TESIS DOCTORAL

2014

INICIACIÓN A LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y SU INCIDENCIA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. UN EJEMPLO DE APLICACIÓN EN LA COMUNIDAD DE MADRID.

Enrique Sánchez Freire

Licenciado en Matemáticas

Departamento MIDE I

Facultad de Educación

Dr. D. Juan Antonio Gil Pascual (Director)

TESIS DOCTORAL

2014

Iniciación a la demostración matemática en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y su incidencia en la resolución de problemas. Un ejemplo de aplicación en la Comunidad de Madrid.

Enrique Sánchez Freire

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid

Departamento MIDE I

Facultad de Educación

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Dr. D. Juan Antonio Gil Pascual (Director)

DEPARTAMENTO DE MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN Y DIAGNÓSTICO EN EDUCACIÓN I (MIDE I)

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Iniciación a la demostración matemática en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria y su incidencia en la resolución de problemas. Un ejemplo de aplicación en la Comunidad de Madrid.

Enrique Sánchez Freire

Licenciado en Matemáticas por la Universidad Complutense de Madrid

Director de la Tesis

Dr. D. Juan Antonio Gil Pascual

Agradecimientos

Muchas personas me han ayudado de distinta forma a realizar este proyecto. Quiero acordarme desde estas líneas de mis padres, que siempre me han inculcado los valores de esfuerzo y sacrificio en los estudios que me han conducido a ser el profesor que soy hoy en día.

A mis abuelos, que desde que empecé en el colegio hasta ahora siempre se han interesado por cómo me han ido en los estudios y me han apoyado en los peores momentos.

A mi director tesis. Sin su esfuerzo y orientación este proyecto hubiera sido imposible.

A todos mis compañeros de trabajo que me han aportado sus opiniones sobre las cuestiones que les he planteado de una manera desinteresada.

Y por último, y no por ello menos importante, a mi mujer, Sara. Por las importantes orientaciones que me ha dado en algunos temas, por su apoyo personal y, sobre todo, por permitir que muchas tardes y noches la *"abandonara"* en pos de este proyecto.

A vosotros, y a otros muchos más familiares y amigos que me han animado a finalizar este proyecto, muchas gracias.

Índice General

6. ANEXOS 318

Lista de tablas

Lista de gráficos

Lista de figuras

Lista de imágenes

1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

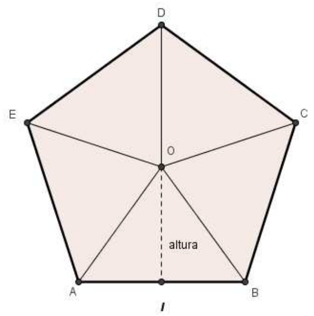
1.1. Introducción

La didáctica de las Matemáticas se encuentra siempre en constante evolución, intentando mejorar sus métodos y buscando otros alternativos que faciliten a nuestros alumnos alcanzar los objetivos propuestos. De hecho, la Matemática no es una ciencia estacionaria, como algunas personas pretenden hacernos ver, ya que sus métodos están en una constante evolución. En estos métodos están implicados todos los componentes de las Matemáticas. Al respecto, podemos citar Halmos (1988):

> ¿En qué consiste realmente la Matemática? ¿Los axiomas? ¿Los teoremas? ¿Las demostraciones? ¿Las definiciones? ¿Las teorías? ¿Las fórmulas? ¿Los métodos? Las Matemáticas seguramente no existirían sin todos estos ingredientes, todos ellos esenciales. Es, sin embargo, sustentable que ninguno de ellos es el meollo de la disciplina, que la razón principal para la existencia del matemático es la resolución de problemas, y que por consiguiente, las Matemáticas realmente consisten en solucionar problemas. (p. 400)

Como se dice en esta cita, el objetivo principal de las Matemáticas es dotar a los alumnos de las herramientas o reglas necesarias para que estos puedan resolver problemas adecuados a su nivel. El debate podría surgir en cómo dotar a los alumnos de esas reglas. En nuestra opinión, si un profesor le da una regla a un alumno para resolver un problema está realizando una labor correcta, pero incompleta. Su labor se completaría si le justificase esa regla, ya que de este modo el alumno podría extender sin ningún lugar a dudas esa regla a situaciones de naturaleza similar.

Por ejemplo, ¿cuántas veces un alumno de Educación Secundaria (o incluso de Bachillerato) no recuerda la fórmula mediante la cual se calcula el área de un polígono regular? En muchas ocasiones, para explicar cómo se calcula el área de un polígono regular, simplemente decimos que su área es $\frac{Perímetro \cdot Apotema}{2}$, explicando lo que es la apotema de un polígono regular. Es lógico, que si esta fórmula no se usa con cierta frecuencia se acabe olvidando. Sin embargo, si deducimos esta fórmula, descomponiendo la figura en triángulos isósceles y calculando su área como la suma de las áreas de esos triángulos, es más sencillo que el alumno, en el caso de que no se acuerde de la fórmula, por sí mismo pudiera deducirla.



$$A = n \cdot \frac{l \cdot altura}{2} = \frac{(n \cdot l) \cdot altura}{2} = \frac{Perímetro \cdot Apotema}{2}$$

Figura 1. **Pentágono regular.**

En las Matemáticas la desconfianza es una actitud habitual, en el buen sentido del término, y es que los matemáticos no nos creemos nada a menos que se demuestre de una forma irrefutable. De hecho, esta es la base del método científico, y sin llevarlo al extremo, creemos que deberíamos ir inculcando esta cultura en su didáctica. El bajo nivel que muestran generalmente los alumnos en la comprensión y en la elaboración de pruebas o demostraciones y el mencionado papel que juegan las validaciones en la propia Matemática parece que justificarían su introducción.

Tal y como indica en su estudio Badia (2012), en la actualidad existe una elevada tasa de fracaso académico en los primeros cursos universitarios, siendo especialmente preocupantes los datos de las ingenierías. Las causas pueden ser múltiples (falta de conocimientos previos, excesivo nivel, exámenes complicados y concentrados, falta de motivación, falta de estudio, excesivas faltas de asistencia a clase, masificación de aulas, horarios sobrecargados, etc.), pero lo que es un hecho es que en el paso del Bachillerato al primer curso universitario muchos alumnos se quedan por el camino.

Desde las universidades se han tomado algunas medidas como modificar los contenidos de algunas asignaturas o la de implantar un *curso cero* de adaptación. Sin embargo, desde la Educación Secundaria, al menos en la asignatura de Matemáticas, percibimos que progresivamente se han ido suavizando los contenidos y el rigor, y esto no ha contribuido a preparar mejor a los alumnos para su andadura universitaria.

Una de las medidas que se podrían implantar para paliar esta situación es la que proponemos en esta investigación. Buscar progresivamente un mayor rigor en los procedimientos utilizados, que no tiene porqué implicar una ampliación del currículo.

Otro factor que condiciona en gran medida el uso de la demostración en el aula es que en la actualidad hay muchos profesores de Matemáticas que han accedido a su puesto de trabajo con una titulación que no es la de licenciado en Matemáticas, como por ejemplo ingenieros, físicos, químicos, economistas, informáticos, etc. Por lo general, estos profesores en sus titulaciones han visto unas matemáticas "*más prácticas*" que "*rigurosas*" y eso les lleva de manera natural a inculcar esa misma didáctica con los alumnos. A pesar de que en sus respectivas titulaciones han tratado con demostraciones matemáticas, ven en ellas muchos puntos en contra como la dificultad para ellos y los alumnos, la indisposición por parte de los alumnos ante este tipo de retos, la falta de aplicaciones prácticas y, sobre todo, el requerimiento de un esfuerzo mental que en muchas ocasiones es frustrante tanto para el profesor como para el alumno.

Está claro que dominar una demostración de una proposición matemática ayuda a la comprensión del resultado, facilita su posterior utilización práctica y contribuye a la consolidación del lenguaje matemático. Sin embargo, existe un arduo debate en determinar si su utilización en el aula permite mejorar el rendimiento de los alumnos, y en el caso de que así sea, cómo introducirlas en el aula mediante aproximaciones suficientemente fundadas. En este sentido, las nuevas tecnologías han ampliado los procedimientos que podemos utilizar para comprobar la veracidad de algunos resultados. Estos procedimientos no pueden ser considerados demostraciones, pero en ocasiones sí que se pueden utilizar como pasos previos a una demostración más rigurosa.

Uno de los objetivos principales de la investigación que vamos a realizar es comprobar experimentalmente si la demostración matemática en un aula de Educación Secundaria Obligatoria desempeña un papel que va más allá del de darle rigor a la materia o mostrar la veracidad de un resultado. Existe un consenso general en que es una herramienta fundamental en el quehacer matemático, pero además vamos a intentar comprobar si con una utilización apropiada, las demostraciones matemáticas permiten una mejora en el desarrollo lógico del individuo, lo que le conduciría a mejorar en su progresión a la hora de resolver problemas matemáticos de distinta índole, objetivo este que es el primordial de las Matemáticas.

Hasta el momento se han desarrollado muchas investigaciones y escrito multitud de artículos sobre la utilización de la demostración en la didáctica de las Matemáticas. Lo que plantearemos como novedad en esta investigación es que vamos a realizar un estudio experimental que nos va indicar si una adecuada utilización didáctica de la demostración matemática repercute positivamente en las capacidades de los alumnos a la hora de resolver problemas matemáticos.

La primera parte de la investigación consistirá en realizar una fundamentación teórica en donde comenzaremos describiendo el estado de la cuestión. En este punto observaremos como las opiniones sobre la utilización didáctica de la demostración han sido muy dispares entre los investigadores, pasando por épocas donde no se recomendaba su utilización didáctica e incluso se relegaba a un segundo plano en la Matemática profesional con el fin de priorizar la generación de resultados, hasta la época actual donde la mayoría de los investigadores apuestan por su utilización de un modo adecuado. Seguiremos analizando el concepto de demostración, viendo los rasgos principales de este concepto en distintos contextos como pueden ser en la Lógica y en los fundamentos de las Matemáticas, en la Matemática profesional, en las Ciencias Experimentales, en la vida cotidiana o en el aula. Expondremos las funciones que algunos autores le atribuyen a las demostraciones, tanto en la propia Matemática, como en su didáctica. Analizaremos los métodos que se suelen utilizar para realizar demostraciones matemáticas, exponiendo algunos ejemplos de cada uno de ellos en los anexos finales. Buscaremos el origen histórico de los procesos de demostración, viendo la evolución histórica que han tenido hasta que llegó el célebre problema de la incompletitud en la primera mitad del siglo XX, cuando Gödel demostró que, bajo ciertas condiciones, ninguna Matemática formal capaz de describir los números naturales y la Aritmética es simultáneamente consistente y completa. Es decir, que si entre los axiomas de dicha Matemática no hay contradicciones, habrá afirmaciones que no se puedan ni afirmar, ni refutarse. Continuaremos realizando un análisis de cómo se trata a la demostración en distintos organismos como el National Council Of Teachers of Mathematics (NCTM), el Informe PISA o en los currículos que han estado vigentes en España y el actual de la Comunidad de Madrid, que es donde se va a centrar la investigación. Como el objetivo principal de la investigación es analizar la incidencia que tiene el tratamiento de la demostración en las aptitudes de un alumno para resolver problemas matemáticos, veremos lo que se entiende por problema en Matemáticas, diferenciándolo del concepto de ejercicio. Expondremos algunos de los métodos que se han establecido para resolver problemas y mencionaremos también algunas de las estrategias que se utilizan con frecuencia. Para finalizar esta fundamentación teórica, haremos un recorrido histórico en donde indicaremos diferentes demostraciones y problemas que, gracias a su estudio y resolución, han ayudado, no solo al desarrollo de las Matemáticas, sino también a la aparición de nuevas ramas en esta ciencia.

En la segunda parte detallaremos la fase experimental del proceso de investigación. Comenzaremos planteando el problema a investigar, que consistirá en estudiar el impacto en los procesos de resolución de problemas que tiene una metodología en donde se le otorgue relevancia especial a los procesos de demostración, argumentación y justificación de los resultados en un grupo de 3º ESO. Para ello compararemos los resultados en determinadas variables que obtiene un grupo (experimental) en donde en su metodología se le ha otorgado un especial relevancia a los procesos de demostración, argumentación y justificación, frente a los resultados en las mismas variables de otro grupo (control) donde su metodología ha sido más tradicional, basada en explicaciones teóricas, resolución de ejercicios y problemas y realización de prácticas TIC. Como en todo proceso de investigación, plantearemos con detalle los objetivos y las hipótesis que pretendemos contrastar, que irán encaminados a determinar el efecto que tiene la implantación de esta metodología sobre variables como la calificación en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura, los resultados de la prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) y, sobre todo, en la resolución de problemas. Para este último aspecto, realizaremos tres pruebas "*ad hoc*", que se les pasaron a los alumnos a lo largo del curso académico y que previamente fueron supervisadas por 27 expertos en la materia para asegurarnos de que eran adecuadas al nivel de los alumnos. Dada la naturaleza de la investigación, el diseño utilizado fue cuasi-experimental. Como la investigación se realizó con una muestra de 42 alumnos de un instituto público de Coslada (Madrid) no podremos generalizar los resultados a una población demasiado amplia. Por ello consideramos que la población de la investigación fue los alumnos que durante el curso académico 2011-12 estuvieron matriculados en un instituto público de Coslada cursando el currículo ordinario de 3º ESO. Indicaremos los individuos, instrumentos y variables que utilizamos, describiendo los procesos de validación de los instrumentos que hemos realizado. Detallaremos el programa didáctico de intervención en ambos grupos para observar las diferencias metodológicas que hubo entre ambos grupos en cada unidad didáctica. Por último en esta parte, se expondrá el análisis estadístico que se realizará con los resultados obtenidos.

En la tercera parte de la investigación expondremos los resultados obtenidos y los analizaremos estadísticamente. Primero realizaremos un análisis descriptivo de los datos utilizando los parámetros y gráficos habituales en este tipo de estudios, en donde analizaremos los resultados en los diferentes grupos por trimestres y su evolución global. También realizaremos un estudio de correlación lineal para comprobar en qué grado están relacionadas las calificaciones del curso con las de la prueba CDI en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura. En este tipo de estudios, la variabilidad es un factor importante, por lo que en la parte del análisis estadístico inferencial comprobaremos mediante la técnica del análisis de la varianza (ANOVA) si se han producido diferencias significativas entre los resultados de los dos grupos. Para estos cálculos utilizaremos el programa estadístico de software libre R.

En la cuarta y última parte de la investigación, estableceremos unas conclusiones finales en las que:

a) Se realizará un resumen de los resultados en donde se indicará si se aceptan o rechazan las hipótesis planteadas.
b) Se indicarán implicaciones teóricas y prácticas que tienen los resultados obtenidos.
c) Se indicarán las limitaciones encontradas durante la investigación.
d) Se indicarán sugerencias sobre posibles investigaciones futuras relacionadas con el tema tratado.

Para finalizar se indicará la bibliografía utilizada y un conjunto de información relevante para la investigación incluida en el apartado de anexos.

1.2. Estado de la cuestión

Dentro del campo de las Matemáticas como ciencia, el papel que han desempeñado las demostraciones siempre ha sido relevante ya que son parte del rigor que caracteriza a esta área del conocimiento, aunque como veremos en el punto 1.6 en distintas épocas de la historia su papel fue relegado a un segundo plano con el objetivo de priorizar la producción de resultados frente al rigor. Su rol dentro de la didáctica de las Matemáticas no ha estado tan claro y podemos encontrarnos opiniones dispares sobre la conveniencia o no de su utilización en el aula.

Tras la demostración del teorema de incompletitud de Gödel en 1931 se produjo una gran crisis en los fundamentos de las Matemáticas y se comenzaron a poner en cuestión el modo en que se debía trabajar en esta ciencia. A pesar del empeño de algún matemático como Polya (1945), que apoya la utilización de las demostraciones, en especial las geométricas, ya que en caso contrario el alumno perdería la ocasión de saber lo que es un razonamiento lógico riguroso, hasta finales del pasado siglo se impusieron las ideas propuestas por Lakatos en su tesis doctoral sobre la lógica del descubrimiento matemático, en donde se relega a la demostración a un rol secundario en las Matemáticas. La idea de Lakatos (1976) radica en el hecho de que la demostración de una conjetura lleva consigo una serie de explicaciones que hace que esta se haga cada vez más plausible y se enriquezca, mientras que el rigor absoluto presionan a la conjetura con la búsqueda de contraejemplos hasta llegar a falsearla. Esta propuesta de un proceso "cuasi-empírico" atrajo a muchos investigadores de la época. En el plano didáctico, mantiene esta misma idea de considerar inconveniente trabajar con demostraciones en el aula ya que su utilización dificulta la construcción del conocimiento matemático, sobre todo en los alumnos que no estudian para ser matemáticos y que en su gran mayoría no están preparados para apreciar la belleza de las demostraciones y motivarse para realizarlas. Lakatos critica el deductivismo euclídeo, desestimando el papel de la demostración y la verificación ya que, según su opinión, este modo de proceder no debe hacer de las Matemáticas una ciencia de verdades absolutas. También cree que profesores que no han estudiado la carrera de Matemáticas y que no valoran la importancia de las demostraciones es prácticamente imposible que hagan ver en sus alumnos la importancia que tienen en el rigor de las Matemáticas y les motiven para realizarlas.

Kline (1981) plantea una serie de argumentos para defender su postura contraria al uso didáctico de las demostraciones:

a) Muchos matemáticos han descubiertos teoremas de una gran importancia que luego no han sabido demostrar.
b) Al dar demasiada importancia al rigor, se pueden alejar las Matemáticas de los estudiantes al parecer que sus resultados provienen de personas con un alto nivel intelectual que razonaban directamente con teoremas y axiomas.
c) No son procedimientos útiles para solucionar problemas cotidianos.
d) Los planteamientos deductivos pueden resultar motivadores para cierto perfil del profesorado, pero son anestésicos para la gran generalidad del alumnado.

El debate sobre el uso de la demostración en el aula se acrecentó en los inicios de la década de los noventa con la introducción en las aulas de las nuevas tecnologías y de demostraciones realizadas con estos medios como la de Appel y Haken del problema de los cuatro colores. La influencia de Lakatos seguía en las ideas de varios investigadores hasta el punto que, según Hanna (2007), algunos proclaman que la demostración no es una actividad central en el descubrimiento matemático y la entienden como una especie de afrenta autoritaria a los valores sociales modernos que pueden obstaculizar el aprendizaje de determinados alumnos. El clima era tal que, como nos indica Alcolea (2002), hubo manifestaciones como la de Horgan (1993) que piden el fin de la demostración o la de Zeilberger (1994) que solicita un nuevo testamento para la Matemática. Con la idea de desprestigiar la demostración matemática, el propio Zeilberger relaciona su importancia con el valor económico. Consigue demostrar, utilizando el ordenador, la conjetura de Goldbach con una probabilidad mayor que 0,9999 y estima que la certeza absoluta vendría a costar unos 10 billones de dólares, preguntándose si realmente sale rentable alcanzar esa verdad absoluta. Podemos observar como estamos en los peores momentos para la demostración. De hecho, hasta se llega a anunciar que se dejarían de publicar demostraciones en revistas de la talla de Scientific American.

Aún en esta época en donde el futuro de las demostraciones se mostraba muy oscuro, hubo algunos investigadores que confiaban en su utilidad didáctica. Podemos citar a Solow (1987) que define la demostración como un método para comunicar una verdad matemática a otra persona que habla el mismo idioma. Achaca la dificultad en la comunicación de las demostraciones a la falta de una metodología adecuada que explique la forma de hacerlo. Él mismo elaboró dicho manual en donde establece un lenguaje común en el que pueden comunicarse profesores y alumnos.

A mediados de la década de los noventa las ideas de Lakatos fueron perdiendo fuerza al observar los investigadores que el método de refutación heurística no tenía en la práctica mucho éxito y que los éxitos que se lograban eran con métodos opuestos a los propuestos por Lakatos. Iban surgiendo posturas más intermedias como la de Vega (1993) que afirma que aunque las Matemáticas no se pueden entender de un modo exclusivamente demostrativo, ya que él valora muy positivamente los resultados obtenidos por medio de conjeturas y por aproximaciones, no se puede hacer desaparecer las demostraciones del quehacer matemático.

Jaffe y Quinn (1993) proponen distinguir entre resultados basados en demostraciones rigurosas y los que se basan en argumentos heurísticos o no rigurosos, dividiendo los trabajos matemáticos en estos dos tipos y pidiendo la aceptación matemática de estos últimos. A esta idea se opuso Thurston (1994) argumentado que en su opinión lo verdaderamente importante es cómo conseguir que avance la comprensión humana de esta ciencia, considerando inadecuado dividir sus contenidos en función de cánones de rigor. Defiende el valor de la demostración como medio para comunicar ideas y para generar otras nuevas.

Pero también aparecieron posturas claramente a favor del uso de las demostraciones. Podemos citar inicialmente a De Villiers (1993) que propone un modelo en el dota a la demostración de una serie de funciones como la explicación, la verificación, la síntesis o el descubrimiento, permitiendo descubrir las posibilidades que tendría su introducción en la didáctica de las Matemáticas.

Estas nuevas tendencias también se pudieron observar en obras como las de Greeno, Schoenfeld o Hanna. Greeno (1994) manifiesta su preocupación por las ideas que intentan hacer desparecer la demostración en la didáctica de las Matemáticas y propone una mayor toma de conciencia del significado de la demostración. Schoenfeld (1994) afirma de manera categórica que es absolutamente necesaria la utilización de la demostración en la didáctica de las Matemáticas. Mientras que Hanna (1995) afirma que un aspecto importantísimo de la demostración en el aula es la forma en la que se les presenta a los alumnos. No debe hacerse como un puro ritual propio de las Matemáticas, sino como un procedimiento con "*razón de ser*" dentro del propio aprendizaje. Sobre esta interesante idea, podemos citar a Santaló (1962):

> Si un alumno sabe repetir una demostración, pero no sabe repetirla si se cambian las letras o la posición del polígono, significa que ha aprendido la demostración de memoria, y esto sí que no tiene ningún valor. Mejor dicho: tiene un valor altamente negativo, pues significa que el alumno, no solamente ignora tal demostración, sino que desconoce totalmente lo que es la Matemática y que ha desperdiciado la memoria con un objeto inútil y nada educativo. (p. 21)

Investigadores españoles también eran partidarios de utilizar las demostraciones en el aula. Ibañes y Ortega (1997) argumentan que el pensamiento deductivo se debe ir construyendo progresivamente en los distintos cursos, sin llegar a pretender que se alcance de una forma sólida en la Educación Secundaria. Codina y Lupiañez (1999) son conscientes de los beneficios que aportaban las demostraciones en la comprensión de los resultados, pero no tienen claro que se pueda sacar ese resultado cuando gran parte de los alumnos y algunos profesores no entienden lo qué es, el papel y la fuerza que tienen la demostraciones. Aguirre y Lupiañez (2000) no son partidarios de trabajar con demostraciones absolutamente formales en el aula, pero sí con aproximaciones como las que proporcionan las nuevas tecnologías.

Ya en el siglo XXI la tendencia sigue siendo la de promover el uso de la demostración en el aula, con algunas excepciones como de Aparicio (2000) que sostiene que “el rigor y distanciamiento de la realidad a veces requerido por las asignaturas con mayor carácter formal es una de las causas mayores de frustración y abandono entre los estudiantes en todos los niveles educativos” y propone como uno de los elementos conducentes a una clase magistral (en Estadística) “evitar en lo posible las demostraciones de los teoremas y demás resultados matemáticos”. También podemos citar a Fiol (2001) que considera que las demostraciones deberían presentarse solo a personas que vayan a estudiar carreras de Ciencias o Técnicas, ya que en su didáctica estaba por redefinir aspectos como su necesidad práctica o los tipos de demostraciones a utilizar. Otra excepción sería Pluvinage (2007) que defiende que la demostración no es constitutiva de la actividad matemática, poniendo como ejemplo la Matemática árabe, rica en algoritmos y resultados, pero pobre en demostraciones.

En cambio, Barroso (2000) expone la necesidad didáctica de demostrar ciertos resultados, sobre todo en Geometría, desde distintas perspectivas, haciendo ver al alumno de la necesidad de este proceso, advirtiendo el hecho de que una propiedad que se cumpla en un número determinado de casos no implica necesariamente que se cumpla siempre.

Para De La Torre (2000) la cuestión del uso de la demostración en el aula es una cuestión dialógica, proponiendo su uso con absoluta libertad, permitiendo diálogo, debate y comunicación y acercando la demostración a situaciones cotidianas a través de la necesidad de dar argumentos o de justificar acciones que realizamos con frecuencia.

Escudero (2000) es partidaria de abordar las demostraciones en el aula al mismo tiempo que contribuimos a que nuestros estudiantes vayan formándose una idea sobre la naturaleza de las Matemáticas. Cree que construir argumentos de validación y de prueba y que la profundización en los procesos de demostración debe ser uno de los retos de los profesores.

Bravo, Arteaga y Sol (2001) mencionan que el trabajo con demostraciones ayuda a desarrollar procesos como la abstracción, el análisis, la síntesis, la clasificación, la particularización, la comparación o la generalización. También destacan como ayuda a desarrollar formas de pensamiento extralógico (pensamiento creativo, heurístico, especulativo, etc.) que se complementan con el pensamiento lógico deductivo en la resolución de problemas. Recalcan, de igual modo, que al trabajar con las demostraciones, el alumno adquiere un mayor conocimiento del enunciado matemático lo que le permite adquirir competencias para identificar con mayor facilidad contextos en los que se puede aplicar el enunciado estudiado.

Godino y Martínez (2001) también son partidarios de la progresividad que mencionan Ibañes y Ortega, promoviendo unas Matemáticas tanto eficaces, como rigurosas, haciendo ver que en todos los niveles de la enseñanza se puede precisar algunos de los significados de prueba (ver punto 1.3). Además, Martínez (2001) indica como desde que se demostrara el teorema de incompletitud de Gödel, el sistema formal ha mostrado sus límites. Propone no limitar desde el punto de vista epistemológico el uso de la demostración al del rigor y revisar su interpretación formalista, flexibilizando su significado. En concreto, en la etapa de Educación Secundaria, propone el uso de pruebas empírico-inductivas y la demostración deductiva informal.

Alsina (2003) es defensor de la utilización didáctica de determinadas demostraciones y menciona las siete virtudes que debería tener una demostración que quisiéramos integrarla en la docencia:

1. **Debe ser ejemplar**. El método utilizado debe mostrar una forma singular o creativa de proceder, es decir, debe ser un ejemplo de cómo poder afrontar matemáticamente otras situaciones similares.
2. **Debe ser necesaria**. Cuando la proposición que se pretende demostrar sea obvia o incomprensible, no tiene mucho sentido realizarla desde el punto de vista docente. La necesidad demostrativa está relacionada con la necesidad de iluminar, recalcar o profundizar en un determinado hecho.
3. **Debe ser rigurosa**. No se trata de buscar un rigor absoluto, ya que en la docencia se entiende que el concepto de rigor debe ser siempre relativo al nivel de los alumnos. En el aprendizaje en espiral que se practica en las Matemáticas, este rigor debe ser progresivo cada vez que se vuelven a analizar contenidos ya estudiados con anterioridad.

4. **La demostración y el resultado deben ser entendibles**. No se trata de entender solo los pasos de la demostración, sino buscar un conocimiento más amplio que llegue a entender plenamente el resultado, sus posibles consecuencias, posibles equivalencias que se pudieran extraer, etc.
5. **Debe ser elegante**. La elegancia engloba a tres factores: una argumentación clara, minimalista (en el sentido que requiera el menor número de recursos) y breve.
6. **Debe mantener la atención, captar el interés y la participación**. Esta virtud está intrínseca en toda actividad docente. En este sentido, se propone no utilizar términos como teorema o proposición y dar más importancia a los procesos inductivos, heurísticos y a realizar conjeturas.
7. **Debe ser escenificada, cuidando tanto su presentación como su dinámica**. Debe prepararse con esmero utilizando, si es posible, algunos recursos como imágenes, esquemas, materiales manipulativos, etc. También hay factores que pueden favorecer la dinámica como establecer un debate previo o el cuidar la velocidad de escritura.

Larios (2003) considera que no es posible que los alumnos conozcan el espíritu de las Matemáticas si se elimina de su didáctica una parte medular y epistemológicamente indispensable como la demostración. Su uso inadecuado en el aula lo atribuye a que como no existe una concepción única e inmutable de la demostración, en la escuela se suele tomar la acepción más rigurosa, lo que conduce generalmente a que o no se utilice, o se utilice incorrectamente. Propone un uso de la demostración que vaya más allá del de verificación para que los alumnos alcancen objetivos como el construir relaciones complejas entre la observación, la argumentación y la construcción de demostraciones.

Crespo y Ponteville (2005a, 2005b) sitúan la problemática de la situación en que el docente, por lo general, desconoce las diferencias entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar. Esto, unido a la falta de referencias explícitas en los planes de estudio, conduce a que se confundan el enfoque que deben tener las demostraciones en el aula y se lleve a una excesiva formalización.

Flores (2005), tras un estudio experimental centrado en alumnos de 5 a 10 años, llega a la conclusión de que los profesores debemos ayudar a que los alumnos modelen sus propios estilos de prueba, guiándoles al objetivo final pretendido. Cree que hay que inculcar un espíritu crítico en los alumnos que les lleve a cuestionar y explicar sus propias respuestas. Esto traería como beneficio que los alumnos recordarían durante más tiempo las ideas fundamentales de los contenidos tratados.

Ruíz (2006) es muy partidario de que los procesos de abstracción tengan relevancia en la didáctica de las Matemáticas, ya que de este modo se les daría las condiciones a los alumnos para que su pensamiento fuera capaz de ascender a lo mejor de la cultura y del conocimiento universal.

Martinón (2009) considera que para que las Matemáticas formen intelectualmente al alumno es imprescindible que se presenten de una forma racional y no como un misterioso conjunto de reglas de obligado cumplimiento. Entiende que la demostración es la cumbre de la argumentación racional y por eso debe tener cabida de una forma explícita en los currículos escolares.

Nuestra opinión en torno a esta cuestión está en la línea de las últimas que hemos expresado. Creemos que utilizando correctamente la demostración y los procesos argumentativos y de justificación en el aula se pueden mejorar las capacidades de los alumnos para resolver diversas situaciones matemáticas. Lo importante es cómo emplear correctamente estos recursos. Para ello, creemos que lo primero que habría que hacer es un plan de formación de profesorado en el que se explicaran los aspectos básicos de estos procedimientos (manera de introducir estos procedimientos, qué proposiciones demostrar, métodos a utilizar, etc.). Esta idea va en la línea de lo propuesto por Azcárate (1997):

> Si queremos transformar la escuela y las prácticas que en ella se desarrollan en torno al conocimiento matemático hacia formas más coherentes con el desarrollo integral del individuo, es imprescindible poner en cuestión la actual formación de los profesores de Matemáticas. Ellos son los verdaderos gestores del cambio. El problema fundamental gira, por tanto, en torno a las formas de adecuar esa formación a los cambios demandados por la sociedad y la necesidad de afrontarlos con el rigor y fundamentación necesarios.

Después, creemos que es de vital importancia la progresividad de todo este proceso. Se puede empezar en los últimos cursos de la Educación Primaria, a partir de conjeturas, elaborando simples procesos elementales de justificación y de pruebas, para, a partir de ahí, ir evolucionando en este tipo de procedimientos. Por último, también pensamos que estos procedimientos deben tener una cabida más explícita en los currículos de Matemáticas. Deberían marcar la progresividad que hemos indicado, mostrando qué tipos de pruebas y qué métodos se pueden hacer en cada etapa educativa.

1.3. El concepto de demostración en diferentes contextos

1.3.1. Conceptos generales

En nuestro entorno el verbo demostrar se utiliza en bastantes más contextos que el científico. Alsina (2003) muestra algunos ejemplos de ello:

a) En el ámbito social con expresiones paradigmáticas como "*con lo que aguanta demuestra tener una paciencia sin límites*" o como ejemplo de una falsa inducción completa como "*otro político imputado por corrupción, son todos unos corruptos*". También son habituales en el ámbito conyugal las denominadas *"demostraciones de amor"*.

b) En el ámbito religioso son muy abundantes en la Teología las *demostraciones de la existencia de Dios*.

c) En el ámbito militar se suelen realizar lo que se denominan *demostraciones de fuerza.*

d) En el ámbito jurídico es muy común tener la necesidad de *demostrar unos hechos*.

Sin embargo, si se pretende investigar el valor didáctico que puede tener trabajar con pruebas y demostraciones en un aula de Matemáticas, habrá que clarificar estos y otros conceptos relacionados en su contexto correspondiente. Si se acude al diccionario de la Real Academia Española (2001) nos encontraríamos que las definiciones más próximas a los términos con los que vamos a trabajar son:

1. **Demostrar**: probar, sirviéndose de cualquier tipo de demostración.
2. **Demostración**: comprobación, por hechos ciertos o experimentos repetidos, de un principio o una teoría.
3. **Probar**: justificar, manifestar y hacer patente la certeza de un hecho o la verdad de algo con razones, instrumentos o testigos.
4. **Argumentar**: aducir, alegar, poner argumentos.
5. **Argumento**: razonamiento que se emplea para probar o demostrar una proposición, o bien para convencer a alguien de aquello que se afirma o se niega.
6. **Razonamiento**: serie de conceptos encaminados a demostrar algo o a persuadir o mover a oyentes o lectores.

Está claro que estas definiciones no nos ayudan clarificar la idea de demostración. De hecho, si revisamos la bibliografía sobre el tema, vemos que el concepto de demostración se trata generalmente de una manera excesivamente rígida entre los matemáticos. A lo largo de este punto vamos a realizar un estudio del concepto de demostración en distintos contextos institucionales basándonos principalmente en las ideas que aportan Godino y Martínez (2001).

El término demostración es utilizado en muchos contextos y con muchos matices. Esto hace que términos como prueba, explicación o argumentación, en los que se percibe una idea común, que es la de justificar una afirmación aportando razonamientos, se utilicen casi como sinónimos. No obstante, hay situaciones en las que se utilizan más unos términos que otros, lo que hace que se enmarquen en distintos contextos.

El término argumentación se utiliza en muchas ocasiones como sinónimo de demostración. Sin embargo, autores como Duval (1999) los considera como dos tipos de razonamientos con vínculos de organización, estructura y funcionamiento cognitivo diferentes. Según él, argumentar no es demostrar. Para que un razonamiento alcance la categoría de demostración este debe ser considerado valido por expertos en la materia que se trate y debe tener como objetivo la verdad. En cambio, la argumentación tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo (véase la relación con la definición de la Real Academia Española de argumento), estando más cercano a las prácticas discursivas espontáneas que se suelen emplear inicialmente en el aula.

Una cuestión interesante en este punto sería plantearse si el trabajo con argumentaciones puede llevarnos a valorar y a aceptar la importancia de las demostraciones matemáticas rigurosas, es decir, ¿hay o no hay continuidad cognitiva en el tránsito de la argumentación a la demostración? En este sentido, Duval afirma que aún en las formas más elaboradas de la argumentación, no se establece la continuidad cognitiva ya que el razonamiento deductivo que utiliza la demostración precisa de un aprendizaje específico e independiente.

Hay autores que son aún más contundentes de Duval. Un ejemplo puede ser Balacheff (1999) que afirma que la argumentación es un obstáculo epistemológico importante para el aprendizaje de la demostración, ya que en la demostración se renuncia a las libertades que uno puede tomarse en la argumentación. Afirma que la argumentación es a la conjetura, como la demostración es al teorema, con lo que concluyó que es un error de carácter epistemológico hacer creer a los alumnos que son capaces de producir una prueba o demostración cuando no han hecho otra cosa que argumentar.

Sin embargo, otros autores opinan de forma diferente sobre esta cuestión. Toulmin (2007) sí que cree que es posible esa continuidad. Relaciona la validez de un enunciado con la estructura y racionalidad del discurso que defiende, dependiendo su validez de algunas premisas englobadas en una continuidad.

En cuanto al concepto de demostración, Godino y Martínez (2001) la definen como "el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción." (p. 406)

Al respecto, resulta interesante la aportación de Krummeheuer (1995) que distinguió entre argumentos analíticos y sustanciales. Los analíticos son los característicos de las deducciones lógicas en los que no se aporta un significado especial a las premisas del que potencialmente ya tenían. Por el contrario, los sustanciales son aquellos en los que se va expandiendo el significado de las proposiciones debido a que se van relacionando con aplicaciones concretas.

Sobre el término razonamiento, Balacheff (2000) lo definió como "la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información." (p. 13)

Según Godino y Martínez (2001), esta actividad intelectual origina las prácticas argumentativas, personales o institucionales, del mismo modo que el razonamiento se desarrolla por medio de dichas prácticas, concluyendo por tanto que el estudio del razonamiento está relacionado con el estudio de la argumentación.

Como hemos mencionado anteriormente, el significado de estos conceptos varía en función del contexto en el que se sitúen. Así, Wilder[1] (citado en Godino y Martínez, 2001) nos recordó que "No debemos olvidar lo que constituye una prueba puede variar de cultura a cultura, como también de una época a otra." (p. 407) Es por ello que habría que aclarar

1 La cita original se encuentra en WILDER, R.W. (1981). *Mathematics as a cultural system*. Nueva York: Pergamon. (p. 346)

entonces el concepto de contexto. En este sentido, Godino y Martínez (2001) entienden como contexto o marco institucional "un punto de vista local o una perspectiva sobre una problemática determinada, caracterizada por el uso de recursos expresivos e instrumentales propios, por hábitos y normas específicas de comportamiento." (p. 407)

Hasta ahora hemos hablado del concepto de prueba y otros relacionados con él de una forma general. A continuación vamos a analizar la riqueza que adquieren estos conceptos cuando los situamos en diferentes contextos, llegando a generarse, como veremos, distintos objetos prueba, cada uno con sus propias particularidades. Esta idea es muy interesante cuando estamos investigando el papel de la demostración en aula, ya que reconociendo esta diversidad de significados nos encontraremos en una mejor situación para estudiar las circunstancias de su desarrollo, los papeles que desempeña en diferentes contextos, mejorar los análisis de los conflictos cognitivos que se producen en individuos situados en determinados contextos y apreciar las características comunes que unen a los distintos objetos.

1.3.2. En la Lógica y los fundamentos de las Matemáticas

La validez que todos otorgamos a las deducciones lógicas es lo que otorga veracidad a las demostraciones que se realizan utilizándolas de modo que un enunciado que se acepte como verdadero conforme a esas reglas tendrá una validez universal e intemporal, garantizando esta validez las reglas lógicas que se han utilizado. De este modo, podemos decir que una demostración de un teorema es consecuencia de las premisas de las que parte y de la buena utilización de las reglas de la lógica.

En este contexto, un objetivo sería garantizar el buen funcionamiento del sistema, lo que implica buscar un número mínimo de axiomas (verdades evidentes que son aceptadas sin demostración previa), que sean independientes entre sí, no contradictorios entre ellos y completo (que cualquier proposición se pueda decidir si es cierta o falsa). El problema de esta cuestión fue cuando en 1931 Gödel dinamitó los cimientos de la Lógica con sus teoremas de incompletitud. Estas cuestiones la abordaremos con más profundidad en punto 1.7.

La demostración la definen Godino y Martínez (2001) en este contexto como "el objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas analíticas formales, y su significado viene dado por los rasgos intensionales, extensionales y representacionales descritos." (p. 407)

Esto no quiere decir que en estos contextos no se utilicen para demostrar argumentaciones sustanciales y es que, tras la aceptación de los axiomas, las argumentaciones que hacemos los matemáticos son intrínsecamente inductivas, es decir, de lo particular a lo general. En aula se suele trabajar con la misma mecánica. Primero vemos unos casos particulares, después intentamos realizar una conjetura y finalmente intentamos demostrarla con las herramientas que poseemos.

En este sentido, es muy interesante la siguiente reflexión que nos dejó Poincaré[2] (citado en Godino y Martínez, 2001): "¿Cuál es la naturaleza del razonamiento matemático? ¿Es realmente deductivo como ordinariamente se cree? Un análisis profundo nos muestra que no es así; que participa en una cierta medida de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo." (p. 407)

2 La cita original se encuentra en POINCARÉ, H. (1963). La ciencia y la hipótesis. (De Besio, A.B. y Banfi, J., trad.) Madrid: Espasa-Calpe. (Obra original de 1902) (p. 15)

1.3.3. En la Matemática profesional

Cuando nos situamos en la Matemática profesional, el concepto de prueba o demostración cambia sustancialmente. Por lo general, el tipo de pruebas que se practican en este campo son bastante complejas y en la mayoría de las ocasiones las demostraciones que surgen en la actualidad solo se encuentran al alcance de matemáticos especialistas en el campo en el que se sitúan.

La tendencia últimamente en la Matemática profesional es trabajar con pruebas algo más informales y menos rigurosas con el objetivo de que el trabajo sea más productivo, utilizando para ello el lenguaje ordinario, completado con el simbólico propio de la lógica y del campo de las Matemáticas en el que se esté trabajando. En cuanto al grado de rigor exigible a una demostración, no hay un estándar generalmente aceptado.

