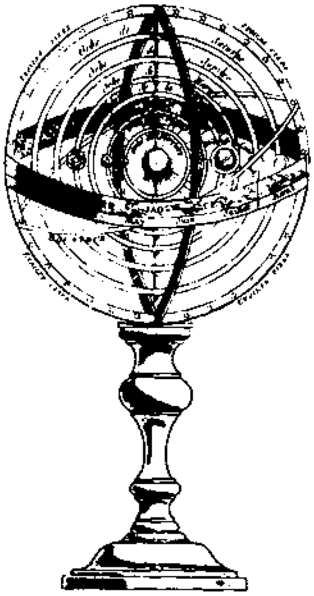
# OTROS TRABAJOS



# INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y PENSAMIENTO REAL

**HERNAN, F.**
**I.B. Font de Sant Lluís II. València.**

SUMMARY

This paper focussses on the analysis of Hardy's point of view, «at bottom, all mathematicians think in the same way», and looks for its implications on teaching.
Research on Artificial Intelligence provides some hints which suggest that a new approach to the relationship between concepts and processes.

## INTRODUCCION

*«A menudo se me ha preguntado si Ramanujan tenía algún secreto especial; si sus métodos eran de una clase diferente de la de otros matemáticos, si había algo realmente anormal en su modo de pensar. No puedo responder a estas preguntas con suficiente confianza o convicción; pero creo que no. Mi opinión es que, en el fondo, todos los matemáticos piensan del mismo modo, y que Ramanujan no era una excepción»*

*(Hardy)*

Muchos, que considerarán la opinión de Hardy algo más que discutible, aceptarían seguramente sin reparos una afirmación menos polémica y comprometida, la que Polya designa como Principio Genético: «Una vez entendido cómo el género humano ha adquirido el conocimiento de ciertos hechos o conceptos, estaremos en mejores condiciones de juzgar cómo los jóvenes humanos deberían adquirir tal conocimiento». (Polya, 1966).

A veces, no obstante, puede ser más sugestivo el análisis de una proposición dogmática y atrevida que el de otra más dulce y cautelosa.

Una de las ventajas de los enunciados más categóricos reside en la facilidad con que quedan sometidos al riesgo de una refutación empírica o lógica. De esa ventaja procede otra: el lector está advertido de que su intervención es decisiva y de que se le sugiere una participación no neutral.

Así pues, se le invita aquí, si no tiene otra cosa mejor que hacer, a tomar como punto de partida una proposición ciertamente dogmática: *Todos los matemáticos son isomorfos.*

Para dotar de sentido a esta afirmación hay, claro está, que buscar respuesta a una pregunta, ¿en dónde radica el isomorfismo?.

Y en caso de encontrar algunos indicios, sería conveniente buscar también respuesta a una segunda pregunta, ¿cuáles son sus implicaciones en la enseñanza de las matemáticas?

Designando, con no poca audacia, mediante M y M' las mentes de dos matemáticos, la aseveración de que M M' son isomorfas lo que indica es que hay dos conjuntos A y A' formados no por los objetos matemáticos —hechos, algoritmos, estructuras conceptuales— sino por los significados de esos objetos, y que hay una correspondencia 'funcional' entre significado de a, que es un elemento de A, y significado de a', que es un elemento de A'. Y que además hay unas leyes de composición o *enlaces* entre los elementos de A, por un lado, y entre los elementos de A', por otro; y que muchos de esos enlaces $e_1$, $e_2$, $e_3$,... son iguales en M y en M'. Eso no significa que haya el mismo número de enlaces en M que en M'; puede ocurrir, y de hecho ocurre, que haya más enlaces en M que en M'.

Si comparamos ahora M con N, siendo N la mente de una aprendiz de matemáticas, las preguntas a las que habría que responder para mejorar la enseñanza de las matemáticas son varias:

- ¿Qué objetos elegir para que sean conocidos por N?
- ¿Cómo ayudar a que significado de a'' que es un elemento de A'', sea 'equivalente' a significado de a?
- ¿Cuáles son los enlaces $e_1$, $e_2$, $e_3$,...?
- ¿Cómo se establecen esos enlaces?
- ¿Cuáles son los enlaces ya existentes en N? ¿Cómo fortalecer esos enlaces y cómo se ayuda a establecer otros nuevos?

