del mismo modo que podría ocurrir por ejemplo las**

notas, un alumnos puede tener un 7 de media pero no haber obtenido exactamente un 7 en ningún examen. Lo que realmente le interesaría a un ciclista, sería conocer la pendiente en tramos más reducidos, por ejemplo a cada kilómetro. ¿Cuáles serán los dos tramos (de un kilómetro de longitud) de ascenso, con mayor pendiente de todo el puerto?

Calculando la tasa de variación media por kilómetros, se observa que los dos tramos en los que la pendiente es mayor son:

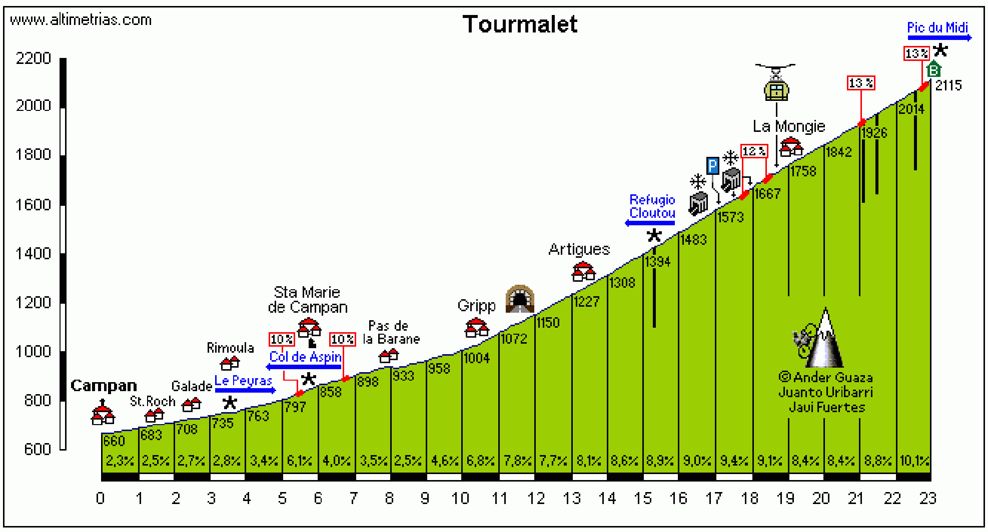
$$TVM_{(km\ 22-km\ 23)} = \frac{(2.115-2.014)m}{1.000\ m} = 10{,}1\ \%$$

$$TVM_{(km\ 17-km\ 18)} = \frac{(1.667-1.573)m}{1.000\ m} = 9{,}4\ \%$$

3) **¿Podría haber tramos de carretera, en los que la pendiente fuera mayor del 10,1%? ¿Qué concepto matemático permite calcular la pendiente de la carretera en un punto concreto, como por ejemplo a la salida de una curva?**

A medida que se va acortando el intervalo en el que se calcula la pendiente, la información recibida es más precisa. Es posible que haya tramos de carretera de longitudes menores a un kilómetro, en los que la pendiente sea mayor de 10,1%.

En la siguiente imagen, se pueden apreciar una serie de tramos con pendientes superiores, llegando a ser en algunos de ellos de hasta el 13%.



En efecto es posible calcular la pendiente en la salida de cada curva, en un intervalo infinitesimal (tasa de variación instantánea), es decir, la derivada de la curva en un intervalo infinitesimal.

4) **Si un ciclista quisiera preparar un ataque a lo largo de 3 km frente, ¿en qué tramo sería más conveniente que lo hiciera?**

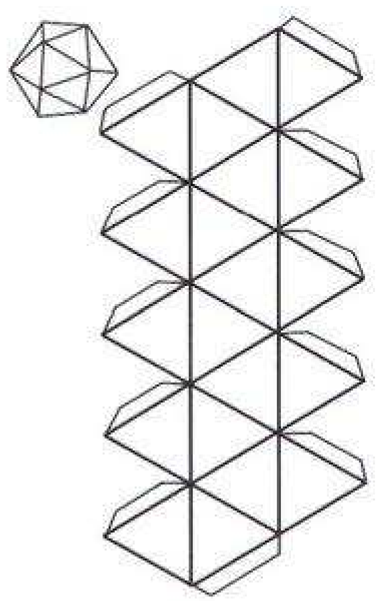
Cálculo de la tasa de variación media por tramos de 3 km.