Cuando en la Matemática profesional se intenta demostrar la implicación $A \rightarrow B$, que desde un punto de vista lógico significa que si A es cierto entonces B también es cierto, lo que el matemático utiliza como apoyo fundamental es el significado particular de lo que él entiende por las expresiones de A y B. De este modo, la Matemática adquiere un carácter temporal y particular. Es por ello por lo que Hersh (1993) describe la demostración dentro de este contexto como un argumento convincente juzgado como tal por jueces cualificados.

Por último, debemos comentar que hoy en día los intereses de los matemáticos profesionales van encaminados fundamentalmente en la resolución de nuevos problemas y en incrementar los conocimientos que ya se poseen. En menor medida se preocupan por la fundamentación de las Matemáticas como ocurrió a principios del siglo XX. Ese puede ser el motivo por lo cual no se requiera una "*máxima seguridad*" a la hora de hacer demostraciones. Como dijimos antes, unas Matemáticas excesivamente teóricas y que requieran la revisión constante y profunda de cada paso que se da en cada demostración harían que estas fueran menos productivas en resultados. Se trata de buscar un equilibrio entre la productividad y el rigor absoluto, aunque, por supuesto, cuando se llega a un resultado especialmente relevante, la revisión que se lleva a cabo por matemáticos acreditados en la cuestión sí es minuciosa para garantizar o no su validez tal y como indicaba Hersh.

1.3.4. En las Ciencias Experimentales y vida cotidiana

En estos contextos adquiere una especial relevancia los procesos inductivos y experimentales mediante los cuales se concluye que si cierta propiedad se verifica regularmente para algunos elementos de un conjunto, dicha propiedad se verificará en circunstancias similares en todos los elementos de dicho conjunto o, entrando ya en el campo de la Inferencia Estadística, se verificará con una cierta probabilidad.

En el campo de las Ciencias Experimentales los procedimientos se deben hacer con sumo cuidado, intentando controlar al máximo los posibles factores que pudieran alterar el resultado del experimento o de la observación.

Debemos destacar que en estos campos desempeña un papel importante el razonamiento por analogía. Partiendo de la semejanza de algún aspecto de procedimiento con otro puede llevarnos a simplificar el proceso o extraer nuevas conclusiones.

Utilizando estos procedimientos es claro que:

- La validez de los enunciados que se originan no tienen ni universalidad, ni un carácter absoluto, es decir, no se pueden considerar válidos en cualquier circunstancia.

- A media que aumentamos los elementos sobre los que hemos comprobado que se verifica la propiedad que pretendemos demostrar, aumenta el grado de validez de la prueba.

1.3.5. En el campo de la Tecnología

En los últimos años, las tecnologías de información y la comunicación han irrumpido con fuerza en la enseñanza en general, y muy en particular en la didáctica de las Matemáticas. Las nuevas tecnologías han provocado cambios en los contenidos, objetivos, criterios de evaluación, etc. pero sobre todo han provocado cambios en la metodología de la asignatura. De hecho, estas herramientas han sido fundamentales para demostrar resultados como el conocido teorema de los cuatro colores.

En la actualidad hay una gran multitud de paquetes informáticos mediante los cuales podemos trabajar las distintas ramas de las Matemáticas. Podemos destacar el Geogebra y el Cabri para Geometría, el Derive para Análisis, el Wiris para Aritmética y el Microsoft Excel, el SPSS o el R para Estadística. Estos y otros programas han hecho que determinados procedimientos se simplifiquen notablemente para los alumnos.

Así, por ejemplo, mostrar con un programa interactivo como Geogebra que las tres mediatrices de un triángulo se cruzan en un punto (circuncentro) resulta muy fácil. Su construcción tiene un importante valor didáctico y podría servir de apoyo para su posterior demostración formal que es asequible para alumnos de 3º - 4º ESO, ya que se apoya únicamente en la propiedad de que todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

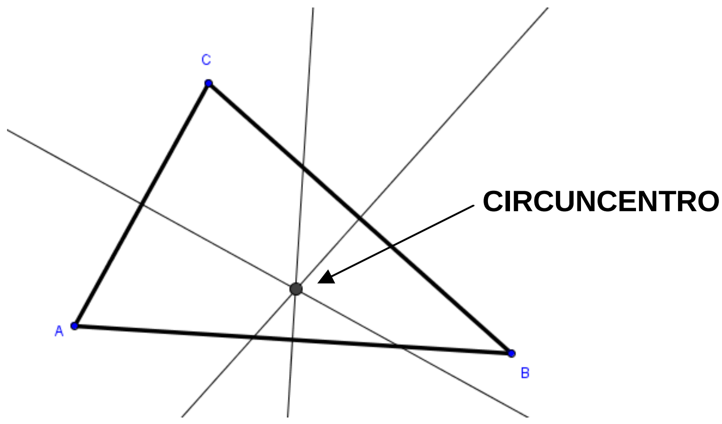


Figura 2. **Circuncentro de un triángulo.**

Sin embargo, si nos enfrentamos a un enunciado aparentemente similar como es que las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto (ortocentro) cambian algunos matices. Sigue siendo muy sencillo de observar la veracidad de este enunciado utilizando el programa Geogebra e incluso es fácil comprobar que si el triángulo es acutángulo dicho punto está en el interior del triángulo, si el triángulo es rectángulo dicho punto es el vértice que forma el ángulo recto y que si el triángulo es obtusángulo el punto está en el exterior del triángulo. La diferencia con el caso anterior es que la demostración formal, que se basa en el teorema de Ceva, no parece sea asequible en general para los alumnos de ESO y en principio, salvo en casos particulares, deberíamos excluirla de nuestras explicaciones en el aula.

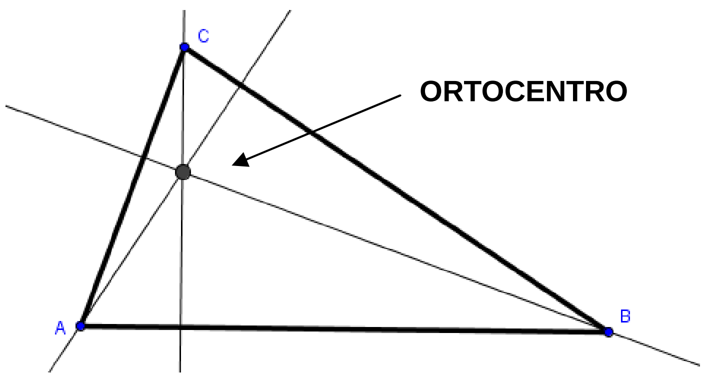


Figura 3. **Ortocentro de un triángulo.**

De este modo, Codina y Lupiañez (1999) introducen una idea de demostración situada en un ambiente computacional, con unas posibilidades didácticas muy interesantes, pero con limitaciones formales, ya que se encuentran situadas en el entorno de lo experimental e inductivo. No obstante, a pesar de que formalmente no puedan ser consideradas demostraciones, es indudable su valor didáctico y pueden sustituir a las demostraciones formales en los casos en que están no estén al alcance de los alumnos y complementarlas en los casos en que sí que sean asequibles para ellos.

En este sentido, Aguirre y Lupiañez (2000) defienden que en un aula de Educación Secundaria los alumnos no están preparados para demostraciones absolutamente formales. Esto no quiere decir que no se le vaya aproximando al alumno el concepto de demostración justificando algunos resultados. De hecho proponen utilizar estos medios para llevar a cabo esta aproximación.

1.3.6. En el aula de Matemáticas

En el ámbito del aula de Matemáticas en la Educación Primaria, Secundaría e incluso en algunos estudios universitarios, los teoremas matemáticos en muchos casos se toman directamente como verdaderos. En ocasiones se establecen argumentaciones inductivas o deductivas informales para establecer su veracidad, pero prácticamente nunca se hace un razonamiento puramente formal para demostrar un determinado enunciado. Esto es debido a que una opinión muy extendida entre algunos docentes es que el trabajo que llevaría explicar con detalle algunas demostraciones no se corresponde con los beneficios que obtendrían los alumnos. Por eso, cuando hablemos de demostraciones matemáticas en el aula, nos vamos a referir a argumentaciones deductivas, aunque en algunos casos nos basemos previamente en argumentos inductivos, que justifiquen a los alumnos el por qué de esos resultados y que eviten que consideren las Matemáticas como una serie de verdades irrefutables que no se discuten.

En este contexto, sobre todo en los niveles superiores, Godino y Martínez (2001) esperan que los alumnos adquieran la capacidad de comprender y realizar pruebas de teoremas matemáticos que establezcan la verdad de los mismos con absoluta seguridad, convenciéndose a sí mismos y cualquier otra persona de que eso es cierto de manera irrefutable. Estamos hablando de un carácter propio y particular de la prueba en este contexto, distinto del que se puede hacer en otros como el de las Matemáticas profesionales en donde se deben convencer, como decía Hersh, a unos jueces cualificados.

Un problema que suelen tener los alumnos son las dificultades en diferenciar los distintos procedimientos argumentativos debido a que se encuentran sujetos a distintos contextos con herramientas de trabajo propias de cada uno de ellos. Estos factores institucionales debemos tenerlos en cuenta a la hora de analizar los procedimientos que realicen los alumnos. En los distintos niveles de enseñanza, los diferentes conceptos de prueba se deben ir desarrollando progresivamente. Los esquemas informales que se utilizan en algunos contextos no debemos verlos como incorrectos, sino como etapas de aproximación al dominio de las prácticas argumentativas deductivas para lo cual se requiere un desarrollo de la racionalidad del alumno y un estado específico de los conocimientos. Balacheff (2000, pp. 26 – 28) presentó un ordenamiento de las distintas justificaciones que se pueden dar en el aula en función del grado de generalidad involucrado:

1. **Empirismo ingenuo**. Ocurre cuando el alumno valida un enunciado tras ver que se cumple en unos casos particulares. Es uno de los primeros procesos de generalización.

2. **Experimento crucial**. Ocurre cuando el alumno es consciente del problema de la generalidad e intenta resolverlo mediante lo que considera un caso que no es particular.
3. **Ejemplo genérico**. Ocurre cuando el alumno justifica un enunciado utilizando para ello un elemento particular que considera representante de todos los elementos a los que se refiere el enunciado.
4. **Experimento mental**. Ocurre cuando el razonamiento del alumno se independiza de la representación del objeto. Esta etapa no implica necesariamente que el alumno realice con un rigor absoluto la demostración.

1.3.7. Significados personales de prueba

En la línea de lo expuesto por Harel y Sowder (1998), Godino y Martínez (2001) indican que a nivel de individuo un esquema de prueba es aquello que consigue asegurar y persuadir a dicho individuo. Para ello, dividen los esquemas de pruebas en tres: convicción externa (ritual, autoritario y simbólico), empírica (procedimientos inductivos y perceptuales) y analítica (deductivos y transformacionales). Estos tres estados representan el estado cognitivo en el que se encuentra el individuo y vienen definidos mediante los procesos que utiliza el individuo al realizar una prueba.

Harel y Sowder realizaron un estudio mediante el cual comprobaron una alta incidencia de la convicción externa en las tres vertientes mencionadas con anterioridad y también de la convicción empírica, aunque con algo menos de incidencia. Establecieron que la causa principal de estos resultados son los hábitos escolares que carecen de prácticas argumentativas analíticas. Este modo de actuar de los profesores, en muchos casos de manera inconsciente, puede deberse a las influencias que se sufren desde otros contextos como los legislativos que establecen los currículos de las materias, las ciencias empíricas que inciden en unos procedimientos concretos o la vida cotidiana que no se preocupa en exceso por el rigor o la justificación.

No debemos olvidar que las prácticas argumentativas tienen un papel relevante en la resolución de problemas, que es objetivo primordial de las Matemáticas y comprobar esto es uno de los objetivos de esta investigación. Cuando hablamos en este aspecto de prácticas argumentativas (ver clasificación que hace Krummeheuer en el punto 1.3.1), no hablamos únicamente de las prácticas analíticas. De hecho, en muchos problemas este tipo de prácticas no nos sirven para su resolución y debemos acudir a las prácticas sustanciales utilizando procedimientos empíricos y de analogía. Esto lo dejaba claro Polya (1945) en la siguiente cita: "Las Matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática y deductiva, pero en gestación son una ciencia experimental e inductiva." (p. 114)

1.4. Funciones de las demostraciones

1.4.1. En las Matemáticas

Como vimos en el punto anterior, el concepto de demostración adquiere una gran cantidad de matices en función del contexto en el se enmarque. Dentro de las Matemáticas profesionales, varios autores han desarrollado las funciones que en este ámbito desempeñan las demostraciones. Mencionaremos el modelo que presentó De Villiers (1993) en el que indicó como funciones de las demostraciones:

1. **La verificación o la convicción**. La verificación es la función más considerada de la demostración. En el ambiente matemático, una demostración aceptada proporciona veracidad al enunciado que demuestra. Normalmente, tras una demostración hecha de forma correcta, se provoca una convicción de que el enunciado es cierto. Decimos normalmente porque en ocasiones se pueden demostrar correctamente enunciados que nos cuesta comprender desde un punto de vista lógico. Un ejemplo histórico de esto se pudo observar cuando Cantor probó que el conjunto de puntos de una recta y el conjunto de puntos del plano tienen el mismo cardinal, es decir, que son equipotentes. Cantor se dirigió a Dedekind por carta en 1877 y le dijo "¡Lo veo!, pero no lo creo".
2. **Explicación**. Esta función de las demostraciones se puede ver en aquellos enunciados en los que hemos observado que se cumple para un gran número de casos particulares y que al realizar la demostración nos proporciona una mayor información de los motivos por los que siempre se verifica el enunciado en cuestión. Esta función se puede observar por ejemplo en la demostración de la

afirmación de que un cuadrado perfecto acaba siempre en 0, 1, 4, 5, 6 o 9. La demostración de esta afirmación, que es muy sencilla y basta hacerla por casos, aporta la explicación del por qué es así este hecho y nos evita otros tipos de razonamientos, que aún siendo correctos, no nos llevarían al objetivo que pretendíamos.

3. **Sistematización**. Si situamos la demostración dentro de un sistema axiomático, la estructura lógica de la demostración nos permite en ocasiones organizar la información de una mejor manera a lo que lo hubiéramos hecho de forma intuitiva, ayudando a evitar razonamientos circulares e inconsistencias lógicas.
4. **Descubrimiento o creación**. A lo largo de la historia de las Matemáticas muchos de los resultados que se han obtenido fueron a partir de razonamientos lógicos, lo que conduce a que realizar demostraciones puede ser también un modo de descubrir nuevos resultados e incluso nuevas ramas del conocimiento. Este aspecto está desarrollado con algunos ejemplos en el punto 1.10.
5. **Comunicación**. Dentro de las Matemáticas profesionales, la demostración es un modo de comunicar nuevos resultados dentro de un lenguaje común, lo que permite la crítica constructiva de las demostraciones que van elaborándose.

Otros investigadores como Hanna (2000) también reconocían como funciones de las demostraciones la ayuda en construcciones de teorías empíricas, la exploración de significados de una definición o la mejor adaptación a resolver determinados problemas en los que se modifican algunas condiciones iniciales.

1.4.2. En el aula

Las funciones que hemos visto anteriormente nos pueden hacer de guía sobre la manera en la que se debería presentar las demostraciones en un aula de Matemáticas. Generalmente, cuando se trabaja con demostraciones, se cae en el error de trabajar únicamente con la función verificativa que aportan las demostraciones. Este modo de trabajar no suele motivar a los alumnos y desde aquí proponemos trabajar con el resto de funciones para darle a la demostración un tratamiento mucho más enriquecedor.

Para observar la visión que de este hecho poseen docentes y alumnos, podemos mencionar el estudio cualitativo que realizaron en Argentina Crespo y Ponteville (2005b) a 12 docentes de Enseñanza Secundaria y a 40 alumnos del último año de la carrera de profesorado de Matemáticas.

Observaron que tanto para unos como para otros no hay distintos niveles ni de argumentaciones, ni de demostraciones. Mediante entrevistas, algunos de los entrevistados realizaron comentarios que iban en la idea de defender la demostración para justificar la validez de algunos resultados:

> Las demostraciones son importantes para que los alumnos sepan que las propiedades o los teoremas se cumplen, no porque el profesor lo dice, sino porque tienen una validez mucho más rigurosa, que se obtiene con las demostración. Además, pienso que los alumnos quedan maravillados al ver que las cosas no son porque sí. (p. 310)
>
> Es importante demostrar en la clase de Matemáticas porque es lo que diferencia a las Matemáticas de otras ciencias y le da validez. Por la forma de trabajo que ello

> implica, ordenada y justificando cada paso a seguir, fomenta una forma de pensar y realizar la tarea. (p. 310)

Otros defendían la función de la explicación de conceptos matemáticos, con comentarios como estos:

> La demostración ayuda a los alumnos a la comprensión de los temas y a su vez sirve como repaso de ideas vistas en clase. De esta manera, se ve que los conceptos matemáticos no son cosas inventadas, sino comprobables. (p. 310)
>
> Es importante demostrar, a veces sí y a veces no. Si la demostración aclara y ayuda a entender, vale la pena hacerla, pero si dificulta la enseñanza y el aprendizaje, entonces no. (p. 310)

E incluso en algunas respuestas, algunas personas dejaban intuir que se podían dar las dos funciones anteriores simultáneamente:

> Es importante demostrar, ya que muchas veces los alumnos se preguntan de dónde salen las fórmulas o por qué se deben hacer de tal manera los ejercicios. (p. 310)

Algunos comentarios también apoyaban el uso de la demostración con justificaciones de ámbito procedimental y actitudinal como “Es importante demostrar en el aula porque crea un hábito” (p. 311) o “Ayuda a trabajar de forma ordenada y responsable” (p. 311).

Finalmente, a través de una encuesta, intentaron ver como veían ambos grupos las funciones que podían tener las demostraciones en un aula de Matemáticas y en la propia Matemática. Algunos de los encuestados veían varias funciones de la demostración, mientras otros no veían ninguna. Los resultados que obtuvieron se pueden resumir en la tabla 1:

Tabla 1. **Resultados finales del estudio de Crespo y Ponteville.**

	Función reconocida a la demostración en la Matemática		**Función reconocida a la demostración en el aula de Matemáticas**	
	Estudiantes	*Docentes*	*Estudiantes*	*Docentes*
Verificación	42,50%	33,33%	10%	33,33%
Explicación	35%	33,33%	47,50%	66,66%
Sistematización	7,50%	0%	10%	0%
Descubrimiento	2,50%	16,66%	2,50%	0%
Comunicación	0%	0%	0%	0%

Nota. Fuente: CRESPO, C. y PONTEVILLE, C. (2005). Las funciones de la demostración en el aula de Matemáticas. J. Lezama (Ed.), en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*. México: Clame. (p. 311)

Como se puede observar, en las Matemáticas la función predominante es la de verificación, mientras que en el aula la función que predomina ampliamente es la de explicación. Podemos observar como en todos los casos, las funciones de sistematización, descubrimiento y comunicación obtienen resultados prácticamente nulos, lo que da pie a pensar que la demostración o ha sido ignorada en los planes de estudio o se ha llevado a cabo de una forma muy concreta, centrándose únicamente en las funciones de verificación y explicación.

1.5. Tipos de demostraciones matemáticas

En este punto vamos a intentar explicar diferentes métodos que hay para demostrar una proposición matemática. Como las proposiciones matemáticas pueden ser muy diversas desde un punto de vista lógico (existencial, universal, etc.) y desde un punto de vista de la propia Matemática (puede hacer referencia a la Geometría, Aritmética, Álgebra, etc.), es lógico que existan multitud de métodos para demostrar estas proposiciones. De hecho, muchos de estos métodos que vamos a ver han ido surgiendo de los diferentes retos que han ido suponiendo algunas demostraciones en determinados momentos de la historia.

A continuación vamos a analizar los principales métodos de demostración que se utilizan en Matemáticas, apoyándonos en lo expuesto por Aigner y Ziegler (2004) y Ribero (2009). Como anexo a la investigación (véase el punto 6.1) expondremos diferentes ejemplos de cada uno de estos métodos mediante los cuales se podrán valorar los distintos matices que tienen cada uno.

1. **Directa**. Este tipo de demostración se puede decir que es la más natural ya que su procedimiento se basa en suponer la veracidad de la hipótesis y a partir de ahí, mediante un razonamiento lógico-deductivo, demostrar la veracidad de la tesis. Este tipo de demostración está basada en la tautología *Modus Ponens*:

$$\left[(P \to Q) \wedge P\right] \to (Q)$$

Los símbolos lógicos que aparecen en esa expresión son "$\to$" que es el de la implicación en un sentido ($A \to B$ significa que si A es cierto entonces B también es cierto) y "$\wedge$" que es el de la conjunción o intersección (para que $A \wedge B$ sea verdadera, A y B tienen que ser ambas verdaderas).

Las demostraciones directas son muy claras en su ejecución, ya que en todo momento se apunta hacia tesis, intentando ir por el camino más corto posible.

2. **Reducción al absurdo**. Este es uno de los métodos más utilizados. Su origen data del siglo V a. C. y apareció por primera vez en las obras del matemático y filósofo griego Zenón. El método consiste en negar la tesis y a partir de ahí, trabajando de una forma lógico-deductiva, llegar a una contradicción o absurdo.

   Las demostraciones utilizando este método suelen ser cortas y tienen la desventaja de que no nos aportan ni métodos y ni algoritmos que solucionen problemas. Así, uno de los ejemplos más utilizados para explicar este método es la demostración que realizó Euclides[3] de que existen infinitos números primos (véase el ejemplo 1 del punto 6.1.2.). Pues bien, esta demostración efectivamente es corta y elegante, pero no nos aporta nada sobre la distribución de los números primos.

3. **Negación.** El método de negación, o también llamado de contradicción o método indirecto, consiste en que partiendo de la negación de la tesis, mediante razonamientos lógico-deductivos, se concluya en la negación de la hipótesis. Este método se basa en la tautología Modus Tollens:

$$\left[(P \to Q) \wedge \neg Q\right] \to (\neg Q)$$

   El símbolo lógico "$\neg$" es el de la negación.

   Este método tiene similitudes con el de reducción al absurdo pero la diferencia sustancial con él es que una vez que negamos la tesis, sí sabemos hacía donde deben ir nuestros razonamientos, hacia la negación de la hipótesis. En el método

3 La demostración original de Euclides se encuentra en su libro *"Los Elementos"* (Libro IX – Proposición 20) que data aproximadamente del 300 a. C. Este libro ha sido editado por Planeta de Agostini en 1996 con el título *Los seis primeros libros de la Geometría de Euclides*.

de reducción al absurdo teníamos que buscar un absurdo, pero no sabíamos a priori cuál iba a ser.

4. **Exhaustiva**. Una demostración se dice que se realiza por un método exhaustivo cuando se analizan todos los posibles casos que se pueden dar con las variables que intervienen en la proposición que se pretende demostrar. Para que la demostración sea válida, se tienen que analizar todos los casos y en todos ellos se tiene que verificar la proposición.
5. **Principio de inducción**. El principio de inducción matemática se utiliza cuando queremos demostrar que una propiedad se verifica para cualquier número natural. Se basa en la siguiente proposición que se deriva de forma directa de los axiomas de Peano mediante los cuales se construye el conjunto de los números naturales:

   Si $P(x)$ es una propiedad y se cumple que:

   a) $P(1)$ es cierto.

   b) Si suponemos que para un número natural $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, $P(n)$ se cumple, entonces también se cumple para $P(n + 1)$.

   Entonces la propiedad P se cumple para cualquier número natural.
6. **Descenso al infinito**. El método de descenso al infinito fue introducido por Pierre de Fermat en el siglo XVII y se basa en la buena ordenación del conjunto de los números naturales. Se entiende que un conjunto está bien ordenado si todo subconjunto suyo no vacío tiene elemento mínimo. Esta técnica se suele utilizar para demostrar que una cierta propiedad no se verifica en el conjunto de los números naturales. Para ello, se supone que la propiedad se cumple para un valor n perteneciente a $\mathbb{N}$. A partir de ahí, se deduciría que también se cumple para un

número natural m tal que $m < n$, y así indefinidamente lo que nos llevaría a concluir que $\mathbb{N}$ no tendría elemento mínimo, lo que es un absurdo, con lo que la propiedad con la se trabaja necesariamente es falsa en el conjunto $\mathbb{N}$.

7. **Principio del palomar**. El principio del palomar o también llamado principio de Dirichlet se basa en una proposición tan simple como que si n palomas se pretenden colocar en un palomar con m celdas y $m < n$, entonces en al menos una celda habrá más de una paloma. A pesar de la simpleza del enunciado, utilizándolo adecuadamente se pueden probar de una forma sencilla proposiciones que sin su utilización no serían nada fáciles de demostrar. Lo complicado de este método a menudo consiste en identificar los elementos que hacen de "*palomas*" y los que hacen de "*celdas*".
8. **Algorítmica**. El método de demostración algorítmica es básicamente constructivo, ya que consiste en crear un método para llegar a la afirmación que se pretende demostrar paso a paso. Fue un método muy utilizado en las Matemáticas árabes y que en la actualidad es muy utilizado en técnicas de lo que en Matemáticas se denominan Métodos Numéricos.
9. **Constructiva**. Las demostraciones constructivas son aquellas en las que se crea un procedimiento mediante el cual, con una manipulación ingeniosa de los datos, se llega a la solución del problema planteado, proporcionándonos de esta manera propiedades de los objetos con los que se trabaja. Estas pruebas estuvieron muy presentes en la Geometría de la Grecia Clásica.
10. **Por equivalencia**. En muchas ocasiones, si tenemos que probar una proposición P y no tenemos muy claro el camino a seguir, una opción a tener en cuenta es

encontrar una proposición Q que sea equivalente a P y si probamos Q habremos probado P. Este método está basado en la tautología:

$$\left[(P \leftrightarrow Q) \wedge Q\right] \rightarrow (P)$$

El símbolo lógico "$\leftrightarrow$" es el de la equivalencia lógica, doble implicación o bicondicional. La expresión $P \leftrightarrow Q$ quiere decir que P y Q o son ambas ciertas o son ambas falsas.

11. **Método de la diagonal de Cantor**. Mediante este método sencillo y elegante Cantor demostró que el conjunto de los números reales no es contable, es decir, que no es equipotente con el de los números naturales (véase el punto 6.1.11). De hecho, la prueba original de Cantor indicaba que simplemente el intervalo [0, 1] ya no es contable. También se utilizó para demostrar el primer teorema de incompletitud de Gödel o el problema de decisión de Hilbert.

12. **Visualización**. En Matemáticas los dibujos, diagramas y gráficos han sido siempre muy utilizados con diversos objetivos y uno de ellos ha sido para demostrar proposiciones. En muchas ocasiones, incluso con un simple dibujo, se ha demostrado una determinada proposición matemática. Es lo que se viene a llamar una *demostración sin palabras*. Muchos ejemplos de este tipo de demostraciones los encontramos en las Matemáticas chinas, en las que se trabajó muy a menudo con dibujos, lo que les llevó por momentos a adelantarse a las Matemáticas occidentales.

    Hoy en día, la visualización ha cobrado importancia gracias al desarrollo de las nuevas tecnologías con programas interactivos como Geogebra. El problema que suele darse es que en ocasiones se le otorga la categoría de demostración a la comprobación de que un determinado hecho ocurre en un número elevado de casos cuando utilizamos este tipo de programas. Pongamos un ejemplo sencillo: puedes construir con cualquiera de esos dos programas un triangulo, medir sus ángulos interiores y comprobar que la suma de estos es 180º. Con estos programas puedes interactivamente modificar los triángulos y comprobar que siempre la suma de sus ángulos interiores es 180º, pero eso que estamos haciendo no es una demostración, si no una comprobación. Obviamente, esa actividad tiene un valor didáctico muy interesante, pero lo ideal sería complementarla con la demostración rigurosa si esta se encuentra al alcance de los alumnos con los que estamos trabajando.

Por otro lado, en ocasiones utilizar, voluntaria o involuntariamente, un dibujo que no es adecuado, ya sea por su inexactitud o por no estar relacionado correctamente con el problema, nos puede llevar a equívocos importantes. En el anexo (véase el ejemplo 5 del punto 6.1.12) veremos un caso de demostración fraudulenta de que todos los triángulos son isósceles basado en un dibujo "*aparentemente*" bien realizado.

A parte de los tipos de demostraciones, en una ciencia tan amplia como las Matemáticas, también habría que hablar de los estilos de demostraciones. En este aspecto, Ibañes (1997) hace la siguiente clasificación:

a) **Estilo geométrico**. Supone la utilización en exclusiva de recursos geométricos. Fue el estilo predominante en la Grecia Clásica y que se enriqueció en los inicios del siglo XIX con el desarrollo de la Geometría Proyectiva. Como podemos ver en algunos de los ejemplos expuestos en el punto 6.1, este estilo no se limita en exclusiva a probar resultados de índole geométrico y está muy asociado al método de visualización

b) **Estilo algebraico**. Está caracterizado por la simbolización de objetos matemáticos y la operación con estos. Este estilo se ha desarrollado en paralelo con el desarrollo del Álgebra y el de sus símbolos. Al igual que ocurría en el caso anterior, este estilo se puede utilizar para demostrar resultados de campos diferentes al algebraico, como puede verse en la demostración habitual del teorema del coseno.

c) **Estilo de coordenadas**. Este estilo permite enlazar los procedimientos geométricos y algebraicos. Es un estilo relativamente moderno, ya que nació en el siglo XVII con los trabajos de Descartes y Fermat. Este estilo se puede utilizar por ejemplo para demostrar que las tres medianas de un triángulo concurren en un punto, dando coordenadas generales a sus vértices, calculando las ecuaciones de las rectas de las medianas y comprobando que efectivamente son concurrentes en un punto.

d) **Estilo del Análisis Matemático**. Es consecuencia de la invención del Cálculo llevada a cabo por Newton y Leibniz en el siglo XVII y se consolida con los intentos fundamentación del Cálculo que se realizaron a lo largo del siglo XIX. En este estilo se utilizan las herramientas propias del Cálculo (límites, derivadas, integrales, etc.). Este estilo es muy propio de este campo y es utilizado para demostrar teoremas como el fundamental del Cálculo, el de Rolle o el del Valor Medio. No obstante, también se puede utilizar en otros campos. El ejemplo más claro es la primera demostración del teorema fundamental del Álgebra que realizó Gauss.

e) **Estilos alternativos**. Es muy común que en una misma demostración se puedan utilizar dos o más de los estilos antes mencionados. Un ejemplo claro de esto lo tenemos en las maneras en que los árabes resolvían ecuaciones de segundo grado, mezclando los estilos algebraicos y geométricos.

A parte de los estilos, Ibañes (1997) también habla de los modos en que se exponen las teorías matemáticas en función del contexto en que se enmarquen. Habla de un modo sintético o directo, que es utilizado en presentaciones formales, y de un modo analítico o indirecto, más adecuado en su opinión para exposiciones didácticas.

1.6. Origen y desarrollo histórico de la demostración

1.6.1. Nociones previas

Como con otros muchos conceptos, si analizamos el origen histórico de la noción de demostración matemática se nos puede aclarar si es conveniente o no su utilización didáctica. En muchas ocasiones se pueden utilizar las condiciones históricas del origen de un concepto como una especie de guía para crear en el aula una génesis artificial de este mismo concepto en el alumnado.

Sobre esta temática en concreto existen pocos escritos. Según Arsac (1987) podemos indicar como posibles causas de esta escasez a:

- La falta de unanimidad sobre determinados aspectos.
- La relación tan intrínseca que existe entre los conceptos de demostración y Matemáticas ha conducido a pensar en muchas ocasiones que su aparición surgió de una manera absolutamente natural, sin que este hecho presentase ningún problema a priori.

Aunque los primeros indicios en el desarrollo de las Matemáticas aparecieron en las civilizaciones egipcia y babilónica con alguna prueba sobre relaciones de determinadas magnitudes, parece ser que sí existe unanimidad en indicar que la verdadera génesis de la demostración tuvo lugar en Grecia Clásica. Los documentos de esa época son prácticamente inexistentes y la historia de las Matemáticas que se conoce se debe a otros autores griegos de épocas posteriores o a textos contemporáneos que hablan de Matemáticas pero que en realidad no son propiamente textos matemáticos. Esto dificultó mucho la investigación sobre el origen de la demostración y los motivos a los que debemos su origen.

Si recordamos el concepto de demostración dado por Balacheff (2000) en donde nos indicaba que la demostración no es más que una prueba (explicación aceptada por una comunidad en un momento dado) que se ha llevado a cabo mediante un proceso lógico-deductivo válido y que los procesos para probar una afirmación dependen del sujeto que desarrolla la prueba y de los destinatarios a los que va dirigida, podemos observar que claramente resalta el carácter social de los distintos tipos de prueba. Por tanto, buscar el origen de la demostración implica buscar un momento muy concreto en el desarrollo de los diferentes procedimientos de prueba.

1.6.2. La inconmensurabilidad como origen de la demostración

Entre los siglos IX y VII a.C. se fue desarrollando en la sociedad griega una cultura más abierta e independiente gracias a las migraciones, que junto con la aparición de la democracia, creó una clase de ciudadanos abiertos al análisis y al debate y con una gran curiosidad por el mundo que les rodeaba. La aparición de las Matemáticas, la Filosofía y de las Ciencias en el sentido moderno se sitúa en el siglo VII a.C. Según Bombal (2010) las primeras demostraciones se le atribuyen en el siglo VI a.C. a Tales de Mileto. Sus biógrafos indican que era un gran entusiasta del rigor y a él se le atribuyen las demostraciones de que un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales, los ángulos de un triángulo suman dos rectos y un ángulo inscrito en un semicírculo es recto.

En el siglo VI a.C. Pitágoras, un discípulo de Tales, se centró en las relaciones precisas de diferentes fenómenos que se presentaban en la naturaleza. Según indica Bombal (2010), la asunción de que todo objeto estaba formado por una colección de átomos individuales e indivisibles le condujo a pensar que todas las magnitudes eran conmensurables, es decir, existía una medida común para ambas. Este hecho permitió a la Escuela Pitagórica facilitar la visualización de algunos resultados geométricos, convirtiéndolos en aritméticos, y desarrollar numerosos resultados encuadrados en la Geometría Plana.

El punto de inflexión se situó en el siglo V a.C. cuando se descubrieron magnitudes inconmensurables como la diagonal y el lado de un pentágono regular, o la inconmensurabilidad del lado del cuadrado con su diagonal, lo que condujo en el caso del cuadrado de lado 1 a lo que hoy llamaríamos la irracionalidad de $\sqrt{2}$. En estos momentos se produjo la conocida como primera crisis en los fundamentos de las Matemáticas, ya que los matemáticos de la época se dieron cuenta que no siempre se podía trabajar aritméticamente en Geometría y que los objetos matemáticos no son tan simples como parecían. Parece que sí existe unanimidad en pensar que estos hechos fueron considerados como el origen de la demostración.

Aunque la relación entre los dos problemas es clara, no conviene mezclarlos ya que se sitúan en dos marcos bien diferentes, al aritmético y el geométrico. La solución de estos dos problemas en sus sendos marcos hará que la relación entre los problemas y sus respectivos marcos se enriquezca. En un primer análisis, el problema aritmético es más simple que el problema geométrico ya que mientras el primero expresa una propiedad del número 2, el segundo no expresa una propiedad intrínseca de la diagonal del cuadrado, que puede naturalmente entrar en una relación racional con otros segmentos.

Vamos a reflexionar un momento sobre estos problemas en sus respectivos marcos. El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado sobre su lado dentro del marco de la Geometría no puede mostrarse mediante una figura, como si puede hacerse por ejemplo con el teorema de Pitágoras. Su reconocimiento implicó la existencia de la demostración. Del mismo modo, la prueba de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ dentro del marco de la Aritmética implicó el uso del razonamiento por el absurdo.

Una cuestión importante en todo este tema es analizar el contexto histórico en el que surgió el problema de la inconmensurabilidad. Para Cavening (citado en Vitrac, 1999) hay tres situaciones que condujeron al problema en cuestión:

- En el estudio de la Música, el problema de la división de la octava en dos equivale a encontrar un número cuyo cuadrado sea 2.
- El problema de la duplicación del cuadrado, que está resuelto gráficamente en el diálogo de Platón "*El Menón*", indica que la solución es el cuadrado que tiene por lado la diagonal del cuadrado original. Este problema es análogo y predecesor del problema de la duplicación del cubo, incluido dentro de los tres problemas clásicos de la Geometría griega.
- El hecho de que el símbolo de la Escuela Pitagórica fuera el pentagrama místico (un pentágono regular estrellado mediante sus diagonales) hizo que mediante un método común conocido como *antifairesis* surgieran magnitudes inconmensurables.

Imagen 1. **Pentagrama místico.**

Nota. Fuente: CORNELIO, E. (1553) *De occulta philosophia libri tres (Tercer libro de filosofía oculta).*

El método de la antifairesis es totalmente análogo al método de Euclides para calcular el máximo común divisor de dos números. Cuando se aplicó este método a magnitudes como la diagonal de un pentágono y su lado, los matemáticos de la época se dieron cuenta de que el proceso iba a ser infinito ya que iban surgiendo comparaciones análogas en los pentágonos regulares interiores. De este modo surgió de una manera natural el problema de la inconmensurabilidad.

Mirando esta cuestión de un modo didáctico, la antifairesis no es un contenido en el currículo actual, aunque no por ello se puede dejar de explicar. La explicación de la inconmensurabilidad del lado del pentágono y su diagonal es asumible para alumnos de un nivel de 3º o 4º ESO. Si queremos introducir las magnitudes inconmensurables con contenidos elementales, lo más sencillo e interesante sería utilizar la comparación de la diagonal y el lado de un cuadrado, ya que en esta situación trabajaríamos de una forma bastante elemental con dos de los campos más importantes de las Matemáticas: la Geometría, con el teorema de Pitágoras, y la Aritmética, con la prueba de que $\sqrt{2}$ es irracional. La prueba que podemos aplicar en nuestros alumnos utilizando el pentágono regular es algo más complicada ya que para ello se utiliza la relación entre triángulos semejantes y que $\sqrt{5}$ es irracional. No obstante, hay que destacar que algunos historiadores como Von Fritz han dado razones para pensar que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurable en la Antigua Grecia se dio antes en el cuadrado que en el pentágono utilizando procesos distintos a la antifairesis, conjeturando previamente la irracionalidad de $\sqrt{2}$, cuestión esta que no precisa el método de la antifairesis.

1.6.3. Antecedentes de la inconmensurabilidad

A continuación vamos a profundizar más en el origen de la demostración o, dicho de otro modo, en la transformación global de las Matemáticas en una ciencia hipotético-deductiva. Según Arsac (1987), la razón de que los problemas de la irracionalidad y la inconmensurabilidad jueguen un papel primordial se debe a que en los términos de la Matemática Pitagórica de la época constituyen una situación descriptible, pero irresoluble en dicho marco. Resulta inverosímil que las soluciones a estos problemas hayan sido inmediatas. Lo más probable es que en su búsqueda hubiera habido muchos tanteos previos hasta alcanzar la resolución definitiva. Estos tanteos previos los estudió Lakatos (1976). Según él, el concepto de irracionalidad se encuadra en la categoría que él llama *concepto nacido de la prueba*. Es claro que el problema de la inconmensurabilidad no puede situarse en el marco de la Geometría sin haberlo ya resuelto previamente. El estudio del problema en sí provocó toda la construcción de la teoría de las razones y de la Matemática demostrativa. Mientras, entre conjeturas y refutaciones, la Matemática continuó su desarrollo, dejando de lado los obstáculos que surgieron y centrándose en otras cuestiones. Según Knorr (1975), esta fase duró alrededor de un siglo, desde el 430 a.C. hasta el 330 a. C. Como es natural, los matemáticos griegos no dejaron documentos que describieran con precisión esta fase, pero sí disponemos de una serie de indicios históricos que nos permiten hacernos una idea de cómo fue ese periodo.

El primero de esos indicios lo podemos encontrar en "*La Republica*" de Platón (370 a.C. aprox.) cuando hace referencia a la longitud de la diagonal de un cuadrado en un pasaje del texto: "(…) cien números de la diagonal racional de la péntada, disminuido cada uno en una unidad, o de la irracional, disminuidos en dos (…)" (p. 240)

La diagonal de un cuadrado de lado 5 mide $\sqrt{50}$, que es un número irracional muy próximo a 7. De esta frase se deduce la igualdad $100\cdot(7\cdot 7-1)=100\cdot(50-2)$. Denomina a $\sqrt{50}$ como diagonal irracional, mientras que su aproximación a 7 como diagonal racional. Quizás lo interesante son las palabras utilizadas por Platón para designar a estas diagonales. Traducidas, a la primera la viene a llamar *inenunciable* y a la segunda *enunciable* o *expresable*, lo que viene a reconocer que era imposible atribuir a la diagonal de un cuadrado una medida racional. Esto lo evita Platón razonando con el cuadrado de la diagonal.