Si tuviésemos respuestas para esas preguntas, la enseñanza de las matemáticas sería un camino de rosas. Pero no lo es.

La presente exposición se concentrará en los enlaces; tomará como referencia los practicados por alumnos y profesores de matemáticas; y hará uso de algunas conclusiones que provienen del campo de la inteligencia artificial y que permiten una mejor iluminación de ciertos aspectos que se han mantenido más bien a la sombra.

## 1. LOS METODOS FORMALES

Cuando nuestros alumnos llegan a las aulas ya saben muchas cosas, han resuelto muchos problemas de su vida y han hecho una enorme cantidad de descubrimientos. Los alumnos de bachillerato saben razonar lógicamente, aun en formas complejas como la del razonamiento indirecto: «Como no quiero ver a Juan, esta tarde no iré a la discoteca; porque si fuese me lo podría encontrar ya que él va muy a menudo».

No empezamos, pues, desde cero. En realidad, lo que vamos a hacer juntos en el aula es reflexionar sobre el pensamiento que ya poseen y sobre el mundo que ya conocen, reelaborar parte de esos conocimientos y añadir nuevos conocimientos ligados mediante enlaces estables.

Una de las reflexiones esenciales que hay que hacer en matemáticas es que los métodos formales pueden ser útiles para desenvolverse y avanzar en el interior de un sistema bien definido. Pero el mecanismo de la deducción y los mecanismos lógicos en general carecen de dos propiedades que a menudo se les suponen: la continuidad y la univocidad.

*El razonamiento deductivo no es continuo.* Es lo que cabe inferir de la siguiente situación propuesta a alumnos de 15 años,

«Se tiene un tren de cinco casillas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

que se rellenan del siguiente modo: pones dos números en las primeras casillas

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3'5 | | | |

y las otras se forman como aquí

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 11 | 18 | 29 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3'5 | 5'5 | 9 | 14'5 |

Ahora te dan la primera y la última casilla, rellena las tres del medio

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 5 | | | | 22 |

Ahora la primera casilla es *a* y la última es *b* rellena las del medio

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | | | b |

Un buen número de alumnos que llegaron a escribir

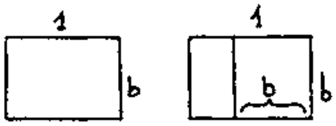
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| a | x | a+x | a+2x | b |

*no* consiguieron deducir que b = 2a + 3x ; y por lo tanto no pudieron responder a la última pregunta.

El darse cuenta de que b= 2a + 3x es una idea que no aparece como espuma de la deducción, sino que emerge de niveles más altos.

*El razonamiento deductivo no es unívoco.* Ese es precisamente el motivo por el que suelen atraer las novelas policíacas. Si el razonamiento lógico solamente produjese un enunciado relevante que pudiese obtenerse como conclusión, se justificaría que todo razonador correcto concluyese la misma cosa, pero no es tal el caso.

Si alguien me dice «Esta mañana he llegado al trabajo con diez minutos de retraso», puedo deducir que esa persona sabe hablar, que tiene trabajo, que su trabajo no lo hace siempre por la tarde, que sabe a qué hora comienza su trabajo (o que al menos alguien lo sabe), que a la hora en que tenía que empezar su trabajo no estaba,... Pero ¿cuáles de esas conclusiones tienen algún peso o alguna importancia?

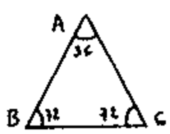



Cuando se presenta a alumnos competentes el problema de hallar el lado pequeño de un rectángulo de manera que al construir un cuadrado en su interior el rectángulo sobrante tenga la misma forma que el primitivo, muchos de ellos buscan saber cuánto mide b partiendo de: $\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}$

y deducen correctamente que $1 - b = b^2$ ; pero a continuación (aun habiendo resultado ecuaciones de segundo grado en otras ocasiones) deducen que $\sqrt{1-b} = b$, lo cual es también correcto, pero perfectamente inútil, y no deducen que: $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

que es lo que viene a cuento.

Si quiere usted entretenerse un poco, puede probar consigo mismo: ¿Qué conclusiones derivan de que este triángulo sea isósceles y sus ángulos midan 36° y 72°?




