Revista de Psicodidáctica, 2013, 18(2), 313-329 *ISSN: 1136-1034 eISSN: 2254-4372*
www.ehu.es/revista-psicodidactica *© UPV/EHU*
DOI: 10.1387/RevPsicodidact.6466

Prevalence of Geometric Thinking Levels over Different Stages of Education

José M. Sarasua, Josu G. Ruiz de Gauna, and Modesto Arrieta
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Abstract

In this article, a study is presented with the goal of contributing to provide an updated view on the prevalence of thinking levels over different educational stages. On a sample of 437 students of secondary school, high school and university, studying in different schools, distribution of levels and their degree of acquisition are analysed according to educational stages. After the data were analysed, these are compared with the results obtained nearly two decades ago by the only comparable study of similar characteristics we have knowledge of. Despite the curriculum changes introduced over that period, the evolution observed in the prevalence of the different levels among the students of the analysed stages is, on the whole, modest although gradually progressive.

Keywords: Van Hiele levels, geometric reasoning, curriculum organization, teaching of geometry.

Resumen

En este artículo se presenta un estudio que tiene como objetivo contribuir a ofrecer una panorámica actualizada sobre la prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diversas etapas educativas. Participan en esta investigación 437 estudiantes de enseñanza media, bachillerato y universidad de diferentes centros educativos, y en ella se analiza la distribución de los niveles y su grado de adquisición en función de las etapas educativas. Tras analizar los resultados, éstos se relacionan con los obtenidos hace casi dos décadas por el último estudio comparable y de similares características del que se tiene conocimiento. A pesar de los cambios curriculares introducidos durante este periodo, la evolución que se aprecia en la prevalencia de los diferentes niveles entre los estudiantes de las etapas analizadas es discreta, aunque muestra cierto progreso gradual.

Palabras clave: Niveles de Van Hiele, razonamiento geométrico, organización curricular, enseñanza de la geometría.

Correspondence: José M. Sarasua, Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE., Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Escuela Universitaria de Magisterio de Vitoria-Gasteiz, Juan Ibáñez de Santo Domingo 1, 1006-Vitoria-Gasteiz. E-mail: joxemari.sarasua@ehu.es

Introduction

There is a great deal of research into numerous areas of the learning and teaching of mathematics, such as mathematical performance (Miñano & Castejón, 2011; Rosario et al., 2009) or learning difficulties (Navarro, Aguilar, Marchena, Ruiz, & Ramiro, 2011). However, there is less research into mathematical and, in particular, geometrical reasoning.

The Van Hiele model (Battista 2007; Van Hiele 1986) probably constitutes the most important reference framework in the field of research into geometry teaching. Thanks to it, it has been possible to model the process, by which students acquire geometric contents, and to characterize and arrange different forms of geometric reasoning. As a result, new teaching proposals have been drawn up, which are more coherent and adapted to the students' levels, and which have significantly sped up the learning processes. Its influence is quiet evident in the *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000), a set of guidelines produced by the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) of USA and Canada. In that document, which has de facto become a curricular benchmark internationally recognised, a methodology for geometry teaching focussing on the Van Hiele levels (or thinking levels) is proposed, according to which the introduction of conceptual content and the way students should solve problems progress throughout the years in accordance with the characteristics of the Van Hiele levels (Gutiérrez 2009).

One of the main characteristics of the Van Hiele (VH) levels is that they do not depend so much on evolutionary development (biologicist conception), but on the received instruction (Fuys, Geddes and Tischler, 1984): e.g. a pupil in high school (aged 16-17) or an university student could solve mathematical tasks by using the same reasoning ways as a primary child (aged 6-11) or a student in low secondary school (aged 12-13).

Nevertheless, for correct curriculum organization and effective design of educational interventions, it is of particular relevance to know, to the extent possible, the real prevalence of the VH levels in the different educational stages, since students' thinking level can not always be identified directly in the classroom and prior to teaching.

The VH model was originally conceived in the 1950s as a result of two doctoral thesis by Pierre Marie Van Hiele and Dina Van Hiele-Geldof, respectively (Fuys et al., 1984; Van Hiele, 1957). Corberán et al. (1994) summarize some of its central ideas as follows:

— Different levels of perfection can be distinguished in students' mathematical reasoning: the so called *thinking levels*.

— A student will be able to understand only these parts of mathematics that are presented to him according to his thinking level.

— A student can be helped to progress to a higher thinking level by appropriately guided instruction.

The VH model consists of a *descriptive part* and an *instructional part*. According to the descriptive part, several ways of mathematical thinking are identified: i.e. the thinking levels. The reasoning capacity of any individual progresses through these levels since he begins to study a certain topic in geometry until he reaches the highest mastery level in that topic. The instructional part provides teachers and authors of textbooks with guidelines for more effective design of educational interventions aimed to help students to achieve a higher thinking level more easily. These guidelines are called "learning phases". Educational activities, by which students can gain the necessary experiences to progress to a higher level are sequenced and arranged according to these phases (Van Hiele, 1999). This part of the model has barely evolved since it was first formulated in the 1950s.

Thinking levels are defined by *descriptors*, or characteristics of the reasoning ways students reveal, when they are asked to carry out certain mathematical tasks. In practice, four levels are considered (there is a fifth one, but it is only theoretically formulated), whose descriptors relating to plane figures are summarized below (Corberán et al., 1994; Fuys, Geddes, & Tischler, 1988; Van Hiele, 1957, 1987).

— In the *first level*, or visual level, geometric figures are perceived globally, on the basis of their physical appearance, as units lacking parts or properties. Classifications are partitional and based on physical attributes.

— In the *second level*, or analysis level, geometric figures are recognized as formed by parts and having properties. Definitions are non-minimal lists of necessary properties. Students are able to deduce and generalize properties through experimentation. Students are not able to do class inclusion. They show a lack of understanding of mathematical proving.

— In the *third level*, or classification level, students are able to recognize, though often informally, that some properties are deduced from others. They are likely to follow the steps in a formal-logical reasoning, but can not understand the structure of a proof. They are able to classify inclusively and to use definitions operatively.

— In the *forth level*, or level of formal deduction, students can understand and carry out formal-logical reasoning. They also understand the axiomatic structure of mathematics.

The existence of a level 0 prior to the visual one has been suggested by some authors (Battista, 2007; Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999). This level, in principle more prevalent in young children, would maintain some presence through primary school and even afterwards (Sarasua, 2011).

Some general characteristics of the thinking levels are briefly given below:

— *Thinking levels form a hierarchical and recursive structure*. Each level represents a degree of reasoning complexity. Each level is built on the previous one: a student will not be able to reason according to level $n + 1$ if he has not previously developed the reasoning capacity of level n.
— *Thinking levels are local*. A student is likely to reason according to different levels in different contexts (plane figures, isometries, angles, etc.). For instance, a student could reason according to the second level in a context of plane figures and according to the first level in a context of isometries (Burger & Shaughnessy, 1986; Gutiérrez & Jaime, 1987).
— *Thinking levels are continuous*. According to Van Hiele and some early research (Hoffer, 1983; Van Hiele, 1986), the step from one level to the next happens in a discrete way, in leaps and with no regression. However, subsequent research has provided evidence, that the transition from one level to the following is a gradual, continuous process sustained over time, that can take even years. During the transition periods there might also be fluctuations in the reasoning way of students, who can behave according to different levels even within the same task (Burger & Shaughnessy, 1986; Pegg & Davey, 1998). However, "this does not imply a rejection of the hierarchical structure of the levels but rather suggests that we should better adapt the van Hiele theory to the complexity of the human reasoning processes; people do not behave in a simple, linear manner, which the assignment of one single level would lead us to expect" (Gutiérrez, Jaime, & Fortuny, 1991, p. 250).

Nevertheless, some shortcomings of the model have also been pointed out: e.g. the dearth of proposals about geometric thinking in young children (Clements et al. 1999), the approach limited to synthetic geometry and the subsequent lack of proposals for the teaching and learning of analytic geometry (Dindyal 2010), or the need for a complementary framework from other theoretical perspectives, such as SOLO taxonomy (Huerta 1999; Pegg & Davey 1998). Recently, a reanalysis of VH levels' descriptors from the perspective of learning goals has been proposed with the purpose of facilitating the curriculum integration of the VH model (Sarasua, 2011).

An important aspect of the VH model, essential for adequate curriculum design and for the implementation of educational sequences adapted to the students' learning expectations, is to have a knowledge as complete as possible on their thinking levels. One of the largest and earliest research projects into levels assignation was the Chicago Project, or *Van Hiele levels and achievement in Secondary School geometry* (Usiskin, 1982). In that research, a multiple-choice written test was constructed to identify thinking levels, and administered to 2700 students from 11 to 20 years of age. That test, known as Usiskin's test, has been widely used since then, and even today it is often utilized in a number of studies, probably for its ease of use and evaluation.

However, Usiskin's test has come in for considerable criticism. Crowley (1990) and Wilson (1990), for instance, have questioned the validity of the results. The latter author has criticized the lack of consistency in the methodology, because the difficulty of the questions is not homogeneous at each level, and they do not always correspond with the level they are assigned to.