El segundo indicio lo descubrió Cavening (1982; p. 183) cuando observó que en obras de Hipócrates se esquivaba el problema de trabajar con segmentos de medidas inconmensurables, trabajando en cambio con las áreas de los cuadrados construidos sobre estos segmentos. Este modo de razonar apoya la idea de que la primera forma que tuvo la sociedad griega de superar el problema de la inconmensurabilidad fue afirmar que dos segmentos son siempre al menos conmensurables en relación a los cuadrados construidos sobre ellos, salvando así las dificultades que se presentaban en las Matemáticas pitagóricas. Podemos observar que nos estamos introduciendo en unas Matemáticas donde el rigor, sin llegar aún a la fase demostrativa, estaba adquiriendo relevancia.

Un tercer indicio lo podemos encontrar en Aristóteles (1950; p. 332) cuando define la igualdad entre dos razones a través de la antifairesis, lo cual implica el descubrimiento de la inconmensurabilidad y nos confirma la utilización de este proceso. Nos encontramos en una situación en donde los razonamientos sobre las razones eras cíclicas, como mencionamos anteriormente con el pentagrama místico.

Estos tres indicios nos muestran unas salidas internas a las Matemáticas de los problemas que iban surgiendo relativos a las magnitudes inconmensurables. No obstante, en la época que nos encontramos, también se tomarían unas salidas externas cuando se introdujeron en el dominio de la Filosofía. Así, se podía plantear que las dificultades con las que se encontraban los matemáticos de la época se debían a la imposibilidad de explicar el pensamiento sin contradicción. Esta posición la mantenían por ejemplo los sofistas de la época y la escuela eleática de Parménides y Zenón.

1.6.4. Influencia de la sociedad griega

Continuando con el tema desde un punto de vista filosófico, un hecho que ha resultado siempre muy sorprendente fue las apariciones prácticamente simultáneas en Grecia de la democracia, de la Filosofía y de la Geometría, consideradas como "*los tres milagros griegos*". Estos descubrimientos dieron pie al hallazgo por parte de la humanidad de la razón, concebida implícitamente como una estructura de pensamiento universal, independiente de las civilizaciones anteriores. Varios filósofos han estudiado la cuestión entre los que podemos destacar a Patocka (1981) y Vernant (1982, 1998), que opinaban que no hay duda de que la aparición de la demostración en las Matemáticas es consecuencia de la aplicación en esta ciencia del debate público.

La explicación de "*los tres milagros griegos*" se fundamenta en las transformaciones sociales que permitieron pasar de un pensamiento mítico a un pensamiento racional. Actualmente, podemos considerarnos herederos de esa racionalidad, pero debemos ser conscientes de que esta racionalidad tiene unos vínculos innegables con una civilización y una historia. Podemos considerar pues la razón como una construcción debida a una civilización que se enfrentaba a ciertos problemas de diversa índole y no como un valor que reina en el cielo de las ideas que descubrieron los griegos de casualidad.

Para los historiadores del pensamiento, el origen de la racionalidad es político, resultado del debate contradictorio entre el gobierno y los ciudadanos. Concluir que existe una relación de dependencia simple entre la sociedad y las Matemáticas tendría el inconveniente de darle a esta ciencia un tratamiento excesivamente global, sin tener en cuenta su contenido propio en función de la época que estemos considerando.

Los griegos no nos han dejado un análisis epistemológico de las influencias reciprocas entre las Matemáticas y la sociedad para aclarar en qué medida el origen de la racionalidad es interno o externo. Seguramente las dos versiones se pudieron complementar ya que sin el problema de las magnitudes inconmensurables, no se hubiera producido la transformación de las Matemáticas, pero quizás también en otro contexto social, incluso enfrentándose al mismo problema, las Matemáticas no se hubieran transformado de igual manera.

1.6.5. Consecuencias en las Matemáticas griegas

La inconsistencia lógica creada por estos dos problemas, unido a las paradojas de Zenón de Elea basadas en el infinito hizo cuestionar los métodos utilizados en los razonamientos matemáticos hasta el momento. Bombal (2010) indica que esto condujo a la creación del método axiomático deductivo en la segunda mitad del siglo V a.C.

Uno de los ejemplos más claro lo encontramos en "*Los Elementos*" de Euclides. Partiendo de una serie de verdades evidentes o axiomas (en este caso 23 definiciones, 5 postulados y 5 nociones comunes) y utilizando las leyes de la lógica deductiva[4] se generan nuevos resultados. Este sigue siendo el método utilizado actualmente, con la diferencia de que hemos variado las condiciones iniciales.

[4] La primera recopilación de leyes lógicas se encuentra en la obra "*El Organon*" de Aristóteles.

Los métodos utilizados por Euclides en su obra fueron el germen de la nueva Matemática. Solo Hilbert, tras más de 2000 años, fue capaz de percibir la omisión (no de errores) de la justificación de ciertos resultados.

1.6.6. Nuevos métodos que fueron apareciendo en épocas posteriores

El apogeo de las Matemáticas griegas llegó en el siglo III a.C. con Arquímedes. Tras él, las Matemáticas en general sufrieron estancamiento en su desarrollo teórico, no en su desarrollo productivo, que duró unos 18 siglos. Según apunta Bombal (2006) la principal causa de este declive se debió al respeto que tenían los matemáticos griegos a usar el concepto de infinito y a sus procesos derivados. Era un concepto que no pudieron formalizar dentro de su sistema axiomático-deductivo lo que les condujo a una autolimitación en los resultados que produjeron.

La herencia griega fue trasmitida por toda Europa, primero por el Imperio Bizantino, y posteriormente por los árabes. Estos últimos enriquecieron algunos procesos aritméticos y algebraicos con sus aportaciones (ver la demostración de la fórmula de la ecuación de segundo grado incluida en el punto 1.10).

En el siglo XIV, el estudio cuantitativo del movimiento hace retomar las ideas que indicó Aristóteles sobre variación de cantidades continuas, denominadas por él los *infinitamente divisibles*. En este sentido, Nicolás de Oresme, al estudiar el movimiento uniformemente acelerado, introdujo métodos gráficos para representar este tipo de movimiento y que le sirvieron para calcular algunas sumas infinitas. Esto unido a otros problemas de índole geográfico y militar hicieron que las Matemáticas de esta época se fueran centrando en solucionar problemas cotidianos, ignorando posibles trabas lógicas como las que le podía poner el concepto de infinito. De este modo, se estaban poniendo las semillas de la revolución científica que tendría lugar en el siglo XVII.

Los matemáticos del Renacimiento perdieron absolutamente el miedo a trabajar con el infinito y estuvieron más preocupados por establecer métodos que resolvieran ciertos problemas que por el rigor y las demostraciones de sus métodos. Le dio sus frutos gracias, entre otros factores, a que en esta época se produjo una clara mejora en la notación utilizada.

Kepler y Cavalieri continuaron utilizando las técnicas de los indivisibles para obtener volúmenes de algunos cuerpos. Eran conscientes de la falta de rigor de sus procedimientos, pero justificaban sus métodos por los extraordinarios resultados que obtenían. Estaban tan convencidos de sus métodos que, según Bombal (2010), se le atribuye a Cavalieri la frase: "el rigor es asunto de los filósofos, más que de los matemáticos." (p. 104)

En el Álgebra, el desarrollo simbólico que se produjo le permitió a la escuela italiana obtener fórmulas de resolución de ecuaciones de tercer y cuarto grado mediante radicales. Este sería uno de los principales hilos conductores del posterior desarrollo del Álgebra.

En el siglo XVII el estudio de la relación entre los problemas de la tangente a una curva y el área encerrada bajo una curva trajo consigo la introducción de nuevos métodos que propiciaron la invención del Cálculo. El cambio de mentalidad lo iniciaron Descartes y Fermat al transformar los métodos geométricos de expresar una magnitud como suma de indivisibles en técnicas aritméticas de sumación de series infinitas, sentando de este modo las bases de la Geometría Analítica (ver punto 1.10).

En este proceso de aritmetización se crea un ente abstracto fundamental: el *infinitésimo*. Las técnicas de manipulación con este ente culminaron con la invención del Cálculo llevada a cabo por Newton y Leibniz. En esta invención, Newton utilizó el denominado *método de las fluxiones* (basado en que las cantidades variables a estudiar están generadas por el movimiento continuo de puntos, líneas y planos) y las series infinitas de funciones (tratadas como series de potencias que simbolizaban polinomios de grado infinito). El método de Leibniz presentaba menos justificaciones en el uso de los infinitésimos que el de Newton y se basó en considerar las curvas como una infinidad de segmentos rectilíneos infinitesimales, coincidentes cada uno con la tangente a la curva en el punto. La aproximación de Leibniz al Cálculo se basó en las diferencias infinitesimales que se producían entre esos segmentos (dx y dy).

La importancia de la invención del Cálculo, tanto en las Matemáticas como en su aplicación a situaciones reales, era sin ningún lugar a dudas espectacular, pero esta espectacularidad contrastaba con la debilidad de los fundamentos lógicos en los que se sustentaba. Esta cuestión era objeto de preocupación por parte de algunos matemáticos de la época, entre los que se encontraba Leibniz, aunque en absoluto se consideró una cuestión primordial.

En el siglo XVIII nos encontramos con Euler, uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. La gran cantidad de resultados conseguidos por este matemático los obtuvo aparcando en cierto modo el rigor de sus procedimientos. De hecho, él considera una demostración, más que una verdad matemática incontestable, como una predicción con una alta fiabilidad, corroborada con un número suficiente de casos particulares. Esta idea no la compartía la totalidad de la comunidad matemática de la época lo que hizo que existieran muchas disputas por la veracidad de ciertos resultados y que se produjeran multitud de contradicciones entre resultados, creándose de este modo una inseguridad global. Un ejemplo de esto lo tenemos en los logaritmos de números negativos. Mientras Leibniz sostenía que eran imaginarios basándose en trabajos de series divergentes, Johann Bernouilli defendía que $\log(-n) = \log(n)$, ya que $2 \cdot \log(-n) = \log(-n)^2 = \log n^2 = 2\log n$.

Las inconsistencias lógicas que producían el uso de infinitésimos tenían grandes detractores, entre los que se puede citar a Berkeley. Bombal (2010) indica cómo acusó a los seguidores de Newton y Leibniz de utilizar métodos que no comprendían, basados en inconsistencias lógicas y en conceptos ambiguos. Consideraba que algunos de los resultados a los que llegan pueden ser correctos como consecuencia de compensación de errores. Esta idea sería repetida por matemáticos como Lagrange o Maclaurin que buscaron con posterioridad una justificación a la fundamentación del Cálculo.

En los inicios del siglo XIX tuvo lugar una inevitable revisión científica de los resultados. La revisión de los fundamentos del Cálculo la inicio Cauchy, basando su desarrollo en su definición de infinitésimo, variable con límite cero. Sobre este concepto elaboró los conceptos básicos de la Teoría de Funciones, definió la derivada como el cociente del límite de incrementos y construyó, ya de forma mucho más rigurosa todo el Cálculo. En la obra de Cauchy aún quedaban pendientes algunas lagunas como una aproximación formal al concepto de continuidad o de continuidad uniforme. La obra de Cauchy la culminó Weiertrass definiendo formalmente el concepto de límite en términos de ε–δ, que permitió la construcción del Cálculo en términos de las propiedades del conjunto de los números reales. Todo este proceso hace que vaya variando paulatinamente el concepto de rigor y de lo que es y deja de ser un paso trivial. De hecho aparecen frecuentemente demostraciones de teoremas que son respondidas con contraejemplos por otros matemáticos. En esta situación se puso como objetivo, ya no solo la fundamentación rigurosa del Cálculo, sino de toda la Matemática.

Paralelamente se comenzaron a encontrar relaciones entre resultados enmarcados en teorías distintas lo que hizo que se relegara la importancia de la naturaleza de objeto en favor de las relaciones con otros objetos. Este fue el motivo de la aparición las estructuras algebraicas básicas. El nacimiento de esta y otras nuevas teorías no hacían más que aumentar la inestabilidad de la comunidad matemática porque nadie garantizaba que los nuevos resultados que se iban generando estuvieran sustentados en unos cimientos estables desde el punto de vista lógico. Había que aclarar las reglas del juego para terminar con las contradicciones y para ello se volvió a recurrir al método axiomático griego.

Durante un tiempo se pensó que la Lógica y la Teoría de Conjuntos podían ser esos cimientos estables, pero las paradojas que surgieron en esta teoría hicieron que también tuviera que axiomatizarse. Axiomáticas habituales como la de Zermelo-Fraenkel solo evitaban las paradojas en las Matemáticas habituales. Esto llevó a Hilbert a proponer fundamentar la Matemática con métodos *finitistas*. Lo que ocurrió merece un punto aparte y lo analizaremos en el siguiente punto.

1.7. El problema de la incompletitud

1.7.1. Las paradojas lógicas

En los inicios del siglo XX, la actividad que más preocupó a los matemáticos fue la investigación sobre los fundamentos de las Matemáticas y el estudio de su consistencia. Esto se debió a hechos como la aparición de las geometrías no euclídeas, el descubrimiento dentro del Análisis Matemático de curvas tan desconcertantes como "*la curva de Peano*" que llena un cuadrado, de curvas continuas no derivables en ningún punto, y sobre todo, a las paradojas que surgieron en el seno de la Teoría de Conjuntos.

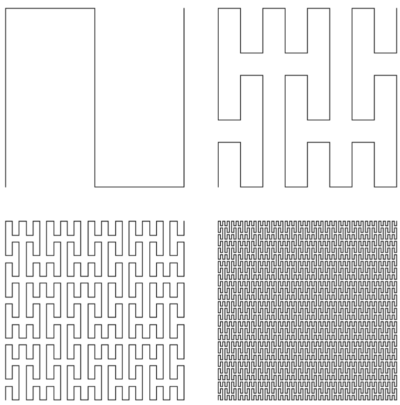


Imagen 2. **Curva de Peano.**

Nota. Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Curva_de_peano

Las paradojas han aparecido con mucha frecuencia en la actividad matemática jugando un papel decisivo en su desarrollo. Los intentos de explicar resultados paradójicos han supuesto una mayor comprensión de la teoría estudiada. Fueron tres las principales corrientes filosóficas que se ocuparon de que la fundamentación de las Matemáticas librara a esta ciencia de estos hechos inesperados: el logicismo de Fregue, el intuicionismo de Kronecker y Brouwer y el formalismo de Hilbert. En este punto nos vamos a centrar en el formalismo de Hilbert, viendo lo que proponía y las sorprendentes consecuencias que se extrajeron de esta corriente filosófica.

A finales del siglo XIX, Cantor sentó las bases de la Teoría de Conjuntos, cuya idea más novedosa fue la de los distintos tamaños de infinitos. De este modo, Cantor probó que hay tanto números naturales como enteros y que hay tantos números enteros como racionales (véase el punto 6.1.10). Sin embargo, también probó que hay más números reales que naturales (véase el punto 6.1.11). Estos hechos causaron una gran conmoción entre los matemáticos de la época e incluso encontró la intensa oposición de un matemático de prestigio como Kronecker.

Poco a poco fueron surgiendo más paradojas. Una de ellas recibió el nombre de paradoja de Cantor. Precisamente, esta paradoja se apoya en el teorema de Cantor que dice que si X es un conjunto, entonces el cardinal del conjunto $\mathscr{P}(X)$ es mayor estrictamente que el cardinal del conjunto X y en el axioma de las partes que dice que si X es un conjunto, entonces $\mathscr{P}(X)$ también lo es. La paradoja de Cantor consiste en lo siguiente:

> Sea V el conjunto formado por todos los conjuntos. Por ser V un conjunto, por el teorema de Cantor, entonces $\mathscr{P}(V)$ tiene un cardinal mayor que el cardinal de V, pero $\mathscr{P}(V)$ debe estar contenido en V, ya que es un conjunto aplicando el axioma de las partes, con lo que su cardinal debe ser menor o igual que el de V.

Esta paradoja se salvó finalmente en la Teoría de Conjuntos considerando que V no era en realidad un conjunto, si no lo que se pasó a denominar como una clase propia.

En la misma línea que la anterior fue la paradoja de Cesare Burali-Forte que observó que el conjunto bien ordenado formado por todos los números ordinales era contradictorio, siendo posteriormente definido también como una clase propia.

No obstante, dentro del mundo de las paradojas, el protagonista fundamental fue Bertrand Russell. Descubrió un gran número de paradojas perturbadoras, aunque solo una lleva su nombre. La paradoja de Russell dice lo siguiente:

> Consideremos el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos. ¿Es dicho conjunto elemento de sí mismo?

La paradoja va en la misma línea que las anteriores. Una analogía visual de esta paradoja se puede encontrar en la obra "*Las manos que dibujan*" de M.C.Escher.

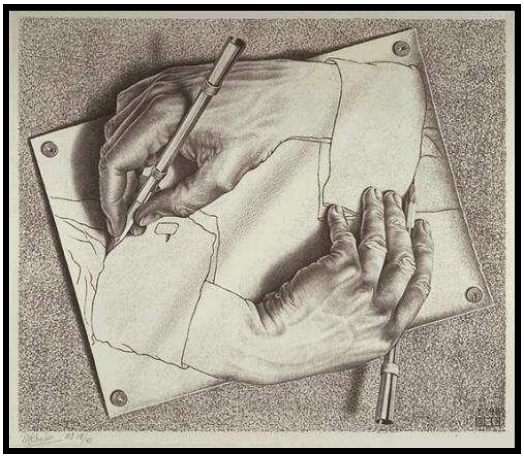


Imagen 3. ***Las manos que dibujan* de M.C. Escher.**

Nota. Fuente: http://www.mcescher.com/

Todas estas paradojas se podrían haber entendido como juegos de palabras y no haberle dado importancia. Sin embargo, en esa época, se estaba estableciendo el concepto de conjunto, lo que hizo que algunas de las mejores mentes de la época no permitieran dejar de lado problemas lógicos como estos.

1.7.2. El formalismo de Hilbert

Una de las reacciones a la "*crisis lógica*" fue la tentativa del matemático alemán Hilbert, que trató de eludirla mediante su formalismo. En los casos en que encontramos conflictos al seguir razonamientos que a priori parecen correctos, Hilbert propuso utilizar la lógica simbólica para crear un lenguaje artificial, siendo muy cuidadoso al establecer sus reglas, de modo que no surgieran contradicciones. La idea de Hilbert era crear para el razonamiento, la deducción y las Matemáticas un lenguaje artificial perfecto. Por ello, hizo especial hincapié en la importancia del método axiomático de la Grecia Clásica.

El objetivo de Hilbert era ser absolutamente riguroso en lo que se podría llamar "*las reglas de juego*", de modo que hubiera un consenso general en el modo de hacer Matemáticas. Es obvio que desde el punto de vista práctico esto sería muy laborioso, pero tiene una gran importancia desde el punto de vista filosófico.

Inicialmente, la propuesta de Hilbert no pareció descabellada. De hecho no hacía más que seguir con la tradición histórica de formalización de las Matemáticas y recibía influencias de matemáticos ilustres como Leibniz, Boole, Fregue o Peano. A diferencia de estos, Hilbert pretendía realizar el camino completo, es decir, el de formalizar toda la Matemática. La sorpresa fue, como veremos posteriormente, que Hilbert estaba equivocado, aunque su error fue muy fructífero ya que originó una disciplina nueva, la metamatemática, un campo introspectivo de la Matemática en la que se estudia lo que se puede y no se puede demostrar.

La cuestión fundamental de la idea de Hilbert es que si se enterrasen las Matemáticas en un lenguaje artificial como él pretendía, podemos olvidarnos de que poseen algún significado. Es evidente que si se han hecho y se siguen haciendo Matemáticas es porque tienen significado, pero si queremos hacerlas con métodos puramente matemáticos sería necesario "*filtrar*" el significado y centrarnos en examinar un lenguaje artificial basado en unas reglas muy precisas.

Pero, ¿qué clase de cuestiones se podían llegar a plantear? Para llegar a tener un sistema axiomático completo, que sería la situación ideal, dada una proposición cualquiera *P*, se debería probar bien *P*, o bien no *P*.

Hilbert pretendía establecer unas reglas tan precisas mediante las cuales toda demostración pudiera someterse a lo que él denominó "*procedimiento mecánico*" que pudiera afirmar si la demostración era o no era correcta. En ningún momento pensó que la forma de trabajar en Matemáticas fuera de este modo, sino que si fuera posible esta teoría, se podría utilizar para ver cuál es su verdadero potencial. Hilbert estaba bastante convencido de que él podría llevar a cabo esa empresa, así que nos podemos imaginar el desconcierto que sufrió cuando en 1931 el matemático y filósofo Gödel demostró que la idea de Hilbert no era posible.

1.7.3. La incompletitud de Gödel

Como hemos dicho, Gödel acabó con las esperanzas de Hilbert de crear un sistema axiomático completo para las Matemáticas. De hecho, Gödel fue más allá y demostró que su idea fallaba incluso si se hubiese centrado únicamente en la Aritmética elemental consistente en los números naturales con las operaciones de la adición y el producto. Por tanto, cualquier sistema formal que trate de tener toda la verdad y nada más que la verdad sobre las Matemáticas (o incluso sobre la Aritmética elemental) será o incoherente o incompleto.

La demostración que realizó Gödel se puede considerar tanto ingeniosa como paradójica. En ella hay detalles técnicos complicados, pero si se consulta su artículo original[5] se podría observar como con frecuencia hace uso de funciones recursivas, lo que tiene una clara analogía con la antigua programación en LISP. Esto indica que, a pesar de que en esa época no existían los lenguajes de programación, ellos fueron protagonistas de la demostración de Gödel.

El fascinante resultado que descubrió Gödel atrajo a matemáticos importantes como Von Neumann, pero a la vez hizo tambalearse a toda la filosofía matemática. El desánimo que se generó fue tan considerable que, como indica Bombal (2006, p. 68), hubo manifestaciones como las siguientes en contra de otorgarle una gran importancia al rigor y a las demostraciones en las Matemáticas:

> Los esfuerzos para conseguir el rigor más extremo han conducido a un callejón sin salida, en el que ya no existe acuerdo sobre lo que éste significa. Las Matemáticas continúan vivas y vitales, pero solo sobre una base pragmática. (Kline)
>
> Una demostración en Matemáticas no es más que una comprobación de los productos de nuestra intuición. Obviamente, no poseemos, y probablemente nunca tendremos, un estándar de demostración que sea independiente del tiempo, de lo que queramos probar o de la persona o escuela de pensamiento que lo emplee (…) Lo sensato parece que es admitir que no existe tal cosa como la verdad absoluta en Matemáticas (…) Nuestra intuición sugiere ciertos resultados (...) que comprobamos por lo que llamamos una demostración. (Wilder)

[5] Puede consultarse en GÖDEL, K (1931). Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. En *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173 – 198. (Traducción al castellano por Jesús Mosterín, Obras completas, Alianza, 2006)

> Si quiere usted que las Matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza. Si quiere usted certeza, elimine el significado. (Lakatos)

No obstante, en la época en la que sucedió todo esto, había temas sociales más importantes de los que preocuparse que de la fundamentación de la Matemática como eran una gran depresión económica o una Guerra Mundial en ciernes.

1.7.4. La máquina de Turing

El siguiente avance relevante sobre el tema ocurrió cinco años después en Inglaterra cuando Turing demostró la no computabilidad. Recordemos que Hilbert pensaba que debía existir un "*procedimiento mecánico*" que verificase si una demostración era o no era correcta. Hilbert nunca llegó a aclarar con precisión su idea de "*procedimiento mecánico*". Turing entendió este procedimiento a través de lo que hoy denominamos una máquina de Turing, que es un modelo computacional que realiza una lectura/escritura de forma automática sobre una entrada y generando una salida, basándose su funcionamiento en una función de transición.

Como Gödel, también utilizó un lenguaje de programación, pero en esta ocasión mucho más sencillo. En verdad, se trataba más bien de un lenguaje máquina cuyo código está formado por unos y ceros. A pesar de su sencillez, el invento de Turing tiene una característica muy importante que es que puede realizar cualquier cómputo que pueda realizar un ser humano.

Ante esta situación Turing se preguntó: ¿qué le sería imposible a esta máquina? En poco tiempo encontró respuesta a su pregunta en el problema de la detención. Este problema consiste en decidir de antemano si una máquina de Turing (o un programa de ordenador) acabará por hallar su solución deseada y, por tanto, se detendrá. Este problema es de fácil solución si se impone un límite de tiempo, pero en caso contrario no es tan sencillo. Lo interesante de todo esto es un corolario que nos indica que si no hay de antemano una forma de determinar mediante cálculos si un programa va a detenerse o no, tampoco puede haberlo mediante razonamientos lógicos. En otras palabras, ningún sistema axiomático formal podrá decidir si un programa acabará por detenerse o no. El merito de Turing fue que demostró que ningún sistema axiomático formal puede ser completo.

El desencadenamiento de la Segunda Guerra Mundial hizo que los matemáticos preocupados por los fundamentos de las Matemáticas prácticamente desaparecieran, lo que dejó de lado el estudio de estas cuestiones por un tiempo.

1.7.5. La aleatoriedad en las Matemáticas

A finales del siglo XX, el matemático Chaitin (1988, 2003) comenzó a interesarse por estos temas. Había leído además diversos artículos sobre los fundamentos de la Física, sobre Teoría de la Relatividad, sobre Cosmología y sobre Mecánica Cuántica. La conclusión principal que obtuvo de su lectura fue que las cosas muy pequeñas se comportan en el mundo físico de una forma aleatoria. Esta idea la intentó trasladar a las Matemáticas sospechando que esta aleatoriedad podía ser la causante de su incompletitud.

Un ejemplo de esta aleatoriedad se puede encontrar en la distribución de los números primos. Es cierto que existen resultados estadísticos que indican ciertas regularidades, pero si se observa la distribución desde un punto de vista general, observamos un gran grado de aleatoriedad.

Ya en la década de los setenta, el propio Chaitin y el matemático ruso Kolmogórov realizaron importantes aportaciones por separado a la Teoría Algorítmica de la Información, cuyo objetivo es medir la complejidad computacional. Dentro de este campo se pueden establecer dos objetivos fundamentales que son el tiempo que necesita un ordenador para realizar un cálculo y la cantidad de información que hay que proporcionar al ordenador para que realice una tarea. Chaitin se ocupó principalmente de este segundo objetivo y asoció la noción de complejidad de un programa con la de entropía introducida por Boltzmann en la Física en el siglo XIX. La entropía es una magnitud física que mide el grado de desorden o aleatoriedad de un sistema físico. Esta magnitud ocupa un lugar de relevancia en la Mecánica Estadística y en la Termodinámica.

La relación que se puede encontrar entre las ideas de Chaitin y Boltzmann es que el tamaño de un programa de ordenador se puede relacionar con el grado de desorden de un sistema físico. Un ejemplo puede ser la relación que hay con la entropía de un gas a temperatura ambiente que sabemos que es elevada, con la complejidad, también elevada, de un programa de ordenador que nos describa la posición de cada átomo de ese gas. Si en vez de un gas a temperatura ambiente, el ejemplo fuera con un cristal, tanto la entropía, como la complejidad del programa serían considerablemente menor.

La noción de complejidad medida por el tamaño del programa guarda también relación con el método científico, tal y como mostró Solomonoff. Basta con pensar en el célebre principio de "*La navaja de Occam*" que dice que la teoría más sencilla en muchas ocasiones es la mejor. Esto se podría traducir a que un programa informático sencillo es el óptimo. Pero, ¿qué ocurriría si no existe una teoría sencilla? ¿Y si el programa más sencillo que se puede elaborar para describir unos datos es del mismo tamaño que los propios datos? En ese caso es claro que la teoría no sería interesante, no valdría para nada. Una teoría es buena en la medida en que comprime los datos hasta crear un sistema mucho menor de hipótesis y de reglas de deducción. De este modo, se podría definir lo aleatorio como lo que no puede ser comprimido.

Si volvemos a la idea de medir la complejidad mediante el tamaño del programa para definir la aleatoriedad, nos podemos dar cuenta de que en cuanto empecemos a examinar los tamaños de los programas se producirá un fenómeno a priori perturbador: allí donde miremos encontraremos incompletitud. Esto se debe a que no podemos asegurar que el programa que tenemos delante sea el de menor tamaño posible, es decir, el más sencillo. Esta tarea escapa al razonamiento matemático. Trasladando estas ideas a las Matemáticas, se puede observar que mientras los axiomas son finitos y concisos, los resultados matemáticos abarcan un tamaño enorme. Analizado desde este punto de vista, el teorema de incompletitud de Gödel no es ni misterioso, ni complicado, sino más bien natural y casi se podría decir que evidente, ya que los axiomas solo pueden abarcar una cantidad finita de información.

1.7.6. El futuro de las matemáticas

A lo largo de este punto hemos visto como la idea de que existen límites en el razonamiento lógico que descubrió Gödel, ha pasado de ser una bomba en los cimientos de los fundamentos de las Matemáticas, a ser percibida como algo natural tras las ideas expuestas por Chaitin.

Lo que hemos expuesto en este punto tiene un gran interés, pero para cuadrarlo del todo faltaría poner un ejemplo concreto de un resultado matemático que se escape del razonamiento lógico. Durante muchos años, se tomó como ejemplo el último teorema de Fermat que dice que si tomamos un número natural $n > 2$, no existen tres enteros a, b y c, no nulos que verifiquen que $a^n + b^n = c^n$. Desde 1637 en que Fermat conjeturó este teorema (aunque él asegura que también encontró una demostración) hasta 1995 que fue cuando Andrew Wiles[6] lo demostró, este resultado fue considerado como unos de los retos matemáticos con mayor importancia y durante parte del siglo XX fue considerado además como aquel ejemplo de resultado que se escapa al razonamiento lógico. Otro ejemplo dentro del campo de la Física lo podríamos encontrar en el estudio de la existencia de la partícula elemental llamada *bosón de Higgs* o *partícula de Dios*. Durante mucho tiempo se ha intentado observar experimentalmente esta partícula que explicaría el origen de la masa y por ende del universo. Su existencia está demostrada por diversas teorías físicas. No ha sido hasta 2013 cuando el CERN (Organización Europea para la Investigación Nuclear) anunció la observación de una partícula consistente con el bosón de Higgs, sin precisar si era el estandart o el de un modelo más liviano. Todo hace indicar que, con estos avances, acabará observándose la partícula. Hemos visto como la Teoría Algorítmica de la Información hace ver que existen multitud de resultados que no se pueden demostrar, pero no nos permite acceder a ejemplos concretos que son muy complicados de encontrar.

A pesar de todo lo dicho anteriormente, nos podríamos preguntar ¿cómo es posible que, a pesar de la incompletitud, las Matemáticas sigan progresando al ritmo que lo hacen? El teorema de incompletitud trajo a las Matemáticas sentimientos pesimistas ligados a la limitación que de él se extrae. Sin embargo, la condena que parecía que iba a recaer sobre esta ciencia hemos podido comprobar que no se ha cumplido. ¿El motivo? Como dice Chaitin (2003) “tal vez algún joven metamatemático de la próxima generación nos haga ver por qué ha de ser así.” (p. 35).

---

[6] Puede consultarse su demostración en WILES, A. (1995). Modular elliptic curves and Femat´s Last Theorem. En *Annals of Mathematics, 142*, 443 – 551.

1.8. La presencia del concepto de demostración y similares en diversos documentos

Como estamos viendo, el razonamiento es una herramienta fundamental en el quehacer matemático, aunque su utilización en el aula se presta a muchos debates metodológicos. Lo que vamos a analizar en este punto es ver cómo se tratan los conceptos con los que estamos trabajando en distintos documentos relevantes por su influencia en las tendencias de la didáctica de las Matemáticas o por establecer el marco legislativo actual en nuestro país y en la Comunidad Autónoma de Madrid.

1.8.1. Principios y estándares del NCTM

En un mundo que evoluciona constantemente, las Matemáticas no iban a ser menos. Cada vez tenemos más herramientas para utilizar en el aula y la llegada de las competencias matemáticas abre las puertas a unas Matemáticas más productivas. En ese sentido, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) abrió las puertas a unas Matemáticas más abiertas. Su idea es que todo el mundo debe poseer y comprender los contenidos matemáticos más relevantes, eliminando de este modo el conflicto que en muchas ocasiones se produce entre igualdad y excelencia.

Hasta el año 2000, las reformas anteriores las habían protagonizados matemáticos con pocas apreciaciones por las dimensiones pedagógicas y psicológicas de la enseñanza, centrando estas en los contenidos. Fue entonces cuando el NCTM (2000), formado en su mayoría por profesionales de la educación matemática, publicó lo que en su opinión eran los componentes esenciales que en un programa de alta calidad deberían ser asimilados por todos los estudiantes. Se hizo hincapié en la comprensión de los conceptos matemáticos frente a los procedimientos y algoritmos simples, en la resolución de problemas, en los métodos frente a las respuestas y en el uso de las calculadoras u otras tecnologías. Sobre el uso de la calculadora, el NCTM recomendó su utilización con el objetivo de centrar más la atención en la comprensión de los conceptos explicados.

Como indica Ferrini-Mundy (2000), este documento debería ser visto como parte de un trabajo progresivo que puede ayudar en la realización de programas matemáticos, pero no como una prescripción impuesta de forma rígida. Como se observó posteriormente, su elaboración permitió tener una guía para mejorar la didáctica de las Matemáticas a nivel mundial orientándose a:

a) Establecer un conjunto comprensivo y coherente de metas de aprendizaje de cara a orientar los currículos, las metodologías y los métodos de evaluación.
b) Servir como recurso para los docentes para mejorar sus programaciones.
c) Estimular ideas en distintos ámbitos (local, regional, nacional o internacional) sobre cómo conseguir una mayor comprensión de las matemáticas.

En la publicación se establece que los principios son enunciados que reflejan preceptos básicos que se entienden fundamentales para obtener una educación matemática de alta calidad. Se establecen seis principios que en la citada publicación se analizan y justifican con detalle. A continuación los mencionaremos y los comentaremos de una forma muy breve:

1. **Igualdad**. Independientemente de los antecedentes de los alumnos, todos pueden y deben aprender Matemáticas. La igualdad que se proponía no quiere decir que todos deban aprender Matemáticas del mismo modo, sino todo lo contrario.

Deberán realizarse las pertinentes adaptaciones para que todos los alumnos consigan acceder con éxito a las Matemáticas.

2. **Currículum**. Se propuso la elaboración de un currículum coherente, relacionando ideas y construyendo unos contenidos sobre otros con el objetivo de incrementar la comprensión y las capacidades de aplicación a situaciones cotidianas.
3. **Enseñanza**. La capacidad, la habilidad y la confianza que tiene un alumno utilizando las Matemáticas está relacionada muy directamente con la metodología que se ha utilizado con el alumno en el aula. Se propuso un tipo de profesor comprensivo y dedicado con los alumnos, además de formado para poder aplicar el conocimiento que posee con flexibilidad en función del alumnado que tenga.
4. **Aprendizaje**. Es importante que los alumnos aprendan Matemáticas entendiéndolas, construyendo los nuevos aprendizajes a partir de los anteriores y de sus propias experiencias. De este modo, los alumnos serán más reflexivos y más competentes para afrontar retos cada vez de mayor dificultad.
5. **Evaluación**. La evaluación, como parte integral de la enseñanza actual, contribuye al aprendizaje. Debe apoyar el aprendizaje de las Matemáticas relevantes y dotar de información útil a los profesores y a los alumnos con el objetivo de mejorar el proceso enseñanza-aprendizaje.
6. **Tecnología**. Son medios que pueden ayudar a conseguir un aprendizaje más profundo, realizando pequeñas investigaciones y fomentando la reflexión y la toma de decisiones.

Por otro lado, los estándares los define Gaulin (2001, p. 53) como unas normas que otorgaban calidad a un currículum. Están formados por cinco **estándares de contenidos** (Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de Datos y Probabilidad) que describen los contenidos que deben aprender los alumnos y cinco **estándares de procesos** (resolución de problemas, razonamiento y demostración, comunicación, conexiones y representaciones) que indican cómo se deben adquirir y aplicar esos contenidos. Unidos con los principios citados con anterioridad, forman una guía que ayuda a los docentes y legisladores a una continua mejora en la calidad de la enseñanza de las Matemáticas y del sistema educativo en general.

En relación al trabajo que estamos realizando, lo que nos interesa es saber el valor que le otorgaba el NCTM al razonamiento y a la demostración en el aula. Consideraban la demostración matemática como una manera formal de expresar tipos particulares de razonamiento y justificación, procedimientos estos que proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia gama de fenómenos.

Para comprender las Matemáticas consideran que es imprescindible ser capaz de razonar. Desde temprana edad, hay que instaurar un espíritu crítico en los alumnos que haga que razonen las afirmaciones con preguntas como ¿por qué crees que es verdad esto? o ¿puede haber otra respuesta a este problema? Esto se puede conseguir con procedimientos como el desarrollo de ideas, la exploración de resultados, la formulación de conjeturas o la justificación de resultados. Está claro que no se puede enseñar a un alumno a razonar y demostrar en una única unidad didáctica. El razonamiento y la demostración deberían estar presentes durante toda la escolarización. Como hábito mental que es el razonamiento, debe desarrollarse de una forma coherente en los diferentes cursos. Mediante este proceso gradual, es de esperar que tras finalizar la Educación Secundaria los alumnos deberían estar preparados para comprender y elaborar demostraciones acordes con su nivel, apreciando su valor.

Su idea en este sentido sería que todos los programas de Matemáticas deberían capacitar a los estudiantes para:

1. Reconocer el razonamiento y la demostración como aspectos fundamentales de las Matemáticas.
2. Formular e investigar conjeturas matemáticas.
3. Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones.
4. Elegir y utilizar distintos tipos de razonamientos y métodos de demostración.

Como en cualquier didáctica, en la de las Matemáticas también juega un papel importante la motivación y es interesante hacer ver a los alumnos que cuando ocurre un hecho aparentemente sorprendente, normalmente siempre hay un razonamiento detrás. Ejemplos muy claros los podemos encontrar en la llamada *matemagia*.

Vamos a poner como ejemplo un juego que consiste en adivinar una ficha del dominó que va a pensar el alumno:

Profesor: Piensa una ficha del dominó.

Alumno: De acuerdo.

Profesor: Coge una de las dos puntuaciones, la que quieras, y multiplícala por dos.

Alumno: ¡Ya!

Profesor: Ahora dime un número, el que tú quieras.

Alumno: El 149.

Profesor: Bien, pues súmale 149 al número que tenías antes y multiplica el resultado por 5. Al resultado obtenido súmale el otro número de la ficha. ¿Qué resultado te ha dado?

Alumno: El 780.

Profesor: A que tu ficha de dominó es 3 – 5.

Ante este hecho los alumnos se suelen quedar muy sorprendidos y una actividad muy interesante puede ser *buscar el truco*. Algebraicamente hablando, las herramientas utilizadas son muy sencillas ya que si consideramos que los valores de la ficha son x e y, y que k es el valor que piensa el alumno, las operaciones que hacemos son:

$$2x \rightarrow 2x + k \rightarrow 10x + 5k \rightarrow 10x + y + 5k$$

Viendo el resultado final, es fácil ver que simplemente restando al número final $5k$ (valor conocido) nos queda el número $10x + y$, número este que en la cifras de las decenas tiene el valor x y en las cifras de las unidades tiene el valor y.

Como estamos observando, las ideas que propusieron el NCTM indican que hay que intentar promover en los alumnos hábitos como la formulación y la investigación de conjeturas de cara a que valoren los descubrimientos matemáticos que consigan obtener. En este sentido hacen especial hincapié en que el trabajo en grupo ayuda mucho en conseguir estos objetivos.

Es papel del profesor revisar conjeturas que se han trabajado previamente y que con nuevos conocimientos pueden sufrir modificaciones. Por ejemplo, cuando se empieza a multiplicar y dividir con números naturales en el tercer curso de Educación Primaria, los alumnos observan que la multiplicación "*aumenta*" y la división "*disminuye*". Sin embargo, esta idea, que es cierta con los naturales, cambia cuando se introducen en el quinto curso de Educación Primaria la multiplicación y la división con decimales en los casos en que multiplicamos y dividimos por números que están entre 0 y 1.

También es importante hacer ver a los alumnos que en ocasiones resultados que son fácilmente visibles a simple vista, pueden no estar capacitados aún para demostrarlos rigurosamente. Por ejemplo, en 3º ESO, es fácil que los alumnos observen que si una función

f es continua en $[a, b]$, con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces en algún punto c del intervalo (a, b) se cumplirá que $f(c) = 0$. Sin embargo, sería complicado que llegarán a una demostración con cierto rigor.

Se puede decir que el modelo que promueve el NCTM se basa en la enseñanza mediante preguntas como ¿por qué funciona esto?, ¿esto funciona siempre?, ¿podría haber otra respuesta?, ¿qué ocurrirá si cambiamos esta condición?, etc. Se tiene que intentar que los alumnos razonen lo máximo posible y que expresen sus argumentaciones, aunque sea en un lenguaje que no sea propio de las Matemáticas.