Las conclusiones posibles (1) son muy numerosas; pero no todas tendrán el mismo sentido para el sujeto; algunas serán importantes y otras ni siquiera serán *buscadas* porque son completamente ajenas a su interés actual.

Esto es algo que no se pasa por alto en las investigaciones en inteligencia artificial. En efecto: «El objetivo de la inteligencia artificial es llegar a saber qué es lo que está ocurriendo cuando la mente de uno escoge silenciosa e invisiblemente, de entre una miríada de posibilidades, cuál es la que tiene más sentido en una situación muy compleja. En muchas ocasiones de pensamiento real el razonamiento deductivo no es suficientemente apropiado, y no porque dé respuestas erróneas, sino porque hay demasiados enunciados correctos que pueden hacerse, pero que carecen de importancia para la situación que se está considerando; son, sencillamente, demasiadas las cosas que hay que tener en cuenta simultáneamente para que sea suficiente el razonamiento por sí solo».
(Hofstadter, 1979).

## 2. METODOS INFORMALES

Los primeros programas de inteligencia artificial adolecían del defecto de usar normalmente métodos formales de razonamiento. Los seres humanos ponen en juego todos los tipos de razonamiento formal o informal que creen apropiados para el problema que están tratando. Eso explica que aquellos primeros intentos en inteligencia artificial resultasen poco fructíferos y se hayan abandonado en su mayor parte. Su base analógica es ahora bien diferente: «La esencia de la inteligencia consiste en encontrar procedimientos que, limitando la búsqueda de soluciones, resuelvan problemas que de otra forma resultarían intratables». (Lenat, 1984).

No queremos ser aquí menos claros: los enlaces de carácter lógico que forman parte del isomorfismo pueden darse por supuestos en un alumno medio a partir de, digamos, los quince años, y enfocaremos la búsqueda hacia enlaces de otro nivel. Un par de ejemplos pueden aportar algún significado, por vago que sea, a esta búsqueda.

### 2.1 El problema del aceite y el vinagre

Dos vasos, sin estar llenos, contienen el mismo volumen de aceite uno y de vinagre el otro. Se introduce una cuchara en el vaso del aceite y se saca llena. Se vuelca su contenido en el vaso del vinagre. Una vez hecho esto se introduce en el segundo vaso una cuchara igual, se saca llena y se vuelca su contenido en el primer vaso. Al final de todo ello, ¿hay más vinagre en el primero que aceite en el segundo, menos vinagre en el primero que aceite en el segundo o igual?.

Los cuadros I y II esquematizan dos procedimientos de resolución.

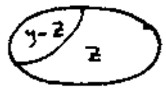
Cuadro I

| Aceite | Vinagre |
|---|---|
| Tomo x | |
| | Tengo V+ x |
| | Me llevo una cucharada, y. |
| | ¿Cuánto vinagre hay en y? |

z — Nada (problema resuelto) — Todo (problema resuelto)

Entonces va y–z de aceite.

Luego al primer vaso va




z, de vinagre, es lo que he dejado de aceite en el segundo vaso.

Respuesta: Igual cantidad de aceite en V que de vinagre en A

Cuadro II

| Aceite | Vinagre |
|---|---|
| a) $\frac{1}{n} A$ | b) $V + \frac{1}{n} A$ |
| | c) $\frac{1}{n+1}\left(V + \frac{1}{n} A\right)$ |
| d) vinagre en A $\frac{1}{n+1} V$ | |
| | e) aceite en V |

$$\frac{1}{n} A - \frac{1}{n+1}\frac{1}{n} A = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) A = \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right) A = \frac{1}{n+1} A$$

Respuesta: Igual cantidad de aceite en V que de vinagre en A.

El segundo de estos procedimientos es empleado por pocas personas, aun siendo el más formal de los dos. Debido probablemente a ese carácter formal se encuentra esta interesante propiedad $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1}$ que puede tomar una 'vida propia' independiente del problema en cuestión y de la que derivan algunas consecuencias notables, como se muestra en el cuadro III.

Cuadro III

$$1 - \frac{1}{2}\,1 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$
$$\cdots$$

Y sumando queda:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

luego $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \cdots = 1$

y también $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots\right) = 1$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 2$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots = 1$$

Esto ilustra la indudable potencia de la deducción lógica; pero aun así sería erróneo pensar que el *motor* de esas inferencias ha sido la lógica. El motor está más bien en la presunción de que lo que se va a ensayar puede dar resultado.