It has even been suggested that positive results can not be achieved by using multiple-choice tests: in effect, many items could be solved correctly, but by using reasoning associated to different levels. The problem is that such a distinction, that is key for adequate level assignment, goes unnoticed in multiple-choice tests because of their own nature (Crowley, 1989; Jaime, 1993).

This study aims to provide an updated view of the prevalence and distribution of thinking levels in different educational stages. For that purpose, data were collected from extensive research conducted on a large sample (in total 437 students). Although a great deal of research has been done to determine the distribution of levels, a large proportion of it (and not only the earliest ones) has suffered from either methodological shortcomings, which could jeopardize the results (e.g. the use of multiple-choice tests), or partiality in choosing the participants (limited to some groups of students, particularly to prospective teachers), resulting in biased results. To these should be added, that the local nature of levels, requiring specific tests for different topics, makes it quite difficult to extrapolate the results.

The nearest study, both geographically and temporarily, that we have found in the literature and that could be comparable to this work in method, sample size and analyzed topics (plane figures) is a study by Jaime (1993) conducted in the Valencian Community on a sample of 309 students from 11 to 17. However, the nearly two decades passed since it was carried out, the successive curricular changes resulting from new educational laws (LOGSE and LOE) and the influence that the *Principles and Standards* of NCTM have exerted on new geometry curricula suggest, that the prevalence of thinking levels over different educational stages should be revised and updated. This is precisely the objective of this work.

Method

Assessment instrument

Level assignment is performed by presenting the student with some tasks to be solved and evaluating them afterwards through an analysis of the student's reasoning strategies. The test by Jaime for level assignment (Jaime, 1993) was used for several reasons. On the one hand, it consists of a series of open-ended items that, in a way, bring it closer to oral interviews. A structure of «super items» is used, so that each item can be solved according to different thinking levels. Besides, it has been successfully used in more investigations in its original format (Afonso, 2003) or adapted to other topics (Guillén, 1997). On the other hand, the test may be adapted to different educational stages: i.e., from a general battery of super items, several test models can be produced for different educational stages according to the expected predominant VH level among student in each grade. Finally, the test is also intended to measure the graduation of the VH levels: i.e., information is collected not only *quantitatively* about each student's VH level, but also *qualitatively* about the degree of acquisition of each level.

Participants

The test was administered in alternate years from secondary school: i.e., grades 8 and 10 (secondary school, 13 and 15 years, respectively), grade 12 (high school, 17 years) and university. After the test was piloted in grade 6 (primary school, 11 years), it was decided not to use it in that stage. Indeed, most students left it blank or were unable to do the requested tasks. Administrating a test that exceeds students' real capacities may generate frustration among them and unease among their teachers, as well as compromise the reliability of the results. Should it have been otherwise, it would have been necessary to adapt the test to the students' expected level by adding items associated to level 0. In any case, we do not know of any tool for assessing that suggested level 0.

The schools, where the tests were administered are coeducational, located in environments of the Basque Country (Spain), and share heterogeneous socioeconomic characteristics. The sample included both public and private schools. For each class, the tests were administered in the language in which mathematics was thought: Basque or Spanish. The fieldwork was carried out in three private schools, three public schools and a public Teacher Training College (for primary school teachers). The total number of individuals sampled was 437. The test was passed in a single 50-minute session, and researchers were present at it to respond to any questions that might arise.

Data coding

The test was assessed by using the method proposed by its author (Jaime, 1993). However, a few changes were introduced in order to adapt it to the purpose and characteristics of this study. So, degrees of acquisition vary slightly: the *no level acquisition* disappears, as it is not necessary for our statistical analysis, as does the *complete level acquisition*, which was merged with the *high level acquisition*. The original terminology was kept, but percentage intervals were altered slightly as shown in Chart 1:

Chart 1

Percentage Intervals for Level Acquisition

Low acquisition of level "n"	15% < Gr(n) < 40%
Intermediate acquisiton of level "n"	40% ≤ Gr(n) ≤ 75%
High acquisition of level "n"	75% < Gr(n) ≤ 100% 0% ≤ Gr(n + 1) ≤ 15%

At the end of the process, each student is assigned a score of four numerical values, namely the degrees of acquisition of the four levels. These values are represented by a vector with the form $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, with $x_i = \phi$, *low, intermediate, high*, $\forall i = 1, 2, 3, 4$, where each coordinate denotes the degree of acquisition of the same level as its order.

The advantage of such a multiple assignment is that it facilitates the identification of students in transition between levels. For our investigation, however, a vector with multiple components makes it difficult to analyze the results holistically and to assess their evolution over the educational stages. That is why the choice was made to go for the classical assignment of a single VH level, despite considering the three degrees of acquisition that have been pointed out above. Therefore, each student was assigned a single level. It was taken as an accepted fact that the levels have a continuous and hierarchical structure.

The levels will be segmented into 12 units (number of levels multiplied by degrees of acquisition of each level): x_i = *low*, x_i = *intermediate* and x_i = *high*, with *i* = *1, 2, 3, 4*. Finally, the level and degree assigned to each student will be:

— *The first level with its degree,* if there is no acquisition of the second, third and fourth levels. E.g. a student with a vector of the form *[high, ϕ, ϕ, ϕ]* would be assigned to the first level with a high degree of acquisition.

— *The highest level with its degree*, if the gap between the two highest consecutive non-zero levels is one or two units. This is the case for the great majority of students with more than one level, as shown in Chart 2:

Chart 2

Examples of Assignment of the VH Level from the General Vector

Vector	Gap between the two highest consecutive levels	Assigned level	Assigned degree
[high, intermediate, low, ϕ]	2	3	Low
[high, intermediate, ϕ, ϕ]	2	2	Intermediate
[high, low, ϕ, ϕ]	1	2	Low

— *Predominant thinking level with its degree of acquisition*, if none of the situations above apply. A small number of students were matched to a vector with gaps of more than two units between the two highest thinking levels (e.g. *[high, intermediate, intermediate, ϕ]* or other singularities (e.g. *[intermediate, low, intermediate, ϕ]*). These doubtful cases were assessed individually in order to assign them "a predominant level and degree". It was understood, for example, that a student who does not answer a certain item about the identification of concave or convex polygons, or does so incorrectly, but at the same time shows advanced reasoning skills (e.g. in proving), must be assigned at least to the third level. How would the results change if, for instance, "concavity" and "convexity" were defined in the item formulation? Might such a terminological (not conceptual) confusion act as a distractor? This kind of issue, going beyond a coded and quantitative analysis, has been weighted individually and in context.

A few students were excluded from the sample (e.g. for cheating or for not taking the test seriously).

From here on, when referring to the assigned thinking level, we will mean the highest thinking level or, in particular cases, the predominant level according to the above criteria.

Finally, results will be matched to those obtained by Jaime (1993), since that study is, to the best of our knowledge, the only one that could be considered comparable to our study in method (an open-ended test taking into account different degrees of acquisition), in topic (plane figures), in geographical proximity (the Valencian Community) and in curriculum affinity.

Statistical analysis

Data were codified and quantitatively analyzed by using SPSS v. 15.

Results

The results, arranged according to the grades, are shown in Tables 1-2 and in Figure 1:

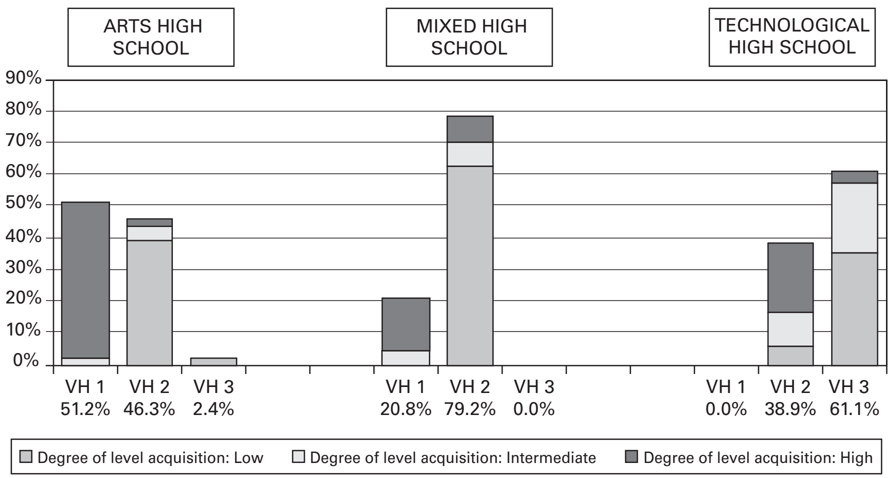

Figure 1. Distribution of levels and degrees of acquisition among the different high school specializations.

