

EL CURRIMULUM DE MATEMATICAS EN LA PRUEBA DE ACCESO

GOBERNA, M.A.

I. B. de Manises (Valencia).

SUMMARY

In this paper we present a comparison of the mathematic contents for the final-secondary school examination in England, France and Spain, giving, finally, a proposal in order to elaborate a new Spanish programme.

1. SITUACION ACTUAL

Sería una tarea harto laboriosa el realizar un estudio exhaustivo sobre el contenido de las pruebas matemáticas que forman parte del sistema de acceso a la Universidad en los distintos países, aun en el caso de fijarnos tan solo en la vieja Europa. Por ello centraremos nuestra atención en dos sistemas educativos tan importantes como son el inglés y el francés y, naturalmente, en el español. Hemos elaborado una tabla comparativa de contenidos, cuyo objetivo es poder apreciar el interés que a cada tema se le dedica en los países estudiados, así como la extensión de los diversos programas, y sus tendencias.

De los dieciocho programas que recensara H.F. Neill (1976) correspondientes a Inglaterra, presentamos a continuación cuatro (Wynne-Willson, 1981), a saber:

1. AEB (The Associated Examining Board: Pure and Applied Math).
2. JMBA (Joint Matriculation Board; Mathematics Syllabus A).
3. JMBB (Joint Matriculation Board; Mathematics Syllabus B).
4. SMP (School Mathematics Project; Mathematics).

En tales programas, todos los tópicos incluidos son obligatorios. Hay otros programas que permiten al examinando una elección previa de opciones. Así, el examen de la «Cambridge Local Board» ofrece cinco opciones (vectores y mecánica, probabilidad y estadística, cálculo numérico, estructuras algebraicas, análisis y ecuaciones diferenciales) entre las que se deben elegir dos. Un esquema similar presenta Oxford.

De los cuatros programas estudiados, los dos primeros son de carácter más tradicional. Junto a estos cuatro, presentamos los contenidos de los cursos «terminale» C, D y E franceses y el actual COU español. Para permitir analizar la evolución del programa en España añadimos una columna correspondiente al antiguo PREU.

En la tabla se coloca un «1» cuando el tópico correspondiente forma parte del programa que encabeza la columna y un «0» en caso contrario. En el caso del actual programa de COU, hemos creído conveniente indicar con «X» los tópicos que, sin formar parte del mismo, son parte del programa de BUP. (No se consideran estudiados los temas conocidos a nivel extremadamente elemental (EGB)).

En el programa oficial de COU, la parte de álgebra lineal queda sin especificación, mencionándose tan solo los sistemas de ecuaciones lineales. Se sobreentiende que el tratamiento del tema exige, como mínimo, la introducción del espacio vectorial standard R^n para $n=2, 3$ y 4 , así como el estudio de aplicaciones lineales (el tratamiento alternativo por medio de matrices elementales está poco divulgado).

Comenzaremos el análisis de la tabla I comparando entre sí los contenidos de los programas británicos considerados. Los siguientes capítulos son los comunes a los cuatro programas:

- 1) fracciones simples
- 2) teorema del binomio con exponente natural
- 3) conocimiento de funciones elementales (incluyendo las circulares y sus relaciones)

- 4) derivación de tales funciones
- 5) máximos, mínimos y puntos de inflexión
- 6) representación gráfica de curvas
- 7) construcción de ecuaciones diferenciales y resolución de ecuaciones con variables separables
- 8) integración inmediata
- 9) integración por sustitución
- 10) la regla de Barrow y el cálculo de áreas y volúmenes de revolución
- 11) estática, cinemática y dinámica

Un programa unitario propuesto por la Standing Conference on University Entrance, en 1978 (véase «Standing...» (1978)), que recoge la opinión de profesores de facultades de ciencias e ingeniería, incluye, curiosamente, los tópicos anteriores, añadiendo los siguientes:

- 12) progresiones aritméticas y geométricas
- 13) números complejos
- 14) geometría analítica del plano
- 15) coordenadas polares
- 16) ecuaciones trigonométricas
- 17) geometría analítica del espacio
- 18) vectores en el plano y en el espacio
- 19) métodos de integración numérica

Los temas enumerados cubren dos tercios del programa unitario propuesto. El tercio restante debería ser cubierto con una de las siguientes materias opcionales: matemáticas puras avanzadas, estática, dinámica y estadística. En conclusión, la Universidad inglesa quisiera ver unificado fundamentalmente el programa de matemática pura, al que atribuye gran importancia.