El primero de los procedimientos es el que — con determinadas variantes — sigue la mayoría de los alumnos de 14 a 16 años que logran resolverlo, y también el que sigue la mayoría de las personas más entrenadas en matemáticas. Este procedimiento no viene en absoluto determinado únicamente por la lógica o la deducción. Hay en él:
abstracción: fijarme en la cantidad de vinagre que me llevo en la segunda cucharada;
clasificación: todo es vinagre; no hay nada de vinagre; hay algo;
imágenes visuales: de los dos vasos, de las cucharadas, del proceso de recogerlas y vaciarlas;
decisiones: la clasificación y la abstracción pueden serme útiles.

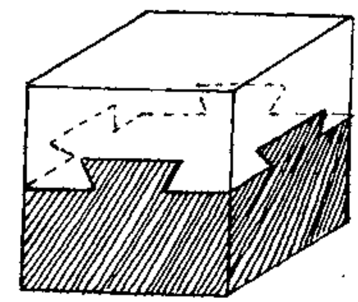
Se mire como se mire, este procedimiento es muy complejo y, sin embargo, es el procedimiento más común, ¿no es, entonces, revelador de enlaces puestos en práctica del mismo modo por personas distintas?

## 2.2 Problemas del cubo encajable

Se quiere construir un cubo completamente sólido, pero hecho de dos clases distintas de madera, de modo que su aspecto exterior sea el que se muestra en la figura 1 y con la condición de que sus dos piezas componentes encajen y desencajen perfectamente. ¿Cómo han de estar diseñadas ambas piezas?

Se puede apreciar que el primer ensayo de resolución puede ser *refutado* mediante una deducción lógica.

Otros ensayos que tampoco conducen a la resolución son también refutados por razonamientos lógicos.



Cuando surge por fin la idea de una solución acertada, esa idea puede ser *confirmada* asimismo por un razonamiento lógico.

Pero el intervalo entre las ideas inapropiadas y la idea final que resuelve el problema, ese intervalo está ocupado por la mente del resolutor en una amplia gama de razonamientos informales en los que la imaginación visual desempeña un papel imprescindible.

Se observa también que aun habiendo varias soluciones, aquellas personas que encuentran la solución por primera vez diseñan las piezas de tal manera que es inevitable aceptar la existencia de un isomorfismo mental cuya manifestación observable es la utilización de carriles oblicuos en lugar de horizontales y verticales.

## 3. SISTEMAS EXPERTOS

«En inteligencia artificial se hace una distinción entre dos tipos de conocimiento, el procesual y el declarativo. Una pieza de conocimiento de dice que es *declarativa* si es almacenada explícitamente, de manera que no sólo el programador, sino también el programa pueden «leerla» como si estuviese en una enciclopedia. Eso generalmente significa que está codificada localmente, y no está dispersa. Por el contrario, el conocimiento *procesual* no está codificado como hechos, sino solamente como programas» (Hofstadter, 1979).

Cuando se me pregunta «¿cuántos habitantes tiene Barcelona?» la respuesta «cuatro millones» me parece como si la estuviese leyendo directamente. Pero si se me pregunta «¿cuántas aristas tiene un icosaedro?» entonces imagino un icosaedro y voy contando sus aristas ayudado por esa imagen mental; la respuesta no está almacenada localmente (aunque en otra mente puede estarlo).

«Una distinción paralela puede establecerse entre propiedades *sintácticas* y propiedades *semánticas*. Las primeras residen inambiguamente dentro del objeto bajo consideración, mientras que las segundas dependen de la relación del objeto con una clase potencialmente infinita de otros objetos y por ello no son completamente localizables. Las propiedades sintácticas pueden ser detectadas mediante tests predeciblemente finitos. Las propiedades sintácticas están «próximas a la superficie» y por ello no provocan la creación de estructuras cognoscitivas multidimensionales. Los aspectos semánticos no pueden ser sometidos a un test de tiempo fijo predecible.» (Hofstadter, 1979).

Algunas partes de las matemáticas son sintácticas. Lo que ocurre en el cerebro de un ser humano cuando hace una multiplicación de dos números puede hacerse igualmente bien en varios tipos de «hardware»: máquinas mecánicas como la de Pascal, calculadoras de bolsillo, grandes ordenadores.