Table 1

Level Distribution in the 2nd Year of Secondary School (Aged 13), the 4th Year of Secondary School (Aged 15) and the 2nd Year of High School (Aged 17, Arts, Mixed and Technology)

Grade	VH level		Total	Degree of acquisition of the VH level		
				Low	Intermediate	High
2nd year of secondary school *N*: 104	1	*N*	68	4	31	33
		% of the level	100.0%	5.9%	45.6%	48.5%
		% of the total	65.4%	3.8%	29.8%	31.7%
	2	*N*	36	21	9	6
		% of the level	100.0%	58.3%	25.0%	16.7%
		% of the total	34.6%	20.2%	8.7%	5.8%
4th year of secondary school *N*: 110	1	*N*	54	1	19	34
		% of the level	100.0%	1.9%	35.2%	63.0%
		% of the total	49.1%	0.9%	17.3%	30.9%
	2	*N*	53	33	14	6
		% of the level	100.0%	62.3%	26.4%	11.3%
		% of the total	48.2%	30.0%	12.7%	5.5%
	3	*N*	3	3	0	0
		% of the level	100.0%	100.0%	0.0%	0.0%
		% of the total	2.7%	2.7%	0.0%	0.0%
2nd year of high school *N*: 119	1	*N*	26	0	2	24
		% of the level	100.0%	0.0%	7.7%	92.3%
		% of the total	21.8%	0.0%	1.7%	20.2%
	2	*N*	59	34	10	15
		% of the level	100.0%	57.6%	16.9%	25.4%
		% of the total	49.6%	28.6%	8.4%	12.6%
	3	*N*	34	20	12	2
		% of the level	100.0%	58.8%	35.3%	5.9%
		% of the total	28.6%	16.8%	10.1%	1.7%

Differences among high school specializations (Arts, Mixed and Technology) are shown in Figure 1:

Level distribution among prospective primary school teachers is shown in Table 2: 2nd year of Physical Education (without having taken mathematics previously) and 3rd year of Primary Education (after taking, at least, one mathematics subject, and being at that time taking another subject on geometry and measurement).

Table 2

Level Distribution Among Primary School Prospective Teachers

Grade	VH level		Total	Degree of acquisition of the VH level		
				Low	Intermediate	High
Second-year prospective teachers (Physical Education) *N*: 47	1	*N*	5	1	0	4
		% of the level % of the total	100.0% 10.6%	20.0% 2.1%	0.0% 0.0%	80.0% 8.5%
	2	*N*	33	17	10	6
		% of the level % of the total	100.0% 70.2%	51.5% 36.2%	30.3% 21.3%	18.2% 12.8%
	3	*N*	9	6	3	0
		% of the level % of the total	100.0% 19.1%	66.7% 12.8%	33.3% 6.4%	0.0% 0.0%
Third-year prospective teachers (Primary Education) *N*: 57	2	*N*	13	3	5	5
		% of the level % of the total	100.0% 22.8%	23.1% 5.3%	38.5% 8.8%	38.5% 8.8%
	3	*N*	44	19	19	6
		% of the level % of the total	100.0% 77.2%	43.2% 33.3%	43.2% 33.3%	13.6% 10.5%

Finally, the results obtained by Jaime (1993) (sample taken in 1991, in the Valencian Community) and these obtained by the present study (sample taken in 2010, in the Basque Country) are shown comparatively in Figure 2. In both cases, 17 year-old

Sample sizes

Age	1991	2010
13	83	104
15	36	110
17	31	54

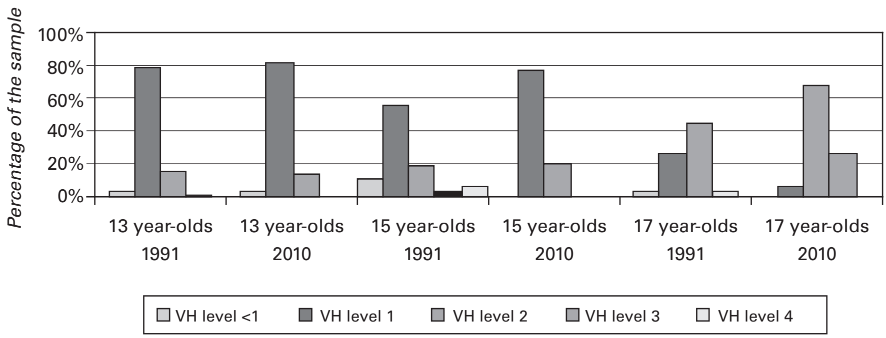

Figure 2. Comparison of level prevalence: results obtained in 1991 and in 2010.

students were taking technology or science courses in High School. For that comparison, the results collected by Jaime were treated, so that every individual was assigned not to a vector of levels, like in the original study, but to a single level (the predominant or the greatest one) according to the criteria detailed above. In order to facilitate the comparison, every individual with low acquisition of level $n + 1$ (i.e. $0\% < Gr(n + 1) < 40\%$), with $n = 1, 2$ or 3, was assigned to level n.

Discussion

Although the sample of the present study is relatively large and heterogeneous, direct generalization of the obtained results is not intended. Nevertheless, it might be useful to show some trends or suggest certain tendencies.

Firstly, it can be observed that predominant levels, and also degrees of acquisition within each level, gradually progress from one grade to the next. More specifically:

Four out of five students in their 2nd year of secondary school (SS) show intermediate-high acquisition of the first level or low acquisition of the second one. The number of students having low acquisition of the first level is negligible (4%). If low or high acquisition of level is accepted as a transition indicator, one in two students would be on the borderline between the first and the second level. The third level is not found.

The third level continues to be practically non-existent in the 4th year of SS (3%). Half the students are at the first level and the other half at the second one. Four out of five show at least high acquisition of the first level, but they do not reach high acquisition of the second one. By using the Chi-squared test, relevant differences ($\chi^2 = 0.021$) were detected between the results obtained in the 2nd and 4th years of SS for a significance level of 5%.

In the 2nd year of high school (HS), if the three specialities are considered together, there is strong presence of the three levels, although the second one predominates: two in four students are at the second level, one is at the first level and another one is at the third level. The differences are really significant ($\chi^2 = 0.000$) in comparison with the results in the 2nd and 4th years of SS. Four out of five show, at least, low acquisition of the second level. Although direct comparison can not be made with the 4th year of SS (not all secondary students continue to high school), the observed trend indicates a progressive increase in the predominant level and the degree of acquisition. However, if the results are analyzed by speciality, significant differences emerge. In Arts, for example, level distribution is virtually the same as in the 4th year of SS: the third level is barely found (2%), and 9 out of 10 students range from high acquisition of the first level to low acquisition of the second one. The fact that the situation is pretty much the same as in the 4th year of SS does not necessarily mean that there has been no progression in those students: in effect, their starting level in the 4th year of SS could have been below the average. In Technology, the situation is very different: the first level disappears completely, six out of ten students reason according to the third level and four out of five show, at least, a high degree of acquisition of the second level. The differences between Technology and the other specialities (Arts and Mixed) yield $\chi^2 = 0.000$, and, therefore, they are very meaningful. The differences between Arts and Mixed are also meaningful ($\chi^2 = 0.032$).

As might be expected, there are remarkable differences between prospective teachers, who have not yet taken any mathematics subject (the physical education group) and those who, at least, have taken a mathematics subject (the primary education group). Indeed, $\chi^2 = 0.000$ is obtained when comparing the two specialities, which is a very meaningful score. Among the former (physical education group), results show a distribution similar to that observed in the 2nd year of HS (the Chi-squared test does not yield significant differences), being a few more students at the second level (seven out of ten) and fewer at the first and third levels. Among the latter (primary education group), nearly four in five students have reached the third level (more than half of them with intermediate or high degree of acquisition). Here $\chi^2 = 0.000$, and so the differences are very meaningful compared to the 2nd year of HS.

The forth level was not detected in the sample, not even among primary school prospective teachers. Moreover, the third level (i.e. the level where students' formal reasoning capacity begins to develop) is virtually non-existent, even with a low degree of acquisition, through secondary school. The prevalence of the third level is significant only among primary school prospective teachers with prior training in mathematics and among students of mixed or technological high school.

According to the curriculum in force, synthetic geometry is basically dealt with in secondary school, and is practically non-existent in high school. In this latter stage, geometric proof is dealt with in the context of analytic geometry, which is outside the scope of the VH model. Such curriculum organization makes it hard to address more effectively the difficulties students encounter in making progress in their thinking level, particularly from level 2 to 3, whose transition is linked to the acquisition of proving skills.

With respect to the results obtained almost two decades ago, the evolution seems to be modest, although gradually progressive. There are not significant differences ($\chi^2 = 0.721$) among 13 year-old students. Among 15 year-old students, differences are very significant ($\chi^2 = 0.000$): almost all the students in 2010 reach at least the first level, whereas the prevalence of higher levels is virtually the same (very low). A greater prevalence of the second level, to the detriment of the first one, is observed among second year HS students (69% compared with 45%), although the prevalence of the third level is the same ($\chi^2 = 0.021$).

In explaining such modest progress, suggested by the results, in the prevalence of the thinking levels in secondary and high school during the last two decades, it is worthwhile bearing in mind some factors. On the one hand, new curricula emanating from LOE-2006 had barely been implemented in the Basque Country in 2010, after some years of standstill due to legal and political disputes. As noted above, new curricula, and particularly that in the Basque Country, show a substantial influence of the Principles and Standards of NCTM (Fernández, 2011; Gutiérrez, 2009).