<u>**LA GEOMETRÍA EN LOS DEPORTES**</u>

La geometría ha jugado un papel fundamental en diversos aspectos del deporte. A continuación se muestran algunos ejemplos:

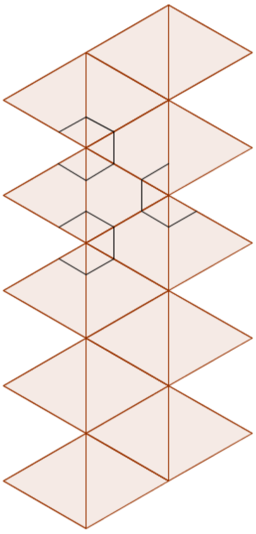
<u>**Actividad 4**</u>**: La geometría de un balón de futbol no es una esfera perfecta, si nos fijamos en realidad es un poliedro que al ser hinchado adquiere la forma bastante esférica. La siguiente actividad consiste en la construcción del poliedro que dará forma a un balón de futbol. Este poliedro es un icosaedro truncado.**

1) **En primer lugar debemos partir de un icosaedro: poliedro formado por 20 triángulos equiláteros. En el siguiente enlace se puede observar cómo se construye el icosaedro partiendo de su descomposición. Dibujar la descomposición en una cartulina**



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a2/Icosaedro_desarrollo.gif

2) **Podemos observar, que en cada vértice se unen cinco triángulos, el siguiente paso consiste en convertir cada vértice en un pentágono. Para ello deberemos cortar cada esquina a la misma distancia del vértice, esta distancia será igual a un tercio del lado cada triángulo.**



De esta manera, podemos observar que en los centros de los triángulos vamos obteniendo hexágonos regulares, es decir, que el poliedro que vamos buscando estará formado por 12 pentágonos regulares y 20 hexágonos regulares.

__Actividad 5__**: En las carreras de atletismo de 400 m, se observa que en la posición de partida de cada atleta está adelantada respecto a la del corredor de su izquierda. Estas diferencias en las posiciones son debidas a la construcción geométrica de la pista. Una pista de atletismo estándar está formada, en su parte interior, por dos rectas de 84,39 m, y dos semicircunferencias de 36,50 m de radio. La pista tiene 8 calles de 122 cm de anchura cada una. La meta se encuentra al final de una recta, y las vueltas se dan en sentido contrario a las agujas del reloj.**

1) **Con los datos mencionados, ¿cuál será la compensación que hay que dar al corredor de la calle 2 respecto al de la calle 1?**

Los tramos rectos son los mismos para todos los corredores, la diferencia reside en los tramos curvos. El corredor de la primera calle recorre en los tramos curvos:

$$Long.\,curva = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 36{,}50 = 229{,}34\ m$$

El corredor de la segunda calle, recorre la misma distancia en los tramos rectos, pero los tramos curvos de su calle tienen un mayor radio por lo que la longitud que recorrería si empezaran en la misma posición sería mayor. La longitud de la circunferencia (suma de los dos tramos curvos) de la segunda calle será:

$$Long.\,curva = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot (36{,}50 + 1{,}22) = 237\ m$$

La diferencia entre la distancia en las curvas, que debe recorrer el atleta que corra por la calle 2 (237m) y el que corra por la calle 1 (229,34 m) es de 7,66m. Por tanto el corredor de la calle 2 deberá comenzar 7,66 m adelantado respecto a la posición inicial del corredor de la calle 1.

2) **¿Cuál será el ángulo comprendido entre los radios que pasan por la posición de salida del corredor de la calle 3 y el de la calle 5?**

En primer lugar debemos calcular la longitud del arco de circunferencia comprendida entre las dos posiciones de salida mencionadas:

La diferencia que existe es debida a dos posiciones, por lo que la compensación será:

$$Arco_{Calle3-Calle5} = 2 \cdot 7{,}66 = 15{,}32m$$

El ángulo correspondiente a este arco de circunferencia es:

$$Ángulo_{Calle3-Calle5} = 15{,}32mx\,\frac{2\pi\ rad}{2\pi \cdot 36{,}5m} = 0{,}42rad$$

3) **¿Cuántos corredores como máximo pueden competir a la vez en esta prueba?**

Como máximo podrán competir 8 corredores a la vez en la prueba de velocidad de 400 m.