En la situación actual en Inglaterra, la multiplicidad de programas existentes permite la introducción de programas modernos, si bien el hecho de coexistir con los antiguos modera el cambio: en 1976, la proporción de estudiantes que eligió un programa moderno (posterior a 1960) no sobrepasó el 30%.

Apreciamos los siguientes rasgos que diferencian fuertemente los sistemas francés y británico:

- 1º) Los programas franceses dedican gran extensión al álgebra, tanto clásica como moderna. En particular se ocupan, de forma notable, de los conjuntos numéricos.
- 2º) Los programas británicos son mucho más adecuados en cuanto a mostrar las aplicaciones del cálculo diferencial (problemas de máximos y mínimos, representación de curvas) así como el cálculo integral (evaluación de volúmenes).
- 3º) El cálculo numérico está ausente en los programas franceses examinados, mientras que los británicos dedican una gran atención a la resolución de ecuaciones (algebraicas y trascendentes) y a la integración numérica.

- 4º) Las ecuaciones diferenciales muestran la preocupación de los franceses por el carácter estructural de las soluciones (más que por las aplicaciones de las mismas).
- 5º) En el campo de las aplicaciones muestran mucho mayor interés los programas británicos. Tal es el caso de la teoría de la probabilidad, ausente en los programas franceses, y de las aplicaciones a la física, a las cuales dedican los ingleses gran atención (y los franceses nula).
- 6º) Los franceses muestran una clara preocupación por las transformaciones geométricas, centrándose en el método analítico que tiene como base la estructura de espacio vectorial (transformaciones en espacios afines y euclídeos). Estas cuestiones están ausentes en los programas británicos.

Pasemos al análisis comparado de los contenidos del programa de matemáticas de COU. Salta a la vista que un solo tema es común a los programas antiguo (PREU) y nuevo (COU): la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales por la regla de Cramer. Este hecho pone de manifiesto el criterio pendular en las programaciones del ministerio. Parece que el objetivo de los últimos programadores haya sido introducir en COU el álgebra y el cálculo tradicional de las matemáticas del primer curso universitario. En concreto, la fórmula de Taylor tan solo aparece en el «Syllabus» del SMP; con las aplicaciones lineales ocurre otro tanto. Esta invasión de la matemática universitaria se ha producido en detrimento de un tipo de geometría, ya en desuso en el resto de los sistemas educativos, y de una revisión del álgebra elemental (conjuntos numéricos y polinomios, fundamentalmente) que tan sólo el sistema español considera innecesaria.

Observando conjuntamente los programas británicos, los franceses y el de COU, lo primero que se aprecia es lo poco que tienen en común: el cálculo de primitivas inmediatas y el concepto de integral definida, con su aplicación al cálculo de áreas. Lo que distingue el programa español de los restantes es, fundamentalmente, su carácter universitario, así como la ausencia de revisión de la matemática elemental. Tal ausencia no está justificada por al menos dos razones:

En primer lugar, los alumnos tienen la posibilidad de cursar matemáticas de COU sin haber estudiado las de 3º de BUP, con lo que superarían, en su caso, las pruebas de acceso sin conocer los números complejos ni las distribuciones de probabilidad; en segundo lugar, no existen garantías del cumplimiento de los objetivos marcados en BUP, ya que la calificación de los alumnos es realizada, directamente, por los profesores mediante evalua-

ción continua (generalmente mal entendida y, por lo tanto, poco fiable).

Desde un punto de vista comparado el programa español es de los más «avanzados». Es también, según consenso generalizado, excesivamente amplio en sus aspectos menos elementales. Se ha propiciado así una práctica docente caracterizada por el desdén hacia los objetivos metodológicos: no se emplean métodos activos, no se desarrollan las habilidades superiores de los alumnos y tampoco se incorporan las necesarias aplicaciones. Si a lo dicho se agrega la nula atención que el actual modelo de examen presta a las habilidades mencionadas (es bien conocida la influencia que dicho modelo ejerce sobre la enseñanza) fácilmente se comprenden las quejas de los profesores universitarios.