On the other hand, and more substantially, the influence of the Principles and Standards basically concerns the way, how conceptual contents are introduced and how students should solve problems. These aspects are intended to progress through the school years according to the characteristics of the thinking levels and depending on the expectations about their prevalence among the students. However, the instructional part of the Van Hiele model has received limited attention in our region outside the scope of academic research, although there is a notable exception (Arrieta, Lacalle, & López, 1997). Indeed, although a large number of teaching proposals based on the Van Hiele model has been developed on a pilot basis or as research projects, we do not know of any textbook or school (including those involved in this research), which uses the model as a framework for its teaching sequences. It would be of particular interest to address more substantial implementation of the VH model as a whole (including also its instructional part), sustained over time and on a larger scale: i.e. beyond pilot and time-limited experiences, with small groups or relating to certain topics, which have indeed proved capable of speeding up significantly students' transition from one level to the next.

References

Afonso, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio (Ph thesis)*. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Arrieta, M., Lacalle, M. C., & López, M. (1997). *El modelo van Hiele: una propuesta al tratamiento a la diversidad en la enseñanza de la geometría*. Vitoria-Gasteiz: Dirección de Renovación Pedagógica del Gobierno Vasco.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.

Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the VH levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 243-245. doi: 10.2307/749317.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212. doi: 10.2307/749610.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Crowley, M. L. (1989). The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinking about quadrilaterals. Ann Arbor: Univ. Microfilms.

Crowley, M. L. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the Van Hiele geometric test. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 238-241. doi: 10.2307/749377.

Dindyal, J. (2010). *Use of algebraic thinking in geometry*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.

Fernández, S. (2011). Personal communication [Santiago Fernández is the supervisor coordinating the curriculum adaptation of LOE for secondary and high school mathematics in the Basque Country].

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1984). *English translations of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York: Brooklyn College, City University of New York.

Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (Monograph number 3)*. Reston: NCTM. doi: 10.2307/749957.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje (PhD thesis)*. Valencia: Universitat de València.

Gutiérrez, A. (2009). Perspectiva de la investigación en didáctica de las matemáticas. *Investigación en la Escuela, 69*, 61-72.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1987). Estudio de las características de los niveles de Van Hiele. In J. C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics Education* (Vol. 3, pp. 131-137). Montréal: Université de Montréal.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251. doi: 10.2307/749076.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). Florida: Academic Press.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las ciencias, 17*(2), 291-309.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento (PhD thesis)*. Valencia: Universitat de València.

Miñano, P., & Castejón, J. L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en lengua y matemáticas: un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica, 16*(2), 203-230.

Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G., & Ramiro, P. (2011). Desarrollo operatorio y conocimiento aritmético: vigencia de la teoría piagetiana. *Revista de Psicodidáctica, 16*(2), 251-266.

NCTM (2000). *Principles and standars for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. E. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosario, P., Mourao, R., Baldaque, M., Nunes, T., Nuñez, J. C., Gonzalez-Pienda, J. A., Cerezo, R., & Valle, A. (2009). Tareas para casa, autorregulación del aprendizaje y rendimiento en matemáticas. *Revista de Psicodidáctica, 14*(2), 179-192.

Sarasua, J. (2011). *Hacia una categorización de los objetivos geométricos. Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de Van Hiele para la representación externa de figuras planas (PhD thesis)*. Vitoria-Gasteiz: Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. (Final report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry project.). Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (PhD thesis) (Translation to Spanish headed by Ángel Gutiérrez in 1990)*. Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. London: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1987). *A method to faciliate the finding of levels of thinking in geometry by using levels in arithmetic*. Paper presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry, New York.

Van Hiele, P. M. (1999). Begin with play. *Teaching children mathematics, 6*, 310-316.

Wilson, M. (1990). Measuring a Van Hiele geometry sequence: a reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 230-237. doi:10.2307/749376.

José M. Sarasua has a Bachelor's in Mathematics and a PhD in Mathematics Education from the University of the Basque Country. He is a lecturer at the Teacher Training College of Vitoria-Gasteiz, in the Department of Mathematics and Experimental Sciences Didactics (University of the Basque Country). His research activity is focussed on the teaching and learning of geometry and on the analysis of textbooks.

Josu G. Ruiz de Gauna has a Bachelor's in Mathematics and a PhD in Mathematics Education from the University of the Basque Country. He is a lecturer at the Teacher Training College of Leioa, in the Department of Mathematics and Experimental Sciences Didactics (University of the Basque Country). His research activity is focussed on the analysis of textbooks and on the teaching and learning of geometry.

Modesto Arrieta has a Bachelor's in Mathematics and a PhD in Mathematics Education from the University of the Basque Country. Until his recent retirement, we was a senior lecturer at the Teacher Training College of Donostia-San Sebastian, in the Department of Mathematics and Experimental Sciences Didactics (University of the Basque Country). His research activity is focussed on mathematical performance, on the teaching and learning of geometry and on curriculum development.

Received date: 23-08-2012 Review date: 01-01-2013 Accepted date: 23-01-2013

Revista de Psicodidáctica, 2013, 18(2), 313-329
www.ehu.es/revista-psicodidactica
ISSN: 1136-1034 eISSN: 2254-4372

DOI: 10.1387/RevPsicodidact.6466

Prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diferentes etapas educativas

José M. Sarasua, Josu G. Ruiz de Gauna, y Modesto Arrieta
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Resumen

En este artículo se presenta un estudio que tiene como objetivo contribuir a ofrecer una panorámica actualizada sobre la prevalencia de los niveles de razonamiento geométrico a lo largo de diversas etapas educativas. Participan en esta investigación 437 estudiantes de enseñanza media, bachillerato y universidad de diferentes centros educativos, y en ella se analiza la distribución de los niveles y su grado de adquisición en función de las etapas educativas. Tras analizar los resultados, éstos se relacionan con los obtenidos hace casi dos décadas por el último estudio comparable y de similares características del que se tiene conocimiento. A pesar de los cambios curriculares introducidos durante este periodo, la evolución que se aprecia en la prevalencia de los diferentes niveles entre los estudiantes de las etapas analizadas es discreta, aunque muestra cierto progreso gradual.

Palabras clave: Niveles de Van Hiele, razonamiento geométrico, organización curricular, enseñanza de la geometría.

Abstract

In this article, a study is presented with the goal of contributing to provide an updated view on the prevalence of thinking levels over different educational stages. On a sample of 437 students of compulsory and non-compulsory secondary education and university, studying in different schools, distribution of levels and their degree of acquisition are analysed according to the educational stages. After the data were analysed, these are compared with the results obtained nearly two decades ago by the only comparable study of similar characteristics we have knowledge of. Despite the curriculum changes introduced over that period, the evolution observed in the prevalence of the different levels among the students of the analysed stages is, on the whole, modest although gradually progressive.

Keywords: Van Hiele levels, geometric reasoning, curriculum organization, teaching of geometry.

Correspondencia: José M. Sarasua, Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE., Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea, Escuela Universitaria de Magisterio de Vitoria-Gasteiz, Juan Ibáñez de Santo Domingo 1, 1006-Vitoria-Gasteiz. E-mail: joxemari.sarasua@ehu.es

Introducción

Son numerosas las investigaciones en diversas áreas de la didáctica de las matemáticas, como, por ejemplo, en relación al rendimiento matemático (Miñano y Castejón, 2011; Rosario et al., 2009) o a las dificultades de aprendizaje (Navarro, Aguilar, Marchena, Ruiz, y Ramiro, 2011). Sin embargo son más escasas las investigaciones referidas al razonamiento matemático y, en particular, al geométrico.

El modelo de Van Hiele (Battista, 2007; Van Hiele, 1986) constituye seguramente el marco de referencia más importante en el campo de la investigación en didáctica de la geometría y razonamiento geométrico. Gracias a él se ha conseguido modelizar el proceso mediante el cual los estudiantes adquieren los contenidos geométricos, caracterizando y jerarquizando diferentes modos de razonamiento. Esto ha llevado a poder diseñar propuestas de enseñanza más coherentes y ajustadas al nivel de los alumnos, pudiéndose acelerar de manera significativa los procesos de aprendizaje. Su influencia se percibe claramente en el documento *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003), conjunto de directrices aportadas por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de EE.UU. y Canadá. En dicho documento, convertido de facto en referencia curricular internacional, se propone una metodología de la enseñanza de la geometría centrada en los niveles de Van Hiele (o niveles de razonamiento geométrico), según la cual la presentación de los contenidos conceptuales y la forma en que los estudiantes deben resolver los problemas progresan a lo largo de los cursos según las características de los niveles (Gutiérrez, 2009).

Una de las principales características de los niveles de Van Hiele (VH) es que éstos no dependen tanto del desarrollo evolutivo (concepción biologicista) como del tipo de instrucción recibida (Fuys, Geddes, y Tischler, 1984): por ejemplo, un estudiante de bachillerato (16-17 años) o de universidad puede resolver tareas matemáticas utilizando formas de razonar correspondientes al mismo nivel de razonamiento que un estudiante de Primaria (6-11 años) o de los primeros cursos de Secundaria (12-13 años).

No obstante, de cara a una correcta organización curricular y a un diseño efectivo de las intervenciones didácticas resulta de particular interés conocer, en la medida de lo posible, la prevalencia real de los niveles de VH según las etapas educativas puesto que no siempre es posible identificar directamente en el aula y de forma previa a la instrucción el nivel de razonamiento de los estudiantes.