3.3. OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA (Los Autobuses en Valladolid)

3.3.1. Objetivos didácticos de este tema

- ✓ A lo largo de este tema se va a realizar una introducción a la programación lineal. Según el Real Decreto 1467/2007 por el que se regula el currículo de Bachillerato, este contenido se incluiría en la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II, en el bloque de Álgebra.

- ✓ Capacidad de los alumnos para transformar la información verbal en lenguaje matemático. Interpretación y de un texto y extracción de la información relevante dentro de un texto, comprendiendo su significado y reflejándolo en expresiones y relaciones matemáticas para modelar matemáticamente un problema real.

3.3.2. Introducción motivadora

En la vida se nos presentan numerosas situaciones en las que debemos tomar decisiones basándonos en la maximización de beneficios, o minimización de costes.

En Valladolid existen 25 líneas de autobuses urbanos. Para organizar de forma óptima el número de líneas necesarias, los trayectos que deben realizar, las frecuencias de cada una de ellas, los costes, ha sido necesario el trabajo de numerosos ingenieros y matemáticos, entre otros profesionales, durante mucho tiempo. Nosotros, por tanto, no nos encontramos en condiciones de resolver un problema tan complejo como el que aquí se presenta.

A la hora de realizar un viaje por España, nos planteamos qué combinación de medios de transporte emplear para minimizar el tiempo de trayecto, o los gastos que el viaje conlleva.

Cualquier empresa, al inicio de la temporada, debe planificar cómo va a sacar al mercado sus productos, qué ofertas serán más rentables en cada época, qué combinaciones de productos serán más ventajosas para el negocio, entre otras muchas decisiones.

Existen por tanto un gran número problemas de optimización que se encuentran a nuestro alrededor. A lo largo de este trabajo realizaremos una serie de actividades que nos permitirán descubrir diferentes ámbitos de la vida en la que podemos hacer uso de la optimización matemática, en concreto la programación lineal, para la toma de decisiones.

3.3.3. Desarrollo del tema

La programación lineal es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de un sistema de inecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

Consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

Actividad 1: Realizar una lista con los aspectos que consideren más relevantes a la hora de diseñar de una línea de autobús. ¿Qué observaciones harías para la recopilación de datos?

A la hora de plantearnos el diseño de una línea de autobuses, tendríamos que tener en cuenta una serie de aspectos entre los que podrían destacar:

- ✓ Lugar de partida y de llegada de la línea. Trayectoria que va a realizar para unir esos dos puntos, teniendo en cuenta los sentidos de circulación de las calles. Qué lugares de interés existen a lo largo del trayecto de la línea.
- ✓ Número de paradas que va a realizar. Para ello se tendrá en cuenta los lugares que conecta, el resto de líneas de autobuses con las que va a coincidir a lo largo de la trayectoria para facilitar el transbordo de unas líneas a otras. Las paradas deberán situarse teniendo en cuenta que minimicen la distancia máxima que debe caminar cada usuario para llegar a una de ellas. Se sabe que cuanto mayor es el número de paradas, menor es el recorrido que debe hacer cada persona para llegar a una de ellas, sin embargo el aumento de paradas provoca mayor duración en los recorridos, se observa que existen diversos factores que influyen en la determinación óptima del número de paradas.

- ✓ Frecuencia de los autobuses. A la hora de determinar la frecuencia, uno de los factores a tener en cuenta será el número de usuarios que se estima que va a hacer uso de la línea, el coste que supone la inclusión de un mayor número de autobuses de una misma línea, etc.
- ✓ Tipo de autobús que se empleará, simple de alrededor de 95 plazas, o articulado con una capacidad de unas 146 personas. En íntima relación con el apartado anterior.
- ✓ Costes de usuario, entre los que se tendrán en cuenta, el tiempo que tarda en llegar a la parada, tiempo que debe esperar hasta que llegue el autobús, tiempo que tarde el autobús en realizar el trayecto deseado, tiempo que tarda el usuario en llegar de la parada del autobús a su destino (si no se tienen en cuenta transbordos).
- ✓ Los costes de operación estarán relacionados con el número de vehículos que circulan por la vía de estudio en un momento determinado, y con los ingresos del conductor que se podrían considerar proporcionales al número de pasajeros.