Como es lógico, un documento de esta envergadura e influencia, también recibió sus correspondientes críticas. Así, Ferrini-Mundy (2000) mencionó que en el documento apenas se mencionan recomendaciones detalladas acerca de la preparación de los docentes y cuestiona que no se oriente de un modo más claro sobre cómo introducir las nuevas tecnologías en el aula, a pesar del rol importante que le otorgaban. Otros autores como Howe (en Addington, 2000) criticó que se le diera tanta importancia a la comprobación, en ocasiones por encima incluso que al conocimiento matemático. Hubo críticas también sobre las pocas repercusiones que estaban teniendo los Estándares. Así, Addington (2000) tenía una opinión positiva sobre ellos, pero se quejó de que las editoriales encargadas de preparar el material didáctico no se ajustaban a ellos tal y como se habían comprometido.

1.8.2. Informe PISA

El informe PISA (Program for International Student Assessment) es un estudio comparativo, internacional y periódico (cada tres años) que evalúa el rendimiento de los alumnos de 15 años a partir de ciertas competencias consideradas elementales tales como la lectora, la matemática y la de ciencias. No se centra estrictamente en los contenidos curriculares, sino más bien en evaluar cómo pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones de la vida cotidiana, las motivaciones que tienen para aprender, la percepción que tienen de sí mismos como aprendices y sus propias estrategias de aprendizaje. Dicho de otra forma, el estudio indica el grado de preparación que tienen los alumnos de un país para desempeñar un papel activo como ciudadanos. Los datos e indicadores de cada estudio deberían orientar a los legisladores de cada país para mejorar el desarrollo de sus políticas educativas.

En el estudio PISA participan los 32 países que componen la OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico), a la que España pertenece desde 1961, y un número cada vez mayor de países asociados, que en la edición del 2012 fueron 65, incluyendo los 34 de la OCDE. Hay que tener en cuenta que el estudio se hace con muestras de estudiantes de 15 años de diferentes países, no sobre la población de personas de 15 años de un país. En España estas poblaciones coinciden debido a la obligatoriedad de la educación hasta los 16 años, pero en otros países no es así. Es decir, en un país donde la obligatoriedad de la educación sea hasta los 14 años, PISA elegirá su muestra entre aquellos alumnos que hayan elegido voluntariamente proseguir con sus estudios. También es importante el hecho de que PISA evalúa principalmente cómo aplican los alumnos los contenidos aprendidos en situaciones de la vida cotidiana, cuestión esta importante ya que los currículos tienen distintas aproximaciones a la realidad. Estas dos matizaciones son importantes a la hora de interpretar los resultados del estudio.

Los resultados obtenidos por España en los diferentes informes relativos a la competencia matemática hasta ahora siempre nos han situado por debajo de la media de la OCDE, aunque es cierto que la diferencia tiende a disminuirse.

Tabla 2. **Resultados de España en la competencia matemática en los informes PISA.**

	2000	2003	2006	2009	2012
España	476	485	480	483	484
Media OCDE	500	500	498	496	494

Nota. Fuente: OCDE (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos (Informe español). Volumen I: Resultados y contexto.* Madrid: Ministerio de Educación.

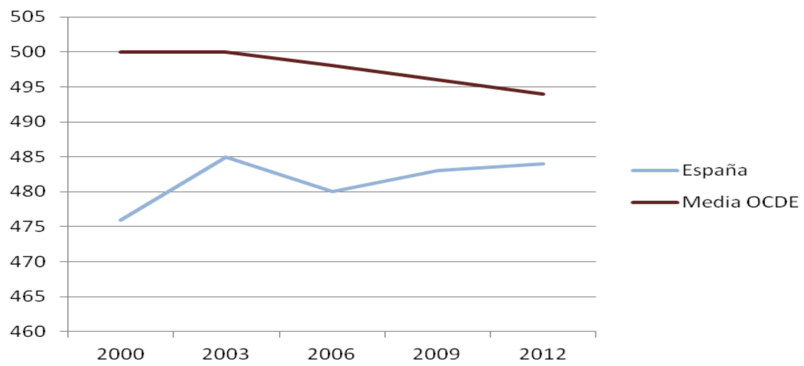


Gráfico 1. **Puntuaciones PISA en Matemáticas de España y de la media de la OCDE.**

Este hecho se repite también en la competencia lectora y con más incidencia en la competencia científica, donde ya estamos prácticamente en la media de la Unión Europea.

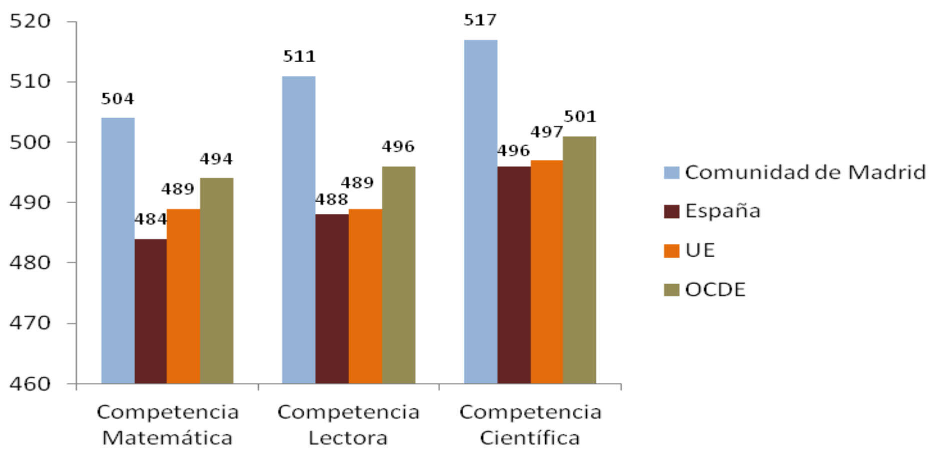


Gráfico 2. **Puntuaciones PISA 2012 en las tres competencias evaluadas.**

A nivel autonómico, la Comunidad de Madrid participó por primera vez en este estudio en el 2009 y obtuvo una puntuación en la competencia Matemática de 496, en la media de la OCDE y por encima de la media de las 14 Comunidades Autónomas que participaron (todas salvo Extremadura, Castilla la Mancha y la Comunidad Valenciana), aunque por debajo de Comunidades Autónomas como Castilla y León, Navarra, País Vasco, Aragón y La Rioja que obtuvieron las mejores puntuaciones.

En el último informe PISA 2012, en el que ya participó Extremadura, hemos visto en el gráfico 2 que la Comunidad de Madrid ha obtenido unos resultados superiores en las tres competencias a la media española, a la media europea y a la media de los países de la OCDE.

En el gráfico 3 exponemos los resultados en la competencia Matemática de las autonomías que participaron en el informe PISA 2012, comparando los resultados con la media europea y la media de los países de la OCDE.

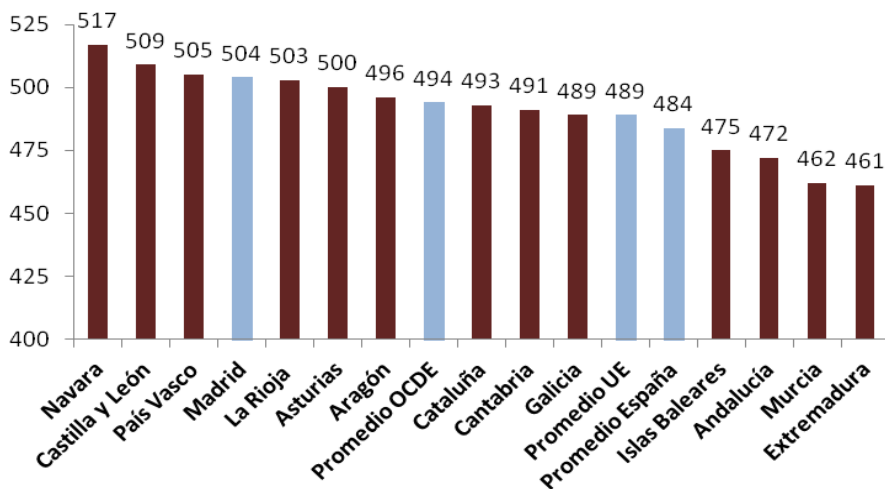


Gráfico 3. **Puntuaciones PISA 2012 en Matemáticas a nivel autonómico.**

Podemos observar como la Comunidad de Madrid obtuvo una puntuación de 504 puntos, cuarta posición a nivel nacional, solo por detrás de Navarra, Castilla y León y País Vasco. La consejera de Educación de la Comunidad de Madrid, Lucía Figar, atribuye estas buenas calificaciones de los estudiantes madrileños a las políticas que lleva a cabo esta comunidad, destacando la realización de exámenes externos que lleva realizando desde 2008, considerando como esencial la publicación de los resultados obtenidos por los centros.

Más en el marco nacional, las principales conclusiones que se pueden extraer del último estudio PISA 2012 son las siguientes:

1. España continúa por debajo de las puntuaciones medias de la Unión Europea y de los países de la OCDE, pero continúa acercándose a esos niveles. Sobre que España siga en niveles inferiores a la media de la Unión europea, el catedrático de Economía Aplicada de la Universidad de Barcelona Jorge Calero (citado en Silió, 2013) justifica este hecho en el lastre que supone el bajo nivel educativo de generaciones previas: “La reciente evaluación de competencias de la población adulta, también de la OCDE, es esclarecedora en este punto: España, junto con Italia, ocupa los puestos más bajos del *ranking*”. Según Zoido, analista del proyecto de la OCDE, un factor que justifica parte de estos resultados son los alumnos repetidores de nuestro sistema educativo. En el nivel educativo que analiza PISA, un 34% de los estudiantes va retrasado, valor este que triplica la media de otros países. Según Zoido (citado en Silió, 2013) el retaso medio de estos alumnos es de dos años y medio. Considera que la repetición es cara (aproximadamente 2500 €/alumno) y en muchas ocasiones al alumno no le aporta beneficios académicos. Zoido (citado en Sánchez, 2013) concluye que “segregar a los estudiantes de esta manera incide en la equidad”. En cuanto a la valoración de los resultados en Matemáticas, el catedrático de didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Extremadura Blanco (citado en Silió, 2013)

hace hincapié que, como comentamos anteriormente, la diferencia con la puntuación media de la OCDE es cada vez menor y propone un modelo como el japonés, en el que se estudian menos contenidos pero trabajan más la aplicación e interpretación: “Nuestros alumnos saben las fórmulas, pero tienen que saber interpretar, entender un gráfico o si es un timo la oferta del supermercado”.

2. A parte de los resultados, seguramente la conclusión más negativa de este último informe es que han aumentado las desigualdades entre las distintas Comunidades Autónomas, cuestión esta que era en anteriores informes un punto a destacar. Este hecho se podía observar claramente en gráfico 2, donde podíamos ver como la Comunidad Foral de Navarra, la que mejor puntuación en competencia Matemática tenía en España, se podía comparar con países punteros en esta competencia como Canada o Finladia, mientras que la Comunidad Autónoma con peor puntuación en la competencia Matemática, Extremadura, tenía una puntuación semejante a países como Israel o Grecia, situados en esta competencia en posiciones postreras. Esta diferencia se traduciría en curso y medio de desfase. Sobre esta cuestión, la Secretaria de Estado para la Educación Montserrat Gomendio (citado en Díaz, 2013) asegura que “las diferencias entre comunidades se deben a su nivel socioeconómico, no a sus diferentes políticas educativas”, añadiendo que "no hay una respuesta a qué es lo que ha hecho que haya menos equidad, pero sí puede haber influido el aumento de alumnos inmigrantes, el aumento de la diversidad dentro de un sistema rígido sin evaluaciones tempranas para detectar problemas". Pero no solo aumentaron las diferencias entre Comunidades Autónomas, también entre géneros. Los varones obtienen mejores calificaciones en Matemáticas y Ciencias, con 9 y 7 puntos de

diferencia respectivamente, mientras que las mujeres obtienen mejor puntuación en comprensión lectora con 29 puntos de diferencia.

3. En cuanto a la asignación presupuestaria que se le dedica a la Educación, Zoido (citado en Sánchez, 2013) defiende que más inversión no implica mejores resultados: “a partir de un cierto nivel de inversión, situado en 50.000 dólares anuales por alumno, gastar más no está relacionado con el rendimiento" e incluso llega a afirmar (citado en Díaz, 2013) que “la escasez de profesores no es un problema”. A pesar de lo anterior, reconoce (citado en Díaz, 2013) que “los sistemas con mejores puntuaciones son sistemas donde consideran que la responsabilidad de la educación es compartida entre docentes, alumnos y Administración y donde los profesores tienen mejores salarios, pero también más autonomía para desarrollar contenidos, siempre que ésta esté ligada a la rendición de cuentas".
4. En relación a lo último que mencionamos en el punto anterior, uno de los elementos que Zoido propone para mejorar los resultados es aumentar la autonomía de los centros educativos, siempre que estos rindan cuentas. Parece ser que este será uno de los objetivos de la nueva Ley de Educación.

Sobre las propuestas que hace el informe PISA sobre la didáctica de las Matemáticas, nos vamos a centrar en los informes de 2003 y 2012, que son los que se centraron en esa competencia en concreto, aunque también haremos referencia a conclusiones que se han extraído de los otros informes.

Si observamos los resultados a nivel nacional que han obtenido nuestros estudiantes en Matemáticas en el último informe PISA 2012 vemos que su puntuación fue de 484 puntos, 10 menos que la media de la OCDE y 5 menos que la media de la Unión Europea. Para que nos hagamos una idea, los países que mejores resultados obtuvieron en el estudio fueron Corea y Japón con 554 y 536 puntos respectivamente. Entre los países de nuestro entorno, Alemania obtuvo 514 puntos, Francia 495 puntos, Reino Unido 494 puntos, Portugal 487 e Italia 485. La potencia económica mundial, Estados Unidos, obtuvo 481 puntos, puntuación inferior a la española. Fijémonos que casi todos los países que hemos mencionado anteriormente poseen una tradición matemática centenaria y difieren de la puntuación española (positiva o negativamente) en torno a un 6%.

El informe presenta multitud de indicadores relativos a otros aspectos como el interés, la actitud, la sociabilidad, etc. en los que no nos vamos a introducir ya que nos desviaríamos demasiado de la cuestión tratada. Lo que no se debe hacer es un análisis frívolo de los resultados. Estar ligeramente por debajo en la puntuaciones de países con una gran tradición matemática y con una mayor experiencia en la escolarización obligatoria hasta los 16 años no debería ser considerado como un absoluto fracaso. No se deben trivializar los resultados culpando a los alumnos, a los profesores o a los legisladores. Debemos hacer una reflexión profunda considerando las reflexiones propias de nuestra sociedad y sistema educativo. Así, por ejemplo, podríamos analizar el hecho de que PISA evalúa por competencias, aspecto este que es relativamente moderno en nuestro país y no así en otros. Dicho de otro modo, a nuestros alumnos se les han planteado tareas que sí que deberían saber hacer, pero no están tan acostumbrados a realizar como alumnos de su entorno. Por ello, los resultados negativos que obtenemos marcan más a nuestro sistema educativo que a los alumnos, ya que no ha sido capaz de alcanzar en algunos alumnos objetivos prioritarios. Este hecho se puede observar en los indicadores que muestran la poca motivación y autoestima que tienen nuestros alumnos en el campo de las Matemáticas.

A raíz de los resultados de 2003, el Comité Español de Matemáticas realizó unas propuestas generales encaminadas a mejorar los resultados y que en nuestra opinión siguen siendo válidas y necesarias en la actualidad:

1. Un pacto de estado sobre la Educación Obligatoria en general, y en especial sobre las Matemáticas.
2. Un plan de formación del profesorado ambicioso, en constante renovación, haciendo especial hincapié en que los maestros de Educación Primaria adquieran una superior formación en didáctica de las Matemáticas.
3. Actuación de colectivos interesados en la didáctica de las Matemáticas para incrementar la apreciación social de la asignatura, cuestión esta con la que se contribuyó celebrando el Congreso Internacional de las Matemáticas en 2006 o las Olimpiadas Internacionales en 2008.

Las propuestas que propone el informe PISA se basan en la idea de que aprender a matematizar debe ser el objetivo básico de todos los estudiantes para poder resolver problemas. El proceso de resolución lo dividen en tres fases:

1. **Matematización horizontal**, que supone la traducción de los problemas relacionados con situaciones cotidianas al lenguaje matemático. En este proceso se incluyen actividades como:
    - Identificar Matemáticas relevantes en un contexto general.
    - Plantear cuestiones y problemas.
    - Distintas representaciones del problema.
    - Diferenciar los distintos lenguajes utilizados.
    - Encontrar relaciones entre los elementos del problema o con otros problemas similares.

- Utilizar recursos útiles para su resolución.

2. **Matematización vertical**, en donde se deben utilizar procesos y destrezas matemáticas tales como:
   - Utilizar diferentes representaciones.
   - Utilizar un lenguaje apropiado y sus respectivas operaciones.
   - Combinar e integrar modelos.
   - Argumentar y generalizar.

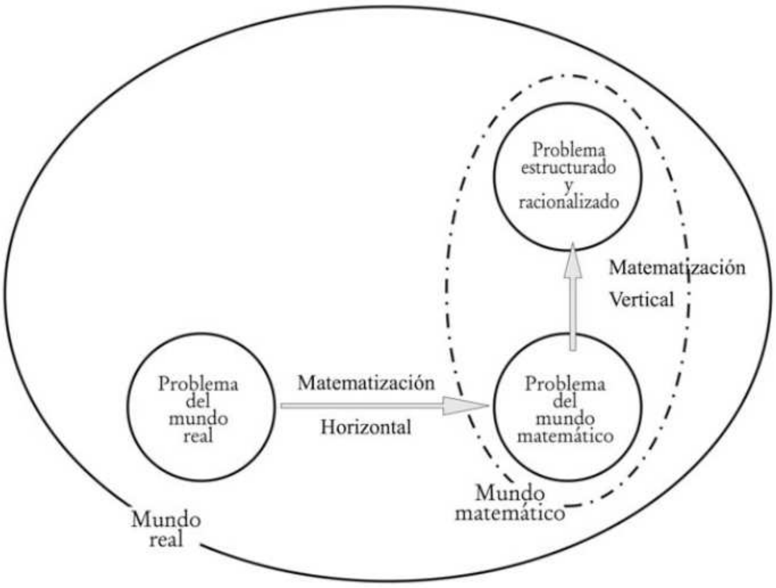


Figura 4. **Matematización horizontal y vertical.**

Nota. Fuente: RICO, L. (2006). La competencia matemática en PISA. En *PNA (1), 2, p. 52.*

3. **Reflexión sobre los resultados.** Este proceso se debe realizar con una actitud crítica y con el objetivo de validar el proceso. Algunas de las tareas que deberían realizarse en él son:
   - Comprender la extensión y los límites de los conceptos matemáticos utilizados en la resolución del problema.

- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos utilizados, explicando y justificado los resultados.
- Criticar el modelo utilizado, intentando encontrar uno mejor.

Los contenidos matemáticos que se evalúan en el informe se dividen en los siguientes campos:

- Cantidad.
- Espacio y forma.
- Cambio y relaciones.
- Probabilidad.

También se evalúan los procesos que definen las destrezas necesarias de la materia:

- Operaciones matemáticas simples.
- Conexiones, relacionar ideas para resolver problemas.
- Reflexión, razonamiento matemático en sentido amplio.

En cuanto a la evaluación que propone el informe PISA, va encaminada a medir la competencia del alumno a la hora de resolver problemas matemáticos con éxito. La estrategia que proponen para llevarla a cabo se basa en tres variables:

- Los contenidos matemáticos que se deben utilizar para resolver el problema.
- El contexto en el que se localiza el problema.
- Las competencias o procesos que permiten resolver el problema relacionando los contenidos con el contexto.

De estas tres variables, a nosotros nos interesa especialmente esta última. Según el informe PISA, las competencias que proponga un plan de formación son un elemento determinante para medir su calidad, mientras que su eficacia responderá a si estas se consiguen a medio o largo plazo. Los grupos de competencias o procesos sobre los que hace especial hincapié el informe PISA son:

- **Pensar y razonar**.
- **Argumentar**.
- Comunicar.
- Modelar.
- **Plantear y resolver problemas**.
- Representar.
- Utilizar el lenguaje formal, técnico y sus correspondientes operaciones.
- Usar herramientas y recursos adecuados en cada situación.

Para nuestra investigación nos interesan fundamentalmente las competencias de pensar y razonar, argumentar y plantear y resolver problemas.

La competencia de pensar y razonar incluye el planteamiento de cuestiones propias de las Matemáticas (¿cuántos vale esta magnitud?, ¿cómo calcularlo?, en este caso ¿qué ocurriría?, etc.), conocer las posibilidades que ofrecen las Matemáticas para responder a cuestiones como las anteriores, distinguir entre los diferentes tipos de enunciados que aparecen dentro de las Matemáticas (definiciones, teoremas, demostraciones, conjeturas, afirmaciones condicionadas, etc.) y utilizar los conceptos matemáticos dentro de su extensión y respetando sus límites.

La competencia de argumentar incluye aspectos como conocer lo que son las pruebas matemáticas, diferenciar distintos tipos de razonamientos matemáticos, comprender y valorar cadenas de argumentaciones matemáticas y crear y expresar razonamientos matemáticos.

La competencia de plantear y resolver problemas incluye tanto el planteamiento de cualquier tipo de problema acorde al nivel del alumno, como los diferentes modos de resolución a los que pueda acceder.

Por último cabe destacar los niveles de competencia que considera el informe PISA para evaluar el nivel de competencia de cada alumno. Son los siguientes (OCDE, 2004, p. 47):

1. **Primer nivel**. Los alumnos saben responder a preguntas sobre contextos que les son conocidos, en los que está presente toda la información pertinente y las preguntas están claramente definidas. Son capaces de identificar la información y llevar a cabo **procedimientos rutinarios** siguiendo unas instrucciones directas en situaciones explícitas. Pueden realizar **acciones obvias** que se deducen inmediatamente de los estímulos presentados.
2. **Segundo nivel**. Los alumnos saben interpretar y reconocer situaciones en contextos que solo requieren una inferencia directa. Saben extraer información pertinente de una sola fuente y hacen uso de un único modelo representacional. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones elementales. Son capaces de **razonamientos directos** e interpretaciones literales de los resultados.
3. **Tercer nivel**. Los alumnos saben ejecutar procedimientos descritos con claridad, incluyendo aquellos que requieren de decisiones secuenciales. Pueden seleccionar y aplicar estrategias de solución de problemas sencillos. Saben interpretar y utilizar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y **razonar directamente** a partir de ellas. Son capaces de elaborar breves escritos exponiendo sus interpretaciones, resultados y **razonamientos**.

4. **Cuarto nivel**. Los alumnos pueden trabajar eficazmente con modelos explícitos en situaciones complejas y concretas que pueden conllevar condicionantes o exigir la formulación de supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones, incluyendo las simbólicas, asociándolas directamente a situaciones del mundo real. Los alumnos de este nivel saben utilizar habilidades bien desarrolladas y **razonar con flexibilidad y con cierta perspicacia** en estos contextos. Pueden **elaborar y comunicar argumentos** y explicaciones basados en sus interpretaciones, argumentos y acciones previas.
5. **Quinto nivel.** Los alumnos saben desarrollar modelos y trabajar con ellos en situaciones complejas, identificando los condicionantes y especificando los supuestos. Pueden seleccionar, comparar y evaluar estrategias adecuadas de solución de problemas para abordar situaciones complejas relativas a estos modelos. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden trabajar estratégicamente utilizando habilidades de pensamiento y **razonamiento bien desarrolladas**, así como representaciones adecuadamente relacionadas, caracterizaciones simbólicas y formales, e intuiciones relativas a estas situaciones. Pueden reflexionar sobre sus acciones y formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
6. **Sexto nivel.** Los alumnos saben formar conceptos, generalizar y utilizar información basada en investigaciones y modelos de situaciones de problemas complejos. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y traducirlas entre ellas de una manera flexible. Los estudiantes de este nivel poseen un pensamiento y **razonamiento matemático avanzado**. Estos alumnos pueden aplicar su entendimiento y comprensión, así como su

> dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales y desarrollar nuevos enfoques y estrategias para abordar situaciones nuevas. Los alumnos pertenecientes a este nivel pueden **formular y comunicar** con exactitud sus acciones y reflexiones relativas a sus descubrimientos, **argumentos** y su adecuación a las situaciones originales.

Como hemos observado, el informe PISA sitúa como protagonista en la didáctica de las matemáticas a la resolución de problemas. Aunque no menciona directamente las demostraciones matemáticas, si lo hace con términos íntimamente relacionados como argumentar, pensar o razonar. Los consejos que da a las organizaciones competentes es que se organicen los currículos de manera que los alumnos alcancen una competencia matemática acorde con su edad y lo que intentaremos aclarar en nuestro trabajo es si dando una relevancia especial a la demostración matemática en la metodología que se utiliza en el aula lograremos mejorar el grado de adquisición de la competencia matemática en nuestros alumnos.

1.8.3. En el currículum español

Desde el primer Plan de Estudios para la Enseñanza Secundaria en1836 hasta el actual ha habido más de treinta modificaciones. En este punto veremos la forma en la que han tratado a la demostración y la prueba matemática algunos de ellos, analizando la evolución histórica que han tenido estas modificaciones y utilizando para ello principalmente las ideas expuestas por Ibañes y Ortega (2002).

En el **Plan de 1934**[7] (Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes) el Bachillerato estaba compuesto por siete cursos y su correspondiente currículum de Matemáticas consistía en una enumeración de los contenidos de cada curso. En él no había referencias explícitas a la demostración o a la prueba, aunque si se dejaba a criterio del profesor el ritmo en la transición entre lo que denominaban *los cursos intuitivos* a los *estudios racionales*.

En el **Plan de 1938**[8] (Ministerio de Educación Nacional) la estructura seguía siendo la misma que en el anterior. En este Plan sí que se comenzó a hablar de demostraciones en general, pero no se precisó las demostraciones que debían tratarse, ni los métodos que debían utilizarse. Las Matemáticas del primer curso (11 años) serían intuitivas, sin demostraciones, con el objetivo de que el alumno se habituase al lenguaje matemático. En los cursos segundo y tercero (12 y 13 años) los alumnos debían iniciarse en las demostraciones y razonamientos elementales en campos como la Aritmética o como la Geometría, iniciándose en la idea del rigor, aunque se hacía hincapié en que debía introducirse de manera suave para que no provocase el rechazo de los alumnos. Durante el cuarto y quinto curso (14 y 15 años) se les podría exigir a los alumnos el rigor lógico propio de las Matemáticas, algo que en nuestra opinión nos parece un objetivo demasiado ambicioso, a pesar de que se indicaba que las demostraciones y los razonamientos siempre serían de un nivel elemental, cuestión esta que parece contradictoria con el objetivo anterior.

En el **Plan de 1953**[9] (Ministerio de Educación Nacional) el Bachillerato pasaba a componerse de seis cursos y en las orientaciones metodológicas que se proponían había referencias explícitas a los razonamientos y demostraciones. De hecho se mencionaba el

[7] COLECCIÓN LEGISLATIVA DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA (1934) *Plan de Estudios de Bachillerato*, 551 -559.

[8] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1938) *Ley de 20 de septiembre de 1938 de Reforma de la Segunda Enseñanza* (B.O.E. de 23 de septiembre de 1938)

[9] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1953) *Ley sobre la ordenación de la Enseñanza Media.* (B.O.E. de 27 de febrero de 1953)

razonamiento lógico como una de las finalidades de las Matemáticas del Bachillerato. Mientras que en el primer curso se omitía cualquier tipo de razonamiento abstracto, en el segundo curso los alumnos debían iniciarse en el razonamiento lógico. En el tercer curso debían presentarse los contenidos con carácter lógico pero sin recargar al alumno con teoremas innecesarios. A partir de ese curso, se pretendía aumentar paulatinamente el rigor en las exposiciones y destacar las conexiones de los contenidos con situaciones cotidianas. Al igual que en el Plan anterior, no se especificaron los métodos de demostración que debían utilizarse, aunque sí que se indicó situaciones en las se podría requerir del razonamiento hipotético deductivo y demostraciones que procedían o no procedían de diferentes contenidos de la materia.

En el **Plan de 1957**[10] (Ministerio de Educación Nacional) el Bachillerato constaba de seis cursos, divididos en tres ciclos, más uno preuniversitario. El currículum de Matemáticas ya no era una simple enumeración de contenidos, sino que cada curso venía dividido en lecciones. Los primeros dos cursos tendrían un carácter práctico e intuitivo, descartando en estos cursos los razonamientos abstractos. Los cursos de tercero y cuarto se consideraban como la transición entre lo que denominaban la *evidencia sensible* a la *evidencia racional*. Se debía hacer ver a los alumnos progresivamente la necesidad de justificar algunos resultados. Todo esto iba encaminado a que en los cursos quinto y sexto (Bachillerato Superior) se utilizara una metodología fundamentalmente racional, favoreciendo las construcciones deductivas y la iniciativa del alumno tanto en trabajos individuales como en grupo. Se priorizaba, según sus propias palabras, la reflexión y el razonamiento frente al adiestramiento.

[10] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1957) Plan de Estudios del Bachillerato Laboral. (B.O.E. de 24 de enero de 1957)

Se pude observar que este Plan mejora a los anteriores en el sentido que se establecían más claramente la evolución progresiva en el razonamiento lógico que debía tener un alumno de Bachillerato. En los primeros cursos, se establecían alternativas al razonamiento deductivo en algunas actividades, como puede ser el uso de materiales manipulables. En posteriores cursos, aunque sí que se indicaban algunos resultados en los que podría ser útil la realización de la demostración, no indicaba nada sobre los tipos de demostraciones que deberían utilizar los profesores. También debemos destacar que en el quinto curso se establecía una lección denominada *Iniciación al método racional*, en la que se trabajaban contenidos como postulados, teoremas (hipótesis, tesis y demostración), cadenas deductivas, teoremas directos, recíprocos y contrarios y condición necesaria y suficiente, todo esto complementado con ejercicios sobre estos contenidos. En este mismo curso había una lección denominada *Métodos de resolución de problema*s, con lo que comprobamos que este Plan hacía una correspondencia clara entre la racionalidad de las Matemáticas y los métodos de resolución de problemas. En todas estas novedades metodológicas que aparecen en este Plan y que ayudaron a modernizar la Didáctica de las Matemáticas tuvo una influencia notable el matemático y profesor Puig Adam.

En el **Plan de 1970**[11] (Ministerio de Educación y Ciencia) el Bachillerato constaba de tres años más el Curso de Orientación Universitaria (COU). Su correspondiente currículum

[11] MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1971) *Nuevas orientaciones pedagógicas para la segunda etapa de E.G.B.*
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975) *Orden de 22 de marzo de 1975 por la que se desarrolla el Decreto 160/75 de 23 de enero, que aprueba el Plan de Estudios del Bachillerato y se regula el Curso de Orientación Universitaria* (B.O.E. de 18 de mayo de 1975)
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975) *Resolución de 21 de agosto de 1975 por la que se desarrolla la disposición transitoria 4ª de la Orden Ministerial de 22 de marzo, referida al Curso de Orientación Universitaria.* (B.O.E. de 6 de septiembre de 1975)
MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1978) *Resolución de 1 de marzo de 1978 sobre contenidos y orientaciones metodológicas para el Curso de Orientación Universitaria.* (B.O.E. de 17 de marzo de 1978)

estaba formado por una enumeración de los contenidos de cada curso a los que se le añadían unos comentarios en los que se formulaban los principales objetivos y se destacaban detalles metodológicos. Había muy pocas referencias al razonamiento y ninguna a la prueba o la demostración.

De las pocas menciones que había al razonamiento en el currículo del Bachillerato podemos destacar la que hacía en el área de las Ciencias Matemáticas y la Naturaleza, en donde se incitaba a capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno, resaltando el mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico y habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación.

Previamente, en lo que se denominaba segunda etapa de la Educación General Básica (alumnos de 11 a 14 años) uno de los objetivos a lograr era el de alcanzar una mayor profundidad en el formalismo matemático, desarrollando en el alumno la capacidad de desarrollar sistemas formales necesarios para resolver problemas. Por ejemplo, en el octavo curso uno de los objetivos era el de la construcción rigurosa del conjunto de los números racionales.

En la línea de lo que expresan Ibañes y Ortega (2002), creemos que la excesiva tendencia al formalismo que tiene este Plan en la Educación General Básica, condicionaba el tratamiento que se le daba a la demostración y a la prueba en el Bachillerato. Se pretendía una introducción muy prematura al formalismo que lógicamente no tenía una continuación proporcional en cursos superiores tratando, por ejemplo, los distintos tipos de demostraciones.

En la **LOGSE**[12] (Ministerio de Educación y Ciencia) podíamos observar como en la introducción correspondiente a la materia de Matemáticas se ponía mucho énfasis en la importancia que se le otorgaba a los procedimientos inductivos, ya que en ellos se basaba la construcción del conocimiento. Los procedimientos deductivos eran considerados como el final de un camino de aproximación a la realidad mediante las Matemáticas. Se proponía una transición gradual a lo largo de los cursos en función de la competencia cognitiva del alumno desde el razonamiento inductivo al deductivo. Esto suponía un avance en relación a Planes anteriores. La idea de demostración y prueba se intuía en otros puntos que se desarrollaban en esta Ley como podían ser las múltiples referencias que se realizaban al razonamiento matemático o el interés que se mostraba en que los alumnos formularan y comprobaran conjeturas.

No obstante, entendemos que esta Ley también tenía carencias. Sigue sin hacer referencia a los distintos tipos de demostraciones que se utilizan en Matemáticas y las referencias que hacía a las demostraciones las ubicaba sobre todo en los bloques de Geometría. Entendemos que no tiene sentido darle un alto rigor a este bloque y no mantener este nivel en otros

[12] MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1990) *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo.* (B.O.E. de 13 de septiembre de 1991)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991) *Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria.* (B.O.E. de 13 de septiembre de 1991)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991) *Real Decreto 1700/1991, de 29 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato.* (B.O.E. de 2 de diciembre de 1991)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992) *Resolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Secundaria Obligatoria, y se establecen orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos.* (B.O.E. de 25 de marzo de 1992)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992) *Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre, por el que se establece el currículo del Bachillerato.* (B.O.E. de 21 de octubre de 1992) cuando es posible. Otra carencia que hemos encontrado en esta Ley es que el concepto de demostración aparece de una manera incoherente. En los *objetivos generales* aparece un objetivo (número 2) en el que se indicaba que el alumno debía utilizar los modos del pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relacionadas con situaciones cotidianas y la resolución de problemas. En los *contenidos* hay varias referencias centradas básicamente en los bloques de Geometría. En las *actitudes* se perseguía, entre otros aspectos, que los alumnos tuvieran curiosidad por investigar relaciones y propiedades de distintas áreas de las Matemáticas. Sin embargo, en los *criterios de evaluación* no aparecía ninguno que estuviera relacionado con las demostraciones, pruebas o similares.

En la **LOE** (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) nos vamos a extender más en los comentarios al ser la Ley de Educación vigente en España en el momento de hacer este trabajo de investigación. Marca como uno de los objetivos generales de la Educación Infantil "el iniciarse en las habilidades lógico-matemáticas (…)" (p. 10), mientras que en la Educación Primaria indica que uno de los objetivos generales será "desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos en la vida cotidiana" (p. 11). Estos objetivos que relacionan el razonamiento, el desarrollo de las competencias básicas y la resolución de problemas no tienen una continuación en los objetivos generales que plantea la Ley para la Educación Secundaria Obligatoria.

Las enseñanzas mínimas que se establecieron para la Educación Secundaria vienen reflejadas en dos Reales Decretos que pasaremos a analizar en lo referente a la materia de Matemáticas y a las cuestiones que afectan a nuestra investigación.

En el Real Decreto en el que se establecen las enseñanzas mínimas para la Educación Secundaria Obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), en la introducción para la materia de Matemáticas hay comentarios como los siguientes:

> Acometer los retos de la sociedad contemporánea supone, además, preparar a los ciudadanos para que adquieran autonomía a la hora de establecer hipótesis y contrastarlas, diseñar estrategias o extrapolar resultados a situaciones análogas. (p. 74)
>
> Para que el aprendizaje sea efectivo, los nuevos conocimientos que se pretende que el alumno construya han de apoyarse en los que ya posee, (…) (p. 74)
>
> Algunos conceptos deben ser abordados desde situaciones preferiblemente intuitivas y cercanas al alumnado para luego ser retomados desde nuevos puntos de vista que añadan elementos de complejidad. La consolidación de los contenidos considerados complejos se realizará de forma gradual y cíclica, planteando situaciones que permitan abordarlos desde perspectivas más amplias o en conexión con nuevos contenidos. (p. 74)
>
> En todos los cursos se ha incluido un bloque de contenidos comunes que constituye el eje transversal vertebrador de los conocimientos matemáticos que abarca. Este bloque hace referencia expresa, entre otros, a un tema básico del currículo: la resolución de problemas. Desde un punto de vista formativo, la resolución de problemas es capaz de activar las capacidades básicas del individuo, como son leer comprensivamente, reflexionar, establecer un plan de trabajo, revisarlo, adaptarlo, generar hipótesis, verificar el ámbito de validez de la solución, etc. pues no en vano es el centro sobre el que gravita la actividad matemática en general. También se introducen en este bloque la capacidad de expresar verbalmente los procesos que se

siguen y la confianza en las propias capacidades para interpretar, valorar y tomar decisiones sobre situaciones que incluyen soporte matemático, poniendo de relieve la importancia de los factores afectivos en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. (p. 74)

Lo importante en estos cursos no son solo las destrezas de cálculo ni los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, (…) (p. 74)

Podemos observar como en estas citas se hace hincapié en técnicas del razonamiento lógico y de la resolución de problemas y se continúa la tendencia de la Ley educativa anterior en la que se proponía un aprendizaje constructivo. También debemos resaltar como marca el objetivo principal de las Matemáticas en la resolución de problemas, acorde con lo que propone el informe PISA y como plantea en este nivel unas *Matemáticas razonadas* en donde no sean protagonistas los procedimientos algorítmicos.

A continuación, en la Ley se van desarrollando las principales áreas de las Matemáticas y se mencionan algunas herramientas que pueden ser útiles en su didáctica. En lo referente a los conceptos que nos interesan, podemos destacar las siguientes citas:

La Geometría, además de definiciones y fórmulas para el cálculo de superficies y volúmenes es, sobre todo, describir y analizar propiedades y relaciones, y clasificar y razonar sobre formas y estructuras geométricas. (p. 75)

En la construcción del conocimiento, los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y en definitiva, para hacer Matemáticas. Estos instrumentos permiten concentrase en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. (p. 75)

Podemos observar como sí que le proporciona importancia al razonamiento en Geometría, pero no así, al menos explícitamente, en otras áreas como la Aritmética, el Álgebra, el Análisis, la Estadística o la Probabilidad. Sí que debemos destacar el papel que le otorgan a las nuevas tecnologías en la Didáctica de las Matemáticas como una herramienta con multitud de posibilidades.

Posteriormente, se indica la contribución que tiene la materia en la adquisición de las ocho competencias básicas: competencia en comunicación lingüística, competencia matemática, competencia en el conocimiento y en la interacción con el mundo físico, tratamiento de la información y competencia digital, competencia social y ciudadana, competencia cultural y artística, competencia para aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal. En cuanto a los términos que nos interesan para nuestra investigación destacamos las siguientes citas:

> Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. Conviene señalar que no todas las formas de enseñar Matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las Matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana. (p. 75)

(…) en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto. (p. 76)

Los propios procesos de resolución de problemas contribuyen de forma especial a fomentar la autonomía e iniciativa personal porque se utilizan para planificar estrategias, asumir retos y contribuyen a convivir con la incertidumbre controlando al mismo tiempo los procesos de toma de decisiones. También, las técnicas heurísticas que desarrolla constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento y consolida la adquisición de destrezas involucradas en la competencia de aprender a aprender tales como la autonomía, la perseverancia, la sistematización, la reflexión crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. (p. 76)

Observamos que se le da mucha importancia a los procedimientos razonados y argumentados y se indica claramente que el grado de adquisición de la competencia matemática depende en gran medida de la forma de enseñar Matemáticas. Todas estas ideas que hemos ido resaltando se deberían plasmar en los objetivos, contenidos y criterios de evaluación que se establecen para los diferentes niveles de la Educación Secundaria Obligatoria. Entre los once objetivos generales que se establecen para el Educación Secundaria Obligatoria, destacaremos los dos siguientes (números 1 y 8):

Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana. (p. 76)

Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado. (p. 76)

Observamos que en estos dos objetivos generales se relacionan dos de los principales procedimientos de nuestra investigación, por un lado el pensamiento reflexivo y argumentativo, y por otro la resolución de problemas.