El modelo de VH surgió en los años cincuenta a raíz de sendas tesis doctorales de Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof (Fuys et al., 1984; Van Hiele, 1957). Corberán et al. (1994). A continuación se sintetizan sus ideas centrales:

— En los estudiantes se pueden encontrar diferentes niveles de per-

fección en cuanto a razonamiento matemático: los llamados *niveles de razonamiento*.
— Un estudiante sólo podrá comprender aquellas partes de las matemáticas que se le presenten de acuerdo a su nivel de razonamiento.
— Al estudiante se le puede ayudar, mediante una instrucción orientada adecuadamente, a que progrese en su nivel de razonamiento.

El modelo de VH consta de una *parte descriptiva* y de una *parte instruccional*. En la parte descriptiva se identifican diferentes modos de pensamiento matemático, los llamados *niveles de razonamiento*. La capacidad de razonamiento de cualquier individuo progresa a través de esos niveles desde que comienza el aprendizaje de cierto bloque de la geometría hasta que alcanza su máximo nivel de aprendizaje en ese bloque. En la parte instruccional se ofrecen directrices a profesores y autores para un diseño más efectivo de unidades o secuencias didácticas que ayuden a los estudiantes a alcanzar con más facilidad un nivel superior de razonamiento. A este conjunto de directrices se le denomina «fases de aprendizaje», etapas en las que se secuencian y organizan las actividades didácticas mediante las cuales los estudiantes adquieren las experiencias suficientes para progresar a un nivel superior de razonamiento (Van Hiele, 1999). Esta parte del modelo es la que menos ha evolucionado desde su formulación en la década de los 50.

Los niveles de razonamiento se definen por medio de *descriptores* o características referidas a la forma de razonar matemáticamente que manifiestan los estudiantes cuando se les proponen ciertas actividades. En la práctica se consideran cuatro niveles (existe un quinto, pero sólo formulado teóricamente), cuyos descriptores referidos a las figuras planas se sintetizan a continuación (Corberán et al., 1994; Fuys, Geddes, y Tischler, 1988; Van Hiele, 1957, 1987).

— En el *nivel 1*, o de reconocimiento visual, las figuras geométricas se perciben globalmente, según la apariencia física, como unidades carentes de partes o propiedades. Las clasificaciones son partitivas y basadas en atributos físicos.
— En el *nivel 2*, o de análisis, las figuras geométricas se reconocen como formadas por partes y dotadas de propiedades. Las definiciones son listas no mínimas de propiedades necesarias. Los estudiantes pueden deducir y generalizar propiedades a partir de la experimentación. Los estudiantes son incapaces de realizar inclusiones de clases. Muestran ausencia de comprensión sobre las demostraciones matemáticas.
— En el *nivel 3*, o de clasificación, los estudiantes son capaces de reconocer que unas propiedades se deducen de otras, aunque a menudo de manera informal. Comprenden los pasos de un razonamiento lógico formal, pero no entienden la estructura de una de-

mostración. Son capaces de clasificar inclusivamente y de manejar definiciones operativamente.

— En el *nivel 4*, o de deducción formal, los estudiantes entienden y realizan razonamientos lógicos formales. Comprenden también la estructura axiomática de las matemáticas.

Algunos autores han sugerido la existencia de un nivel 0 previo al visual (Battista, 2007; Clements, Swaminathan, Hannibal, y Sarama, 1999). Este nivel, en principio más prevalente en edades tempranas, mantendría cierta presencia a lo largo de Primaria e incluso en etapas posteriores (Sarasua, 2011).

Se enuncian brevemente a continuación algunas características generales de los niveles de razonamiento:

— *Los niveles de razonamiento forman una secuencia jerarquizada y recursiva*. Cada uno de los niveles representa un grado de complejidad de razonamiento. Cada nivel se construye sobre el anterior: un estudiante no podrá razonar según el nivel $n + 1$ si no ha adquirido previamente la capacidad de razonar del nivel n.

— *Los niveles de razonamiento son locales*. Un estudiante puede razonar según diferentes niveles en contextos diferentes (figuras planas, isometrías, ángulos…). Por ejemplo, un estudiante puede razonar según el nivel 2 en un contexto de figuras planas y en un nivel 1 en un contexto de isometrías (Burger y Shaughnessy, 1986; Gutiérrez y Jaime, 1987).

— *Los niveles de razonamiento son continuos*. Según Van Hiele y algunas investigaciones tempranas (Hoffer, 1983; Van Hiele, 1986), el paso de un nivel al siguiente sucede de forma discreta, mediante «saltos» y sin retrocesos. Sin embargo, investigaciones posteriores han evidenciado que la transición de un nivel al siguiente es un proceso gradual, continuo, sostenido en el tiempo incluso durante años y con oscilaciones en la forma de razonar de los estudiantes, que pueden actuar según diferentes niveles incluso dentro de una misma actividad (Burger y Shaughnessy, 1986; Pegg y Davey, 1998). No obstante, «esto no significa una negación del carácter jerárquico de los niveles, sino más bien sugiere la necesidad de adaptar la teoría de Van Hiele a la complejidad de los procesos de razonamiento humanos; las personas no actúan de un modo simple y lineal, como podría hacernos esperar la asignación de un único nivel de razonamiento» (Gutiérrez, Jaime, y Fortuny, 1991, p. 250).

Se han señalado también algunas carencias del modelo, como las pocas propuestas sobre pensamiento geométrico para la etapa infantil (Clements et al., 1999) o la limitación a la geometría sintética, con la consiguiente falta de propuestas en geometría analítica (Dindyal, 2010). También se ha señalado la conveniencia de complementar el modelo desde otras perspectivas teóricas, como, por ejemplo, la taxonomía SOLO (Huerta, 1999; Pegg y Davey, 1998). Recientemente se ha propuesto un reanálisis de los descriptores de los niveles desde la perspectiva de los objetivos de aprendizaje con el propósito de facilitar la integración curricular del modelo de VH (Sarasua, 2011).

Un aspecto fundamental del modelo de VH, sobre el cuál pivota tanto un diseño curricular adecuado como la implementación de secuencias didácticas adaptadas a las expectativas de aprendizaje de los estudiantes, es tener un conocimiento lo más ajustado posible de los niveles de razonamiento de aquéllos. Uno de los estudios más amplios y tempranos en investigar la asignación de los niveles fue el proyecto Chicago, o *Van Hiele levels and achievement in Secondary School geometry* (Usiskin, 1982). Para ello se elaboró un test escrito de elección múltiple para la identificación del nivel de razonamiento que fue administrado a 2.700 estudiantes de entre 11 y 20 años. Este test, conocido como el Test de Usiskin, ha sido ampliamente utilizado desde entonces, y aún hoy día se suele utilizar en numerosos estudios, probablemente por su sencillez de uso y de evaluación.

Este cuestionario ha sido objeto, no obstante, de distintas críticas. Crowley (1990) y Wilson (1990), por ejemplo, cuestionan la validez de los resultados obtenidos, dada la falta de consistencia de la metodología utilizada, señalando que el grado de dificultad de las preguntas no es homogéneo dentro de cada nivel y que éstas no están siempre en relación con el nivel que se les atribuye.

Asimismo, se ha llegado a sugerir la imposibilidad de obtener resultados positivos mediante el uso de test de elección múltiple: en efecto, muchos ítems pueden ser resueltos de manera correcta pero haciendo uso de razonamientos asociados a niveles diferentes; y esta distinción clave para una correcta asignación de nivel pasa inadvertida en los test de elección múltiple por la propia naturaleza de éstos (Crowley, 1989; Jaime, 1993).

El objetivo del presente trabajo es contribuir a ofrecer una panorámica actualizada sobre la prevalencia y distribución de los niveles de razonamiento en diferentes etapas educativas a partir de los datos obtenidos de una investigación llevada a cabo sobre una muestra amplia de estudiantes (en total 437). En efecto, aunque han sido numerosas las investigaciones en ese sentido, una gran parte de ellas (y no solamente las más tempranas) han adolecido o bien de déficits de método que podrían llegar a comprometer severamente los resultados (por ejemplo, el uso de test de elección múltiple) o bien de parcialidad en la elección de la muestra (limitada a determinados grupos de alumnos, especialmente a maestros en formación), con el consiguiente sesgo en los resultados. A esto hay que añadir que el carácter local de los niveles, que requeriría de test específicos para diferentes grupos de contenidos, dificulta significativamente la extrapolación de resultados.

El estudio más cercano que conocemos, tanto geográfica como temporalmente, y que podría ser comparable al presente trabajo por método, extensión de la muestra y grupo de contenidos analizados (figuras planas), es el de Jaime (1993), llevado a cabo con 309 alumnos de la Comunidad Valenciana de entre 6.º de la antigua Enseñanza General Básica (EGB) y el curso preparatorio de acceso a la universidad (COU); en total de entre 11 y 17 años. Sin embargo, las casi dos décadas transcurridas desde su realización, las sucesivas modificaciones curriculares derivadas de la implementación de nuevas leyes en materia de educación (LOGSE y LOE) así como la influencia que en los nuevos currículos de geometría han ejercido los *Principios y Estándares* del NCTM aconsejan una revisión actualizada de la prevalencia de los niveles de razonamiento a lo largo de las diferentes etapas educativas. Éste es, precisamente, el objetivo de este trabajo.