Se puede observar cómo existen numerosas relaciones entre todas las variables que afectan al diseño de una línea de autobús. Sin embargo la mayoría de estas relaciones no son lineales por lo que no sería posible resolverlas mediante el método de programación lineal que vamos a ver a continuación.

<u>Actividad 2</u>**: Analiza las líneas 1 y 5 de Valladolid. En cada una de ellas se observan diferencias en las frecuencias de los autobuses y en las distancias entre las paradas que forman su recorrido. ¿A qué se pueden deber estas diferencias? ¿En qué zonas las paradas se encuentran más próximas unas de otras?**

<u>Actividad 3</u>**: Conseguir la satisfacción de un usuario de autobuses urbanos depende de diversas variables. Es habitual escuchar quejas de los usuarios respecto a la duración de los trayectos, o respecto al número de paradas a lo largo de una línea. Con esta actividad vamos a analizar algunos de estos aspectos:**

Se desea maximizar el número de pasajeros satisfechos que hacen uso de una línea de autobús de tu ciudad.

Este número de pasajeros satisfechos se relaciona con tres variables de la siguiente manera:

- **Cuanto mayor es el recorrido que realiza un autobús a más ciudadanos puede dar servicio. De esta forma existen 60 potenciales pasajeros satisfechos por cada kilómetro de recorrido de la línea de autobús (L_R).**

- **El trayecto del autobús en sí mismo no ofrece un servicio. Para que un ciudadano pueda hacer uso del autobús, debe disponer de una parada cercana. La correcta distribución de las paradas permite reducir la distancia que los pasajeros deben recorrer hasta las mismas. Un mayor número de paradas significa una distancia menor a recorrer y un ciudadano más contento. Se estima que por cada parada del trayecto (N_P) existen 10 pasajeros potencialmente satisfechos.**

- **No todo aumento de las variables hace feliz al usuario. Una excesiva duración del trayecto suele suponer un factor negativo en la satisfacción del pasajero. En ese sentido se estima que por cada hora que dure el trayecto (T_R) disminuye el número de pasajeros satisfechos en 50 personas. La duración del trayecto (T_R) depende así mismo de la longitud total de la ruta y del número de paradas. Considerar que el autobús viaja a una velocidad media entre paradas de 40 km/h, y que el tiempo en cada parada es de 2 minutos (este tiempo incluye ya la estancia y los tiempos de aceleración y deceleración asociados a cada parada).**

Existen una serie de restricciones relativas a la relación entre la longitud del recorrido (L_R) y el número de paradas (N_P) a lo largo del mismo. Se pretende evitar que las paradas estén innecesariamente juntas o excesivamente separadas. De esta forma la longitud del recorrido (L_R) deberá ser mayor o igual a un sexto el número de paradas (N_P) y menor o igual a dos quintos este número de paradas (N_P).

Como restricción adicional, el tiempo del recorrido (T_R) desde la primera parada hasta la última, no debe superar una hora.

1) **Plantear la ecuación que relaciona el número de pasajeros satisfechos con las variables longitud de recorrido (L_R en kilómetros), número de paradas (N_P) y tiempo de recorrido (T_R en horas).**

   Si denominamos S al número de pasajeros satisfechos, su relación con las variables mencionadas será:

$$S = 60 \cdot L_R + 10 \cdot N_P - 50 \cdot T_R$$

2) **Mediante la relación que existe entre las tres variables, plantear la función objetivo en función únicamente de la longitud del recorrido y del número de paradas.**

   La relación que existe entre las tres variables es: $T_R = \frac{L_R}{40\ km/h} + 2' \cdot N_P$, pasando todas las unidades a kilómetros y a horas:

$$T_R = \frac{L_R\ (km)}{40\ km/h} + \frac{2}{60}(h) \cdot N_P$$

   Sustituyendo en la ecuación del apartado anterior:

$$S = 60 \cdot L_R + 10 \cdot N_P - 50 \cdot \left(\frac{L_R}{40} + \frac{2}{60} \cdot N_P\right)$$

$$\boxed{S = \left(60 - \frac{5}{4}\right) \cdot L_R + \left(10 - \frac{5}{3}\right) \cdot N_P}$$