Pero las matemáticas consisten sobre todo en la resolución de problemas y la mayor parte del conocimiento que se necesita para resolver un problema no es declarativo, sino que está disperso y no puede predecirse el tiempo que llevará organizar su estructura multidimensional. La resolución del problema es semántico; lo que un cerebro humano hace cuando busca una analogía o intenta hacer una generalización está en nivel más alto que el correspondiente a la multiplicación de dos números, y por ahora no hay un modo sencillo de representarlo utilizando elementos de nivel más bajo.

«El objetivo central de la inteligencia artificial es la creación de *sistemas expertos*, sistemas capaces de aprender de su propia experiencia y que tengan como fuente primaria la capacidad de razonamiento informal (analogía, descomposición en subproblemas, uso de imágenes, focalización, suerte,...) basada en amplios conocimientos cuidadosamente obtenidos a partir de expertos humanos» (Lenan, 1984).

Es sorprendente que ese objetivo sea ignorado por lo general en aquellos lugares donde expresamente se pretende el desarrollo de la inteligencia real, los centros de enseñanza.

¿No debería la enseñanza de las matemáticas concentrar su atención en aquellas capacidades que se trata de buscar en los expertos humanos para hacer sistemas expertos?

Si así fuese, se podría pensar en la transformación de las clases de matemáticas de la escuela secundaria en *centros de inteligencia artificial;* lo cual significaría pasar de enseñar el razonamiento formal y hacer escaso uso del razonamiento informal a enseñar el razonamiento informal analogía, vuelta atrás, imaginación visual, creatividad, sentido de la forma, exploración,.. manteniendo la zona instrumental común: clasificación, inducción, explicación, deducción.

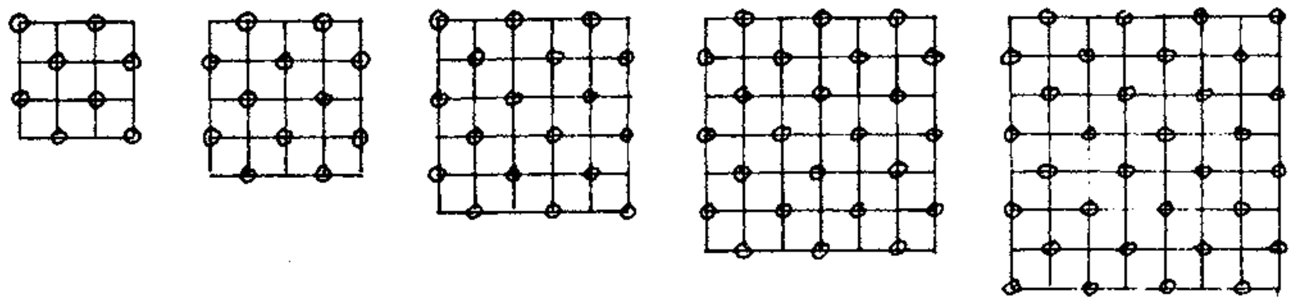
## 4. RECONOCER Y TRANSMITIR ENLACES

Tanto si se afirma «Todos los matemáticos son isomorfos» como si se pregunta «¿Todos los matemáticos son isomorfos?», la enseñanza de las matemáticas tendría que buscar el modo de reconocer enlaces de alto nivel y los medios más adecuados para la transmisión «mental» de esos enlaces.

En consecuencia, los profesores de matemáticas deberían ser expertos buscadores de enlaces de alto nivel. Los dos lugares más próximos en donde buscar son el análisis de sus propios procesos de pensamiento matemático y la observación cuidadosa del pensamiento de los alumnos.

Eso no es fácil, claro, y la metodología correcta está aún por definir. Para perfilar esta metodología, o metodologías, será necesario recoger un extenso capital de información. Ya se han expuesto aquí algunos ejemplos y se añadirán ahora unos cuantos más.

Fig. 2



#### 4.1 Analogía «forma-número»

¿Cúantos árboles están plantados en cada uno de los cuadrados de la figura 2? ¿Y en un cuadrado de lado n?