No podemos olvidar en este trabajo el papel desempeñado por los coordinadores, nombrados por las universidades, en la determinación del contenido efectivo de las matemáticas de COU. En efecto, las modificaciones introducidas por aquellos han significado, generalmente, la reducción del programa oficial en sus respectivos distritos, de acuerdo con el parecer mayoritario. No han faltado, sin embargo, las excepciones. Significativo es, a este respecto, el siguiente par de cuestiones, propuestas por la Universidad de Salamanca:

1. «Exponer, razonadamente, la condición para que una matriz 2×3 sea la matriz de un giro alrededor del origen en el espacio euclídeo de dimensión 3».
2. «Noción de continuidad uniforme. Teorema de Heine-Borel».

Completaremos el análisis de los contenidos de la prueba de acceso en España observando la frecuencia con que los diversos capítulos del programa oficial se han visto reflejados en los exámenes propuestos durante los últimos años en las universidades del Estado. Recurriremos para ello a la tabla II, que ha sido construida de acuerdo con las pruebas recogidas por Hernández, Lorenzo y Martínez (1982). No es difícil comprender el interés de este dato: en la práctica, la atención relativa que los profesores prestan a cada capítulo depende, en gran medida, de la demostrada por los propios examinadores.

Los rasgos más notables que se observan son:

1. Se presta una atención similar al cálculo infinitesimal y al álgebra lineal (incluyendo en ella la geometría), dedicándoseles el 41% y el 43'5%, respectivamente, de las cuestiones propuestas.
2. Frente al 84'5% acaparado por la matemática determinista, tan solo el restante 15'5% de las cuestiones se refieren a la teoría de la probabilidad y sus aplicaciones.

3. El cálculo numérico tiene nula incidencia en la práctica de los exámenes de selectividad.

La consecuencia no puede ser otra que centrar toda la atención del profesorado en los capítulos más abstractos del programa, desdeñando los más ricos en aplicaciones y que son, desde luego, los de mayor interés para el conjunto de los futuros universitarios.

2. NUEVAS TENDENCIAS Y PROPUESTAS

El plan de estudios de Nordrhein-Westfalen (R.F.A.) recomienda ya la introducción de matemática aplicada a campos distintos de los que venían siendo habituales (a saber: cinemática, estática y dinámica), proponiendo los siguientes tópicos (véase König (1981)):

- crecimiento exponencial de poblaciones
- aplicaciones a problemas de medio ambiente (crecimiento discontinuo)
- simulación de cadenas de alimentación
- demografía
- aplicación de las ecuaciones diferenciales a problemas relacionados con vuelos espaciales
- funciones a costo
- modelos de impuesto
- modelo de precio de equilibrio en mercado libre
- aplicación de las ecuaciones diferenciales al modelo de economía de mercado de Samuelson

A las mismas conclusiones han llegado diversos grupos de trabajo en didáctica de la matemática. Permítasenos citar las publicaciones nº 4 y 18 de la serie «Investigaciones Didácticas» del ICE de la Universidad Literaria de Valencia, donde aparecen diversos trabajos de adaptación de matemática aplicada a la enseñanza media y curso de acceso, versando sobre los siguientes temas (Goberna y Pastor 1979 y 1981):

- El modelo interindustrial de Leontieff.
- Aplicación de las funciones a las ciencias.
- Un modelo de impuestos (basado en el cálculo diferencial).
- Un modelo sencillo de precios.
- Costes de producción.
- El método de Montecarlo y su aplicación a problema del agente viajero.
- Programación dinámica.
- Cadenas de Markov con aplicaciones a la planificación económica.

Dado que una propuesta de programas alternativos (en la línea del modelo francés) parece poco viable en nuestro país, por razones económicas, asumimos la hipótesis del programa único. En nuestra opinión —teniendo en cuenta la situación actual y las nuevas tendencias—, dicho programa debería ser elaborado de acuerdo con las siguientes directrices:

- a) El programa, para el examen de acceso en matemáticas, debería ser más amplio, incluyendo el conjunto de las matemáticas elementales, y menos universitario que en la actualidad, en la línea de los «syllabus» británicos. En particular, en el programa de cálculo debería suprimirse la fórmula de Taylor, mientras que el tratamiento del álgebra lineal podría lograrse con la utilización de matrices elementales, que exigen menos abstracción que la teoría de espacios vectoriales.
- b) Debería prestarse atención sistemática a los métodos numéricos sencillos (en la actualidad, diversos métodos se incluyen en el programa, pero ya hemos dicho que los exámenes actuales no incluyen cuestiones de esta clase), y aconsejar a los centros, cada vez más numerosos, que dispongan de un microordenador, la enseñanza generalizada del Basic, que debería ser aplicado a la resolución de los problemas anteriores.
- c) Debería prestar atención el programa a las aplicaciones a la física, biología, medicina, economía, etc.; aplicaciones que deberían ser expli-

tadas suficientemente y verse reflejadas en los exámenes.