3) **Plantear las restricciones que se plantean para las variables longitud del recorrido y número de paradas.**

   Las restricciones impuestas por el problema son las siguientes:

$\boxed{\frac{2}{5} \cdot N_P \leq L_R}$ (R1)

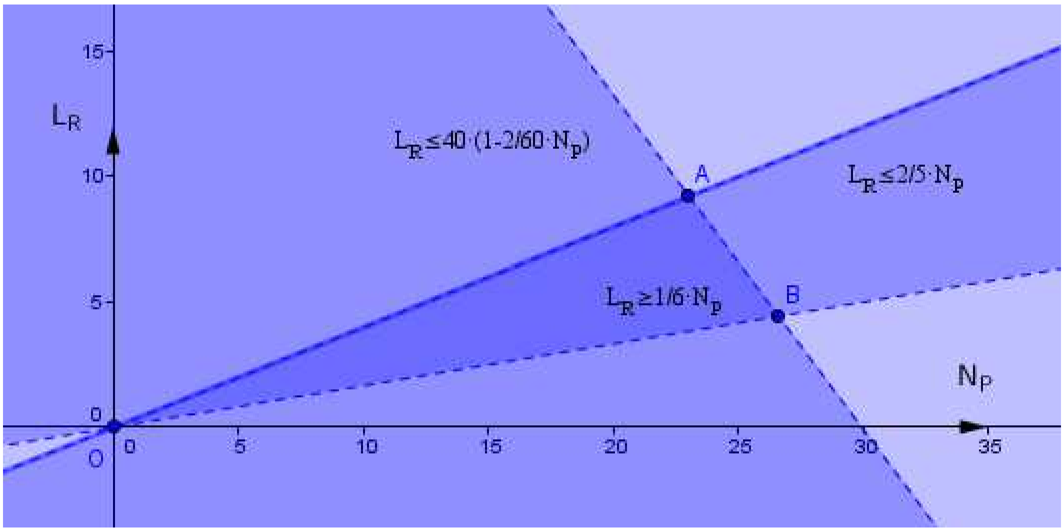
$\boxed{L_R \geq \frac{1}{6} \cdot N_P}$ (R2)

$$T_R = \frac{L_R}{40} + \frac{2}{60} \cdot N_P \leq 1 \rightarrow \boxed{L_R \leq 40 \cdot \left(1 - \frac{2}{60} \cdot N_P\right)} \quad \text{(R3)}$$

Por motivos evidentes consideramos que todas las variables son positivas.

4) Representa gráficamente cada una de las regiones delimitadas por las restricciones.

Si representamos en el eje de ordenadas la Longitud del recorrido y en el eje de abscisas el número de paradas, obtenemos la siguiente representación:



5) El conjunto intersección, de todos los semiplanos formados por las restricciones, determina un recinto, acotado o no, que recibe el nombre de validez o zona de soluciones factibles. El conjunto de vértices del recinto se denomina conjunto de soluciones factibles básicas y el vértice donde se presenta la solución óptima. Calcula las soluciones factibles básicas.

Los vértices de la región factible son el A y el B. Calculando sus coordenadas obtendríamos:

A se obtiene de resolver las restricciones R1 y R3, obteniendo el punto de coordenadas (23,9’2), es decir que este recorrido tendría 23 paradas y tendría una longitud de 9’23 km.

El punto B se obtiene de resolver las restricciones R2 y R3, las coordenadas del punto obtenido serán redondeando (27,4’5), es decir un recorrido de 27 paradas con una longitud máxima de 4’5 km.