Un experto humano sabe que el procedimiento de contarlos uno por uno es ineficaz cuando haya de responder a la segunda pregunta. ¿Qué procedimientos emplea entonces? Visto el trabajo de numerosos expertos humanos (alumnos y profesores) todos ellos han recurrido a la *forma* en la que esos árboles están organizados, para así saber el número de árboles. Pero la forma condiciona a su vez la búsqueda. De la multitud de procedimientos que podría haber en principio, solamente han aparecido cuatro en esos trabajos:

a) Contar por filas

b) Contar por diagonales

c) Contar por capas.

d) Contar por presencia/ausencia o sí/no.

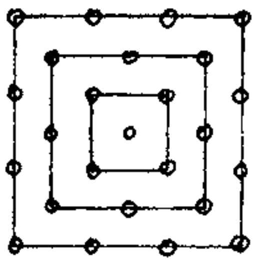


Fig. 3

#### 4.2. Creación de imágenes

Cuando un ser humano se propone diseñar una rueda de automóvil puede observarse la existencia de un enlace de alto nivel que suele partir de una condición inicial, al número de tornillos, o, en general un número organizador enlace que se despliega en una variedad infinita de posibilidades que vienen determinadas por un criterio de simetría. Como lo muestran estos diseños creados por alumnos de 2° curso de bachillerato:

Fig. 4

Un sistema experto, sujeto a esas condiciones de simetría y número puede diseñar la rueda tan bien o mejor que un experto humano.

Un experto humano, sin embargo, no ensaya al azar: se lo piensa primero; ni tiene el razonamiento lógico como motor de su creación: la belleza, la funcionalidad y la armonía guían su trabajo.

Un experto humano puede decidir de entre varios diseños cuál es el más original, el más ingenioso.

### 4.3 ¿Qué es lo importante?

Enfrentado a estos problemas consecutivos, «¿En cuántos ceros acaba el producto de los cien primeros números naturales?» «¿En cuántos ceros acaba el producto de los mil primeros números naturales?», un ser humano algo experto *decide* que no va a hacer el producto de esos mil números. Un programa no experto los multiplica con gran rapidez y cuenta el número de ceros. Un experto humano «prematemático», una vez encontrada la respuesta a la primera pregunta, 24 ceros, establece una inducción basada en la proporcionalidad y afirma que en el segundo caso habrá $24 x 10 = 240$ ceros.

Un experto humano «matemático» busca qué es lo importante, el número de cincos (porque doses hay de sobra).

Aquí hay dos enlaces: el prematemático (procedimiento usado por un gran número de estudiantes de 14 a 16 años) y el matemático (procedimiento empleado por la casi totalidad de estudiantes universitarios de matemáticas).

Ambos enlaces existen. El profesor experto debe saberlo y actuar en consecuencia: «desatar» el enlace primero, de nivel bajo, y consolidar el enlace segundo, de alto nivel.

### 4.4 Volver atrás

Uno de los principales problemas de la inteligencia artifical es la creación de sistemas expertos que sean capaces de reconsiderar una situación, volver atrás y pensar de otra manera. Los matemáticos tienen como uno de los enlaces de su isomorfismo esa capacidad. Pueden, y por lo general lo hacen, volver atrás y considerar el segundo procedimiento de resolución del problema del aceite y el vinagre y apreciar que ese procedimiento tiene un fallo, que proviene de haber supuesto que antes de sacar llena la cucharada del segundo vaso se ha agitado la mezcla hasta hacerla homogénea. De ese modo, ha dejado de considerar los casos límite: nada de aceite o nada de vinagre.

El problema del profesor es saber cómo se transmite esa capacidad de volver atrás, capacidad que existe, aunque aletargada.

## 5. ¿QUE OBJETOS?

El ejemplo 3 acerca de los ceros señala algo que es una evidencia, que los enlaces se ejercen sobre objetos o bloques de conocimientos preexistentes. En este caso, el hecho de que el número 10 solamente puede obtenerse como producto del 2 y el 5. Sin ese conocimiento matemático, los enlaces que cabe emplear son de bajo nivel.

El estudio de los enlaces nos lleva así al otro elemento esencial del isomorfismo, los objetos matemáticos.

Así como, probablemente, el futuro de la inteligencia artificial depende de la capacidad de los programadores para aportar a sus sistemas la materia prima adecuada — esto es, la enorme cantidad de conocimientos y experiencias que fundamentan el razonamiento humano — así también puede decirse que el futuro de la enseñanza de las matemáticas depende en gran medida de cómo seleccionar de entre la enorme cantidad de conocimientos declarativos, propiedades sintácticas y bloques conceptuales aquellos más merecedores de aprendizaje.