En cuanto a los contenidos, hemos seleccionado de cada curso los que consideramos que se encuentran relacionados con los aspectos que estamos analizando en la investigación. Hay uno que está ubicado en el bloque denominado *contenidos comunes* y que se repite en todos los cursos:

Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas. (pp. 76, 78, 79, 81, 83)

De los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, hemos seleccionado los siguientes contenidos:

En 1º ESO:

Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida. (p. 76)

Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas. (p. 76)

En 2º ESO:

Utilización de estrategias y técnicas en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la división del problema en partes, y comprobación de la solución obtenida. (p. 78)

Descripción verbal de procedimientos de resolución de problemas utilizando términos adecuados. (p. 78)

En 3º ESO:

Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada. (p. 79)

Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa. (p. 79)

En 4º ESO (opciones A y B):

Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización. (pp. 81, 83)

Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación. (pp. 81, 83)

Interpretación de mensajes que contengan argumentaciones o informaciones de carácter cuantitativo o sobre elementos o relaciones espaciales. (pp. 81, 83)

Podemos observar como las técnicas argumentativas y de resolución de problemas se encuentran escalonadas a lo largo de los diferentes cursos. Se echa de menos que haya también un escalonamiento entre los contenidos de los alumnos de 4º ESO de la opción A y B ya que el perfil de los alumnos de estos cursos es muy diferente.

En cuanto a los criterios de evaluación que se establecen para cada curso están muy relacionados con los contenidos anteriormente citados. Hemos seleccionado los siguientes:

En 1º ESO:

> Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución. (Número 8, p. 78)

En 2º ESO:

> Utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error sistemático, la división del problema en partes, así como la comprobación de la coherencia de la solución obtenida, y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución. (Número 7, p. 79)

En 3º ESO:

> Planificar y utilizar estrategias y técnicas de resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines y comprobar el ajuste de la solución a la situación planteada y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas, e informaciones que incorporen

elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello. (Número 8, p. 81)

En 4º ESO (opción A):

> Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias diversas y útiles para la resolución de problemas, y expresar verbalmente con precisión, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello. (Número 9, p. 82)

En 4º ESO (opción B):

> Planificar y utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización, y expresar verbalmente, con precisión y rigor, razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos, valorando la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático para ello. (Número 7, p. 84)

Podemos observar como los criterios de evaluación persiguen valorar la forma que tiene un alumno de afrontar un problema acorde a su nivel, evaluándose todas las fases de la resolución. Siguen, como no podía ser de otra forma, las pautas marcadas por los contenidos de cada curso y que en este caso sí que existe una exigencia mayor en el criterio de evaluación da las Matemáticas B de 4º ESO ya que menciona procedimientos como la emisión y la justificación de hipótesis o la generalización, que no menciona para los alumnos de Matemáticas A del mismo curso.

Si analizamos el Real Decreto (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b) en el que se establecen las enseñanzas mínimas para el Bachillerato observamos que se divide en dos partes: una para las Matemáticas I y II, y otra para las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II.

En la introducción que se realiza para las Matemáticas I y II se menciona lo siguiente:

> Participar en la adquisición del conocimiento matemático consiste en el dominio de su “forma de hacer”. Este “saber hacer Matemáticas” es un proceso laborioso que comienza por una intensa actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones previas necesarias para la formalización. A menudo, los aspectos conceptuales no son más que medios para la práctica de estrategias, para incitar a la exploración, la formulación de conjeturas, el intercambio de ideas y la renovación de los conceptos ya adquiridos. (p. 68)
>
> No se trata de que los estudiantes posean muchas herramientas matemáticas, sino las estrictamente necesarias y que las manejen con destreza y oportunidad, facilitándoles las nuevas formulas e identidades para su elección y uso. Nada hay más alejado del “*pensar matemáticamente*” que una memorización de igualdades cuyo significado se desconoce, incluso aunque se apliquen adecuadamente en ejercicios de cálculo. (p. 68)
>
> Las definiciones formales, las demostraciones (reducción al absurdo, contraejemplos) y los encadenamientos lógicos (implicación, equivalencia) dan validez a las intuiciones y confieren solidez a las técnicas aplicadas. Sin embargo, este es el primer momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad al lenguaje formal, por lo que el aprendizaje debe ser equilibrado y gradual. (p. 69)

Observamos como en estos cursos predominan unas Matemáticas donde la formalización y el rigor poseen una gran importancia, desechando la idea de unas Matemáticas algorítmicas en donde el alumno aplique simples mecanismos para resolver ejercicios.

Vemos como se sigue pretendiendo unas Matemáticas inductivas en donde a partir de los conceptos el alumno explore para formular conjetura y demostrarlas con cierto rigor. A destacar también que se habla de métodos de demostración como la reducción al absurdo, cuestión esta que no aparecía en currículos anteriores.

Si vemos la introducción que se realiza en el Real Decreto de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II observamos grandes diferencias en la idea de las Matemáticas que se proponen. Destacamos la siguiente cita:

> En este contexto, la fuerte abstracción simbólica, el rigor sintáctico y la exigencia probatoria que definen el saber matemático, deben tener en esta materia una relativa presencia. (p. 94)

En estas Matemáticas el objetivo principal es el de obtener las herramientas necesarias para resolver problemas de distintos tipos, dejando notablemente de lado aspectos como el rigor o la formalización.

Entendemos que esta distinción es correcta ya que las Matemáticas que precisan los alumnos y sus necesidades futuras van a ser muy distintas en ambos casos. Observemos que en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II no se excluye totalmente el rigor. Lo que se dice es que debe tener una presencia relativa y que para ciertos alumnos que cursan esta materia puede ser interesante aspectos como por ejemplo la argumentación de la fórmula de los intervalos de confianza para la media poblacional o el concepto de derivada mediante el de límite de una función en un punto.

Estas ideas se plasman en los objetivos que se establecen para la etapa en ambas modalidades. Así, para las Matemáticas I y II destacamos los siguientes objetivos:

> Considerar las argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando

> una actitud flexible, abierta y critica ante otros juicios y razonamientos. (Número 2, p. 69)
>
> Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación, aplicación de la inducción y deducción, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos. (Número 3, p. 69)
>
> Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, encadenar coherentemente los argumentos, comunicarse con eficacia y precisión, detectar incorrecciones lógicas y cuestionar aseveraciones carentes de rigor científico. (Número 6, p. 69)

Sin embargo, en las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II, aunque la formalización y procesos argumentativos no desaparecen por completo, sí que se sitúan en un nivel de exigencia inferior. Lo podemos comprobar con los siguientes objetivos generales que se establecen en el Real Decreto:

> Adoptar actitudes propias de la actividad matemática como la visión analítica o la necesidad de verificación. Asumir la precisión como un criterio subordinado al contexto, las apreciaciones intuitivas como un argumento a contrastar y la apertura a nuevas ideas como un reto. (Número 2, p. 95)
>
> Formular hipótesis, diseñar, utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas que permitan enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia, confianza en sí mismo y creatividad. (Número 4, p. 95)

> Utilizar un discurso racional como método para abordar los problemas: justificar procedimientos, encadenar una correcta línea argumental, aportar rigor a los razonamientos y detectar inconsistencias lógicas. (Número 5, p. 95)

Resumiendo, en esta Ley consideramos que podemos destacar positivamente:

1. Se hace en todos los cursos referencias al razonamiento matemático.
2. Continúa con la idea de la LOGSE de promover unas matemáticas constructivas e inductivas.
3. Secuencia adecuadamente los procedimientos de resolución de problemas que se deben utilizar en cada curso.
4. Se evalúan todas las fases de la resolución de problemas.
5. Otorga mucha importancia a las circunstancias personales de cada alumno, proponiendo una metodología individualizada.
6. Es consciente del papel que pueden desempeñar las nuevas tecnologías en los procedimientos como los de verificación, argumentación, emisión y justificación de hipótesis, etc.

Y, en cambio, consideramos que tiene los siguientes aspectos mejorables:

1. No se concreta en las demostraciones o las argumentaciones que podrían ser adecuadas para cada curso.
2. Se sigue sin hacer prácticamente referencia a los diferentes métodos de demostración.
3. Existen algunas incoherencias entre los contenidos, objetivos y criterios de evaluación que se establecen en algunos cursos.

Recientemente, en concreto el pasado 10 de diciembre de 2013, se publicó en el BOE la nueva Ley de Educación denominada como **LOMCE** (Ministerio de Educación, Cultura y

Deporte, 2013). Desde su nacimiento es controvertida en el sentido de que únicamente ha sido apoyada por un partido político, el Partido Popular y el resto de grupos han firmado un acuerdo para derogarla en el momento que dicho partido pierda la mayoría absoluta que ostenta en esta legislatura. No es objeto de esta investigación valorar a esta Ley. Sí que lo es valorar como trata a las Matemáticas en sus diversos factores didácticos, en especial sobre los que se ciñe esta investigación. Por desgracia, cuando se finalizó esta investigación no se habían publicado los currículos específicos de cada materia, con lo que no podemos valorar si esta Ley confiere a los procesos de demostración y argumentación más peso que las anteriores, ni si lo hace de una manera más explícita curso por curso como proponíamos. No obstante, sí que parece que con esta Ley las Matemáticas ganarán peso en el currículo escolar, pero aún no sabemos de manera explícita de qué forma.

1.8.4. En el currículum actual de la Comunidad de Madrid

En el artículo 6.2 de la LOE viene indicado que en España es competencia del Gobierno fijar las enseñanzas mínimas de cada una de las materias, es decir, los aspectos básicos de sus objetivos, competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación, con el fin de garantizar una enseñanza común a todo el alumnado y la validez de los títulos en todo el territorio español. Posteriormente, las administraciones educativas competentes establecerán los currículos de las diferentes enseñanzas reguladas por la Ley que deberán incluir dichas enseñanzas mínimas.

A nivel autonómico, nosotros nos vamos a centrar en la Comunidad de Madrid. El currículo en donde se fijan las enseñanzas mínimas para las materias de la Educación Secundaria viene reflejado en tres Decretos (Consejería de Educación de la Comunidad de

Madrid, 2007a, 2007b y 2008). Si analizamos estos Decretos, las diferencias con los Reales Decretos de referencia son puntuales y no afectan, salvo en pequeños matices sin importancia, a los términos relevantes de la investigación. Por lo tanto, mantiene la idea de buscar unas Matemáticas no solo instrumentales, sino que permitan al alumno desarrollar sus capacidades en el razonamiento y la argumentación. Continúa situando a la resolución de problemas como el objetivo primordial de las Matemáticas, haciendo referencia a diversos procedimientos que se utilizan en las distintas fases y destaca el uso de las nuevas tecnologías en el aula para favorecer la adquisición de ciertos procedimientos y contenidos. Al igual que en el Real Decreto, cuando analiza los diferentes bloques matemáticos, parece, a tenor de lo escrito, que los procedimientos argumentativos y de razonamiento se utilizan únicamente en el bloque de Geometría, cuando no es así.

Debemos destacar negativamente que esta Comunidad Autónoma oferta en el curso de 4º ESO una asignatura optativa denominada Ampliación de Matemáticas. Consideramos que esta sería una asignatura ideal, tanto por su carácter como por el nivel en la que se encuentra, para tratar diversas demostraciones y métodos de demostración. Sin embargo, si observamos el currículo de la asignatura (Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, 2007b), vemos que no hay una sola referencia a estas cuestiones.

En esta Comunidad Autónoma, desde el año 2003 se realizan pruebas de diagnóstico en la Educación Primaria y desde el año 2007 en la Educación Secundaria. Con el objetivo de mejorar los resultados en estas pruebas, la Comunidad de Madrid estableció unos estándares o conocimientos esenciales para la asignatura de Matemáticas en Educación Primaria y en los tres primeros cursos de la Educación Secundaria. Estos estándares deben entenderse como una concreción del currículo en cuanto a los conocimientos que el alumno debe adquirir y las destrezas que debe dominar en cada momento de su trayectoria académica y deben utilizarse como referencia en la elaboración, adaptación y mejora de las programaciones didácticas.

Si se leen con detenimiento estos estándares, observamos como positivo que los contenidos que se trabajan en la asignatura los dirige fundamentalmente hacia el objetivo general de resolver problemas matemáticos relacionados con situaciones de la vida cotidiana, tal y como recomiendan los informes PISA. En cambio, consideramos que es muy negativo que dentro de estos estándares no se haga referencia prácticamente a los procesos de razonamiento y argumentación. Solo hemos encontrado cuatro, tres en 1º ESO y uno en 2º ESO. Son los siguientes (Números 67, 84, 92 y 22):

> Hallar la solución de problemas elementales cuando se reducen a plantear y resolver ecuaciones como las del apartado anterior y comprobar que dicha solución verifica la ecuación. (p. 3)
>
> Justificar que la suma de los ángulos de un triángulo es siempre 180º. (p. 3)
>
> Demostrar, utilizando triángulos, que la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360º y utilizar el resultado para resolver problemas geométricos. (p. 3)
>
> Justificar por qué las ecuaciones por qué las ecuaciones $x^2 = a$, con $a < 0$, no tienen solución. (p. 4)

Entendemos que estos y otros muchos procedimientos relacionados con la justificación, la argumentación y la verificación deberían formar parte de los procedimientos que un alumno debe trabajar en todos los cursos, adaptando su dificultad al curso y al alumno y que quizás, como se hizo al establecer el currículo, deberían haberse incluido en un *bloque de destrezas comunes* a todos los cursos.

Parece una contradicción que en la introducción que se hace de las Matemáticas en los Decretos en los que se establece el currículo, se le dé importancia a la forma de enseñar

Matemáticas, remarcando procesos como la argumentación o la verificación y que en los estándares estos procesos no tengan un papel al menos más visible.

No obstante, y al ser los estándares una concreción del currículo, que no se incluyan estas cuestiones no implica en absoluto que no se puedan trabajar en el aula si se considera oportuno.

1.9. Modelos y estrategias para la resolución de problemas

Dado que uno de los objetivos principales de esta investigación es saber cómo influye en las capacidades para resolver problemas de los alumnos una didáctica en la que un factor principal de ella sean las demostraciones, argumentaciones y justificaciones, hemos considerado oportuno introducir un punto en donde aclaremos lo que se entiende por problema matemático y desarrollemos algunos de los métodos de resolución de problemas propuestos por ciertos investigadores.

1.9.1. Concepto de problema matemático

Para valorar la potencia y la utilidad de la asignatura de Matemáticas en el mundo que nos rodea, debemos conseguir que los alumnos alcancen unas destrezas elementales en la resolución de problemas matemáticos. Todos los contenidos, procedimientos u objetivos que se proponen en los currículos oficiales o en las programaciones de aula van dirigidos a que los alumnos sepan afrontar con ciertas garantías problemas acordes a su nivel. Como indicaba De Guzmán (1984):

> Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las Matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas matemáticos y no matemáticos. ¿De qué les puede servir hacer un hueco en su mente en que quepan unos cuantos teoremas y propiedades relativas a entes con poco significado si luego van a dejarlos allí herméticamente emparedados? A la resolución de problemas se le ha llamado, con razón, el corazón de las matemáticas, pues ahí es donde se puede adquirir el

> verdadero sabor que ha traído y atrae a los matemáticos de todas las épocas. Del enfrentamiento con problemas adecuados es de donde pueden resultar motivaciones, actitudes, hábitos, ideas para el desarrollo de herramientas, en una palabra, la vida propia de las Matemáticas. (p. 11)

El objetivo principal de este punto va a ser clarificar el concepto de problema matemático. Según la Real Academia Española, un problema es el planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Esta definición no aclara en exceso lo que se entiende por problema en Matemáticas y vamos a tener que precisarla algo más.

El concepto de problema matemático no es sencillo ya que, como indicaba Schoenfeld (1985), es algo relativo y no propiamente inherente a una actividad matemática concreta. Siguiendo esta idea indicaremos a continuación algunas definiciones de problema matemático que nos han proporcionado diferentes autores:

> Designa una situación que plantea una situación matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto (…) porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión, y debe, por tanto, buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc. para hacer frente a una situación nueva. Es pues, un concepto relativo al sujeto que intenta resolverlo y al contexto en el que se plantea la cuestión. (Callejo, 1994, p. 24)

> Un problema es, en algún sentido, una situación nueva o diferente de lo ya aprendido, que requiere utilizar de modo estratégico técnicas ya conocidas. (Pozo, 1994, p. 18)

> El concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) de conocimiento matemático a situaciones no familiares, la conciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento. (Carrillo, 1998, p. 87)

Como hemos visto en los tres casos, una determinada situación puede adquirir la calificación de problema en función de la persona a la que vaya dirigida. Es interesante ver qué diferencias hay entre lo que se entiende en Matemáticas por ejercicio y por problema. A este respecto, Colera y Oliveira (2009, p. 8) realizaron las siguientes distinciones.

Ejercicio	**Problema**
1. Siempre está claro lo que se pide. 2. Inmediatamente se ve el camino para solucionarlo. 3. Se puede resolver aplicando unos conocimientos y mecanismos que se han aprendido con anterioridad. 4. Se sabe aproximadamente el tiempo que nos llevará resolverlo. 5. Suele ser de un cierto nivel, siendo trivial para gente de nivel superior y casi imposible para gente de nivel inferior.	1. A veces no está clara la pregunta. 2. De entrada se desconoce la manera de afrontarlo. 3. Para su resolución se requiere profundizar, reflexionar y analizar. 4. Se desconoce a priori el tiempo que nos llevará resolverlo. 5. Suele ser factible e interesante para personas de niveles diferentes.

Así, por ejemplo, la multiplicación de 12 x 13 es claramente un ejercicio que se puede plantear en 3º o 4º de Educación Primaria, siendo el ejercicio en cuestión imposible en condiciones normales para un alumno de nivel inferior y siendo muy sencillo para un alumno de nivel superior. Sin embargo, si planteamos la situación de cómo podemos construir cuatro triángulos equiláteros de lado un palillo utilizando únicamente seis palillos, es claro que la cuestión requiere de reflexión y que abarca a un abanico más amplio de alumnos que el ejercicio anterior. Esto sí podría ser considerado un problema para determinado alumnos.

Se debe destacar que un problema tiene una componente muy especial de reto personal, por lo que tiene mucha importancia la forma en que se presente para que se asuman como tal. Este hecho es muy importante en la didáctica ya que del contexto en el que se presentan los contenidos de la asignatura depende en gran medida la motivación que tengan los alumnos.

Una vez que hemos aclarado lo que se entiende por problema matemático hay que decir que dentro de los problemas, los hay mejores y los hay peores. Vamos a ver una serie de características que debe cumplir un buen problema según Borrás y Carrillo (1984):

1. No debe ser una situación con trampas o acertijos ya que el abuso de estas situaciones hace que el alumno la utilice como excusa en situaciones que no sabe cómo resolver.
2. El interés matemático es propio del problema, aunque no tenga aplicaciones. Esto no quiere decir que un buen problema no debe tener aplicaciones, simplemente que no es necesario. Obviamente, si además de tener interés por los procedimientos que se utilizan para su resolución, tiene interés por su aplicación en otras teorías o en situaciones reales, la categoría del problema sería superior.
3. Representan un desafío a las cualidades que debería tener un matemático, si bien no resulta para nada sencillo enumerar esas cualidades.
4. Una vez resuelto, suele ser propuesto a otras personas para que intenten resolverlo.
5. En una primera impresión, no nos deja bloqueados sin tener la más mínima idea de cómo afrontarlo. Es recomendable que tenga una solución parcial sencilla e

incluso inmediata. Desde un punto de vista psicológico, solo nos planteamos aquello que somos capaces, o al menos creemos que somos capaces, de resolver.

6. La componente del placer es importantísima en cualquier desafío intelectual ya que ayuda a que desafíos similares sean asumidos con interés. La resolución de un buen problema lleva consigo esta componente.

1.9.2. La metodología de Polya

Una vez que ya sabemos lo que se entiende por problema matemático, vamos a ver algunos de los diferentes modelos y estrategias que hay para resolverlos. Obviamente, la resolución de problemas no es algo algorítmico. No bastará con aprenderse unas cuantas reglas para saber resolver cualquier problema que se nos pueda plantear. Tampoco hay que esperar que nos llegue de manera divina lo que habitualmente llamamos "*idea feliz*". Normalmente, esa idea feliz no llega por casualidad. Llega porque estamos entrenados en una forma adecuada de razonar. A eso es lo que nos van a ayudar los modelos y estrategias que vamos a ver en este punto y siguientes, a organizar nuestros pensamientos de forma que saquemos todo nuestro potencial para poder resolver determinados problemas.

La resolución de problemas en el aula es una actividad fundamental. Está claro que siempre hay alumnos con más capacidad que otros a la hora de abordar un problema. No obstante, suele darse el caso de que los alumnos con mayor capacidad a la hora de resolver problemas son aquellos que han interiorizado una serie de mecanismos y métodos (procesos heurísticos) que les suelen servir para resolver determinadas situaciones. Es por ello que todos los alumnos deberían conocer y entrenar algunos de los métodos y estrategias que hay en la resolución de problemas ya que, para muchos de los alumnos con los que trabajamos, de este aspecto dependerá su éxito a la hora de resolver problemas y estar motivados en la asignatura. Esta idea se ve en la siguiente cita de Polya (1945):

> Solo los grandes descubrimientos permiten resolver los grandes problemas. Hay, en la solución de todo problema, un poco de descubrimiento. Si se resuelve un problema y llega a excitar nuestra curiosidad, este género de experiencia, a una determinada edad, puede determinar el gusto por el trabajo intelectual y dejar, tanto en el espíritu como en el carácter, una huella que durará toda una vida. (Prefacio)

Diferentes autores e instituciones han elaborado diferentes métodos para resolver problemas, todos ellos con una línea común, pero cada una con sus propias particularidades. Anteriormente, hemos visto un método que proponía en informe PISA (ver punto 1.8.2). Dentro de los diferentes métodos de resolver problemas destaca el que elaboró el ya mencionado matemático y educador Polya (1945) que fue utilizado como punto de arranque de estudios posteriores. En él, se divide el proceso de resolver un problema en cuatro etapas:

Etapa I: Comprensión del problema.

Esta fase es primordial y hay que hacer mucho hincapié en ella con nuestros alumnos. En muchas ocasiones se han detectado a alumnos cuyos malos resultados en Matemáticas se deben una mala comprensión lectora o simplemente que no tratan esta fase con la importancia que tiene. Se identifican por abordar los problemas operando los datos que aparecen en él sin ningún criterio. Por ello es muy importante resaltar que en esta etapa:

- Se debe comprender el enunciado.
- Conocer y organizar correctamente los datos que nos proporciona el problema.

- Saber las incógnitas por las que nos pregunta el problema y relacionarlas con los datos que tenemos.

Etapa II: Concepción de un plan.

A partir de la relación que hayamos establecido entre los datos y las incógnitas en la primera fase y utilizando las diferentes estrategias heurísticas de resolución de problemas que veremos a continuación, se establecerá un plan que intente resolver el problema. Esta fase es la más complicada de afrontar ya que no depende únicamente de lo racional, al tener una componente muy importante de creatividad e imaginación.

Algunas de las estrategias que propone Polya para resolver un problema son:

- Buscar un problema semejante ya resuelto.
- Buscar resultados o teoremas que puedan ser útiles en la resolución del problema.
- Deducir algún elemento de los datos que nos pueda ser útil.
- Verificar si estamos empleando todos los datos o si hay datos que no son necesarios para la resolución del problema.
- Enunciar el problema de una forma equivalente para ver si de este modo es más fácil resolverlo.
- Resolver un problema similar pero más accesible, para ver si a partir de esa solución se puede llegar a la del problema en cuestión.

Etapa III: Ejecución del plan.

En esta fase se trata de realizar los procedimientos y operaciones necesarios para llevar a cabo el plan elaborado, comprobando la corrección de cada uno de los pasos. Hay que ser flexible y si se observa que el plan no es válido, se debe volver a la fase anterior para modificarlo de cara a obtener el resultado esperado.

Etapa IV: Comprobación de la solución obtenida.

Esta fase es omitida en algunos métodos de resolución de problemas, pero Polya insistió mucho en su importancia. Se debe examinar todo el camino que hemos seguido para resolver el problema de cara a comprobar la corrección de todos los pasos, ver si la solución que hemos hallado es válida, comprobar si es la única que hay e incluso mejorar la resolución que hemos realizado u obtener una generalización del problema.

1.9.3. Los trabajos de Schoenfeld

Tras leer las ideas de Polya y realizar trabajos experimentales con estudiantes en la década de los 80, el matemático Schoenfeld (1989) indicó que cuando se quiere trabajar utilizando la resolución de problemas como herramienta didáctica hay que tener en cuenta situaciones más allá de las propias heurísticas, y no tanto porque estas no sean validas, sino porque no completan todo el proceso.

En su análisis (Schoenfeld, 1992) identifica cuatro factores que consideró relevantes en la resolución de problemas:

1. **Recursos cognitivos**. Son los conocimientos matemáticos generales que posee un individuo. Aunque su importancia es obvia, se ha demostrado que no por poseer grandes conocimientos matemáticos se es un experto en la resolución de problemas, ya que para resolver problemas se requiere dominar algunas técnicas y estrategias. En este aspecto, Schoenfeld habla también de los *recursos defectuosos* que puede tener un individuo y que le dificultan la tarea de resolver problemas. Pueden ser tales como errores en procedimientos, aprendizajes erróneos o una fórmula incorrecta. Por ejemplo, un alumno puede pensar que si $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$, entonces $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, siendo esta segunda igualdad como sabemos falsa. Es labor del profesor identificar estos recursos defectuosos lo antes posible para poner los medios necesario para que se transformen en recursos de calidad.
2. **Heurística**. Es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que domina un individuo y que está capacitado para aplicar. Schoenfeld encontró una problemática con las heurísticas de los trabajos de Polya ya que cada problema requiere una heurística particular. Según él, las heurísticas de Polya son muy generales y de difícil implantación.
3. **Control o metacognición**. Es la capacidad que tiene un individuo para utilizar lo que sabe para lograr un objetivo que se ha propuesto. En situaciones curriculares rutinarias, quizás este factor no sea tan decisivo debido a la mecanización de los problemas (o ejercicios) con los que se trabaja, pero cuando se amplían los dominios de un problema, cosa en Matemáticas bastante habitual, este factor pasa a ser muy importante para muchos alumnos. De hecho es muy habitual ver a alumnos que trabajan correctamente a lo largo de un periodo de tiempo y que,

cuando llega la fecha del examen, su rendimiento es mucho peor de lo esperado debido principalmente a este factor. Algunas acciones que involucran el control son:

a) Entender perfectamente el problema.
b) Considerar varias formas de solucionar el problema y seleccionar la que se considere óptima.
c) Monitorear el proceso y decidir cuándo abandonar un camino para buscar otro nuevo.
d) Estar dispuesto a cambiar el plan que se va a ejecutar para solucionar el problemas si se observa que no es el adecuado.
e) Revisar el proceso de resolución.

Algunas actividades que según Schoenfeld pueden desarrollar las habilidades en los individuos para el control son:

a) Asegurarse de que los alumnos conocen el vocabulario que aparece en el problema.
b) Retomar las resoluciones (correctas e incorrectas) que hicieron los alumnos de los problemas propuestas para revisar errores los errores cometidos y evitar que se vuelvan a cometer, y recalcar las ideas interesantes que se hayan llevado a cabo.
c) Discutir las soluciones en grupo, aportando ideas y comentándolas.
d) Tomar las equivocaciones como modelo, es decir, un docente debe alguna vez de forma consciente iniciar la resolución de un problema por método que sabe que va a fracasar y decidir en un momento dado cambiar de plan.

e) Resolver problemas en pequeños grupos heterogéneos de cara a fomentar el aprendizaje colaborativo. De esta forma cada uno aprende de la forma en que los demás controlan su trabajo.

4. **Creencias**. Las creencias en Matemáticas inciden de manera notable en la forma en que los profesores y los alumnos resuelven los problemas, el modo de aprender Matemáticas, etc. Las creencias sobre cómo hacer Matemáticas, qué significan y qué enseñar en los centro educativos se adquieren a través de los años observando, escuchando y practicando. De este modo, por ejemplo, habrá alumnos que asocien erróneamente las Matemáticas con memorizar procedimientos, cuando seguro que ningún profesor le ha comentado que esa es la forma de trabajar en Matemáticas. La creencia con las que más trabajó Schoenfeld fue la referente a cómo perciben tanto los profesores, como los alumnos la argumentación matemática formal al resolver un problema. Mientras un matemático lo usa como una herramienta más al razonar y argumentar, un estudiante la usa en muy contadas ocasiones. Según Schoenfeld, la argumentación matemática la usa un estudiante bajo dos circunstancias:
   a) Para confirmar algo que a simple vista resulta obvio y que por tanto su demostración parece innecesaria.
   b) Para verificar que algo, que no es tan obvio, es cierto porque lo dice el profesor.

Dentro de todas las creencias, Schoenfeld hace referencias a las *creencias del profesor y del estudiante*, que determinan lo que ocurre en el aula, pero indica que todas ellas se encuentran inmersas en un marco más general que es lo que denomina *creencias sociales*. Sobre las creencias que suelen tener los estudiantes acerca de las Matemáticas, Schoenfeld elaboró la siguiente lista:

a) Los problemas matemáticos tienen una única solución.
b) La única manera de resolver un problema es la propuesta por el profesor.
c) Los estudiantes corrientes no pueden entender las Matemáticas. Hay que memorizarlas y aplicar los procedimientos mecánicamente.
d) Las Matemáticas no se trabajan en grupo, solo individualmente.
e) Los estudiantes que han entendido las Matemáticas, resolverán cualquier problema en menos de cinco minutos.
f) Las Matemáticas no tienen aplicaciones a la vida real.

Está claro que todas estas creencias son obstáculos en el buen quehacer matemático, aunque también las hay positivas que hacen que la motivación ante retos intelectuales no decaiga en los momentos complicados.

Sobre las creencias de los profesores, indica que están condicionadas, sobre todo en el caso de los profesores nóveles, por la forma en que recibieron clase tanto en el instituto como en la universidad.

Sobre las creencias sociales, estudios realizados en Estados Unidos han indicado que la creencia más extendida es que las Matemáticas se aprenden de forma espontánea, mientras que por ejemplo en Japón es que es que la persona adquiere el conocimiento matemático poco a poco mediante el esfuerzo personal. Esto hace que los japoneses dediquen más horas de estudio a las Matemáticas que los estadounidenses, para los que no tendría sentido ese esfuerzo. Estas diferencias culturales afectan de por sí a la didáctica de la Matemáticas y a la forma de afrontar problemas.

Además, Schoenfeld también elaboró una lista de las estrategias que según él más se utilizan en la resolución de problemas:

1. **Análisis**.

   a) Dibujar un diagrama en los casos en que sea posible.

   b) Examinar casos especiales:

      - Dar valores para familiarizarse con el problema y ver si hay un patrón.
      - Analizar casos límite.
      - Analizar los extremos de los intervalos.

   c) Intentar simplificar el problema usando simetría o argumentos en los que no se pierda generalidad.

2. **Exploración.**

   a) Considerar problemas equivalentes.

      - Reemplazando condiciones por otras equivalentes.
      - Reordenando los datos del problema.
      - Introduciendo variables auxiliares.
      - Reformulando el problema mediante cambios de perspectiva, de argumentación o partiendo de una solución inicial y retrocediendo.

   b) Modificar ligeramente alguna condición del problema.

      - Intentando alcanzar soluciones parciales.
      - Relajando una condición para posteriormente volver a imponerla.
      - Descomponiendo el problema en varios casos y trabajar cada uno por separado.

   c) Considerar problemas modificados sustancialmente.

      - Construyendo un problema análogo, pero con menos variables.

- Dejando todas las variables fijas salvo una, para valorar su impacto en el problema.
- Aprovechando la información que nos proporciones problemas similares.

3. **Verificación de la solución**.

a) Pruebas específicas.

- ¿Utiliza todos los datos? (en ocasiones no es necesario)
- ¿Es una solución razonable comparándola con las predicciones iniciales?
- ¿Es razonable si le aplicamos pruebas de simetría, análisis dimensional o escala?

b) Pruebas generales.

- ¿Se pude obtener la solución por otro procedimiento?
- ¿Verifica la solución los casos especiales o límites?
- ¿Puede utilizarse para establecer un resultado general?

1.9.4. El modelo de De Guzmán

No se puede cerrar este punto sin mencionar al que para muchos ha sido el matemático español que más se ha preocupado por la didáctica de las Matemáticas. Estamos hablando de De Guzmán y dentro de sus estudios se encontró también los métodos de resolución de problemas. Su método (De Guzmán, 2004) lo dividió en cuatro fases:

Fase I: Familiarización con el problema.

Al afrontar un problema, debemos hacerlo de forma pausada, con tranquilidad y sin precipitarnos. Debemos entender y organizar los datos que nos proporciona el problema con el objetivo de entenderlo perfectamente.

Fase II: Búsqueda de estrategias.

Una vez que se ha entendido el problema, el siguiente paso sería buscar estrategias para resolverlo. Entre las que proponía De Guzmán (2006) podemos destacar:

1. Una buena organización de los datos del problema (tablas, gráficos, esquemas, etc.) nos puede ayudar a su resolución.
2. Realizar pruebas ensayo-error mediante las cuales podamos observar patrones que nos puedan llevar a la solución.
3. En ocasiones un problema se resuelve con la estrategia denominada razonamiento inverso, que consiste en suponer el problema solucionado e ir retrocediendo hasta llegar a los datos iniciales.
4. Cuando el vemos difícil encontrar un camino entre los datos del problema y la solución, en ocasiones nos puede ayudar descomponer el problema en problemas más simples.
5. Si simplificamos los datos o las condiciones del problema se pueden encontrar regularidades que pueden ser útiles para encontrar la solución al problema.
6. Cuando lo que intentamos es demostrar la falsedad de un enunciado, la estrategia más sencilla es la de buscar un contraejemplo que no cumpla el enunciado.

Fase III: Ejecutar la estrategia.

Tras revisar las estrategias y elegir un método de resolución del problema, el siguiente paso es llevar a cabo ese método con confianza y sin prisas. Si cuando lo estamos desarrollando vemos que es erróneo, debemos volver a la fase anterior y elaborar otra estrategia de resolución.

Fase IV: Revisar el proceso y obtener conclusiones.

Para De Guzmán esta fase era realmente importante. Debemos revisar todo el proceso y extraer conclusiones que nos puedan servir para futuros problemas.

1.10. Influencia de las demostraciones y la resolución de problemas en el desarrollo de las Matemáticas

Desde un punto de vista histórico, tanto los retos que han supuesto la realización de diferentes demostraciones o la resolución de algunos problemas han sido y, de hecho, siguen siendo, la mayor fuente de inspiración para la obtención de nuevos conocimientos y técnicas matemáticas.

Lo que haremos en este punto será citar algunos momentos claves en la historia de las Matemáticas en los que la resolución de un determinado problema o la realización de una determinada demostración supusieron una evolución en el desarrollo de esta ciencia.

Si nos remontamos al siglo V a.C. los pensadores griegos de la época, entre los que podemos destacar a Anaxágoras e Hipócrates, propusieron una multitud de problemas de índole geométrica. De todos ellos han destacado tres por su perduración a lo largo del tiempo. Se conocen como **los tres problemas clásicos** y son la *cuadratura del círculo*, *la trisección del ángulo* y *la duplicación del cubo*. Los enunciados de estos problemas son los siguientes:

- **Cuadratura de un círculo**. Dado un círculo, construir únicamente con regla y compás un cuadrado con igual área que el círculo inicial.
- **Trisección de un ángulo**. Dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales utilizando únicamente regla y compás.
- **Duplicación de un cubo**. Dado un cubo, construir utilizando únicamente regla y compás, otro cubo que duplique el volumen del cubo inicial.

El estudio de estos tres problemas ha sido abordado a lo largo de la historia desde técnicas muy diversas, cuestión esta que ha contribuido al desarrollo de las Matemáticas. No fue hasta el año 1837 cuando Wantzel demostró que los problemas de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo no tenían solución tal y como estaban planteados originalmente. El problema que más se resintió fue el de la cuadratura del círculo. Se intentó resolver desde las técnicas elementales de la Geometría Plana, utilizando técnicas algebraicas, herramientas trigonométricas, series infinitas, etc. Finalmente fue resuelto utilizando las técnicas que nos proporcionaban el Análisis Matemático. Fue Lindemann el que probó que este problema también era irresoluble utilizando únicamente la regla y compás. Para ello tuvo que probar que el número π es trascendente, es decir, que no es raíz de ningún polinomio con coeficientes enteros. Esto nos da una idea de cómo la resolución de un problema geométrico con una apariencia sencilla debe requerir del desarrollo de otro tipos de herramientas para su resolución, fuera incluso de la propia área en la que se encuadró el problema original.

A pesar de que estos problemas no tienen solución tal y como están planteados, los propios griegos de la época los resolvieron pero sin la restricción de utilizar únicamente la regla y el compás, creando para ello curvas que, aparte de resolver parcialmente estos problemas, ayudaron a desarrollar las Matemáticas y otras ramas científicas.

Un ejemplo muy claro de esto lo encontramos en la espiral de Arquímedes, que es el lugar geométrico de un punto moviéndose con una velocidad constante sobre una semirrecta que gira sobre el punto de origen a una velocidad constante.

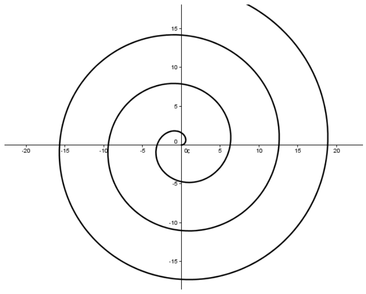


Figura 5. **Espiral de Arquímedes.**

Esta espiral tiene como característica que la separación entre las distintas vueltas es constante, no como sucede en la otra espiral famosa, la espiral logarítmica, en donde las separaciones entre las vueltas forman una progresión geométrica.

Utilizando las propiedades de esta espiral se puede trisectar un ángulo y cuadrar un círculo. La cuestión no es complicada teniendo en cuenta que la espiral de Arquímedes tiene por ecuaciones paramétricas $\alpha(t)=(t\cdot cos\,t, t\cdot sen\,t)$, con $t\in[0,+\infty)$, cuestión esta fácil de deducir a partir su definición. Vamos a ver cómo se utilizaría para trisectar un ángulo.

Consideremos que queremos trisectar el ángulo formado por la recta r_1, que para simplificar supondremos que es el eje OX, y la recta que pasa por el origen de coordenadas r_2. Se trata de buscar dos rectas r_3 y r_4 que pasen por el origen de coordenadas tales que $\angle(r_3,r_4)=\frac{1}{3}\angle(r_1,r_2)$. Sea A el punto de intersección de la espiral con la recta r_2 y sean P y Q los puntos que dividen el segmento OA en tres partes iguales. Estos puntos son fácilmente obtenibles utilizando el teorema de Tales. De este modo:

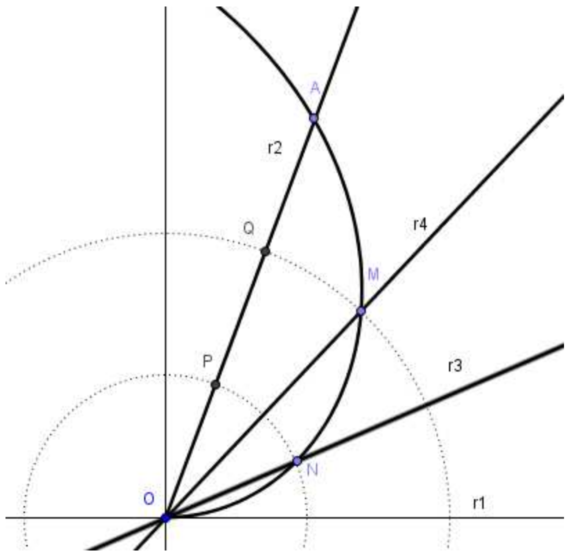


Figura 6. **Trisección de un ángulo con la espiral de Arquímedes.**

$$d(O,A)=t\ ;\ d(O,P)=\frac{t}{3}\ ;\ d(O,Q)=\frac{2t}{3}$$

Consideramos ahora los puntos *N* y *M* donde los arcos de circunferencia de centro *O* y radios $\frac{t}{3}$ y $\frac{2t}{3}$ cortan a la espiral. Las coordenadas de estos puntos serán:

$$N=\frac{t}{3}\left(\cos\left(\frac{t}{3}\right),sen\left(\frac{t}{3}\right)\right) \text{ y } M=\frac{2t}{3}\left(\cos\left(\frac{2t}{3}\right),sen\left(\frac{2t}{3}\right)\right).$$

Si consideramos ahora las semirrectas r_3 y r_4 de origen *O* y que pasan respectivamente por *N* y *M* tendremos que $\angle(r_3,r_4)=\frac{2t}{3}-\frac{t}{3}=\frac{t}{3}=\frac{1}{3}\angle(r_1,r_2)$, como queríamos demostrar.

Fuera de las Matemáticas, a esta espiral se le han encontrado una multitud de aplicaciones, como por ejemplo su uso para comprimir líquidos y gases, para la fabricación de los ya antiguos discos de vinilo o para medir el temblor humano que nos ayuda a diagnosticar posibles enfermedades neurológicas.

Por otro lado, Menecmo, intentando solucionar la duplicación del cubo, creó **las cónicas**, que no son más que las curvas resultantes de cortar un cono por un plano. Dependiendo de la posición del plano respecto del cono se generan cuatro tipos de cónicas (no degeneradas) que son la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Se acabó demostrando que utilizando una cierta hipérbola se podría trisectar un ángulo y utilizando una cierta pareja de parábolas se podría duplicar un cubo.