6) Calcula en cada caso la duración completa de la ruta (T_R).

$$(T_R)_A = \frac{L_R\ (km)}{40\ km/h} + \frac{2}{60}(h) \cdot N_P = \frac{9'2}{40} + \frac{2}{60} \cdot 23 \cong 1\ h$$

$$(T_R)_B = \frac{L_R\ (km)}{40\ km/h} + \frac{2}{60}(h) \cdot N_P = \frac{4'5}{40} + \frac{2}{60} \cdot 27 \cong 1\ h$$

7) Por último, calcula los valores que se obtendrían de la función objetivo (número de personas satisfechas) en cada uno de los casos anteriores, y determina cuál es la solución óptima (combinación de número de paradas y longitud de recorrido que maximiza el número de personas satisfechas).

Sustituyendo el punto A (23,9’2) en la función objetivo se obtiene:

$$S_A = 60 \cdot 9'2 + 10 \cdot 23 - 50 \cdot 1 = 732\, personas\ satisfechas$$

Sustituyendo el punto B (27,4’5) en la función objetivo se obtiene:

$$S = 60 \cdot 4'5 + 10 \cdot 27 - 50 = 490\, personas\ satisfechas$$

Por tanto la solución final del problema sería realizar un recorrido de 9’2 km de longitud, en el que se realicen 23 paradas, y con ello se conseguirían 732 personas satisfechas.

8) Si todas las paradas estuvieran equiespaciadas a lo largo del recorrido del autobús, ¿qué distancia separaría cada una de ellas? Analiza los resultados.

Con la solución obtenida, se tiene que las paradas se encontrarían a 400 m de distancia unas de las otras. Si realizamos una comparación con la situación real de nuestra ciudad, encontramos que por la zona del centro las paradas de autobús se encuentran considerablemente más próximas entre sí que en el resto de las zonas. Como es evidente, en una línea que atraviese la ciudad, las paradas no van a estar en todo el recorrido espaciadas de la misma manera. Es necesario analizar los núcleos de población y los puntos de interés para realizar una buena distribución de las paradas.

Como ya hemos comentado, existen numeras variables que influyen a la hora de diseñar una línea de autobús, y más aún en el diseño de todo un sistema de autobuses de una ciudad. Con esta actividad se ha pretendido dar una visión simplificada de una hipotética situación en la que se pone de manifiesto cómo un modelo matemático puede ser de utilidad para resolver una situación real.

Actividad 4: Vuestro instituto va a organizar una excursión en la que pueden participar 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autobuses de 40 plazas y 10 de 50 plazas, pero sólo dispone de 9 conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 800 € y el de uno pequeño 600 €. Calcular cuántos autobuses de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

Actividad 5: Una compañía de viajes utiliza dos autobuses A y B para realizar excursiones turísticas. La compañía planifica la temporada estimando que realizará, entre los dos autobuses, al menos 60 viajes, aunque no puede ocuparse de más de 200 excursiones. El programa de revisiones de los autobuses impone que el autobús A no puede hacer más de 120 viajes, aunque debe realizar al menos los mismos viajes que el autobús B. Si en cada trayecto el autobús A consume 300 litros de combustible y B consume 200 litros, ¿cuántos viajes debe hacer cada autobús para que el consumo sea mínimo?

Actividad 6: Una empresa juguetera manufactura trenes y muñecas de madera en sus dos talleres dedicados a carpintería y a pintura. Cada muñeca se vende a 27 euros y tiene un costo de 24 euros. Cada tren se vende a 21 euros y tiene un costo de 19 euros. Una muñeca requiere 2 horas de trabajo de pintura y 1 hora de carpintería, mientras que cada tren requiere 1 hora de pintura y 1 hora de carpintería. Cada semana el taller de pintura dispone de 100 horas y el de carpinterí de 80. Teniendo en cuenta que los pedidos de muñecas no superan las 40 unidades por semana, ¿Qué producción debe tener el taller para maximizar sus ganancias?

<u>Actividad 7</u>: Con el comienzo del curso se van a lanzar una oferta de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas: en el primer bloque pondrán 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán de 6,5 euros y 7 euros, respectivamente. ¿Cuántos paquetes les conviene hacer de cada tipo para obtener los máximos beneficios?

4. CONCLUSIONES

La finalidad de este trabajo era seleccionar una serie de temas y materiales para mostrar una serie de propuestas didácticas que permitieran atraer la atención de los alumnos hacia las Matemáticas, desde el descubrimiento de su utilidad en diversos campos presentes en el Planeta Tierra.