3. CONCLUSIONES

- 1. Los programas de matemáticas para la prueba de acceso difieren grandemente de unos países a otros.
- 2. El programa español es el más universitario de los comparados.
- 3. La realidad de los exámenes acentúa todavía más, en la práctica, el predominio de los capítulos más abstractos.
- 4. La amplitud del programa y el modelo de examen constituyen un serio obstáculo para el desarrollo en el alumno de las habilidades de análisis, síntesis y aplicación.
- 5. Se propone un programa menos «universitario», en la línea de los británicos, con atención sistemática a los métodos numéricos sencillos y a las aplicaciones a la física, biología, medicina, economía....

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

CONDAMINE, M., 1971, *Mathématique Terminales C-D-E. Algèbre et Géométrie* (Ed. Delagrave: Paris).

GOBERNA, M.A. y PASTOR, J., 1979, Diversos artículos contenidos en: *Investigaciones Didácticas*, nº 24. (ICE, Universidad Literaria de Valencia: Valencia).

GOBERNA, M.A. y PASTOR, J., 1981, Diversos artículos contenidos en: *Investigaciones Didácticas*, nº 18. (ICE, Universidad Literaria de Valencia: Valencia).

HERNANDEZ, F., LORENZO, F., MARTINEZ, A., 1982, *Pruebas de acceso a la Universidad. Matemáticas*. (Ed. Bruño: Madrid).

KÖNIG, G., 1981, Vorbemerkungen: Sekundarabschlüsse und Hochschulreife im internationalen Vergleich. *Zentralblatt*

für Didaktik der Mathematik. Jahrgang 13, Heft 5, Okt.

NEILL, H.F., 1976, The Mathematical Education Committee of the Institute of Mathematics and its Applications: A survey of A level Mathematics Syllabuses. *Bulletin of the IMA*, vol. 12, nº 10, 308-314.

Standing Conference on University Entrance and Council for National Academic Awards: A minimal core Syllabus for A level Mathematics (1978).

VISSIO, P., 1971, *Mathématique Terminales C-D-E. Analyse*. (Ed. Delagrave: Paris).

WYNNE-WILLSON, W., 1981, Public Examinations in Mathematics in England. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. Jahrgang 13, Heft 5, 172-181.

I
T
A
A
F
P
P
P
F
R
E
I
N
L
L
L
N
D
S
N
N
T
A
V
M
A
D
S
G
T
L
S
R
R
G
G
C
C
T
T
l
e
G
G
c
G
C
C
T
l
T
l
E
N

INVESTIGACION Y EXPERIENCIAS DIDACTICAS

TABLA I - Contenido en las pruebas de acceso.

ALGEBRA	Programas Ingleses				Programas Franceses				
	AEB	JMBA	JMBB	SMP	C	D	E	PREU	COU
Algebra elemental									
Fraciones simples	1	1	1	1	1	1	1	1	0(X)
Progresiones finitas	1	1	1	0	1	1	1	0	0(X)
Progresiones infinitas	0	1	1	0	1	1	1	0	0(X)
Principio de inducción	0	0	1	1	1	1	1	0	0(X)
Fórmula del binomio	1	1	1	1	1	1	1	0	0(X)
Resolución de ecuaciones algebr.	0	0	1	0	1	1	1	0	0(X)
Ecuaciones diofánticas	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Inecuaciones	0	1	1	0	1	1	1	0	0(X)
Nociones generales									
Lógica y nociones conjuntistas	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Leyes de composición interna: grupos	0	0	1	1	1	1	1	1	0
Los conjuntos numéricos									
Números enteros: concepto	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Divisibilidad en Z	0	0	0	0	1	1	1	1	0(X)
Sistemas de numeración	0	0	0	0	1	1	1	1	0
Números racionales: conceptos	0	0	0	0	1	1	1	1	0(X)
Números reales: concepto	0	0	0	0	1	1	1	0	0(X)
Números complejos:									
operaciones elem.	0	1	1	1	1	1	1	0	0(X)
Teorema de Moivre	0	0	0	0	1	1	1	0	0(X)
Algebra Lineal									
Vectores:									
operaciones elementales	0	0	1	1	1	0	1	0	1
Matrices: Operac.									
Aplicaciones lineales	0	0	0	1	1	0	1	0	1
Determinantes	0	0	0	0	1	0	1	1	1
Sistemas de ecuaciones lineales									
lineales	0	0	0	0	0	0	0	1	1
GEOMETRIA									
Trigonometría									
Las Funciones circulares	1	1	1	1	0	0	0	0	0(X)
Seno y coseno de la suma	1	0	0	1	0	0	0	0	0(X)
Ecuaciones trigonométricas	1	1	1	0	0	0	0	0	0(X)
Resolución de triángulos planos									
triángulos planos	0	0	0	0	0	0	0	0	0(X)
Resolución de triángulos esféricos y aplicación a la astronáutica									
triángulos esféricos y aplicación a la astronáutica	0	0	0	0	0	0	0	1	0(X)
Geometría analítica									
Geometría analítica del plano									
Geometría analítica del plano	1	1	1	0	1	0	1	0	1
Geometría analítica del espacio									
Cónicas	0	0	0	0	1	0	1	0	1
Cónicas	1	1	0	0	1	0	1	0	0(X)
Curvas paramétricas	1	1	1	0	0	0	0	0	1
Coordenadas polares	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Tratamiento sintético de las transf.									
Tratamiento sintético de las transf.	0	0	0	0	1	0	1	1	0
Tratamiento analítico de las transf.									
Tratamiento analítico de las transf.	0	0	0	0	1	0	1	0	1