Tampoco sabemos con certeza cuáles deben elegirse; pero sí que hay razones para pensar que la elección no debería hacerse con arreglo a criterios estáticos o históricos, sino en función de su capacidad de proyección, es decir, de su capacidad de ser fuente de analogías exploraciones, imágenes, inducciones, generalizaciones y creación de ideas nuevas.

Así, $\sqrt{2}$ no es importante porque sea irracional (que es la versión académica) sino porque es la diagonal del cuadro unidad (y $\sqrt{3}$ la diagonal del cubo unidad); porque su construcción con regla y compás es fuente de analogía para construir $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \ldots, \sqrt{n}$ mediante un procedimiento iterativo; porque es la altura del folio normalizado DIN-4 de base 1, etc.

De manera semejante, y por dar algunos ejemplos más, las sucesiones $u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots$ que cumplen la condición $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ son mucho más merecedoras de atención que caprichosas sucesiones cuyo interés muere en ellas mismas, porque aquellas permiten formar la sucesión $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ que tiene como límite el

número de oro, cuya importancia es enorme tanto cultural, arquitectónica y estéticamente como en la propia naturaleza de las formas vegetales y animales;

el estudio de las diversas secciones de un cubo es más importante que el de las secciones de un tetraedro regular, porque el cubo —y por extensión el cuboide— es una forma esencial en la organización real de nuestro espacio, mientras que la pirámide triangular es un objeto raro;

la construcción de polígonos estrellados a partir de un polígono regular suscita una relación entre formas decorativas y números primos entre sí que refuerza el carácter unitario de diversas formas de observación;

problemas como el de las torres de Hanoi o el juego de Nim deben su valor didáctico a que son especialmente apropiados para practicar y comprender el fundamental concepto de recursión;

preguntas como «¿qué prefieres, apostar 1 contra 100, 10 contra 1000, 1 millón contra 10 millones ó 10 millones contra 1000 millones?» son algo más que preguntas sobre porcentajes, porque permiten subrayar que situaciones matemáticamente equivalentes pueden tener entre sí grandes diferencias subjetivas;

el hecho de que el triángulo, el cuadrado y el hexágono regular sean los únicos polígonos regulares que llenan el plano por sí solos, es un hecho matemático de gran senzillez y belleza; pero el concepto más general de módulo plano, como figura encajable consigo misma y que llena el plano, abre, por una parte, una infinidad de posibilidades nuevas que producen una comprensión y una utilización más ricas del plano, y sugiere, por otra parte, una investigación análoga en el espacio.

## PERSPECTIVA FINAL

En fin, después de todo, tal vez la opinión de Hardy no sea tan dogmática como pudo haber parecido al comienzo. En cualquier caso, un análisis de ella más a fondo y más sistemático podría poner en claro algunas zonas oscuras del aprendizaje de las matemáticas.

**Notas**

(1) Y muy diversas, como se manifiesta en la siguiente muestra:

i) Que la altura AH coincide con la mediatriz de BC (fig 5)
ii) Que, siendo M el punto medio de AC, las áreas de los triángulos ABM y BMC son iguales
iii) Que BC es el lado de un pentágono regular inscrito en la circunferencia circunscrita a ABC
iv) Que, tomando BS = BC, el triángulo CBS es semejante al BAC
v) Que AS es la sección áurea de AC

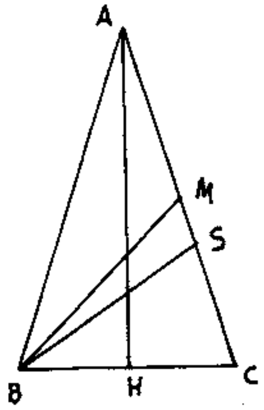



Fig. 5

**REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS**

HOFSTADTER, D.R., 1979, *Godel, Escher, Bach. An Eternal Golden Braid;* (Penguin Books, London) pags. 560, 363, 583.

LENAT, D.B., 1984, *Programación de sistemas inteligentes* («Investigación y Ciencia», n° 98).

POLYA, G., 1966 *Mathematical Discovery,* (John Wiley and Sons: New York), vol. II, p. 132.