Se ha pretendido desarrollar con mayor profundidad tres de los once temas planteados, con el objetivo de dar una muestra de lo que conllevaría este trabajo puesto en práctica. En todo caso se ha permitido compaginar diferentes aspectos curriculares de secundaria y de Bachillerato con la experimentación, investigación y trabajo en grupo de un modo grato y participativo.

Se trata de conseguir que los alumnos desarrollen sus capacidades, procesos lógicos y en definitiva su intelecto para afrontar su siguiente evolución educativa y/o futuro profesional.

La puesta en práctica de esta propuesta didáctica va dirigida a todos los alumnos, tanto a aquellos que son más aplicados como para los que presentan ciertas dificultades en la materia. Con ella, se pretende que todos los alumnos vean de otro modo las matemáticas, más cercanas, más aplicables y necesarias.

La experiencia reciente de "Concurso de las Matemáticas del Planeta Tierra" ha mostrado una gran acogida por parte de alumnos y profesores. Todos ellos muy satisfechos y gratificados por el trabajo realizado y las experiencias vividas a lo largo del desarrollo del trabajo.

5. VÍAS DE DESARROLLO FUTURO

Las posibilidades que abre este trabajo son las siguientes:

- ✓ Puesta en práctica de los trabajos planteados. Mi propuesta consistiría en realizar una serie de observaciones a lo largo del proceso con la finalidad de corregir aquellos aspectos susceptibles de ser mejorados.

    1) Realización de un análisis riguroso sobre la acogida que tiene la propuesta entre los estudiantes de diferentes cursos de un instituto. Se analizará si los alumnos muestran mayor motivación por la asignatura, o si los alumnos se muestran receptivos ante la propuesta de realizar trabajos extraescolares para profundizar en un tema concreto.

    2) A medida que avance el curso, el profesor realizará un estudio en el que se muestre si las actividades previamente propuestas son factibles, ya sea por el grupo de alumnos en concreto que está desarrollando el trabajo, o por las condiciones externas que puedan influir. Se analizará si la duración de los trabajos se encuentra acorde con la planificación.

    3) Se realizará una comparación entre clases del mismo nivel, en las que en una de ellas se haya puesto en práctica esta propuesta didáctica y en la otra me mantenga la metodología clásica. Se estudiará tanto los resultados obtenidos en ambos casos, como la reacción de los alumnos ante la asignatura.

    4) Finalmente se solicitará a los alumnos que realicen un cuestionario sobre su percepción de la actividad realizada. Con esta encuesta se pretende conocer la acogida que los alumnos han tenido a una nueva forma de impartir las matemáticas. Es importante saber cuál es su opinión sobre esta iniciativa, así como conocer sus propuestas de mejora.

- ✓ Desarrollo más en profundidad de cada uno de los temas propuestos en el apartado 2 de este Trabajo Fin de Máster.

- ✓ Propuesta didáctica para todas las unidades de un curso, ya sea de la ESO o de Bachillerato. Realizar un planteamiento de trabajos de introducción a cada tema en los que se pongan de manifiesto la importancia de las Matemáticas en el Planeta Tierra.

6. REFERENCIAS

Bibliografía general

www.divulgamat.es

Mαthematics of Planet Earth

American Mathematical Society

Institute of mathematics & its applications

Real Sociedad Matemática Española

National Council of Teachers of Mathematics

Instituto de Investigación en Matemáticas. Universidad de Valladolid

Revista de Investigación y Ciencia. Octubre 2013

Solución GPS

Lehman, Ch. (1994). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

Figueroa G.R (1992). *Vectores y Matrices*. Lima: Editorial San Marcos

Las matemáticas en los deportes

Matemáticas en tu Mundo. José María Sorando Muzás I.E.S. "Élaios" - Zaragoza (España)

Sector Matemática. Danny Perich Campana

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte

Optimización

Plataforma Vitutor

Reloj de sol

Plataforma “Principia Technologica”

Sitio web de José María Gómez Aroca. Licenciado en Matemáticas - Abarán

Departamento de Física y Química del IES Galatea, Andalucía.

Instituto argentino de radioastronomía (IAR)

Video concurso imUVa 2013

http://www.imuva.uva.es/files/videos_ganadores.html