INVESTIGACION Y EXPERIENCIAS DIDACTICAS

TABLA I (Continuación)

	Programas Ingleses				Programas Franceses			PREU	COU
	AEB	JMBA	JMBB	SMP	C	D	E		
CALCULO									
Cálculo Diferencial									
Funciones elementales	1	1	1	1	1	1	1	0	0(X)
Límites y cont.	0	0	1	0	1	1	1	0	0(X)
Cálculo de derivadas	1	1	1	1	1	1	1	0	0(X)
Derivada de la función inversa	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Máximos, mínimos y ptos. de inflexión	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Fórmula de Taylor	0	0	0	1	0	0	0	0	1
Gráficas	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Cálculo Integral									
Primitivas sencillas	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Integración por sustitución	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Integración por partes	0	1	1	1	1	1	1	0	1
Integrales racionales y relacionadas	0	0	0	0	0	0	0	0	1
La Función integral (Barrow)	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Áreas y Planos	1	1	1	1	1	1	1	0	1
Volúmenes de revolución	1	1	1	1	0	0	0	0	1
Longitud de un arco de curva	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Ecuaciones Diferenciales									
Construcción de ec. diferenciales	0	1	1	1	0	0	0	0	0
Variables separadas	1	1	1	1	0	0	0	0	0
Lineales a coeffs en R de orden 2	0	0	2	0	2	2	2	0	0
Cálculo numérico									
Resolución de ecuaciones algebraicas (Newton)	0	0	1	1	0	0	0	0	1
Interpolación	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Integración numérica (Trapeacios y Simp.)	1	0	1	1	0	0	0	0	1
ESTADISTICA Y PROBABILIDAD									
Estadística									
Estadística descriptiva	0	0	0	0	0	0	0	1	0(X)
Regresión y correlación	0	0	0	0	0	0	0	1	0(X)
Probabilidad									
Probabilidad cond.	0	0	1	1	0	0	0	0	1
Variables aleatorias	0	0	1	1	0	0	0	0	0(X)
Distribución binomial	0	0	1	1	0	0	0	0	0(X)
Distribución normal	0	0	0	1	0	0	0	0	0(X)
Distribución Poisson	0	0	0	1	0	0	0	0	0
APLICACIONES A LA FISICA									
Estática	1	1	0	0	0	0	0	0	0
Cinemática	1	1	1	1	1	1	1	0	0
Dinámica	1	1	1	1	0	0	0	0	0

INVESTIGACION Y EXPERIENCIAS DIDACTICAS

TABLA II - Contenido de las pruebas de acceso en las Universidades Españolas

	%	Frecuencia absoluta
Cap. I. Algebra Lineal	20,7	48
1.1. Matrices y Determinantes		12
1.2. Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales		20
1.3. Espacios vectoriales y aplicaciones lineales		16
Cap. II. Geometría afin y euclídea	22,8	53
II.1. Geometría Plana		6
II.2. Geometría del espacio afin tridimensional		13
II.3. Geometría del espacio euclideo tridimensional		34