Método

Instrumento de evaluación

La asignación de niveles de razonamiento se realiza planteando al estudiante un conjunto de tareas a resolver y evaluándolas mediante el análisis de las estrategias de razonamiento que haya utilizado. Para ello se ha hecho uso del cuestionario de Jaime (1993) por diversas razones. Por una parte, se trata de un cuestionario compuesto por ítems de respuesta libre que supera las limitaciones de los test de elección múltiple y lo acerca a las entrevistas orales. Utiliza la estructura de «superítems», según la cual se considera que un mismo ítem pueda ser resuelto de acuerdo a diferentes niveles de razonamiento. Además ha sido utilizado con éxito en más investigaciones, bien en su formato original para las figuras planas (Afonso, 2003) o bien adaptado a otros grupos de contenidos (Guillén, 1997). Por otra parte, es adaptable a diferentes etapas educativas, esto es, se contemplan modelos diferentes para los diferentes cursos en función del nivel de VH teórico que se espera que predomine entre los estudiantes de cada curso. Por último, el cuestionario prevé la graduación de los niveles de VH, esto es, proporciona información no solo *cuantitativa* sobre el nivel de VH del estudiante, sino también *cualitativa* sobre el grado de adquisición de cada nivel.

Participantes

El cuestionario se administró en cursos alternos a partir de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO): 2.º de ESO (13 años), 4.º de ESO (15 años), 2.º de bachillerato (17 años) y Universidad. Tras una prueba piloto donde se pasó el cuestionario a varios grupos de 6.º de Primaria (11 años), se descartó su uso en esta etapa. En efecto, la mayor parte de los estudiantes o bien lo dejaron en blanco o bien fueron incapaces de realizar las tareas solicitadas. Administrar un cuestionario sobredimensionado a las capacidades reales de los alumnos corre el riesgo de generar frustración en éstos y malestar en sus profesores, además de comprometer la fiabilidad de los resultados. Para haberlo podido utilizar, habría sido necesario readaptar el cuestionario y ajustarlo mejor al nivel previsto de los estudiantes, haciéndose probablemente necesaria la inclusión de ítems relativos al nivel 0. Sin embargo, desconocemos la existencia de instrumentos que evalúen ese sugerido nivel 0.

Los centros donde se administraron los cuestionarios son mixtos y están situados en entornos de características socioeconómicas heterogéneas de la Comunidad Autónoma Vasca. La muestra incluyó tanto colegios públicos como privados. A cada grupo se le administró el cuestionario en el idioma en que cursaban las matemáticas: vasco o español. El trabajo de campo se llevó a cabo en dos centros públicos y en uno privado (los tres de ESO y bachillerato) y en una Escuela Universitaria de Magisterio. El número total de sujetos válidos de la muestra fue 437. El cuestionario se administró en una única sesión de cincuenta minutos. Los investigadores estuvieron presentes durante la sesión para aclarar dudas.

Codificación de los datos

Se ha utilizado el método de evaluación propuesto por la autora del cuestionario (Jaime, 1993), adaptándolo a los objetivos y características de este trabajo. Así, varían ligeramente los diferentes grados de adquisición: desaparece la *adquisición nula* de nivel, por no ser necesaria para nuestro análisis, y también la *adquisición completa*, que se unifica con la *adquisición alta*. Se mantiene la terminología original pero cambian ligeramente los intervalos porcentuales, como se muestra el Cuadro 1:

Cuadro 1

Intervalos Porcentuales de Adquisición de los Niveles

Adquisición baja del nivel «n»	$15\% < Gr(n) < 40\%$
Adquisición media del nivel «n»	$40\% \leq Gr(n) \leq 75\%$
Adquisición alta del nivel «n»	$75\% < Gr(n) \leq 100\%$ $0\% \leq Gr(n+1) \leq 15\%$

Al final del proceso, a cada estudiante se le asignan cuatro valores numéricos que corresponden a los grados de adquisición de los cuatro niveles. Estos valores se representan mediante un vector de la forma $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, con $x_i = \phi$, *bajo, medio, alto*, $\forall i = 1, 2, 3, 4$, donde cada coordenada representa el grado de adquisición del nivel correspondiente a su orden.

La ventaja de esta asignación múltiple es que facilita la identificación de estudiantes en transición entre niveles. Para esta investigación, sin embargo, un vector con múltiples componentes dificulta el análisis integrador de los resultados así como la valoración de su evolución a lo largo de las etapas educativas. Es por ello que se ha optado por mantener la asignación clásica de un único nivel de VH, aunque considerando los tres grados de adquisición que se han señalado anteriormente. Para ello se ha forzado la asignación de un único nivel a cada estudiante, asumiendo el hecho aceptado del carácter continuo y jerarquizado de los niveles.

Los niveles se segmentarán en 12 unidades (número de niveles por los grados de adquisición de cada nivel): x_i = *bajo*, x_i = *medio* y x_i = *alto*, con *i = 1, 2, 3, 4*. De esta manera el nivel y el grado final asignados serán:

— *Primer nivel con el grado correspondiente*, si hay adquisición nula del segundo, tercer y cuarto nivel. P. ej. a un estudiante con vector *[alto, φ, φ, φ]* le correspondería el primer nivel con grado de adquisición alto.
— *Nivel más alto de adquisición con el grado correspondiente*, si la separación entre los dos niveles consecutivos más altos alcanzados no nulos es de una o dos unidades. La gran mayoría de estudiantes con más de un nivel corresponden a este caso. El Cuadro 2 muestra algunos ejemplos:

Cuadro 2

Ejemplos de Asignación del Nivel más Alto de Adquisición con su Grado

Vector	Separación entre niveles consecutivos más altos	Nivel asignado	Grado asignado
[alto, medio, bajo, φ]	2	3	Bajo
[alto, medio, φ, φ]	2	2	Medio
[alto, bajo, φ, φ]	1	2	Bajo

— *Nivel de razonamiento predominante con el correspondiente grado de adquisición*, si no se da ninguna de las situaciones anteriores. A un número reducido de estudiantes le han correspondido vectores con saltos de más de dos unidades entre los dos niveles de razonamiento más altos (p. e. *[alto, medio, medio, φ]*) u otras singularidades (p. e. *[medio, bajo, medio, φ]*). Estos casos dudosos se han evaluado individualmente para asignarles un «nivel y grado predominante». Se ha entendido, p. ej., que un alumno que no responde, o lo hace incorrectamente, a determinado ítem sobre identificación de polígonos cóncavos o convexos, pero que al mismo tiempo muestra habilidades avanzadas de razonamiento (p. e., de demostración) debe ser asignado al tercer nivel. ¿Variarían los resultados si, p. e., en el enunciado se definieran «concavidad» y «convexidad»? ¿Es un elemento distractor la confusión terminológica (que no conceptual)? Este tipo de aspectos, que escapan de un análisis codificado y cuantitativo, los hemos ponderado de forma individual y contextualizada.

Unos pocos estudiantes han sido descartados de la muestra (por ejemplo, por haber copiado).

De aquí en adelante, al hablar de nivel de razonamiento asignado, se entenderá que se refiere al mayor nivel de razonamiento o, en casos particulares, al nivel predominante según los criterios señalados.

Finalmente, los resultados serán puestos en relación con los obtenidos por Jaime (1993), por tratarse este trabajo, según se tiene conocimiento, del único que puede considerarse equiparable al presente tanto por metodología (cuestionario de respuesta libre y que tiene en cuenta los grados de adquisición de los niveles), por grupo de contenidos (figuras planas) como por cierta proximidad geográfica y de influencia curricular (Comunidad Valenciana).

Análisis estadísticos

Los datos se codificaron y analizaron cuantitativamente con el SPSS v. 15.

Resultados

En las Tablas 1-2 y en la Figura 1 se muestran los resultados obtenidos ordenados por cursos:

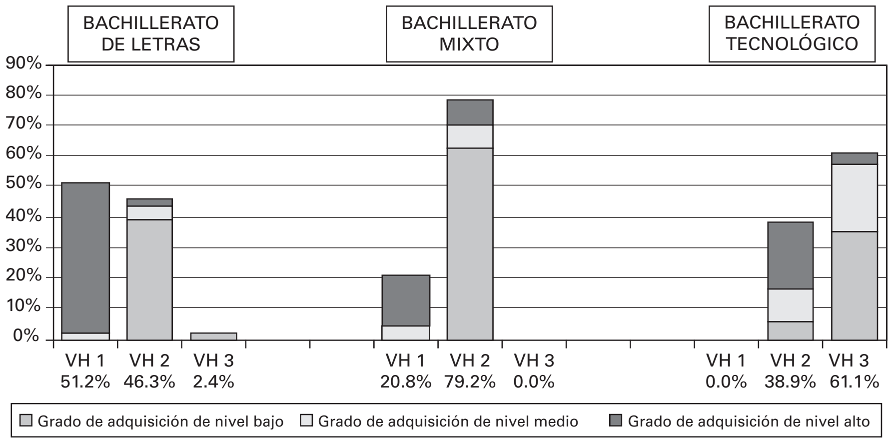

Figura 1. Distribución de niveles y grados de adquisición entre los bachilleratos de Letras, Mixto y Tecnológico.