No obstante, hoy en día, las aplicaciones de las cónicas van muchísimo más allá que la resolución de estos problemas clásicos debido a las propiedades reflexivas que se dan en ellas. Así, podemos citar como algunos ejemplos la presencia de la parábola en el diseño de espejos, antenas parabólicas o radares, en la rama de la óptica se utilizan con mucha frecuencia lentes elípticas o la utilización que hace el sistema de navegación por radio LORAN para determinar posiciones utilizando la propiedad reflexiva de la hipérbola.

Estos dos ejemplos de curvas que hemos citado muestran como el empeño en resolver algunos problemas traen consigo, a parte del desarrollo de las propias Matemáticas, el desarrollo de otras ramas de conocimiento.

Dejando ya los tres problemas clásicos, históricamente la Geometría Plana se ha basado en los denominados cinco postulados de Euclides que son:

1. Por dos puntos distintos pasan una única recta.
2. Dados dos segmentos PQ y AB, en la recta que pasa por P y Q existe un punto R tal que Q está situado entre P y R y los segmentos AB y QR miden lo mismo.
3. Dado un punto y una longitud existe una única circunferencia con centro en dicho punto y con radio esa longitud.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.
5. Si una recta secante a otras dos formando a un mismo lado dos ángulos cuya suma es inferior a dos rectos, entonces esas dos rectas prolongadas suficientemente se cortarán en un punto situado en ese mismo lado.

Durante siglos se dudó de este último postulado. De hecho, el propio Euclides intentaba retrasar su uso a la hora de demostrar determinados resultados. Muchos fueron los matemáticos que intentaron demostrar este quinto postulado a partir de los otros cuatro. Para ello se buscaron y se encontraron muchas afirmaciones equivalentes con la esperanza de que fueran más sencillas de demostrar, pero resultó imposible. Entre esas afirmaciones equivalentes podemos menciona por ejemplo:

a) La suma de los ángulos de un triángulo equivale a dos ángulos rectos (Aristóteles).

b) Existe un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos (Saccheri).

c) Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que una dada (Gauss).

d) Dada una recta r y un punto P que no está en la recta r, existe una única recta paralela a r que pasa por P (Hilbert).

En los inicios del siglo XIX, Gauss se dio cuenta de que existían geometrías que cumplían los cuatro primeros postulados, pero no el quinto. El temor a no ser entendido le condujo a no publicar sus resultados. Pocos años después, los matemáticos Bolyai y Lobachevski construyeron las Geometrías Hiperbólicas y Esféricas, que son geometrías en las que el quinto postulado se sustituye por otro no equivalente pero consistente con los otros cuatro primeros. Para la Geometría Hiperbólica, el quinto postulado fue que dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, existen al menos dos rectas s y t paralelas a r que pasan por P. Para la Geometría Esférica, el quinto postulado fue que dada una recta r y un punto P que no pertenece a r, no existe ninguna recta s que contenga a P y que sea paralela a r.

Todos estos acontecimientos supusieron el nacimiento de las Geometrías no Euclídeas que nos han servido para entender mejor objetos de naturaleza no euclídea como pueden ser las superficies de Riemann compactas.

Una rama de las Matemáticas que se ha desarrollado gracias a la resolución de problemas cotidianos que iban surgiendo en la sociedad fue la Trigonometría. Su origen tuvo lugar hace más 3000 años en la antigua Mesopotamia y Egipto y surgió de la necesidad de realizar medidas tanto en la agricultura como en la construcción de pirámides. No obstante el gran impulso inicial en el desarrollo de la Trigonometría se dio cuando se aplicaron estas técnicas en el campo de la Astronomía con el objetivo de calcular posiciones de cuerpos celestes, predicción de órbitas, etc. Todas estas técnicas se desarrollaron fundamentalmente en la antigua Grecia con dos protagonistas principales, Hiparco de Nicea y Tolomeo. Hiparco construyó las denominada "*tablas de cuerdas*" que se utilizarían para resolver triángulos planos, relacionado así medidas lineales con angulares. Tolomeo ha pasado a la historia de las Matemáticas como autor del libro *"Almagesto"*, que ha servido durante siglos como iniciación a la trigonometría para los astrónomos. En él aparecen nuevas tablas de cuerdas perfeccionadas, es decir, con menor error y el célebre teorema de Menelao, mediante el cual se pueden resolver triángulos esféricos.

A partir de aquí, la Trigonometría siguió desarrollándose con pequeños avances principalmente en la India y en Arabia. El siguiente gran impulso se dio en los siglos XVII y XVIII, con la invención del cálculo. Como figura a destacar podemos mencionar al matemático suizo Euler, considerado como el fundador de la Trigonometría moderna. Su gran aportación fue expresar las funciones trigonométricas mediante series de potencias y relacionar estas funciones con los números complejos mediante la conocida *fórmula de Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot sen\, x$$

A pesar de su nombre, esta fórmula fue demostrada inicialmente por Cotes en 1714. Para el caso $x = \pi$, tenemos la *identidad de Euler*, $e^{i\pi} + 1 = 0$, que es conocida por tener presente los cinco números más famosos de las Matemáticas; 1, 0, i, e, y π.

El problema que más ha contribuido en el desarrollo del Álgebra a lo largo de la historia ha sido sin duda la resolución de ecuaciones polinómicas mediante radicales. Ya en la antigua Babilonia conocían la forma de solucionar ecuaciones de segundo grado de una forma muy similar a como lo hacemos en la actualidad. Así nos lo muestran las tablillas encontradas de la época con ejemplos concretos que indican que conocían un método concreto para resolver este tipo de ecuaciones.

En el siglo IX, Al-Khowarizmi obtuvo la fórmula de resolución de la ecuación de segundo grado $X^2 + bX = c$ por métodos geométricos del siguiente modo. Si x es una solución positiva de la ecuación (téngase en cuenta que en esa época no se consideraban soluciones negativas), construimos un cuadrado de lado x. Prolongamos los cuatro lados una longitud $\frac{b}{4}$ tal y como muestra la figura 7. Si igualamos el área del cuadrado exterior, con la suma de los cinco cuadrados y cuatro rectángulos interiores nos queda $\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 = x^2 + 4\cdot\left(\frac{b}{4}\right)^2 + 4\cdot\frac{b}{4}x = 4\cdot\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c$. Despejando x obtenemos la fórmula que utilizamos en la actualidad con a = 1:

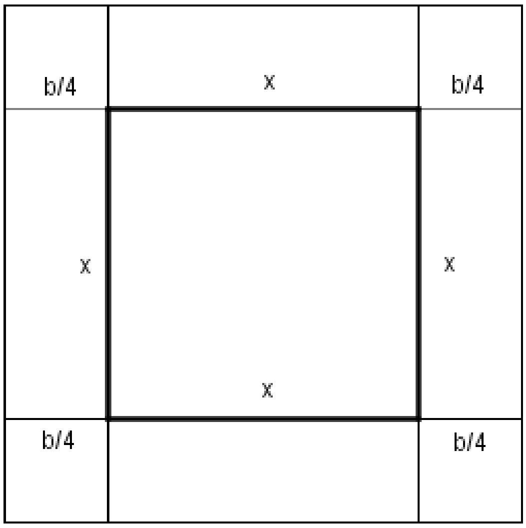


Figura 7. **Método árabe de solucionar una ecuación de segundo.**

$$x = \sqrt{4\cdot\left(\frac{b}{4}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

La resolución por radicales de la ecuación de grado tres y cuatro se resistió hasta el siglo XVI. Fue el matemático italiano Tartaglia el que resolvió la ecuación cúbica por medio de radicales, mientras que otro matemático italiano, Ferrari, fue el que solucionó la ecuación polinómica de grado cuatro. Debido a la complejidad de estas expresiones, apenas se estudian y carecen de valor didáctico, al menos en la Enseñanza Secundaria. No obstante, desde un punto de vista matemático, lo importante es que se descubrió que existían estas expresiones mediante radicales que solucionaban estas ecuaciones.

El problema siguiente estaba claro: ¿se podría resolver por medio de radicales cualquier ecuación polinómica de grado cinco? Tres siglos más tarde Abel[13] probó que en estos casos no era posible encontrar fórmulas generales de expresar las raíces de los polinomios mediante sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y extracción de raíces a partir de los coeficientes de la ecuación.

Aún quedaba pendiente la cuestión de saber qué polinomios $f(X) = X^n + a_1 X + \cdots + a_n \in K(X)$, sí podían ser resueltos mediantes radicales. Este problema lo solucionó brillantemente el matemático francés Galois[14]. Probó la existencia de un cuerpo minimal $K(f)$ entre aquellos sobre los que f se factoriza en producto de factores lineales, construyó el grupo $G(f)$ de los automorfismos de $K(f)$ que dejan fijos todos los elementos de K y demostró que f es resoluble por radicales si y solo si existe una familia finita de $\{G_1, \ldots, G_n = G(f)\}$ de subgrupos de $G(f)$ tales que cada G_i es subgrupo normal de G_{i+1} y el cociente G_{i+1}/G_i es abeliano.

Todas estas ideas supusieron el desarrollo de lo que hoy se conoce como Algebra Abstracta, que es la rama de las Matemáticas que estudia estructuras algebraicas tales como anillos, grupos, cuerpos, espacios vectoriales, etc. Sin duda, estas Matemáticas no estaban al alcance de los matemáticos del siglo XVI.

Otros dos problemas que han sido de una importancia vital en las Matemáticas han sido el de calcular la tangente a una curva en un punto de esta y el cálculo del área encerrada por una curva, ya que en ellos se encuentran el germen de Cálculo Diferencial e Integral.

Arquímedes en el siglo V a.C. ya empezó a tratar el segundo problema con los denominados *métodos de exhaución* y *compresión* con los que inicialmente intentó calcular

[13] Puede consultarse en ABEL, N.H. (1988) Oeuvres Complètes. Nueva York: Johnson Reprint Corp.

[14] Sus hallazgos los publicó por primera vez el catedrático en Matemáticas Joseph Liouville en *Mathématiques Pures et Appliquées* en 1846.

la longitud de la circunferencia. La idea era muy sencilla. Dada una circunferencia se iba aproximando a su perímetros por medio de polígonos regulares inscritos (método de exhaución) y por medio de polígonos regulares circunscritos (método de compresión). De este modo y utilizando polígonos regulares de hasta 96 lados obtuvo una acotación de π prodigiosa para la época en la que se encontraba:

$$3{,}140845\ldots < \pi < 3{,}142857\ldots$$

El problema del cálculo de tangentes a curvas también interesó a los griegos. Euclides[15] definió en "*Los Elementos*" la tangente a una circunferencia como aquella recta que *toca* a la circunferencia pero no la *corta*. Se acabaron dando cuenta de que la tangente en un punto P de una circunferencia es la recta perpendicular al radio de la circunferencia que pasa por P. Apolonio, en el siglo III a. C., encontró también métodos para calcular tangentes en cualquier cónica. Sin embargo, no supieron calcular tangentes en otros tipos de curvas como las algebraicas de grado tres o superior o en la espiral de Arquímedes.

Tras la decadencia de la escuela de Alejandría, el interés por este tipo de problemas decayó hasta la creación de la Geometría Analítica en el siglo XVII por parte de Fermat y Descartes. A partir de aquí, estos y otros matemáticos comenzaron a criticar los métodos griegos de cara a poder calcular tangentes y áreas utilizando para ello técnicas geométricas, algebraicas o incluso cinemáticas.

Destacaremos los métodos que propuso Fermat para el cálculo de tangentes y áreas encerradas por curvas. Para calcular la tangente en un punto $P(a, b)$ a una curva α de ecuación $y = f(x)$, lo que hace Fermat es considerar el punto O, que es el punto donde la recta tangente corta al eje OX, y el punto P' que será la proyección ortogonal del punto P sobre el

[15] Se encuentra en la definición 2 del Libro III de *Los Elementos*.

eje *OX*. Si *h* es pequeño, el error que se puede cometer al suponer que el punto *Q*(*a*+*h*, *f*(*a*+*h*)) pertenece a la tangente es también pequeño.

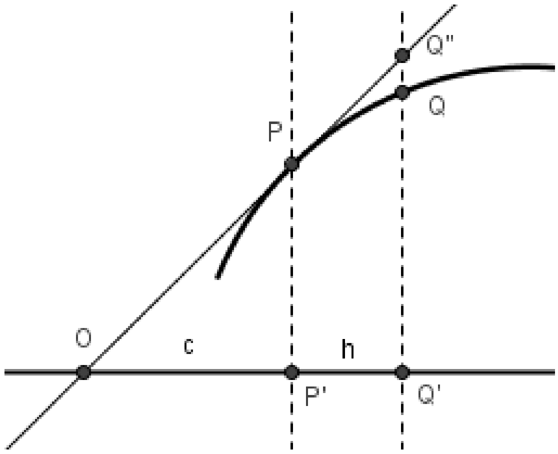


Figura 8. **Cálculo de la tangente de Fermat.**

Asumiendo ese error, podemos suponer entonces que los triángulos *OPP´* y *OQQ´* son semejantes. En ese caso, la pendiente de la recta tangente será:

$$m = \frac{PP'}{OP'} = \frac{Q''Q'}{OQ'} \approx \frac{QQ'}{OQ'} = \frac{f(a+h)}{c+h} = \frac{f(a+h)-b}{h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

De este modo, cuando $h \to 0$, Fermat proponía como pendiente de la tangente a una curva lo que hoy en día se conoce como la derivada de la función en un punto.

Veamos a continuación la forma que tuvo de calcular el área encerrada por la curva $y = x^n$, el eje *OX* y la recta $x = a$. Considera la partición formada por los puntos a, ah, ah^2, …, donde $0 < h < 1$, y aproxima el área A buscada por la suma de las áreas los rectángulos superiores obtenidos tal y como muestra la figura. Observemos la semejanza de este método con el método de compresión utilizado 2000 años antes por Arquímedes.

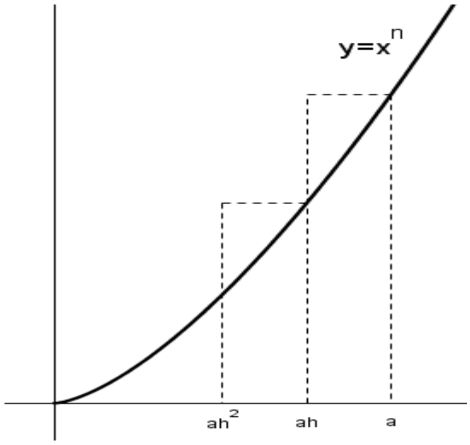


Figura 9. **Cálculo de la integral definida de Fermat.**

Tendremos por tanto que:

$$A(h) = a^n \cdot (a - ah) + a^n h^n \cdot \left(ah - ah^2\right) + a^n h^{2n} \cdot \left(ah^2 - ah^3\right) + \cdots$$

La suma anterior es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a - ah$ y razón h^{1+n}, con lo cual:

$$A(h) = \frac{a^n \cdot (a - ah)}{1 - h^{1+n}} = \frac{a^{n+1} \cdot (h-1)}{h^{1+n} - 1} = \frac{a^{n+1}}{1 + h + h^2 + \cdots + h^n}$$

Haciendo los rectángulos *"infinitesimales"*, lo que equivale a que $h \to 1$, se obtiene finalmente que $A = \lim\limits_{h \to 1} A(h) = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$.

A Fermat solo le faltó relacionar los dos problemas para ser considerado el inventor del cálculo. Este honor se lo llevaron Newton y Leibniz que sí fueron capaces de relacionar, de maneras diferentes, los problemas de las tangencias y el cálculo de aéreas encerradas por curvas apoyándose en una misma idea, despreciar los infinitésimos de mayor orden. Existe una gran polémica sobre quién de los dos fue el verdadero inventos del cálculo. Parece ser que Newton se adelanto es su descubrimiento, pero que Leibniz se adelantó en su publicación. Los métodos utilizados por Newton fueron más profundos, pero la notación de Leibniz era más adecuada de cara a seguir desarrollando esta rama de las Matemáticas.

Siguiendo con Fermat, no hay que olvidar lo que conoce como *"el último teorema de Fermat"*. Dice que para cualquier número natural $n > 2$ no existen números enteros x, y, z tales que $x^n + y^n = z^n$, evitando las soluciones triviales. Fermat en el margen de su copia del libro *"Arithmética"* de Diofanto escribió que había descubierto una demostración de este teorema, que él denominó como admirable, pero que el margen de este libro era muy pequeño para desarrollarla.

La demostración de este teorema ha sido buscada por los más grandes matemáticos de la época durante más de tres siglos y gracias a ello se desarrolló la Teoría Algebraica de Números. En el año 1735, Euler demostró este teorema para el caso $n = 3$, pero no fue hasta 1993 cuando Wiles demostró el teorema basándose para ello en formas modulares de curvas elípticas.

Fermat también es considerado como el iniciador, junto con el matemático francés Pascal, de la Teoría de Probabilidades. Todo se originó en 1654 por un intercambio de correspondencia entre ellos acerca de un problema que le había propuesto un jugador conocido como el caballero de Mere:

> Dos jugadores apuestan 32 doblones de oro cada uno a un juego que consiste en obtener antes que el otro jugador tres veces un determinado número, tirando el dado una vez cada uno. Si el juego se interrumpe cuando un jugador ha obtenido dos veces la puntuación y el otro solo una, ¿cómo deben repartirse los doblones apostados?

El análisis de este y otros problemas y las correcciones que le hicieron al caballero de Mere, que consideraba equiprobables sucesos que no lo eran, supusieron el inicio de la formalización de la Teoría de Probabilidades.

El estudio del llamado *"problema de la braquistócrona"* supuso el origen del Cálculo de Variaciones. Dado dos puntos que no estén en la misma vertical, el problema trata de buscar la curva entre esos dos puntos que es recorrida en el menor tiempo posible por una partícula que cae deslizándose bajo el efecto únicamente de la gravedad y suponiendo que no hay fricción a lo largo de ella.

Su resolución se llevó a cabo a finales del siglo XVII por los hermanos Johann y Jakob Bernouilli que mostraron que la curva buscada era la cicloide. Esta curva se puede definir como la curva que describe un punto de una circunferencia que se desplaza, sin resbalar, a lo largo de una recta.

En la siguiente gráfica vemos como sería la cicloide para una circunferencia de radio r = 1. En este caso, unas ecuaciones paramétricas de la cicloide serían $\begin{cases} x = t - sen(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases}$, con $t \in [-\infty, +\infty)$.

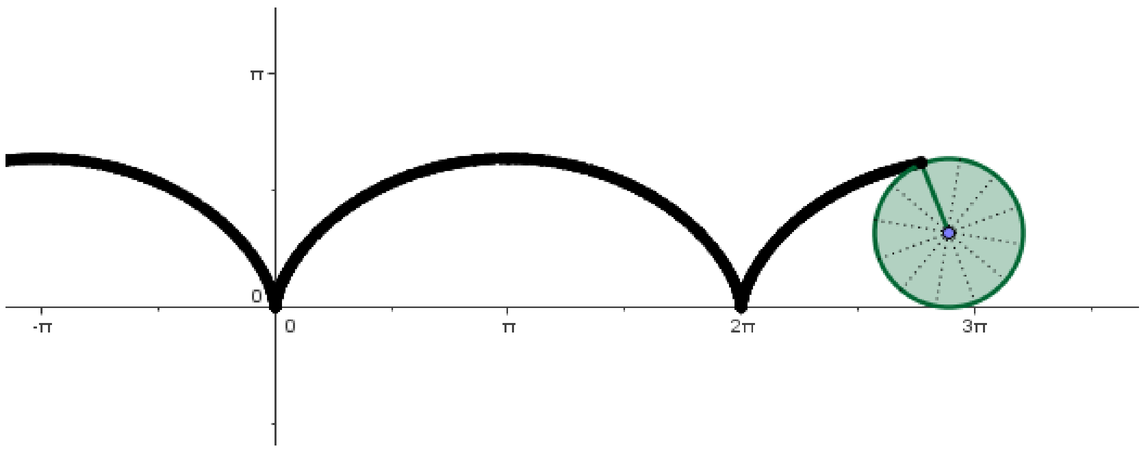


Figura 10. **Cicloide.**

Esta es la representación clásica de la cicloide, pero la curva que realmente resuelve el problema de la braquistócrona era la cicloide invertida, es decir, haciéndola cóncava hacia arriba. De hecho, Huygens probó que la cicloide es además tautócrona, que quiere decir que si dejamos que se deslicen dos partículas por la cicloide, estas llegarán al punto inferior al mismo tiempo, independientemente del punto de partida que tuvieran estas dos partículas.

Como comentamos anteriormente, estas ideas supusieron el origen del Cálculo de Variaciones, que es la rama de las Matemáticas que busca extremos relativos de funcionales continuos definidos en espacios funcionales. Actualmente es uno de los campos más activos en la investigación matemática.

Otro de los problemas relevantes en la historia de las Matemáticas fue el denominado *"problema de los puentes de Königsberg"*. Este aparentemente sencillo juego planteado por Euler[16] trata de decidir si se puede recorrer la ciudad de Königsberg, que es atravesada por el rio Pregolya, pasando por sus siete puentes (ver imagen 4) una y solo una vez, volviendo finalmente al punto inicial.

Imagen 4. **Problema de los puentes de Königsberg.**

Nota. Fuente: http://www.expansion.com

[16] Publicado en EULER, L. (1736) *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. (Reimpreso en Opera Omnia Series Prima 1976) [En red] Disponible en: http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf, 128 – 140. (versión original en latín)

Este problema lo resolvió en 1736 el propio Euler viendo que dicho camino no existe ya que el grafo que genera el problema no es euleriano porque tiene vértices de grado impar. Todo esto dio origen a la denominada Teoría de Grafos, que es una rama de las Matemáticas que está en constante desarrollo y que ha permitido resolver otros muchos problemas como *el problema de los cuatro colores* con ayuda de los ordenadores.

En este punto hemos mostrado como algunas demostraciones y problemas han sido el motor del desarrollo de algunas ramas de las Matemáticas. Debido a la importancia histórica que han tenido no es descabellado preguntarse si deberían tener una importancia al menos similar en la didáctica de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

2. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

2.1. Planteamiento del problema

El problema a plantear en una investigación, determina en gran medida el diseño de la misma. En el momento de plantear un problema de investigación, hay que tener en cuenta diversos aspectos como que:

1. El problema debe ser relevante, original y sin respuesta conocida de antemano.
2. Debe ser resoluble (empíricamente).
3. Deben utilizarse para su resolución medios éticos.

En el ámbito educativo, el problema a investigar es una situación que al investigador le presenta una duda o disyuntiva y que suele surgir de:

a) La propia experiencia educativa.
b) Del campo teórico existente.
c) Investigaciones pedagógicas ya realizadas.

Es decir, el problema debe encuadrarse dentro del marco teórico existente en donde las investigaciones previas realizadas sobre el tema formen la base de la investigación y sirvan de apoyo para el desarrollo de la misma.

En el caso de nuestra investigación, la idea surgió de la propia experiencia docente, viendo como distintos profesores abordábamos la cuestión de la demostración en el aula de distintas maneras. Al investigar la cuestión desde un punto de vista teórico, nos dimos cuenta, como analizamos en el punto 1.2, que el estudio de la utilización en el aula de la demostración como herramienta didáctica ha sido y sigue siendo objeto de debate entre diferentes investigadores. En cambio, no hemos encontrado ninguna investigación experimental que relacione directamente la utilización de las demostraciones en la didáctica de las Matemáticas con las capacidades para resolver problemas.

Por ello, el problema de nuestra investigación será comprobar experimentalmente si aplicando una didáctica de las Matemáticas para un curso de 3º ESO en donde se le dé un papel relevante a las demostraciones matemáticas, se mejoran las habilidades de los alumnos en la resolución de problemas. Esta será la parte novedosa de nuestra investigación. Paralelamente, veremos si esta didáctica afecta o no a otras variables como en los resultados de la propia asignatura, los resultados en la asignatura de Lengua y Literatura, la dificultad que entienden los alumnos que tienen ciertos problemas matemáticos o en los resultados de las pruebas de Conocimientos y Destrezas Indispensables que propone la Comunidad de Madrid para este curso.

2.2. Objetivos de la investigación

Los objetivos de una investigación son las metas que se pretenden conseguir. Estos objetivos los podemos clasificar en dos tipos:

a) **Objetivos generales**. Se refieren al objeto básico a investigar, delimitando qué se quiere lograr y hasta dónde se pretende llegar.

b) **Objetivos específicos**. Son alcances particulares que se logran tras estudiar los objetivos generales y que presentan relevancia.

De este modo, el objetivo principal de la investigación fue averiguar estadísticamente si existieron diferencias significativas en las habilidades para la resolución de problemas matemáticos entre dos grupos de alumnos de 3º ESO de un instituto público de Coslada (Madrid) en donde un grupo (control) recibió una metodología "*tradicional*" y otro grupo (experimental) que recibió una metodología en donde se le otorga una gran relevancia a las argumentaciones y demostraciones de resultados matemáticos.

Como objetivos específicos, pretendimos averiguar si existieron diferencias significativas entre los grupos experimental y control en torno a las medias de otras variables como la dificultad que entendieron los alumnos que tuvieron ciertos problemas, las calificaciones en asignaturas como Matemáticas y Lengua y Literatura o los resultados que obtuvieron los alumnos en la prueba CDI de la Comunidad de Madrid. También describimos las diferencias producidas, utilizando para ello tablas, gráficos y parámetros estadísticos, con el objetivo de buscar las causas de dichas diferencias y realizamos un análisis de regresión lineal para comprobar el grado de relación existente entre las calificaciones de ambos grupos en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura con las que obtuvieron en la prueba CDI.

2.3. Hipótesis planteadas

Las hipótesis de una investigación vienen a ser un paso más hacia la sistematización y la delimitación del problema. Son construcciones teóricas que pretenden dar respuesta al problema planteado y que aún no se han demostrado. Las hipótesis que se plantean en las investigaciones pueden proceder de meras intuiciones, de investigaciones anteriores que requieran nuevas comprobaciones o del propio marco teórico existente.

Su formulación debe ser en forma condicional: si… entonces…, en donde los elementos más importantes son los objetos del estudio (población y muestra), las variables que intervienen y los conectores lógicos. Las hipótesis formuladas deben ser comprensivas, explicado en detalle los resultados que se esperan, y comprobables dentro del campo en el que se encuentren.

En nuestro caso, la comprobación la llevamos a cabo con los test de hipótesis. Como se sabe, al movernos en términos probabilísticos siempre tendremos un nivel de riesgo que, en general, tomaremos en el 5%. También a la hora de realizar un test se consideran dos tipos de hipótesis:

a) **Hipótesis nula** (H_0). Determina que no existe relación o diferencias significativas entre las variables estudiadas.
b) **Hipótesis alternativa** (H_1). Se establecen diferencias significativas entre las variables estudiadas. Esta hipótesis es la que propone el investigador y la que pretende confirmar con su estudio.

En los procesos de validación de las hipótesis intervienen factores como la elección de la muestra, la representatividad de esta, el diseño de la investigación, la validez de los datos, etc. que hace que hablemos siempre en términos probabilísticos y de intervalos de confianza.

El alcance de la contrastación siempre es local, se puede aceptar o rechazar una hipótesis, pero no se puede probar que es verdadera, por estar relacionado su grado de aplicación al ámbito de penetración de la prueba.

En nuestra investigación se plantearon las siguientes hipótesis:

CONDICIONES INICIALES

HIPÓTESIS 1: Edad de los alumnos de cada grupo a 30 de junio de 2012.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las edades de sus alumnos.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las edades de sus alumnos.

HIPÓTESIS 2: Calificaciones en Matemáticas el curso anterior.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas del curso anterior.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas del curso anterior.

HIPÓTESIS 3: Calificaciones en la evaluación inicial de Matemáticas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la evaluación inicial de Matemáticas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la evaluación inicial de Matemáticas.

EN EL PRIMER TRIMESTRE

HIPÓTESIS 4: Calificaciones en la primera prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la primera prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la primera prueba de problemas.

HIPÓTESIS 5: Dificultad asignada por los alumnos a la primera prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la primera prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la primera prueba de problemas.

HIPÓTESIS 6: Calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el primer trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el primer trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el primer trimestre.

HIPÓTESIS 7: Calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el primer trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el primer trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el primer trimestre.

EN EL SEGUNDO TRIMESTRE

HIPÓTESIS 8: Calificaciones en la segunda prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la segunda prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la segunda prueba de problemas.

HIPÓTESIS 9: Dificultad asignada por los alumnos a la segunda prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la segunda prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la segunda prueba de problemas.

HIPÓTESIS 10: Calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el segundo trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el segundo trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el segundo trimestre.

HIPÓTESIS 11: Calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el segundo trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el segundo trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el segundo trimestre.

EN EL TERCER TRIMESTRE

HIPÓTESIS 12: Calificaciones en la tercera prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la tercera prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la tercera prueba de problemas.

HIPÓTESIS 13: Dificultad asignada por los alumnos a la tercera prueba de problemas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la tercera prueba de problemas.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de la dificultad observada en la tercera prueba de problemas.

HIPÓTESIS 14: Calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el tercer trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el tercer trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Matemáticas en el tercer trimestre.

HIPÓTESIS 15: Calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el tercer trimestre.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el tercer trimestre.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones en la asignatura de Lengua y Literatura en el tercer trimestre.

HIPÓTESIS 16: Calificaciones en la prueba CDI en la parte de Matemáticas.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la parte de Matemáticas de la prueba CDI.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la parte de Matemáticas de la prueba CDI.

HIPÓTESIS 17: Calificaciones en la prueba CDI en la parte de Lengua y Literatura.

H_0: No existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la parte de Lengua y Literatura de la prueba CDI.

H_1: Existen diferencias significativas entre los grupos experimental y control en relación a las medias de las calificaciones de la parte de Lengua y Literatura de la prueba CDI.

2.4. Técnicas e instrumentos de recogida de la información

2.4.1. Evaluación inicial

La evaluación inicial, o también denominada diagnóstica o evaluación cero, es la que se realiza inicialmente al comenzar un curso académico, una etapa educativa, un programa educativo concreto, etc. Básicamente consiste en un procedimiento de recogida de datos de los alumnos de distinta índole (personal, académica, familiar, etc.) que sirve al profesorado para mejorar su conocimiento de estos y que tiene el objetivo de permitir al profesor, a partir de esta información, adaptar las estrategias didácticas para mejorar la consecución general e individual de los objetivos. Además, la evaluación inicial nos servirá para realizar una mejor evaluación global de todo el proceso de enseñanza ya que nos va a indicar la posición de la que partimos.

A nivel legislativo, la Ley Orgánica 2/2006 de 3 de mayo (LOE) indica en su capítulo I, artículo 1 una serie de principios en los que se debe sustentar el sistema educativo español. Si nos fijamos en los principio b, e y ñ que se mencionan en la Ley observamos que hacen, en nuestra opinión, imprescindible la evaluación inicial:

> La equidad, que garantice la igualdad de oportunidades, la inclusión educativa y la no discriminación actúe como elemento compensador de las desigualdades personales, culturales, económicas y sociales, con especial atención a las que deriven de discapacidad. (p. 7)
>
> La flexibilidad para adecuar la educación a la diversidad de aptitudes, intereses, expectativas y necesidades del alumnado, así como a los cambios que experimentan el alumnado y la sociedad. (p. 7)

> La evaluación del conjunto del sistema educativo, tanto en su programación y organización y en los procesos de enseñanza y aprendizaje como en sus resultados. (p. 8)

A nivel autonómico de la Comunidad de Madrid, en la Orden 1029/2008 de 29 de febrero se regula la evaluación en la Educación Secundaria Obligatoria. En esta ocasión se menciona de manera explícita la evaluación inicial en el artículo 17 punto 2:

> A finales del mes de septiembre se celebrará, en cada uno de los cursos distintos del primero, una evaluación inicial del curso que, mediante la aplicación de distintos instrumentos de evaluación elaborados por los departamentos de coordinación didáctica, servirá para detectar el grado de desarrollo alcanzado por cada alumno en el dominio de los contenidos de las distintas materias y para garantizarle una atención individualizada. Esta evaluación no comportará calificaciones, tendrá carácter orientador y de sus resultados se dará cuenta a las familias. (p. 4)

La evaluación inicial, además de ser preceptiva, tiene varias ventajas. En la línea de lo señalado por Granados (2009), podemos indicar las siguientes:

- Organiza, sintetiza y pone en común toda la información que se recoge al iniciarse un curso, anticipándose a la primera evaluación que se realiza en diciembre.
- Sirve para contrastar experiencias didácticas, tanto individuales como grupales, de distintos profesores que se pueden aplicar en otras asignaturas.
- Permite ajustar la programación (contenidos, temporalización, etc.) en función de los conocimientos que tengamos del grupo.
- Permite identificar desde el principio posibles problemas de aprendizaje.

- Permite al profesorado diversificar sus intervenciones.

En nuestra investigación, la evaluación inicial como instrumento la vamos a utilizar únicamente con el objetivo de averiguar si en cuanto a conocimientos existían diferencias significativas entre los dos grupos. La prueba escrita de la evaluación inicial la realizamos el día 26 de septiembre de 2011. Constó de ocho ejercicios, de los cuales cuatro eran de Aritmética, dos de Álgebra, uno de representar funciones lineales y otro de aplicar el teorema de Pitágoras. Los enunciados concretos de los ejercicios que compusieron esta prueba se pueden consultar en el punto 6.2. de los anexos.

2.4.2. Pruebas de resolución de problemas

Como el objetivo principal de nuestra investigación era comprobar si una metodología en donde la demostración matemática esté presente favorece la adquisición de técnicas en los alumnos a la hora de resolver problemas matemáticos, decidimos pasar tres pruebas de resolución de problemas a los alumnos, una en cada trimestre.

Estas pruebas constaron de 8 problemas matemáticos de distinta índole (técnicas de conteo, descomposición de figuras, razonamientos lógicos, etc.) y se pusieron en un orden ligeramente ascendente de dificultad a lo largo del curso. Para comprobar que estas pruebas se encontraban acordes al nivel de los alumnos pedimos la opinión de varios expertos a través de encuestas. Este proceso lo detallamos en el punto 2.4.3.

Los criterios de corrección generales que usamos en las tres pruebas fueron los siguientes:

1. Cada prueba será puntuada de 0 a 10 puntos.
2. Cada problema puntuará un máximo de 1,25 puntos.

3. Para conseguir la puntuación máxima en un problema se debe llegar al resultado correcto, justificando adecuadamente los pasos previos empleados.
4. Cuando un problema se argumente correctamente, pero por un error aislado no se llegue al resultado correcto se le restará a la puntuación máxima no más de 0,5 puntos, en función de error.
5. Cuando haya argumentos válidos, pero repetidos errores de cálculo o de razonamiento, se le restará a la puntuación máxima hasta 1 punto, en función de los errores y aciertos realizados.
6. La presencia de algún razonamiento parcial válido, pero aislado, se valorará hasta una puntuación máxima de 0,25 puntos.
7. Si el problema está en blanco o no hay razonamientos lógicos que lleven a conclusiones parciales del problema, se valorará con 0 puntos.
8. Si se llega a la solución correcta, pero con argumentos lógicos erróneos, se valorará el problema con 0 puntos.
9. Si se llega a la solución de problema, pero no se justifican los pasos, y es un problema que se estima que es plausible llegar a la solución "de cabeza", se otorgará una puntuación no superior a 0,75 puntos. Ejemplos de estos problemas pueden ser 1.6, 2.4, 3.6 o 3.7.

No obstante, hay que reincidir en el hecho de que estos son unos criterios generales y que cada problema tiene su propia idiosincrasia. Así, por ejemplo, en el último problema de la última prueba lo que hicimos es otorgar una puntuación proporcional a las formas correctas conseguidas por el alumno. Por ello, cada problema tenía sus propios criterios, pero para no excedernos, no expondremos los 24 criterios que hemos utilizados, aunque sí que diremos que en cada uno proporcionamos más relevancia a los argumentos utilizados que al resultado conseguido.

Así mismo, en cada prueba de resolución de problemas, solicitamos a los alumnos que indicaran, según su criterio, la dificultad que tenía la prueba de 0 a 10, siendo 0 el nivel más sencillo y 10 el nivel más dificultoso. Este dato lo utilizaremos también estadísticamente para ver cómo veían unos mismos problemas los alumnos de los dos grupos.

2.4.3. Validez de las pruebas de resolución de problemas

De los datos con los que se realiza la investigación, el que más nos preocupó a priori era el de la puntuación que reciben los alumnos en las pruebas de resolución de problemas. Había que poner unos criterios de corrección lo más claros y justos posibles (ver el punto 2.4.2.) y, sobre todo, los problemas que se propusieran deberían ser adecuados para el nivel de los alumnos con los que trabajamos. Para este segundo aspecto, pedimos la opinión de 27 expertos en la materia a través de una encuesta. Estos expertos eran profesores de Educación Secundaria en activo o jubilados de la asignatura de Matemáticas.

A la hora de elaborar la encuesta, intentamos hacerla de un formato lo más sencillo posible, pero que cumpliera con el objetivo de la misma: comprobar si los problemas propuestos son adecuados para alumnos de 3º ESO. Por ello, confeccionamos la encuesta de tal manera que cada profesor solo tenía que identificarse, indicar los años de experiencia docente y marcar la dificultad de cada problema, en relación al nivel de los alumnos a los que iban dirigidos, con unos valores del 1 al 5, siendo 1 excesivamente fácil, 2 fácil, 3 normal, 4 difícil y 5 excesivamente difícil. Tras cada prueba, los encuestados podían añadir cualquier comentario que considerasen oportuno. El formato exacto de la encuesta lo hemos incluido en el punto 6.4 del anexo.

Establecimos que para que un problema fuera apto para entrar en la prueba de resolución de problemas debía tener una dificultad media, que establecimos en que la media de las puntuaciones proporcionadas por los expertos estuviera comprendida entre 2,5 y 3,5, y que hubiera cierto consenso en las opiniones, imponiendo que la varianza de los resultados no podía ser superior a 1. Tras realizar una primera encuesta, obtuvimos que la experiencia media docente de los encuestados era de 18,04 años y las puntuaciones que le dieron problemas que se le propusieron fueron las expuestas en las tablas 3, 4 y 5:

Tabla 3. **Dificultad dada por los expertos a la primera prueba de problemas elaborada.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 1.1	0	0	19	8	0	**3,296**	**0,209**
Problema 1.2	2	9	16	0	0	**2,519**	**0,398**
Problema 1.3	0	6	14	7	0	**3,037**	**0,48**
Problema 1.4	0	0	5	12	10	**4,185**	**0,521**
Problema 1.5	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 1.6	0	1	9	16	1	**3,63**	**0,381**
Problema 1.7	0	0	23	4	0	**3,148**	**0,126**
Problema 1.8	0	0	5	6	16	**4,407**	**0,612**
						3,463	

Tabla 4. **Dificultad dada por los expertos a la segunda prueba de problemas elaborada.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 2.1	3	7	13	4	0	**2,667**	**0,741**
Problema 2.2	1	7	8	5	6	**3,296**	**1,394**
Problema 2.3	0	4	21	2	0	**2,926**	**0,217**
Problema 2.4	0	2	11	13	1	**3,481**	**0,472**
Problema 2.5	0	0	9	15	3	**3,778**	**0,395**
Problema 2.6	0	1	12	14	0	**3,481**	**0,324**
Problema 2.7	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 2.8	0	0	7	8	12	**4,185**	**0,669**
						3,412	

Tabla 5**. Dificultad dada por los expertos a la tercera prueba de problemas elaborada.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 3.1	0	3	13	11	0	**3,296**	**0,431**
Problema 3.2	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 3.3	0	3	15	8	1	**3,259**	**0,488**
Problema 3.4	0	4	19	4	0	**3**	**0,296**
Problema 3.5	0	0	8	14	5	**3,889**	**0,469**
Problema 3.6	0	0	4	7	16	**4,444**	**0,543**
Problema 3.7	0	4	20	3	0	**2,963**	**0,258**
Problema 3.8	0	0	11	14	2	**3,667**	**0,37**
						3,5	

Como se puede observar, de los veinticuatro problemas propuestos, nueve no cumplían con los requisitos que antes mencionamos. De estos nueve, por una excesiva dificultad eran ocho (problemas 1.4, 1.6, 1.8, 2.5, 2.8, 2.5, 2.6 y 2.8) y por no existir el suficiente consenso entre los encuestados uno (problema 2.2). Estos problemas, que los que eliminamos de las pruebas, eran los siguientes:

Problema 1.4.

Tenemos tres cajas de caramelos, una caja con caramelos de fresa, otra con caramelos de limón y otra con caramelos mezclados de fresa y limón. He elaborado tres etiquetas para las cajas, "FRESA", "LIMÓN" y "MEZCLADOS". Al colocarlas, he estado tan torpe que no he colocado ninguna etiqueta en su correspondiente caja y encima he cerrado las tres cajas. ¿Cómo podría colocar las etiquetas correctamente abriendo una única caja y sacando un único caramelo (sin ver el resto de los caramelos de la caja abierta)?