Tabla 1

Distribución de Niveles en 2.º de ESO, 4.º de ESO y Bachillerato (Letras, Mixto y Tecnológico)

Curso	Nivel de VH		Total	Grado de Adquisición del Nivel de VH		
				Bajo	Medio	Alto
2.º de ESO *N*: 104	1	*N*	68	4	31	33
		% del nivel	100.0%	5.9%	45.6%	48.5%
		% del total	65.4%	3.8%	29.8%	31.7%
	2	*N*	36	21	9	6
		% del nivel	100.0%	58.3%	25.0%	16.7%
		% del total	34.6%	20.2%	8.7%	5.8%
4.º de ESO *N*: 110	1	*N*	54	1	19	34
		% del nivel	100.0%	1.9%	35.2%	63.0%
		% del total	49.1%	0.9%	17.3%	30.9%
	2	*N*	53	33	14	6
		% del nivel	100.0%	62.3%	26.4%	11.3%
		% del total	48.2%	30.0%	12.7%	5.5%
	3	*N*	3	3	0	0
		% del nivel	100.0%	100.0%	0.0%	0.0%
		% del total	2.7%	2.7%	0.0%	0.0%
2.º de Bachillerato (Tecnológico, Letras y Mixto) *N*: 119	1	*N*	26	0	2	24
		% del nivel	100.0%	0.0%	7.7%	92.3%
		% del total	21.8%	0.0%	1.7%	20.2%
	2	*N*	59	34	10	15
		% del nivel	100.0%	57.6%	16.9%	25.4%
		% del total	49.6%	28.6%	8.4%	12.6%
	3	*N*	34	20	12	2
		% del nivel	100.0%	58.8%	35.3%	5.9%
		% del total	28.6%	16.8%	10.1%	1.7%

En la Figura 1 se muestran las diferencias entre las distintas especialidades de Bachillerato: Letras, Mixto y Tecnológico, respectivamente.

En la Tabla 2 se muestra la distribución de niveles entre estudiantes de Magisterio: 2.º de Ed. Física (sin haber cursado ninguna asignatura de

Tabla 2

Distribución de Niveles entre Estudiantes de Magisterio

Curso	Nivel de VH		Total	Grado de Adquisición del Nivel de VH: Bajo	Medio	Alto
2.º de Magisterio de Educación Física *N*: 47	1	*N*	5	1	0	4
		% del nivel	100.0%	20.0%	0.0%	80.0%
		% del total	10.6%	2.1%	0.0%	8.5%
	2	*N*	33	17	10	6
		% del nivel	100.0%	51.5%	30.3%	18.2%
		% del total	70.2%	36.2%	21.3%	12.8%
	3	*N*	9	6	3	0
		% del nivel	100.0%	66.7%	33.3%	0.0%
		% del total	19.1%	12.8%	6.4%	0.0%
3.º de Magisterio de Educación Primaria *N*: 57	2	*N*	13	3	5	5
		% del nivel	100.0%	23.1%	38.5%	38.5%
		% del total	22.8%	5.3%	8.8%	8.8%
	3	*N*	44	19	19	6
		% del nivel	100.0%	43.2%	43.2%	13.6%
		% del total	77.2%	33.3%	33.3%	10.5%

Matemáticas) y 3.º de Ed. Primaria (tras haber cursado, como mínimo, una asignatura troncal de Matemáticas y estando cursando otra troncal específica de geometría y medida).

Finalmente, en la Figura 2 se muestran comparativamente los resultados obtenidos por Jaime (1993) (muestra del año 1991, Comunidad Valenciana) y los obtenidos en el presente estudio (año 2010, Comunidad Autónoma Vasca). En ambos casos los estudiantes de 17 años de la muestra cursaban estudios en la especialidad de Ciencias (COU) o Tecnología (2.º de Bachillerato). Para hacer posible esta comparación, se han tratado los resultados obtenidos por Jaime de tal forma que a cada individuo de su muestra se le ha asignado no un vector de niveles, como en el estudio original, sino un único nivel (mayor o predominante) de acuerdo a los criterios detallados anteriormente. Con el mismo objetivo de facilitar la comparación, en ambos casos un individuo con adquisición baja del nivel $n + 1$ (i.e. $0\% < Gr(n + 1) < 40\%$), con $n = 1, 2$ o 3, ha sido asignado al nivel n.

Tamaño de las muestras

	1991	2010
13 años	83	104
15 años	36	110
17 años	31	54

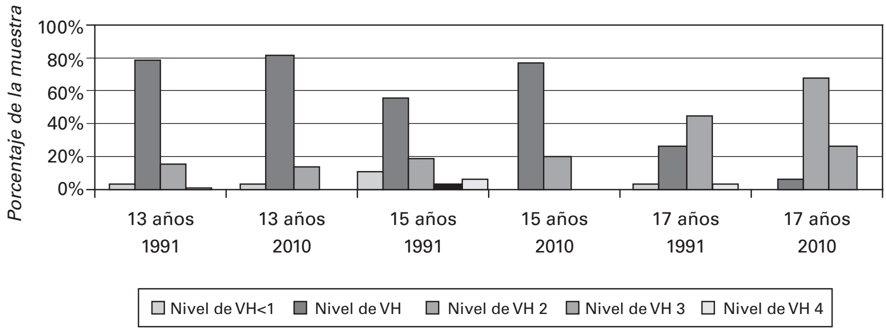

Figura 2. Comparación de prevalencia de los niveles entre los obtenidos en el año 1991 y los obtenidos en el presente estudio (año 2010).

Discusión

Aunque la muestra del presente estudio es relativamente amplia y heterogénea, no se pretende que los resultados obtenidos sean directamente generalizables. Sin embargo, sí pueden ser interesantes para mostrar algunos sesgos o sugerir ciertas tendencias.

En primer lugar se observa que existe una progresión creciente en el predominio de niveles de un curso al siguiente estudiado y, dentro de cada nivel, también en su grado de adquisición. Más concretamente:

Cuatro de cada cinco estudiantes de 2.º de ESO muestran una adquisición media-alta del primer nivel o baja del segundo. Es residual el número de alumnos con una adquisición baja del primer nivel (4%). Si se admite que una adquisición alta o baja de nivel puede ser un indicador de transición, uno de cada dos estudiantes estaría a caballo entre el primer y el segundo nivel. No hay presencia del tercer nivel.

En 4.º de ESO el tercer nivel sigue siendo prácticamente inexistente (3%). La mitad de los estudiantes están en primer nivel y la otra mitad en el segundo. Cuatro de cada cinco muestran al menos una adquisición alta del primer nivel pero no llegan a una adquisición alta del segundo. Mediante la prueba de la Chi-cuadrado se detectan diferencias significativas entre los resultados obtenidos en 2.º y 4.º de ESO ($\chi^2 = 0.021$) al nivel de significación del 5%.

En 2.º de Bachillerato, considerando conjuntamente las tres especialidades, existe una presencia fuerte de los tres niveles, aunque con predominio del segundo: de cada cuatro alumnos, dos están en el segundo nivel, uno en el primero y el otro en el tercero. Las diferencias resultan muy significativas ($\chi^2 = 0.000$) tanto con respecto a los resultados de 4.º como a los de 2.º de ESO. Cuatro de cada cinco muestran, al menos, una adquisición baja del segundo nivel. Aunque no es posible establecer un comparación directa con 4.º de la ESO (no todos los alumnos de ESO pasan a Bachillerato), la tendencia que se observa indica una aumento progresivo del nivel y de los grados de adquisición predominantes. Sin embargo, si se analizan los resultados según la especialidad, aparecen marcadas diferencias. En Letras, p. ej., la distribución de niveles es prácticamente la misma que en 4.º de ESO: el tercer nivel apenas se manifiesta (2%), y 9 de cada 10 estudiantes oscilan entre una adquisición alta del primer nivel y una adquisición baja del segundo. Que la situación sea casi idéntica a la de 4.º de ESO no significa que no haya habido progresión de nivel o de grado entre estos estudiantes, pues podría ser que ya en 4.º de ESO su nivel de partida fuera inferior a la media. En la especialidad de Tecnología la situación es muy distinta: el primer nivel desaparece por completo, seis de cada diez estudiantes razonan según el tercer nivel y cuatro de cada cinco muestran, al menos, un grado de adquisición alto del segundo nivel. Las diferencias entre la especialidad de Tecnología y las otras dos especialidades (Letras, Mixto) dan $\chi^2 = 0.000$ y son, por lo tanto, muy significativas. También son significativas las diferencias entre las especialidades de Letras y Mixto ($\chi^2 = 0.032$).

Entre los alumnos de Magisterio hay diferencias notables, como cabría esperar, entre aquellos que todavía no han cursado en la carrera ninguna asignatura de Matemáticas (el grupo de Ed. Física) y aquellos que, por lo menos, han cursado una asignatura de contenidos matemáticos (el grupo de Ed. Primaria). De hecho, se obtiene una $\chi^2 = 0.000$ para la diferencia de resultados entre las dos especialidades de Magisterio, que son, por lo tanto, muy significativas. Entre los primeros (Ed. Física), los resultados muestran una distribución similar a 2.º de Bachillerato (el test de la Chi-cuadrado no da diferencias significativas), con algunos estudiantes más de segundo nivel (siete de cada diez) y menos del primero y del tercero. Entre los segundos, es decir, en Ed. Primaria ($\chi^2 = 0.000$, siendo por tanto las diferencias muy significativas con respecto a 2.º de Bachillerato) casi cuatro de cada cinco alumnos han alcanzado el tercer nivel, y más de la mitad de ellos lo han hecho con un grado de adquisición medio o alto.

No se ha detectado la presencia del nivel 4 en ningún individuo de la muestra, ni siquiera entre los futuros profesores de Primaria. Así mismo, la presencia del nivel 3, caracterizado por ser el nivel donde empieza a desarrollarse la capacidad de razonamiento formal de los estudiantes, es prácticamente inexistente, aun con grado de adquisición bajo, a lo largo de toda la ESO. El nivel 3 presenta una prevalencia significativa, además de entre futuros profesores de Primaria con formación previa en matemáticas, únicamente entre estudiantes de bachillerato mixto y tecnológico.

Según el currículum en vigor, la geometría sintética se trabaja fundamentalmente durante la ESO, teniendo apenas presencia en bachillerato. En esta última etapa, la demostración en geometría se trabaja en el contexto de la geometría analítica, que quedan fuera del modelo de VH. Esta organización curricular dificulta un abordaje más efectivo de las dificultades que encuentran los estudiantes para progresar de nivel de razonamiento geométrico, particularmente del nivel 2 al nivel 3, tránsito este último ligado a la adquisición de habilidades de demostración.

En relación con los resultados obtenidos hace dos décadas, la evolución es discreta, aunque se aprecia cierta progresión gradual. No hay diferencias significativas ($\chi^2 = 0.721$) entre estudiantes de 13 años (8.º de EGB y 2.º de ESO). Entre estudiantes de 15 años (2.º de BUP y 4.º de ESO) las diferencias son muy significativas ($\chi^2 = 0.000$): en 2010 la casi totalidad de los estudiantes alcanzan al menos el nivel 1, manteniéndose prácticamente constante la prevalencia (muy baja) de los niveles superiores. Se observa una mayor prevalencia del nivel 2, en detrimento del nivel 1, entre estudiantes de 2.º de Bachillerato (69%) que entre estudiantes de COU (45%), aunque la prevalencia del nivel 3 es la misma (diferencias significativas con $\chi^2 = 0.021$).

A la hora de explicar la discreta evolución, sugerida por los resultados, en la prevalencia de los niveles de razonamiento en enseñanzas medias y bachillerato durante las dos última décadas, merece la pena tener en cuenta algunos factores. Por una parte, los nuevos currículos emanados de la LOE del 2006 apenas se habían comenzado a implantar en la Comunidad Autónoma Vasca (CAV) en el año 2010, tras estar paralizados varios años por litigios político-jurídicos. Como se ha señalado, los nuevos currículos, y particularmente el de la CAV, muestran una notable influencia de los *Principios y Estándares* del NCTM según su edición del año 2000 (Fernández, 2011; Gutiérrez, 2009).

Por otra parte, y más sustancialmente, esta influencia de los *Principios y Estándares* se refiere básicamente a la presentación de los contenidos conceptuales y a la forma en que los estudiantes deben resolver los problemas, aspectos estos que se propone que progresen a lo largo de los cursos de acuerdo a las características de los niveles de razonamiento y en función de las expectativas que se tienen sobre la prevalencia de éstos entre los estudiantes. Sin embargo, en nuestro entorno es evidente la escasa atención que, con alguna notable excepción (Arrieta, Lacalle, y López, 1997), ha recibido la parte instruccional del modelo de VH fuera del ámbito de la investigación académica. En efecto, aunque han sido numerosas las unidades y propuestas de enseñanza desarrolladas como experiencias piloto o en proyectos de investigación basadas en el modelo de VH, no conocemos ningún libro de texto ni centro de enseñanza (incluidos los participantes en este estudio) que utilice el modelo, incluido su parte instruccional, como marco para sus intervenciones didácticas. Sería de interés abordar una implementación del modelo de VH en su conjunto (atendiendo también a su vertiente instruccional) más sustancial, sostenida en el tiempo y a una escala extendida: esto es, más allá de experiencias piloto con grupos reducidos y limitadas en el tiempo o en relación a determinados grupos de contenidos, las cuales sí han mostrado ser capaces de acelerar de manera significativa el tránsito entre niveles por parte de los estudiantes

Referencias

Afonso, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio (Tesis doctoral)*. La Laguna: Universidad de La Laguna.

Arrieta, M., Lacalle, M. C., y López, M. (1997). *El modelo van Hiele: una propuesta al tratamiento a la diversidad en la enseñanza de la geometría*. Vitoria-Gasteiz: Dirección de Renovación Pedagógica del Gobierno Vasco.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.

Burger, W. F., y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the VH levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 243-245. doi: 10.2307/749317.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192-212. doi: 10.2307/749610.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Crowley, M. L. (1989). The design and evaluation of an instrument for assessing mastery Van Hiele levels of thinking about quadrilaterals. Ann Arbor: Univ. Microfilms.

Crowley, M. L. (1990). Criterion-referenced reliability indices associated with the Van Hiele geometric test. *Journal for Research in Mathemat-*

ics Education, 21(3), 238-241. doi: 10.2307/749377.

Dindyal, J. (2010). *Use of algebraic thinking in geometry*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.

Fernández, S. (2011). Comunicación Personal [Santiago Fernández es el coordinador responsable de la adaptación Curricular en la CAV del Decreto LOE de 2006 para el área de matemáticas de EE.MM. y Bachillerato].

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1984). *English translations of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*. New York: Brooklyn College, City University of New York.

Fuys, D., Geddes, D., y Tischler, R. (1988). *The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (Monograph number 3)*. Reston: NCTM. doi: 10.2307/749957.

Guillén, G. (1997). *El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje (Tesis doctoral)*. Valencia: Universitat de València.

Gutiérrez, A. (2009). Perspectiva de la investigación en didáctica de las matemáticas. *Investigación en la Escuela, 69*, 61-72.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1987). Estudio de las características de los niveles de Van Hiele. En J. C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th conference of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 131-137). Montréal: Université de Montréal.

Gutiérrez, A., Jaime, A., y Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(3), 237-251. doi: 10.2307/749076.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 205-227). Florida: Academic Press.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las Ciencias, 17*(2), 291-309.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento (Tesis doctoral)*. Valencia: Universitat de València.

Miñano, P., y Castejón, J. L. (2011). Variables cognitivas y motivacionales en el rendimiento académico en Lengua y Matemáticas: un modelo estructural. *Revista de Psicodidáctica, 16*(2), 203-230.

Navarro, J. I., Aguilar, M., Marchena, E., Ruiz, G., y Ramiro, P. (2011). Desarrollo operatorio y conocimiento aritmético: vigencia de la teoría piagetiana. *Revista de Psicodidáctica, 16*(2), 251-266.

NCTM. (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Pegg, J., y Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. En R. Lehrer y D. E. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Rosario, P., Mourao, R., Baldaque, M., Nunes, T., Nuñez, J. C., Gonzalez-Pienda, J. A., Cerezo, R., y Valle, A. (2009). Tareas para casa, autorregulación del aprendizaje y rendimiento en

Matemáticas. *Revista de Psicodidáctica, 14*(2), 179-192.

Sarasua, J. (2011). *Hacia una categorización de los objetivos geométricos. Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de Van Hiele para la representación externa de figuras planas (Tesis Doctoral)*. Vitoria-Gasteiz: Euskal Herriko Unibertsitatea/Universidad del País Vasco.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. (Final report of the cognitive development and achievement in secondary school geometry project.). Chicago: University of Chicago.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión (Tesis doctoral) (Traducción al castellano realizada en 1990 por el proyecto de investigación «Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Media basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele», bajo la dirección de Ángel Gutiérrez)*. Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight*. London: Academic Press.

Van Hiele, P. M. (1987). *A method to faciliate the finding of levels of thinking in geometry by using levels in arithmetic*. Paper presented at the Conference on Learning and Teaching Geometry, New York.

Van Hiele, P. M. (1999). Begin with play. *Teaching Children Mathematics, 6*, 310-316.

Wilson, M. (1990). Measuring a Van Hiele geometry sequence: a reanalysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 230-237. doi: 10.2307/749376.

José M. Sarasua es licenciado en Matemáticas y doctor por la Universidad del País Vasco con una tesis en el área de Didáctica de las Matemáticas. Actualmente es profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de Vitoria-Gasteiz en el Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE. Sus investigaciones se centran en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y en el análisis de los libros de texto.

Josu G. Ruiz de Gauna es licenciado en Matemáticas y doctor por la Universidad del País Vasco con una tesis en el área de Didáctica de las Matemáticas. Actualmente es profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de Leioa en el Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE. Sus investigaciones se centran en el análisis de los libros de texto y en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Modesto Arrieta es licenciado en Matemáticas y doctor por la Universidad del País Vasco con una tesis en el área de Didáctica de las Matemáticas. Hasta su reciente jubilación, ha sido profesor de la Escuela Universitaria de Magisterio de San Sebastián en el Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE. Sus investigaciones se centran en el rendimiento académico en Matemáticas, en la enseñanza y aprendizaje de la geometría y en el diseño curricular.

Fecha de recepción: 23-08-2012 Fecha de revisión: 01-01-2013 Fecha de aceptación: 23-01-2013