Problema 1.6.

En una habitación hay cinco personas. La media de sus edades es 21 años. Si entran a la habitación una persona de 29 y otra de 34 años, ¿cuál será ahora la media de las edades de las personas que están en la habitación?

Problema 1.8.

Un sultán encierra a un prisionero en una celda con dos guardianes, uno que dice siempre la verdad y otro que siempre miente. La celda tiene dos puertas: la de la libertad y la de la esclavitud. La puerta que elija el prisionero para salir de la celda decidirá su suerte. El prisionero tiene derecho de hacer una pregunta y solo una a uno de los guardianes. Por supuesto, el prisionero no sabe cuál es el que dice la verdad y cuál es el que miente. ¿Puede el prisionero obtener la libertad de forma segura?

Problema 2.2.

Si se muestran cuatro vistas de un mismo dado tal y como se indica en la imagen, ¿qué letra falta en el cuarto dado?

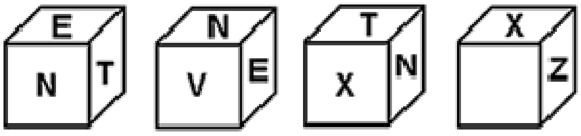


Imagen 5. **Imagen del problema 2.2 eliminado.**

Problema 2.5.

Un ciclista sube un puerto a una media de 10 Km/h y lo baja por el mismo camino a una media de 40 Km/h. Calcula la velocidad media que ha tenido en todo el recorrido.

Problema 2.8.

Un coleccionista de monedas tiene 24 de ellas que parecen idénticas, pero le comunican que una de las monedas es falsa y pesa algo más que las demás. El coleccionista ha decidido encontrar la moneda falsa utilizando una balanza de dos brazos, pero solo podrá utilizar la balanza tres veces. ¿Cómo podría conseguir identificar la moneda falsa?

Problema 3.5.

Un granjero tiene ante sí seis cestas con huevos. Algunas estas compuestas por huevos de de gallina y otras por huevos de pato. En las cestas hay 6, 12, 14, 15, 23 y 29 huevos, respectivamente. El granjero dice: “si vendo esta cesta me quedarán doble de huevos de gallina que de pato”. ¿De qué cesta está hablando?

Problema 3.6.

Un banquero ha dejado olvidado el código de la caja fuerte dentro de la caja, pero recuerda que dicho código consta de nueve cifras distintas, todas excepto el cero. Además, sabe que, a partir de la izquierda:

- El número formado por la primera y la segunda cifra es múltiplo de dos.
- El número formado por la segunda y la tercera cifra es múltiplo de tres.
- El número formado por la tercera y la cuarta cifra es múltiplo de cuatro.

Y así sucesivamente, hasta llegar al número formado por la octava y la novena cifra que será múltiplo de nueve. Con estos datos encuentra dos posibilidades. ¿Cuáles son?

Problema 3.8.

¿Cuál de estas es la única frase que puede ser verdadera?

a) Exactamente una de estas cinco frases es falsa

b) Exactamente dos de estas cinco frases son falsas.

c) Exactamente tres de estas cinco frases son falsas.

d) Exactamente cuatro de estas cinco frases son falsas.

e) Las cinco frases son falsas.

Con los problemas aptos en función de los criterios expuestos anteriormente y con los 9 problemas nuevos, elaboramos otras tres nuevas pruebas. A los encuestados, lógicamente, les pedimos que solo evaluaran los nuevos problemas. Los problemas anteriormente evaluados y dados por aptos, se mantuvieron en las mismas pruebas que antes, aunque alguno modificara su numeración por razones del formato de la prueba. Los nuevos resultados los exponemos en las tablas 6, 7 y 8:

Tabla 6. **Dificultad definitiva dada por los expertos a la primera prueba de problemas.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 1.1	0	0	19	8	0	**3,296**	**0,209**
Problema 1.2	2	9	16	0	0	**2,519**	**0,398**
Problema 1.3	0	6	14	7	0	**3,037**	**0,48**
Problema 1.4	1	8	17	1	0	**2,667**	**0,37**
Problema 1.5	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 1.6	2	6	19	0	0	**2,63**	**0,381**
Problema 1.7	0	1	23	3	0	**3,074**	**0,143**
Problema 1.8	0	0	23	4	0	**3,148**	**0,126**
						2,981	

Tabla 7. **Dificultad definitiva dada por los expertos a la segunda prueba de problemas.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 2.1	3	7	13	4	0	**2,667**	**0,741**
Problema 2.2	0	0	15	12	0	**3,444**	**0,247**
Problema 2.3	0	4	21	2	0	**2,926**	**0,217**
Problema 2.4	3	6	18	0	0	**2,556**	**0,469**
Problema 2.5	0	2	11	13	1	**3,481**	**0,472**
Problema 2.6	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 2.7	0	1	12	14	0	**3,481**	**0,324**
Problema 2.8	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
						3,190	

Tabla 8. **Dificultad definitiva dada por los expertos a la tercera prueba de problemas.**

	N 1	N 2	N 3	N 4	N 5	Media de la calificación	Varianza de los resultados
Problema 3.1	0	3	13	11	0	**3,296**	**0,431**
Problema 3.2	0	0	16	9	2	**3,481**	**0,398**
Problema 3.3	0	3	15	8	1	**3,259**	**0,488**
Problema 3.4	0	4	19	4	0	**3**	**0,296**
Problema 3.5	1	3	23	0	0	**2,815**	**0,225**
Problema 3.6	0	0	15	11	1	**3,481**	**0,324**
Problema 3.7	0	4	20	3	0	**2,963**	**0,258**
Problema 3.8	0	0	19	7	1	**3,333**	**0,296**
						3,204	

De este modo, podemos comprobar que los veinticuatro problemas cumplían los requisitos exigidos y configuramos la prueba con los problemas que se exponen en el punto 6.3 del anexo.

2.4.4. Prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI)

La Comunidad de Madrid, en el Decreto 23/2007, estableció en el artículo 16.2 que la Consejería de Educación, conforme a su propio plan de evaluación, podrá realizar evaluaciones externas a todos los alumnos al finalizar cualquiera de los cursos de la Educación Secundaria Obligatoria, teniendo estas evaluaciones carácter formativo y orientador para los centros, padres, alumnos y la administración educativa. Como consecuencia de esto, desde 2008 la Consejería de Educación realiza anualmente una prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensables (CDI) a los alumnos del tercer curso de la

Educación Secundaria Obligatoria y del primer curso del Programa de Diversificación Curricular.

La Consejería de Educación de Madrid justifica el hecho de que esta prueba verse sobre Lengua Castellana y Matemáticas por la importancia que tiene la lectura en toda clase de aprendizaje y enriquecimiento intelectual, por lo indispensable que es que los alumnos adquieran destrezas conducentes a la competencia lectora y porque la competencia matemática contribuye a utilizar espontáneamente los elementos y razonamientos matemáticos para interpretar y producir información, resolver problemas cotidianos y tomar decisiones.

Para el curso académico 2011 – 2012 esta prueba se reguló en la Resolución de 12 de 29 de febrero de 2012, de la Consejería de Educación y Empleo de la Comunidad de Madrid. En esta resolución se indicaron entre otros aspectos los siguientes:

- **Alumnos que tenían que realizar la prueba**. La Prueba CDI fue realizada por todos los alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y los del primer curso del Programa de Diversificación Curricular, excepto los que estén adscritos a un aula de enlace.
- **Características de las pruebas**. La parte de Matemáticas consistió en la resolución de 10 ejercicios y 2 problemas, mientras que la de Lengua y Literatura consistió en la realización de un dictado y un comentario de texto con varias preguntas.
- **Horarios de la prueba**. Cada parte tuvo una duración máxima de 90 minutos, realizándose primero la parte de Matemáticas y habiendo una pausa entre las pruebas de 25 minutos.
- **Fecha de realización**. La prueba se realizó el 17 de abril de 2012.

- **Personas responsables de la aplicación de la prueba**. Los responsables de aplicar correctamente la prueba eran los equipos directivos de los centros y los aplicadores designados por la Dirección de Área.
- **Actuaciones del servicio de Inspección Educativa**. Con el fin de que se lleve a cabo correctamente la prueba, la Inspección Educativa realizará reuniones previas aclarando el proceso con los aplicadores y con los equipos directivos.
- **Instrumentos para aplicar la prueba**. La administración proveerá a los alumnos de los cuadernillos para hacer la prueba y a los aplicadores del material necesario para empaquetar las pruebas y su correspondiente envío.
- **Codificación de las variables de identificación**. Los alumnos y los centros fueron identificados mediante claves numéricas que permitían el anonimato de la prueba en su corrección.
- **Elección de los correctores de la prueba**. Las comisiones encargadas de la corrección de la prueba estuvieron formadas por especialistas en las materias y fueron nombrados por los Directores de Área.
- **Comunicación de resultados**. La Dirección de Área comunicó los resultados a los centros y estos a las familias de los alumnos.
- **Planes de mejora**. Tanto la Administración, como los centros educativos y los respectivos departamentos didácticos deben valorar los resultados con el objetivo de establecer posibles planes de mejora.

Los enunciados de las dos pruebas los hemos incluido como anexos en los puntos 6.5 y 6.6 del anexo de nuestra investigación. Las calificaciones medias en la Comunidad de Madrid que ha habido desde que se realiza esta prueba se indican en el siguiente gráfico:

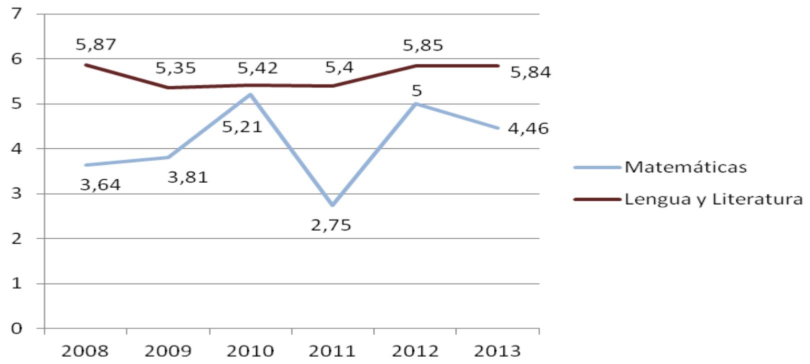


Gráfico 4. **Calificaciones medias de la prueba CDI en el periodo 2008 – 2013.**

2.5. Diseño de la investigación

Como toda investigación científica nuestro proyecto se basó en el denominado método científico, caracterizado por:

1. Plantear un problema de investigación.
2. Establecer unas hipótesis contrastables.
3. Contrastación de dichas hipótesis de forma empírica.
4. Extraer conclusiones con el objetivo de confirmar o rechazar una teoría.

El plan, la estructura y la estrategia de investigación concebida para dar respuestas a los problemas planteados establecen el diseño de la investigación. Nosotros utilizamos un enfoque experimental, ya que a partir de una experimentación buscamos una ley general estableciendo relaciones causales entre variables utilizando técnicas estadísticas. Debido a que trabajamos con muestras y no tuvimos por tanto el control absoluto de las variables, el diseño de la investigación fue del tipo cuasi-experimental.

Este tipo de diseño tiene especial relevancia en la investigación educativa ya que se realiza en situaciones naturales, sin que los sujetos se asignen al azar y al poder utilizar la información para otras finalidades. Estos diseños están recomendados en el ámbito educativo por su moderado control experimental, la validez externa que pueden tener algunos de ellos y por la asignación natural de los individuos a los grupos experimental y control.

2.6. Proceso de la investigación

2.6.1. Población y muestra

La ficha técnica del muestreo fue la siguiente:

a) **Población**. Alumnos que en el curso 2011 – 2012 cursaron en un centro público del término municipal de Coslada (Madrid) el currículo ordinario de 3º ESO. Esta población está compuesta por 458 individuos, según datos proporcionados por la Dirección Territorial Madrid-Este.

b) **Muestra**. Fueron los alumnos que en el año académico 2011 – 2012 cursaron en el IES Rafael Alberti de Coslada el curso de 3º ESO en los grupos B (grupo control) y C (grupo experimental). El tamaño de la muestra fue de 42 individuos.

c) **Error del muestreo**. En las condiciones más desfavorables del muestreo ($p = q = 0,5$) y con un intervalo de confianza de amplitud 2σ tendremos un error en el muestro del 15%.

d) **Procedimiento de muestreo**. Es no probabilístico del tipo intencional. Tanto la selección de los individuos, como la asignación de los mismos al grupo experimental o control no fue aleatoria. Sí fue aleatoria la consideración de un grupo como control y del otro como experimental.

e) **Trabajo de campo**. Los datos se recogieron como se detalla en el punto 2.6.3.

2.6.2. Descripción de la localidad y del centro de trabajo

El proyecto de investigación se realizó en el Instituto Público de Educación Secundaria Rafael Alberti, ubicado la calle Virgen de la Cabeza s/n de la localidad de Coslada en la Comunidad Autónoma de Madrid.

Imagen 6. **Situación geográfica de Coslada en Madrid.**

Nota. Fuente: http://maps.google.es

Coslada es una localidad de aproximadamente 90 000 habitantes que se encuentra situada dentro del denominado *Corredor del Henares*, ocho Kilómetros al Este de Madrid. Su término municipal es de 11,7 Km^2, lo que indica que su densidad de población es algo superior a 7500 hab/Km^2, de las más elevadas de España.

Coslada destaca por su sector servicios y, sobre todo, por el sector industrial debido a que en ella se encuentra el Centro Integral de Transportes de la Comunidad de Madrid y el Centro Internacional de Transportes (TIR), lo que ha hecho que la zona industrial de la localidad esté especializada principalmente en logística y en actividades relacionadas con el transporte.

A nivel de comunicación, tanto la localidad como el centro se encuentran con una buena comunicación en transporte público y por carretera. El centro está bien comunicado ya que tiene cercanas paradas de autobuses provenientes de Madrid (Ciudad Lineal y Vicálvaro), San Fernando y del propio municipio de Coslada. Además, está aproximadamente a un Kilómetro de la estación de Cercanías y Metro-Este de Coslada-Central. En cuanto a su conexión por carretera, la localidad está conectada con la carretera nacional A-2 y con las circunvalaciones M-40 y M-45, además de con otras carreteras secundarias. Es de destacar su proximidad al Aeropuerto Internacional Adolfo Suárez, distante apenas ocho Kilómetros de la localidad.

La población de la localidad ha sufrido cambios en los últimos años debido a la llegada de un gran número de familias inmigrantes provenientes principalmente del Este de Europa. Esto ha hecho que Coslada se convierta en una de las localidades menos envejecidas de la Comunidad de Madrid, ya que su población joven (de 0 a 16 años) supone aproximadamente el 30% de la población, mientras que la tercera edad (mayores de 65 años) apenas suponen el 6 % de la población.

Imagen 7. **IES Rafael Alberti (Coslada).**

En cuanto al centro, habría que decir que es un instituto público de la Comunidad de Madrid que se inauguró en el año 1985. Se imparten los cuatro cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria y dos modalidades de Bachillerato. En el curso 2011/2012 en el que se realizó la investigación en el centro impartieron clase 31 profesores a tres grupos de 1º ESO, tres grupos de 2º ESO, tres grupos de 3º ESO (uno con diversificación), dos grupos de 4º ESO (uno con diversificación) y los cuatro de Bachillerato. La distribución del alumnado por cada curso se resume en la tabla 9:

Tabla 9. **Distribución de alumnos por curso en el año académico 2011 – 2012.**

Curso	Nº de grupos	Total de alumnos
1º ESO	3	64
2º ESO	3	69
3º ESO	**3**	**61**
4º ESO	2	51
1º BACH	2	40
2º BACH	2	46
		331

Nota. Fuente: Datos de la secretaría del centro a 17 de mayo de 2012.

La distribución de alumnos por sexo en el centro era bastante equitativa, como se puede comprobar en el gráfico 3:

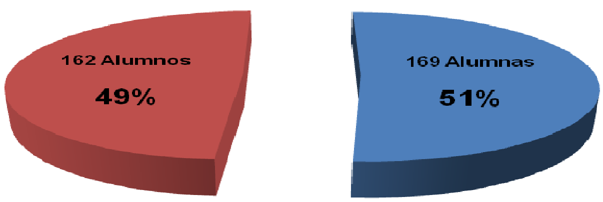


Gráfico 5. **Diagrama de sectores representativo de la distribución por sexo de de los alumnos del instituto donde se realizó la investigación.**

En cuanto a instalaciones, el centro disponía de:

- Veintitrés aulas.

- Una biblioteca.
- Dos aulas de informáticas conectadas en red.
- Un gimnasio de unos 350 m^2.
- Pistas deportivas.
- Laboratorios de biología, geología y física y química.
- Un aula para música.
- Un aula para educación plástica y visual.
- Un salón de actos.
- Una sala de visitas.
- Varios despachos (director, jefe de estudios, secretario, AMPA, alumnos, etc.)
- Una cafetería.

En cuanto a equipamiento, todas las aulas disponían de al menos un ordenador portátil conectado mediante Wi-Fi a Internet mediante el cual el profesor y los alumnos podían realizar las consultas pertinentes. Además eran utilizados para llevar el control de asistencia a clase de los alumnos mediante el programa AFDI y para usar las diez pizarras digitales que están instaladas en el instituto.

Entidades como el Ayuntamiento de Coslada, la Comunidad de Madrid o la Cruz Roja colaboraron con el centro mediante la realización de actividades y proyectos dirigidos tanto a alumnos como a sus padres. También funcionaba una AMPA (Asociación de Madres y Padres de Alumnos) que colaboraba en el desarrollo y financiación de algunas actividades.

El horario de las actividades lectivas ordinarias era de lunes a viernes de 8:30 a 14:15 (o a 15:15 si había alguna séptima hora). Por la tarde, el centro ofrecía a sus alumnos la posibilidad de participar en dos programas. Los lunes y miércoles se desarrollaba en el centro el denominado Plan Refuerza. Este plan se inició en octubre y acabó en mayo y pretendía reforzar y apoyar en el estudio a los alumnos desde distintas actividades: apoyo educativo, estudio dirigido en biblioteca e inglés oral. Su horario era de 16 a 18 horas. Los martes y jueves en el centro se llevaban a cabo los denominados Campeonatos Escolares. Consistían básicamente en que se formaban equipos de distintas disciplinas y los días citados acudían al centro entrenadores cualificados para entrenar a los alumnos y para acompañar a los alumnos en los diferentes partidos del campeonato que organizaba la Comunidad de Madrid.

2.6.3. Variables utilizadas

A continuación exponemos las variables con las que hemos trabajado en esta investigación e indicaremos los procedimientos que utilizamos para obtenerlas:

1. **Edad y sexo de los alumnos**. Se obtuvieron directamente de la secretaría del centro. Como referencia, tomamos la edad al día 30 de junio de 2012 (final de curso) y la medimos en días.
2. **Calificación en la materia de Matemáticas en el curso anterior**. Se obtuvieron dichas calificaciones a través de los propios alumnos y contrastando dichos datos con los proporcionados por el centro.
3. **Calificación en la evaluación inicial**. Obtenida de forma personal por el profesor de la asignatura el 26 de septiembre de 2011 mediante la prueba que se indica en el punto 6.2 del anexo.
4. **Calificación en las pruebas de resolución de problemas**. Obtenidas de forma personal por el profesor de la asignaturas mediante las pruebas que se indican en

el punto 6.3 del anexo y teniendo en cuenta los criterios de corrección mencionados en el punto 2.4.2. Se realizó una prueba en cada trimestre. La del primer trimestre se realizó el día 21 de noviembre de 2011, la del segundo trimestre el día 20 de febrero de 2012 y la del tercer trimestre el día 28 de mayo de 2012.

5. **Dificultad de las pruebas de resolución de problemas**. La indicaron directamente los alumnos tras realizar cada una de las pruebas.
6. **Calificación en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura**. Fueron tomadas de las actas de evaluación de cada uno de los trimestres. En las dos asignaturas, los alumnos fueron evaluados siguiendo los mismos criterios de calificación, variando algún instrumento como las pruebas escritas, sin que ello significara una mayor dificultad para alguno de los grupos.
7. **Resultados de la prueba CDI**. La prueba se realizó el 17 de abril de 2012 bajo supervisión externa al personal del instituto. La prueba constó de los ejercicios y problemas que detallamos en los puntos 6.5 y 6.6 del anexo. La corrección de la prueba la realizaron personal cualificado externo al centro y sus resultados fueron comunicados al propio centro en la primera quincena de junio.

Mediante el proceso del análisis de la varianza (ANOVA) comprobamos si existieron diferencias significativas en las medias en torno a estas variables entre los grupos en diferentes momentos con un riesgo del 5%.

2.6.4. Programa didáctico de intervención

En el curso de 3º ESO la programación didáctica que se elaboró en el Departamento de Matemáticas del instituto donde se realizó la investigación constaba de 14 unidades didácticas, cada una perteneciente a un bloque de contenidos y con una temporalización.

<u>Bloque de contenidos comunes</u>:

UD 1: Estrategias de resolución de problemas (todo el curso)

<u>Bloque de Aritmética:</u>

UD 2: Principales conjuntos numéricos (9 sesiones)

UD 3: Proporcionalidad (5 sesiones)

<u>Bloque de Álgebra:</u>

UD 4: Sucesiones (7 sesiones)

UD 5: Lenguaje algebraico (6 sesiones)

UD 6: Ecuaciones (12 sesiones)

UD 7: Sistemas de ecuaciones lineales (7 sesiones)

<u>Bloque de Análisis:</u>

UD 8: Funciones y gráficas (4 sesiones)

UD 9: Funciones lineales y cuadráticas (8 sesiones)

<u>Bloque de Geometría:</u>

UD 10: Problemas métricos en el plano (8 sesiones)

UD 11: Movimientos en el plano (5 sesiones)

UD 12: Cuerpos en el espacio (8 sesiones)

<u>Bloque de Estadística:</u>

UD 13: Estadística Descriptiva (7 sesiones)

UD 14: Azar y probabilidad (5 sesiones)

A continuación vamos a detallar por bloques de contenido las demostraciones y argumentaciones con las que trabajamos en el grupo experimental, algunas de las cuales las utilizamos también en el grupo control.

Bloque de Aritmética

En la unidad didáctica *Principales conjuntos numéricos* se comienza haciendo un repaso general de las fracciones: simplificación, ordenación, operaciones combinadas y problemas. A parte de los ejercicios clásicos de simplificar fracciones, hallar fracciones equivalentes o de ordenación de fracciones, en el grupo experimental planteamos un ejercicio con una argumentación algo más compleja como el siguiente:

Dadas las siguientes parejas de fracciones, encuentra una fracción que se encuentre comprendida entre ambas:

a) $\frac{5}{7}$ y $\frac{6}{7}$ b) $\frac{10}{23}$ y $\frac{21}{46}$

¿Podrías encontrar un método general para encontrar siempre una fracción comprendida entre dos fracciones dadas? ¿Cuántas fracciones podemos hallar entre dos fracciones dadas de antemano?

Con este ejercicio pretendíamos que los alumnos, a través de las fracciones equivalentes, demostraran que siempre entre dos fracciones distintas se pueden encontrar infinitas fracciones entre ellas, es decir, probarían que el conjunto de los números racionales es denso.

Posteriormente trabajamos con los métodos de obtención de la fracción generatriz de números decimales exactos y periódicos. En este caso, creímos conveniente explicar en los dos grupos su obtención de una manera razonada, multiplicando los números por potencias de 10 adecuadas y restando para que se fueran partes decimales iguales, ya que la fórmula que existe para obtenerlos es un puro mecanismo que lo único que aporta al alumno es el resultado final.

En el grupo experimental, planteamos un par de problemas con fracciones en donde hay que razonar algo más que en los problemas usuales que se suelen plantear en este nivel.

En un pueblo pequeñito de un valle se va a celebrar un partido de fútbol entre casados y solteros. Con tal motivo el periódico local publicó la noticia de que los $4/5$ *de los hombres están casados con los* $5/7$ *de las mujeres. La tradición de éste pueblo impide casarse con forasteros. Si en el pueblo hay 212 habitantes, ¿cuántos hombres solteros hay en el pueblo? ¿Cuál es la proporción de personas casadas en el pueblo?*

En un parlamento se tenía que votar dos opciones A y B. La opción A la votaron el $46,\widehat{6}$ *% de los parlamentarios, la opción B el 25 % y se abstuvieron el restante* $28,\widehat{3}$ *% de los parlamentarios. Si el número de parlamentarios sabemos que está entre 220 y 250, calcula el número exacto de parlamentarios que hay.*

En grupo control, para adaptar la temporalización, realizamos una sesión en el aula de informática con Thatquiz en la que el objetivo fundamental era que los alumnos se autoevaluaran sobre los contenidos estudiados.

A continuación se trabajó con las propiedades de las operaciones con potencias y las raíces. En este punto pedimos a los alumnos del grupo experimental que investigaran por qué $\sqrt{2}$ es un número que no se puede expresar en forma de fracción, es decir, demostrar que es irracional. Los alumnos expusieron la demostración clásica por reducción al absurdo (ver el ejemplo 2 del punto 6.1.2), mientras que el profesor expuso una algo menos conocida basada en las terminaciones (ver el ejemplo 1 del punto 6.1.4).

Siguiendo con los números irracionales, también propusimos en el grupo experimental un ejercicio como el siguiente:

Si a y b son dos números irracionales positivos, decide razonadamente si son ciertas o falsas estas afirmaciones:

a) *La suma de a + b es necesariamente un número irracional.*

b) *El producto de* $a \cdot b$ *es necesariamente un número irracional.*

c) *La potencia* a^b *es necesariamente un número irracional.*

En este ejercicio no se trata directamente de demostrar, ya que primero hay que conjeturar si estas afirmaciones son ciertas o falsas. De hecho, es fácil probar que las dos primeras son falsas. En la primera nos basta con sumar los números irracionales $0{,}100100010000\cdots + 0{,}0110111011110\cdots = 0{,}\widehat{1}$. Al ser el resultado un número periódico, ya sabemos que es un número racional. Más fácil aún era el segundo apartado, ya que sabemos que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$. El tercer apartado tiene una mayor dificultad y requirió una ayuda previa por parte del profesor ya que la forma de demostrarlo es exhaustiva. Consideremos el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Este número es un número irracional elevado a otro número irracional. Tenemos dos posibilidades, o es racional, en cuyo caso ya tendríamos el contraejemplo buscado, o es irracional. Si es irracional, entonces consideramos el número $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$, que nuevamente es un número irracional elevado a un número irracional. Por las propiedades de las potencias, este número es $\sqrt{2}^{2} = 2$, que es un número racional. Por lo tanto hemos probado que esa afirmación es falsa ya que o $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ o lo es $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$. Eso sí, no hemos podido dilucidar cuál de los dos números cumple que es un número irracional elevado a un número irracional que tiene por resultado un número racional, aunque estamos seguros que uno de los dos cumple dicha afirmación. Este último apartado fue excesivo para la mayoría de los alumnos, aunque unos cinco alumnos sí que parecieron haber entendido este tipo de razonamiento.

Para cerrar esta unidad didáctica trabajaríamos en los dos grupos de una manera similar con los números en notación científica y sus operaciones. Estos contenidos fueron tratados también en la asignatura de Física y Química, por lo que tampoco nos extendimos demasiado en su temporalización.

En la unidad didáctica *Proporcionalidad* los métodos que utilizamos fueron similares en los dos grupos, razonando todos los procedimientos que se ven en este tema: proporcionalidad directa e inversa, repartos directa e inversamente proporcionales, proporcionalidad compuesta, problemas de mezclas, problemas de encuentro, problemas de alcance y porcentajes. La única diferencia que marcamos fue que en la proporcionalidad compuesta en el grupo control hicimos un razonamiento más extenso de los cálculos que se realizan para resolver este tipo de problemas.

Bloque de Álgebra

La unidad didáctica *Sucesiones*, con la que se inició el bloque de Álgebra, se prestaba mucho a las demostraciones ya que muchos de los resultados que se utilizaban eran fácilmente demostrables. Debido a que los conceptos y procedimientos que se trataban en esta unidad didáctica eran nuevos para los alumnos, suele ser frecuente que esta sea la unidad en la que más dificultades encuentran.

El inicio de la unidad lo hicimos igual en ambos grupos, introduciendo los conceptos de sucesión, término general y sucesión recurrente, todo esto complementándolo con la realización de varios ejercicios numéricos con diferentes sucesiones en donde explicamos estos conceptos.

A continuación comenzamos a trabajar con las progresiones aritméticas. Las definimos, pusimos ejemplos y en los dos grupos obtuvimos de una forma argumentada la expresión del término general de cualquier progresión aritmética en función de su primer término y de la diferencia $a_n = a_1 + d \cdot (n-1)$. Después explicamos cómo se calcula la suma de los *n* primeros términos de una progresión aritmética. En el grupo control, comenzamos intentando sumar 1 + 2 + 3 + … + 99 + 100. En estos casos siempre suele haber algún alumno que se dé cuenta de que si se le da la vuelta a la suma, los sumandos que obtenemos son iguales y a partir de ahí obtenemos la suma que nos pedían. Con otros ejemplos vimos que esto pasa siempre y a partir de ahí obtuvimos la expresión general:

$$\left.\begin{array}{rccccc} S_n = & a_1 + & a_2 + & \cdots + & a_{n-1} + & a_n \\ + \; S_n = & a_n + & a_{n-1} + & \cdots + & a_2 + & a_1 \\ \hline 2S_n = & (a_1 + a_n) + & (a_1 + a_n) + & \cdots + & (a_1 + a_n) + & (a_1 + a_n) \end{array}\right\} \Rightarrow S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

En el grupo experimental el procedimiento fue similar, con la salvedad de que la demostración la hicimos con más rigor, ya que demostramos que si *n*, *m*, *p* y *q* son números naturales tales que $n + m = p + q$, entonces los términos de la progresión aritmética correspondiente verifican que $a_n + a_m = a_p + a_q$, es decir, demostramos que efectivamente cuando damos la vuelta a la suma siempre la suma por columnas va a ser la misma. Esta demostración es muy sencilla ya que:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = a_1 + d \cdot (n-1) \\ a_m = a_1 + d \cdot (m-1) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + a_m = 2a_1 + 2d\,(n + m - 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_p = a_1 + d \cdot (p-1) \\ a_q = a_1 + d \cdot (q-1) \end{array}\right\} \Rightarrow a_n + a_m = 2a_1 + 2d\,(p + q - 2)$$

Como $n + m = p + q$, esos dos valores coinciden.

Tras unos ejercicios sobre estos contenidos, continuamos trabajando con las progresiones geométricas. Comenzamos en los dos grupos obteniendo de forma razonada el término general en función del primer y de la razón $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$. Como en el caso anterior, a continuación explicamos cómo se suman los n primeros términos de una progresión geométrica. Mientras que en el grupo control nos centramos en proporcionar las fórmulas que se utilizan tanto en el caso finito como en el infinito, en el grupo experimental deducimos las fórmulas que se emplean de una forma razonada. Para el caso finito, se observa fácilmente que si la suma la multiplicamos por la razón r, el primer término se convierte en el segundo, el segundo en el tercero, y así sucesivamente. Restando las dos expresión ya nos queda el resultado en función del primer término, la razón y el número de términos que queramos sumar.

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} S_n = & a_1 & +a_2 & + & \cdots & +a_n & \\ -\quad r \cdot S_n = & & -a_2 & - & \cdots & -a_n & -r \cdot a_n \\ \hline (1-r) S_n = & a_1 + & & & & & -r \cdot a_n \end{array}\right\} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - r \cdot a_n}{1-r} = \frac{a_1 - r^n a_1}{1-r}$$

Con ejemplos en donde la razón era 2 o 3 vimos que esta expresión daba un número muy elevado cuando sumábamos un número de términos grande. Planteamos la cuestión de por qué esto era así y fácilmente dedujeron los alumnos que el causante de este hecho era que el término r^n se hacía muy grande cuando hacíamos crecer n. En este punto planteamos si esto iba a ser siempre así. Las respuestas fueron variadas. Algunos alumnos que contestaron que sí, otros dijeron que no cuando la razón fuera 1 o 0, otros tenían dudas de que si esto pasaría cuando la razón fuera negativa y, los más acertados, después de un pequeño debate, se dieron cuenta de que esto no pasaría cuando $-1 < r < 1$. En estos casos, vimos con varios ejemplos geométricos, con números periódicos y con sumas que realizamos con ayuda de una hoja de cálculo que se podían calcular sumas de infinitos términos, obteniendo razonadamente la fórmula $S = \frac{a_1}{1-r}$.

El tiempo que nos llevó la obtención de estas fórmulas de forma razonada los compensamos en el grupo control con la realización de más ejercicios prácticos sobre estos contenidos, en los que pretendimos centrarnos en las utilidades prácticas de las sucesiones en las Matemáticas y en la vida cotidiana.

La siguiente unidad didáctica, *Lenguaje algebraico*, la iniciamos en los dos grupos con un repaso de contenidos y procedimientos tratados en el curso anterior como son traducciones sencillas al lenguaje algebraico, concepto de polinomio (grado y valor numérico) y suma, resta y multiplicación de polinomios. A continuación, explicaríamos en los dos grupos la división de polinomios, tanto el método manual, como la regla de Ruffini. No creímos adecuado dar una justificación de esta regla ya que creemos que es de un nivel no alcanzable por la mayoría de los alumnos. Tras realizar varias divisiones por los dos métodos, continuamos recordando las identidades notables. En el grupo control las deducimos algebraicamente mediante una simple multiplicación de polinomios.

Cuadrado de una suma:

$$\begin{array}{ccccc} & & a & + & b \\ & x & a & + & b \\ \hline & & ab & + & b^2 \\ a^2 & + & ab & & \\ \hline a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{array}$$

Cuadrado de una diferencia:

$$\begin{array}{ccccc} & & a & - & b \\ & x & a & - & b \\ \hline & - & ab & + & b^2 \\ a^2 & - & ab & & \\ \hline a^2 & - & 2ab & + & b^2 \end{array}$$

Suma por diferencia:

$$\begin{array}{cccc} & a & + & b \\ x & a & - & b \\ \hline & -\ ab & - & b^2 \\ a^2 & +\ ab & & \\ \hline a^2 & & - & b^2 \end{array}$$

En el grupo experimental, además de algebraicamente, las justificamos geométricamente. Para ver este método podemos consultar el ejemplo 2 del punto 6.1.12 en donde se muestra la demostración geométrica del cuadrado de una suma. A continuación indicamos como, de una manera totalmente análoga, se puede demostrar de forma geométrica la identidad notable del cuadrado de una diferencia.

Construimos un cuadrado de lado *a* en el que se indican en dos de sus lados contiguos una medida *b*, con *b* < *a*. Indicamos también las áreas de los cuatro rectángulos que se forman.

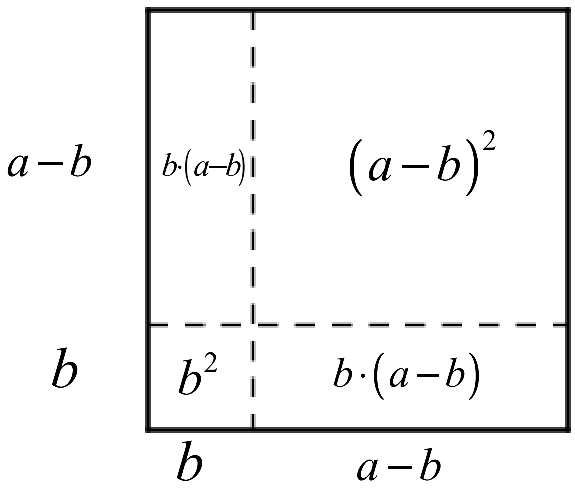


Figura 11. **Demostración de la identidad notable del cuadrado de una diferencia.**

Como las áreas deben coincidir:

$$a^2 = (a-b)^2 + b^2 + 2b(a-b) \Rightarrow a^2 - b^2 - 2ba + 2b^2 = (a-b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$$

En los dos grupos realizamos ejercicios de desarrollo de expresiones algebraicas y simplificación de fracciones algebraicas utilizando las identidades notables. Además, en los dos grupos, propusimos ejercicios numéricos como los siguientes para que los alumnos aplicaran estos contenidos algebraicos con números concretos:

Utiliza las identidades notables para calcular:

a) $\dfrac{2012^2-1}{2013}$

b) $2012^2-2010\cdot 2014$

c) $\sqrt{11+\sqrt{72}}+\sqrt{11-\sqrt{72}}$

Terminamos repasando cómo se saca factor común de expresiones algebraicas y utilizamos estos procedimientos para simplificar fracciones algebraicas. En el grupo experimental añadimos un ejercicio consistente en realizar pequeñas pruebas utilizando el Álgebra como por ejemplo que el producto de dos números impares siempre es un número impar o que la suma de tres números consecutivos es siempre un múltiplo de 3, y un ejercicio de *matemagía* que debían justificar algebraicamente similar al que exponemos en el punto 1.8.1.

En la siguiente unidad didáctica, *Ecuaciones*, la iniciamos en los dos grupos repasando cómo se resuelven ecuaciones de primer grado, analizando cómo se quitaban correctamente paréntesis y denominadores. Tras hacer ejercicios de resolución de este tipo de ecuaciones pasamos a resolver problemas relacionados con situaciones cotidianas que se resolvían planteando y resolviendo ecuaciones de primer grado. A continuación repasamos cómo se solucionan los distintos tipos (completas e incompletas) de ecuaciones de segundo grado. Mientras que en el grupo control nos ceñimos a explicar cómo se utiliza la fórmula de resolución en las ecuaciones de segundo grado completas, en el grupo experimental mostramos a los alumnos cómo se deduce esta fórmula, cuestión esta adecuada en nuestra opinión, ya que se utilizan técnicas vistas en la unidad didáctica anterior. Su demostración está detallada en el ejemplo 2 del punto 6.1.1 del anexo.

El procedimiento era complicado que se le ocurriera a un alumno por sí mismo, por lo que propusimos que investigaran la cuestión y que alguien la explicara posteriormente en clase. Pudimos comprobar que varios alumnos encontraron la forma de hacerlo y, lo más importante, comprendieron el procedimiento.

También en el grupo experimental deducimos para la ecuación de segundo grado las conocidas como fórmulas de Cardano–Vieta. Estas fórmulas dicen que si una ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones x_1 y x_2 entonces se verifica que $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ y que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. La demostración de este hecho es fácil ya que basta con partir de las soluciones dadas por la fórmula y operar algebraicamente:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Utilizando estas formulas en grupo experimental resolvimos algunas ecuaciones de segundo grado con $a=1$. Así, por ejemplo, si quisiéramos resolver la ecuación $x^2-5x+6=0$ mediante estas fórmulas lo único que habría que pensar es buscar dos números cuyo producto sea 6 y su suma sea 5. Claramente, estos números son 2 y 3.

Tras hacer en los dos grupos ejercicios consistentes en resolver ecuaciones de segundo grado de distintos niveles (incompletas, completas, con identidades notables, con producto de polinomios y con denominadores) y resolver algunos problemas sencillos relacionados con ámbitos reales en los que hay que emplear ecuaciones de segundo grado, terminamos la unidad didáctica enseñando a los alumnos a resolver otros tipos de ecuaciones sencillas como pueden ser ecuaciones factorizadas igualadas a cero, ecuaciones bicuadradas o ecuaciones sencillas con raíces cuadradas, justificando los pasos que hacemos en cada caso.

La última unidad didáctica del bloque de Álgebra fue *Sistema de ecuaciones lineales*. En ella se repasaron básicamente los contenidos y procedimientos que se trabajaron en el curso anterior que son fundamentalmente resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas por los métodos de sustitución, igualación y reducción, y resolver problemas relacionados con las Matemáticas y situaciones cotidianas que se solucionen planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. La diferencia con el curso anterior consistió en que los sistemas que resolvimos eran más complicados, con paréntesis, denominadores y con solución fraccionaria, y que la dificultad en el planteamiento de algunos problemas era algo mayor que la que tenían los problemas del curso anterior. En esta unidad didáctica se utilizó la misma metodología en los dos grupos, salvo cuando se trataron los sistemas sin solución y con infinitas soluciones, en donde el rigor con la nomenclatura en el grupo experimental fue mayor que en el grupo control.

Bloque de Análisis

En la primera unidad de este bloque, *Funciones y gráficas*, la metodología que usamos en las dos clases fue la misma, ya que en los contenidos que se trabajan en esta unidad son básicamente aquellos que sirven para describir funciones y no se prestan a demostraciones, ni a argumentaciones complejas. Se trabajaron aspectos como el concepto de función, dominio, intervalos de decrecimiento y crecimiento, máximos y mínimos (absolutos y relativos), periodicidad y continuidad. Todos estos contenidos se trabajaron a partir de una gráfica dada. También se estudiaron casos aplicados a situaciones reales en donde el alumno, a partir de unos datos, debía esbozar una gráfica que represente la situación citada.

También utilizamos una metodología parecida en los dos grupos en la siguiente unidad didáctica, *Funciones lineales y cuadráticas*. En esta unidad representamos gráficamente este tipo de funciones, analizando las características propias de dichas funciones, y resolvimos problemas aplicados a situaciones reales en los que intervenían este tipo de funciones. Con ayuda del programa Geogebra y de la pizarra digital nos ayudamos para representarlas gráficamente y ver sus características.

A nivel de demostraciones, lo único con lo que trabajamos en el grupo experimental fue la demostración de que el vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ se encuentra en el punto de abscisa $x = \frac{-b}{2a}$, analizando solo el caso en que $a > 0$.

Lo primero que hicimos es ver cómo afecta el coeficiente a en una parábola. Para ello representamos las parábolas $y = 0,5x^2$ (verde), $y = x^2$ (negra), $y = 2x^2$ (azul) e $y = 3x^2$ (roja). Todas estas parábolas tienen su vértice en el punto (0,0).

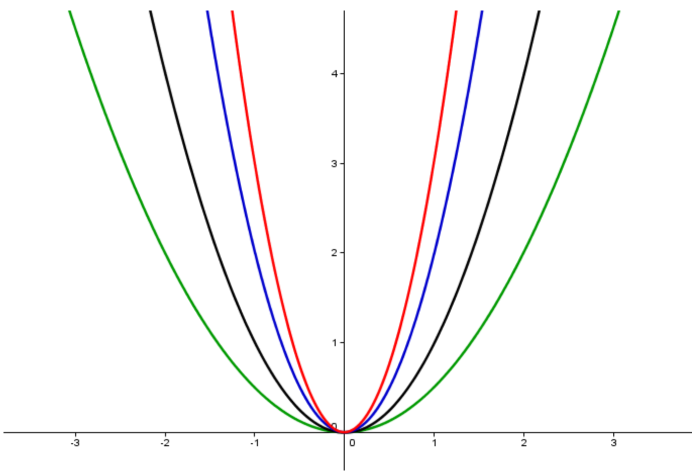


Gráfico 6. **Determinación del vértice de una parábola I.**

A continuación, observamos las traslaciones verticales que se producen cuando a una parábola le sumamos o restamos una constante. En el gráfico 5 vemos las parábolas $y = x^2$ (negra), $y = x^2 + 2$ (verde) e $y = x^2 - 1$ (roja).

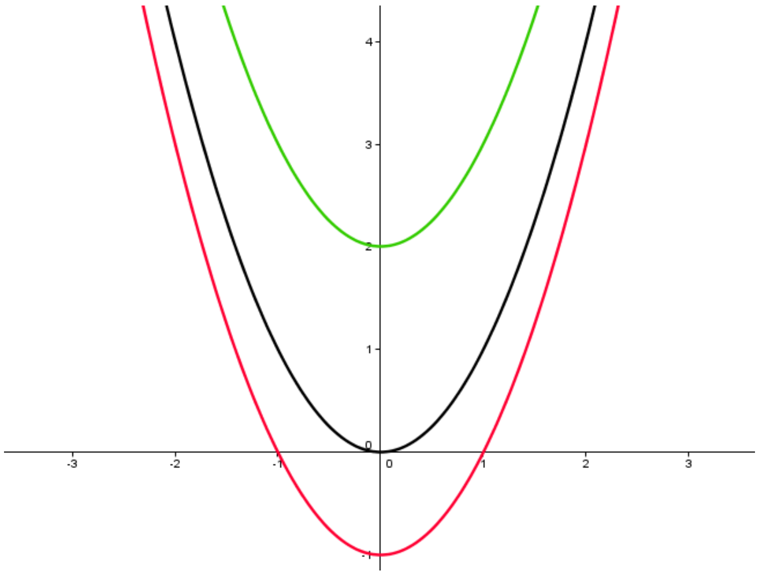


Gráfico 7. **Determinación del vértice de una parábola II.**

Se puede observar que en las parábolas $y = ax^2 + c$ sigue estando el vértice en un punto cuya abscisa es $x = 0$.

A continuación, vimos como se producían traslaciones horizontales al sustituir la variable x por $x \pm h$. En el gráfico 6 comparamos la gráfica de $y = x^2$ (negra) con las gráficas de $y = (x+2)^2$ (verde) que se desplaza 2 unidades a la izquierda y con la gráfica de $y = (x-1)^2$ (roja) que se desplaza 1 unidad a la derecha.

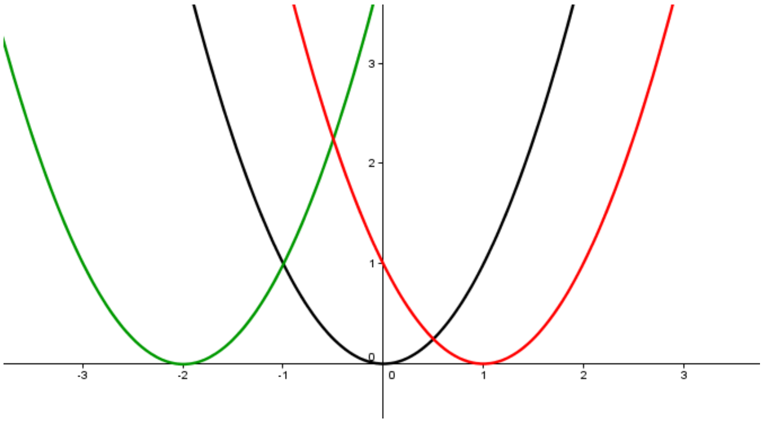


Gráfico 8. **Determinación del vértice de una parábola III.**

Fácilmente se observa que la abscisa del vértice en estos casos se desplaza igual que la parábola. Por lo tanto, cualquier parábola se puede expresar mediante traslaciones horizontales y verticales como $y = a(x-h)^2 + c$, en cuyo caso la abscisa está en $x = h$. Desarrollando esta expresión e igualando coeficientes con la expresión general obtenemos la conocida fórmula de la abscisa del vértice de una parábola.

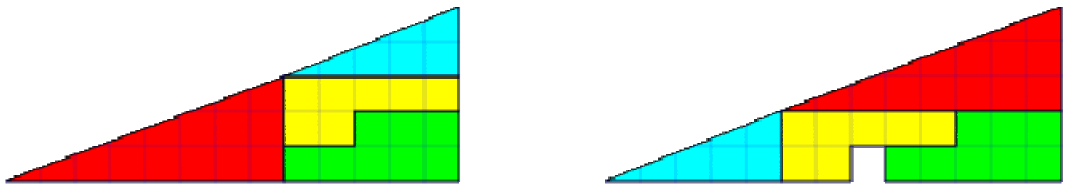
$$y = a(x-h)^2 + c \Rightarrow y = ax^2 + ah^2 - 2ahx + c \Rightarrow ax^2 - 2ahx + ah^2 + c = 0$$

$$b = -2ah \Rightarrow h = \frac{-b}{2a}$$

Estos procedimientos no fueron vistos en el grupo control.

A parte de esta demostración, en el grupo experimental propusimos a los alumnos que resolvieran un problema de argumentación algo más compleja como es el conocido como la "*paradoja del cuadrado perdido*".

> *Si observamos las dos figuras siguientes, los dos triángulos rectángulos tienen la misma base (13 cuadrados) y la misma altura (5 cuadrados), y además están formados por las mismas piezas. ¿Cómo es posible que sobre un cuadrado en el segundo?*



Figuras 12 y 13. **Paradoja del cuadrado perdido.**

La solución a este problema se basa en que en realidad las figuras no son triángulos ya que si calculamos las pendientes de las piezas que forman la supuesta hipotenusa del triángulo (roja y azul), aspecto este estudiado en esta unidad didáctica, vemos que obtenemos valores distintos y que por tanto los tres puntos de ese lado no están alineados.

$$m_{pieza\ roja} = \frac{3}{8} = 0,375 \qquad m_{pieza\ azúl} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Este problema los resolvieron sin ayuda dos alumnos y con ayuda del profesor se dieron cuenta de la ilusión óptica prácticamente todos los alumnos.

En el grupo control sustituimos estas dos actividades por una sesión en el aula de informática en donde los alumnos se iniciaron en la práctica del manejo del Geogebra con una actividad en donde representaron funciones lineales y cuadráticas y obtuvieron puntos de corte entre ellas.

Bloque de Geometría

El curso 2011/2012 tuvo en la Comunidad de Madrid unas circunstancias especiales, sobre todo en su inicio de curso. Debido a los recortes presupuestarios que se produjeron en la Educación Pública por parte del gobierno regional, los sindicatos del sector convocaron en el primer trimestre nueve días de huelga. Esto unido a otras circunstancias más habituales como asistencia por parte del alumnado y del profesor a actividades extraescolares o realización de las pruebas de diagnóstico que establece el gobierno regional hizo que la temporalización de la programación no pudiera cumplirse. En una reunión de departamento, los dos profesores que impartíamos 3º ESO acordamos, ajustándonos a argumentos didácticos, suprimir de la programación la unidad didáctica 11 *Movimientos en el plano* y reducir algunos contenidos de la unidad didáctica 12 *Figuras en el espacio*.

En la unidad didáctica 10, *Problemas métricos en el plano*, comenzamos en los dos grupos repasando contenidos con los que trabajaron en el curso anterior como son ángulos en diferentes figuras, las figuras semejantes, los criterios de semejanza en triángulos y el teorema de Tales y sus aplicaciones en problemas de la vida cotidiana. En los dos grupos utilizamos el programa Geogebra para apoyar las explicaciones y solicitamos a los alumnos que realizaran la demostración de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180º (puede consultarse en el ejemplo 1 del punto 6.1.12) y que la aplicaran para demostrar que en un polígono convexo de *n* lados los ángulos interiores suman $(n-2)\cdot 180^{\circ}$. En los dos grupos bastantes alumnos trajeron hecha la demostración, una vez consultada por sus propios medios, y la comprendieron, aspecto este no sorprendente ya que se trata de una demostración fácilmente comprensible desde un punto de vista visual.

En el grupo experimental demostramos que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto (circuncentro) que equidista de los tres vértices. Este hecho lo vimos con ayuda del Geogebra. Construimos un triángulo y trazamos la mediatriz a uno de sus lados. Moviendo un punto a lo largo de la mediatriz comprobamos que siempre se encontraba a la misma distancia de los dos vértices del triángulo del lado sobre el que trazamos la mediatriz, razonando por qué esto era así. A continuación trazamos otra mediatriz y vimos que, lógicamente, el punto donde se cortaban estaba a la misma distancia de los tres vértices y además analizamos por qué la tercera mediatriz necesariamente tenía que pasar por ese punto.

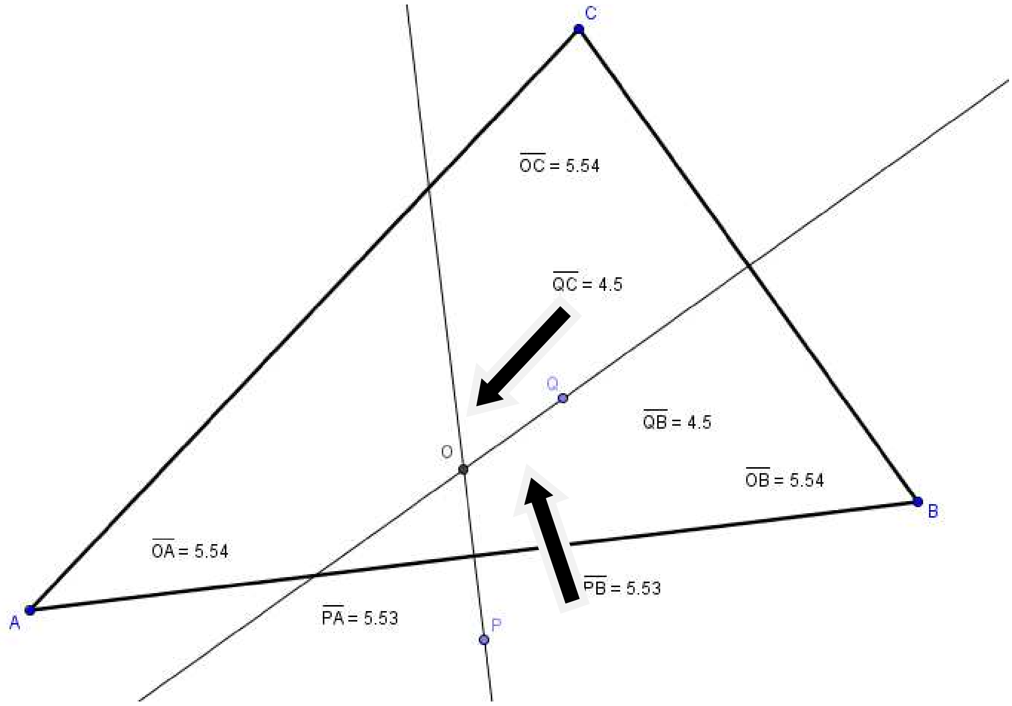


Figura 14. **Demostración de que las tres mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.**

También demostramos que las tres bisectrices de un triángulo se cortan en un punto (incentro) que equidista de los tres lados. Trabajamos esta afirmación de un modo totalmente análogo al anterior. Esta demostración y la anterior no la trabajamos en el grupo control.

En el grupo experimental realizamos una demostración del teorema de Tales aplicado a triángulos que están en posición de Tales.

> *Si dos triángulos están en posición de Tales entonces son semejantes y sus lados son por tanto proporcionales.*
>
> Lo que demostramos en clase es que en dos triángulos como los de la figura 15 (posición de Tales) se cumplirá que $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}$.

Como los segmentos BD y CE son paralelos, por estar los triángulos en posición de Tales, los triángulos CEB y CED tendrán la misma área, ya que tienen la misma base y la misma altura. Por tanto, los triángulos ABE y ACD también tendrán la misma área entre sí.

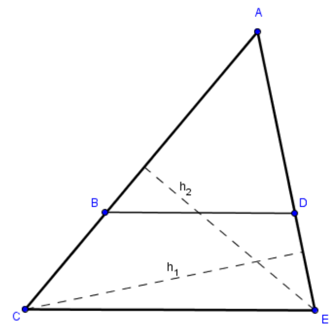


Figura 15. **Demostración del teorema de Tales.**

Como Área (ABE) = Área (ACD), entonces $\dfrac{AB \cdot h_1}{2} = \dfrac{AD \cdot h_2}{2}$.

Como Área (CEB) = Área (CED), entonces $\dfrac{BC \cdot h_1}{2} = \dfrac{DE \cdot h_2}{2}$.

Dividiendo las dos expresiones obtenemos que $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{DE}$.

En grupo experimental propusimos algún problema basado en la semejanza de triángulos con una argumentación algo más compleja, como por ejemplo el siguiente:

Si P y Q son los puntos medio del los lados del cuadrado de la figura cuyo perímetro es de 4 cm, calcular el área del rectángulo sombreado.

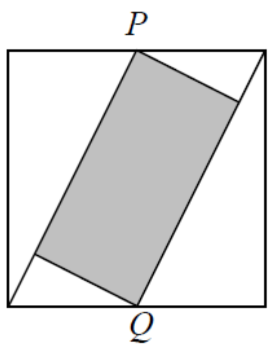


Figura 16. **Problema de semejanza.**

La solución de este problema se basa en restar al área de cuadrado el área de los cuatro triángulos rectángulos que se forman que son iguales dos a dos. Como estos triángulos tienen los mismos ángulos son semejantes con razón de semejanza *r*. Resulta fácil observar que cada triángulo rectángulo “grande” es $\frac{1}{4}$ del cuadrado, con lo que el área comprendida entre los dos es de $\frac{1}{2}$. Para calcular el área comprendida entre los dos calculemos la razón de semejanza entre los triángulos. Como la hipotenusa del triángulo rectángulo “grande” es $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ y la del “pequeño” es $\frac{1}{2}$, la razón de semejanza será $r=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Luego, el área de los dos triángulos rectángulos pequeños será $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{1}{10}$. Como el área del cuadrado es de 1 cm^2, el área del rectángulo pedido será de $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$ cm^2.

A continuación, recordamos el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones para calcular longitudes y áreas. La única diferencia con los contenidos del año pasado es que en este año pedimos a los alumnos aplicaciones algo más complicadas como puede ser calcular el área de un triángulo escaleno conociendo sus tres lados. En los dos grupos propusimos que los alumnos buscaran y explicaran en clase demostraciones distintas que encontraran del teorema de Pitágoras. En el grupo experimental expusieron siete distintas, mientras que en el grupo control expusieron únicamente dos. La que más se repitió fue la que indicamos en el ejemplo 3 del punto 6.1.12. También en los dos grupos propusimos el siguiente problema para aplicar el teorema de Pitágoras:

Una persona que mide 1,70 m está de pie en la playa y observa en el horizonte un barco. Si sabes que el radio de la Tierra mide aproximadamente 6370 Km, ¿a qué distancia aproximada está el barco?

Imagen 8. **Dibujo de una persona en la playa observando un barco en el horizonte.**

Si R es el radio de la Tierra, h la altura de la persona y d la distancia al barco, por el teorema de Pitágoras sabemos que $d = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx 4,65\,Km$

Al igual que sucedió con el teorema de Tales, en el grupo experimental también propusimos algún problema con una argumentación algo más compleja en la que hubiera que aplicar el teorema de Pitágoras. El siguiente es un ejemplo:

Si el área del cuadrado ABCD de la figura es de 50 cm^2 y sabemos que BE = 1 cm, calcular el área del cuadrado interior EFGH.

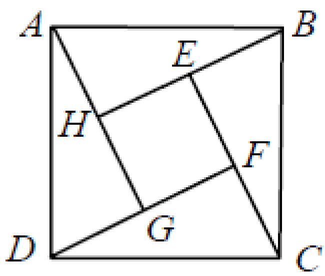


Figura 17. **Problema para aplicar el teorema de Pitágoras.**

El lado del cuadrado *ABCD* mide $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$ cm. A continuación, aplicando el teorema de Pitágoras obtenemos que el cateto *EC* del triángulo rectángulo *BCE* tiene una longitud de $EC=\sqrt{\left(5\cdot\sqrt{2}\right)^2-1^2}=\sqrt{50-1}=7$ cm. Como los cuatro triángulos rectángulos interiores al cuadrado son iguales, el área del cuadrado interior *EFGH* será $50-4\cdot\frac{7\cdot 1}{2}=50-14=36$ cm^2.

Terminamos esta unidad didáctica explicando de la misma manera en los dos grupos como se calculan longitudes y áreas de otras figuras como arcos y sectores circulares, coronas circulares, elipses o segmentos de parábola. Siempre de una manera argumentada y no exponiendo una simple formula.

De la unidad didáctica 12, Figuras en el espacio, simplemente repasamos de igual manera en los dos grupos contenidos básicos de cuerpos en el espacio: poliedros regulares y volúmenes de prismas, pirámides, cilindros, conos, troncos de cono, esferas y cuerpos compuestos. Realizamos problemas de aplicación en situaciones cotidianas y algunos en los que había que aplicar el teorema de Pitágoras o el de Tales. La única diferencia es que en el grupo experimental deducimos la fórmula del volumen de la esfera a través del volumen del cilindro y del cono.

La idea, propia de Arquímedes, consistía en considerar una semiesfera de radio *R*, un cono recto de radio y altura *R* y un cilindro recto de radio y altura *R*. Si cortamos los tres cuerpos por un plano paralelo a la base a una distancia *d* de la parte superior de las tres figuras nos quedará:

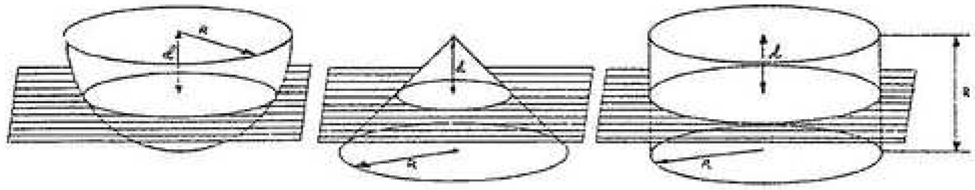


Figura 18. **Relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro.**

Nota. Fuente: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/old/08sabormat/experimentgeometria/lamejor.htm

- En el cilindro, una circunferencia de radio *R*.
- En la esfera, una circunferencia cuyo radio es $r = \sqrt{R^2 - d^2}$, el cual se deduce inmediatamente por el teorema de Pitágoras.
- En el cono recto, una circunferencia de radio *d*.

Como podemos comprobar, para cada plano se puede observar que la sección cilindro es igual a la suma de las secciones de la esfera y el cono, con lo que:

$$
\begin{aligned}
&V_{cilindro} = V_{semiesfera} + V_{cono} \\
&V_{semiesfera} = V_{cilindro} - V_{cono} \\
&V_{semiesfera} = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \\
&V_{esfera} = \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}
$$

Bloque de Estadística

En la unidad didáctica 13, *Estadística descriptiva*, comenzamos repasando algunos contenido que los alumnos trabajaron el curso anterior, como son los conceptos de población y muestra, los tipos de variables estadísticas (cuantitativas discretas, cuantitativas continuas y cualitativas), los principales gráficos estadísticos que se utilizan (diagramas de barras, histogramas de frecuencias, diagramas de sectores, etc.) y algunos parámetros estadísticos de centralización (media, mediana y moda) y de dispersión (recorrido y desviación media). Como novedad, este curso añadimos el cálculo de los parámetros de dispersión varianza, desviación típica y el coeficiente de variación. Es en este punto donde diferenciamos la metodología de los dos grupos. En el grupo control simplemente explicamos las dos formas de calcular la varianza, comprobando su equivalencia en varios ejemplos, tanto con datos aislados como tabulados. En el grupo experimental, además de lo anterior, demostramos que ambas formas de calcular la varianza son equivalentes, es decir, probamos que $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right) - \overline{x}^2$. Obviamente, para realizar esta demostración, no utilizamos una notación excesivamente rigurosa ya que se corría el riesgo que el alumno no entendiera una demostración matemáticamente fácil de realizar. La demostración consiste básicamente en desarrollar la expresión inicial mediante la igualdad notable del cuadrado de una diferencia para llegar a la expresión pedida.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \overline{x}^2 - 2x_i\overline{x}\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{x}^2 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} 2x_i\overline{x} =$$
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2\right) + \overline{x}^2 - 2\overline{x}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i^2\right) - \overline{x}^2$$

Cuando expusimos esta demostración en clase, la principal dificultad fue el lenguaje que se utiliza. Con números concretos, hicimos la misma demostración y prácticamente la totalidad de la clase observó que en efecto la igualdad era cierta. Cuando pasamos de los números concretos al caso general algo menos de la mitad de clase comprendió la demostración. Está claro que los alumnos no están aún acostumbrados a manejarse con este tipo de notaciones.

En la última unidad didáctica del curso, *Azar y probabilidad*, simplemente realizamos una primera aproximación al Cálculo de Probabilidades de sucesos aleatorios sencillos. Comenzamos definiendo conceptos básicos de esta rama de las Matemáticas como pueden ser experimento aleatorio, espacio muestral o los tipos de sucesos, para, posteriormente, calcular probabilidades de sucesos aleatorios utilizando la regla de Laplace. En esta unidad didáctica, al no presentar demostraciones que se puedan adaptar al nivel de los alumnos, no diferenciaremos entre las metodologías de los dos grupos. Lo único que realizamos relacionado con las demostraciones fue comprobar experimentalmente que las frecuencias relativas de un suceso de un experimento aleatorio tienden a estabilizarse en torno a un valor. Lo hicimos en los dos grupos con el experimento de lanzar una moneda 100 veces y comprobamos que para todos los alumnos de la clase el número de caras que salieron se encontraban en cierto equilibrio con el número de cruces.

2.7. Análisis estadístico a realizar

2.7.1. Análisis descriptivo

La Estadística Descriptiva se encarga, como su nombre indica, de describir o presentar las características principales de los datos con los que se trabaja en un estudio utilizando para ello instrumentos como tablas, gráficos o parámetros estadísticos.

En concreto, en nuestra investigación, el estudio descriptivo de los datos que obtuvimos lo desarrollamos en el punto 3.1. Los instrumentos que hemos utilizado han sido:

1. **Tablas estadísticas**. Las tablas que hemos utilizado han sido básicamente diseñadas para exponer los datos obtenidos de una forma clara y concisa. En ella prácticamente no hemos realizado cálculos estadísticos, salvo la exposición en la parte inferior de las tablas de los valores medios de las variables.
2. **Gráficos estadísticos**. Son unos instrumentos muy utilizados en la Estadística ya que de una manera rápida y atractiva se pueden presentar los datos y compararlos. En Estadística hay una gran cantidad de gráficos estadísticos. Nosotros hemos utilizado:
   - 2.1. **Diagrama de barras**. Los hemos utilizado para comparar los resultados de los grupos experimental y control en los distintos problemas propuestos.
   - 2.2. **Diagrama de sectores**. Hemos realizados este tipo de gráfico para los grupos experimental y control para describir los resultados obtenidos en las pruebas de problemas, las asignaturas y la prueba CDI y analizar los subgrupos predominantes en cada caso y su evolución a lo largo del curso.

2.3. **Gráfico de líneas**. Han sido utilizados para analizar en los grupos experimental y control la evolución en los resultados de variables como los resultados en las pruebas de problemas, en la dificultad asignada a estas pruebas y en las calificaciones en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura.

2.4. **Nube de puntos y recta de regresión lineal**. Los hemos utilizado para analizar el grado de relación entre los resultados obtenidos por los grupos experimental y control en las calificaciones de las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura con los resultados obtenidos en dichas materias en la prueba CDI.

3. **Parámetros estadísticos**. Son valores que describen la población. En nuestra investigación hemos utilizado:

3.1. **Media aritmética**. Es el parámetro de centralización más utilizado. Se ha calculado para los grupos experimental y control para todos los resultados cuantitativos obtenidos con el fin de comparar los resultados y utilizar con posterioridad esos datos en los análisis de la varianza realizados.

3.2. **Varianza y desviación típica**. La varianza y la desviación típica son los parámetros de dispersión más utilizados. Los hemos calculado para los grupos experimental y control para todos los resultados cuantitativos con el fin de analizar la dispersión de los datos, comparando los resultados de ambos grupos, y para utilizar dichos datos en los posteriores análisis de varianza.

3.3. **Coeficiente de correlación y de determinación.** Como dijimos con anterioridad, realizamos un estudio de regresión lineal en los grupos experimental y control para analizar en qué medida estaban relacionadas las calificaciones de Matemáticas y de Lengua y Literatura con las calificaciones obtenidas en dichas materias en la prueba CDI, calculando para ello estos coeficientes.

2.7.2. Análisis inferencial

La Estadística Inferencial comprende los métodos y procedimientos que permiten, por medio de la inducción, determinar propiedades de la población estudiada a partir de los datos que proporciona una muestra de la misma, mostrando los límites y la posibilidad de generalización de los resultados en función de las condiciones empleadas en la selección de los individuos de la muestra. Esta generalización se basa en la teoría de las probabilidades y es por ello que también se le denomina Estadística Matemática.

Para que los resultados proporcionados sean aceptables deben:

a) Basarse en una técnica estadística adecuada al problema y suficientemente adecuada al contexto de la investigación.
b) Utilizar una muestra que sea representativa de la población. Para ello influyen principalmente tres factores, el modo de selección de los individuos de la muestra (aleatorio), la técnica estadística y el error muestral.

En nuestra investigación el proceso que repetimos fue analizar si existían diferencias significativas entre las medias de los datos del grupo control y del experimental en torno a ciertas variables. Para ello utilizamos la técnica denominada análisis de la varianza (de un factor) o abreviadamente conocida como ANOVA (Analysis of Variance). En nuestro caso, la variable "*grupos*" se consideró como variable independiente o factor y la variable cuantitativa que utilizamos en cada caso fue considerada como variable dependiente.

La hipótesis nula que contrastamos con el procedimiento del análisis de la varianza fue que las medias de las poblaciones eran iguales para la variable dependiente utilizada en cada caso. Esto lo conseguimos mediante un estadístico llamado *F* que refleja el grado similitud de las varianzas. Cuando las medias poblacionales sean iguales, las medias muestrales serán similares, con pequeñas diferencias que se le pueden atribuir al azar. En la medida en que las medias sean más diferentes entre sí, este valor de *F* irá aumentando.

Si suponemos que la población de partida se distribuye de una forma normal con igual varianza en cada muestra, el estadístico *F* se distribuye según el modelo de probabilidad *F* de (Fisher) Snedecor. En nuestros casos, el numerador siempre tiene un grado de libertad y el denominador tiene el número de observaciones totales menos un grado de libertad.

Como se trabaja habitualmente en Estadística, se rechazará la hipótesis nula de igualdad de medias cuando el nivel crítico asociado al estadístico resulte menor que 0,05. En caso contrario, no se rechazará la hipótesis de igualdad de medias.

Este estadístico lo calculamos utilizando las tablas del análisis de la varianza.

Tabla 10. **Tabla tipo del análisis de la varianza.**

Fuente de variación	**Grados de libertad**	**Suma de cuadrados**	**Media cuadrática**	**Valor de F**	***p*(>F)**
Grupo (entre grupos)	$J-1$	SC_{entre}	$MC_{entre} = \frac{SC_{entre}}{J-1}$	$\frac{MC_{entre}}{MC_{intra}}$	Tabla *F* de Snedecor
Residuales (intra grupos)	$N-J$	SC_{intra}	$MC_{intra} = \frac{SC_{intra}}{N-J}$		

Nota. Fuente: GIL, J.A. (2004). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Madrid: Uned. (p. 380)

En nuestro caso, al haber dos grupos, $J = 2$, mientras que N fue el número total de alumnos de los que teníamos los datos en cada momento. La suma de cuadrados entre grupos (SC_{entre}) fue la desviación de la media de las puntuaciones en cada grupo respecto a la media total, lo que equivale a la varianza de la media de los grupos, tratadas estas como datos individuales. La suma de cuadrados intra grupos (SC_{intra}) fue la desviación de las puntuaciones en cada grupo respecto a la media del propio grupo.

Según Gil (2004), para aplicar este análisis nos debemos apoyar tres supuestos: independencia de las observaciones, igualdad de varianzas (homocedasticidad) y normalidad.

Para llevar a cabo el análisis de la varianza de nuestros datos utilizamos el programa estadístico R, considerado generalmente como uno de los más flexibles y potentes en el mundo de la Estadística y que tiene la ventaja adicional de ser de software libre, es decir, es gratuita su descarga y utilización. Este programa se encuentra disponible en la dirección http://www.r-project.org y tiene la desventaja inicial de que se maneja mediante instrucciones, lo que supone una dificultad para las personas que no estén acostumbradas a trabajar de este modo. Sin embargo, este inconveniente tiene fácil solución ya que instalando (también gratuitamente) el paquete R-Commander se puede manejar el programa mediante una barra de menús, sin la necesidad de tener que conocer el lenguaje de instrucciones.

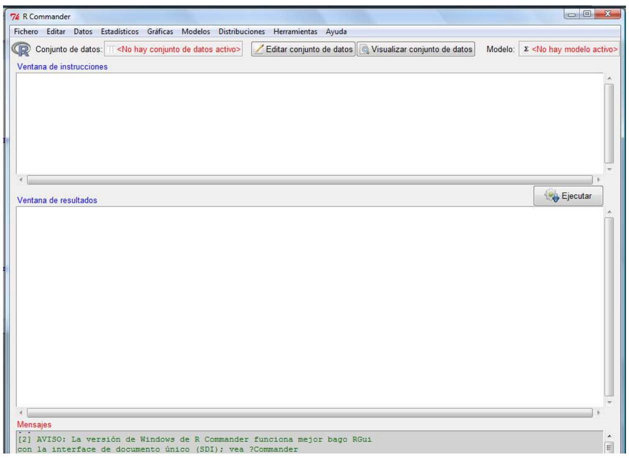


Imagen 9. **Ventana del programa R- Commander.**

3. RESULTADOS

3.1. Análisis descriptivo de los datos

3.1.1. Caracterización de la muestra

Para nuestra investigación, realizada en el curso académico 2011/2012, elegimos dos grupos del nivel de 3º ESO del instituto público IES Rafael Alberti de Coslada, en concreto los grupos B y C. Aleatoriamente decidimos que el grupo B fuera el denominado **grupo control**, mientras que el C fuera el **grupo experimental**.

Debido a la protección de datos de carácter personal, de ahora en adelante, cuando presentemos los resultados individualizados de los alumnos de estos grupos, denotaremos a los del grupo control como C1, C2, C3, etc. y a los alumnos del grupo experimental como E1, E2, E3, etc.

Los datos iniciales fundamentales del grupo control los podemos resumir en la tabla 11:

Tabla 11. **Datos iniciales del grupo control.**

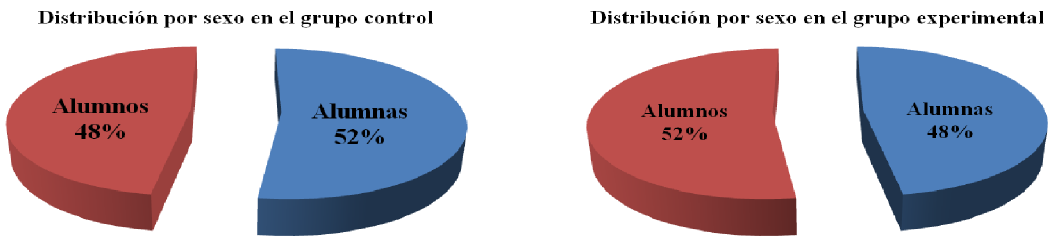
Alumno	Sexo	Fecha de nacimiento	Edad (días) a 30 - 06 - 2012	Nota en Matemáticas curso 2010/11	Evaluación inicial
C 1	Hombre	14/10/1996	5738	6	0,85
C 2	Hombre	14/01/1997	5646	4	0,65
C 3	Hombre	14/01/1997	5646	7	1,8
C 4	Mujer	21/11/1995	6066	6	1,25
C 5	Mujer	05/01/1996	6021	6	0,5
C 6	Mujer	01/11/1997	5355	8	3,25
C 7	Hombre	11/02/1996	5984	3	5
C 8	Mujer	17/09/1996	5765	4	3,9
C 9	Mujer	27/12/1997	5299	9	2,6
C 10	Hombre	04/09/1997	5413	5	2,55
C 11	Hombre	16/04/1997	5554	5	0,5
C 12	Hombre	08/12/1997	5318	6	5,05
C 13	Mujer	19/11/1997	5337	10	5,25
C 14	Mujer	08/09/1997	5409	5	0,65
C 15	Hombre	26/06/1997	5483	5	4
C 16	Mujer	03/06/1997	5506	2	1,15
C 17	Mujer	03/01/1997	5657	5	3,25
C 18	Hombre	28/06/1997	5481	5	0,5
C 19	Mujer	01/06/1997	5508	8	4,15
C 20	Mujer	16/03/1996	5950	3	5,4
C 21	Hombre	22/07/1997	5457	2	3,35
Media			**5600**	**5,43**	**2,65**

Los datos iniciales fundamentales del grupo experimental los podemos resumir en la tabla 12:

Tabla 12. **Datos iniciales del grupo experimental.**

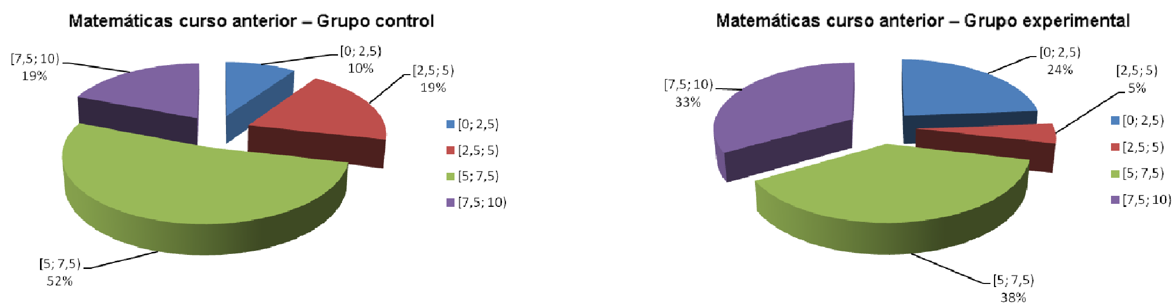
Alumno	Sexo	Fecha de nacimiento	Edad (días) a 30 - 06 - 2012	Nota en Matemáticas curso 2010/11	Evaluación inicial
E 1	Mujer	10/01/1996	6016	2	3,15
E 2	Hombre	23/02/1997	5606	5	2,6
E 3	Hombre	23/10/1997	5364	10	4,65
E 4	Hombre	28/12/1997	5298	9	
E 5	Mujer	31/07/1997	5448	10	7,3
E 6	Mujer	13/02/1995	6347	1	1,9
E 7	Mujer	06/05/1997	5534	9	
E 8	Hombre	01/08/1997	5447	8	2,9
E 9	Mujer	06/05/1997	5534	8	3,95
E 10	Hombre	11/07/1997	5468	6	1,9
E 11	Hombre	07/10/1997	5380	7	3,55
E 12	Hombre	09/04/1996	5926	4	1,25
E 13	Hombre	05/04/1997	5565	5	0,35
E 14	Hombre	29/05/1996	5876	2	0,25
E 15	Mujer	04/03/1997	5597	5	3,65
E 16	Mujer	05/03/1996	5961	2	4,35
E 17	Mujer	21/07/1997	5458	8	4,3
E 18	Mujer	03/11/1997	5353	5	1
E 19	Mujer	15/10/1996	5737	1	0,65
E 20	Hombre	11/12/1996	5680	6	1,9
E 21	Hombre	17/01/1996	6009	5	1,15
Media			**5648**	**5,62**	**2,671**

Se puede observar que ambos grupos estaban equilibrados en el número de alumnos por clase (21 alumnos en los dos casos), su distribución por sexos (ver gráficos 9 y 10) y también por edad, ya que el alumno medio del grupo control habría nacido el 1 de marzo de 1997, mientras que en el grupo experimental habría nacido el 12 de enero de 1997. En cuanto a alumnos que habían repetido algún curso también existía cierto equilibrio ya que en el grupo control eran seis alumnos, mientras que el grupo experimental eran ocho.



Gráficos 9 y 10. **Diagramas de sectores de la distribución por sexos de los grupos de trabajo.**

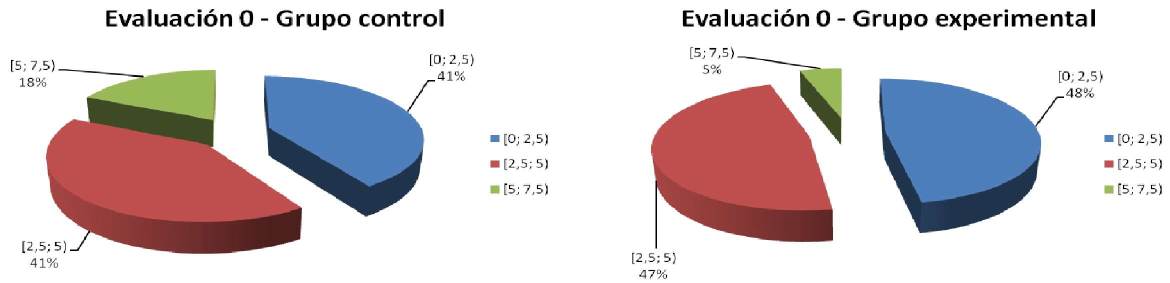
En cuanto a la nota que obtuvieron los alumnos en Matemáticas en el curso anterior, debemos tener en cuenta inicialmente que para los alumnos que se examinaron en la convocatoria extraordinaria de septiembre hemos considerado la mejor de la calificaciones entre las obtenidas en junio y septiembre. Se podía observar una mínima diferencia de 0,19 puntos a favor del grupo experimental. Sin embargo, sí que podíamos observar una cierta diferencia estructural (ver gráficos 11 y 12) ya que los resultados del grupo experimental estaban más dispersos que los del grupo control.



Gráficos 11 y 12. **Diagrama de sectores de las notas del curso anterior en Matemáticas.**

Sobre los resultados en la evaluación inicial, habría que decir que, aunque se podía observar cierta disparidad en la estructura de los diagramas de sectores que hemos elaborado (ver gráficos 13 y 14) dividiendo las notas en intervalos de longitud 2,5 puntos entendimos que se podía partir de la hipótesis de que los grupos eran homogéneos entre sí al tener notas medias muy similares, 2,65 puntos el grupo control frente a 2,67 puntos el grupo experimental. No obstante, comprobaremos este hecho posteriormente con un análisis de la varianza.

Los resultados bajos en este tipo de evaluaciones suelen ser habituales debido a la pérdida de hábitos de trabajo que suelen tener los alumnos en el periodo vacacional de verano y es común que no correspondan con los finales del curso.



Gráficos 13 y 14. **Diagrama de sectores de las notas de la evaluación inicial.**

Debido a circunstancias habituales en los centros educativos como pueden ser una incorporación al centro tardía, cambios de grupo o cambios de centro, hay determinados resultados individuales que no aparecerán en ciertos instantes.

3.1.2. Análisis de los resultados en el primer trimestre

En el primer trimestre, los resultados que obtuvimos fueron los de la calificación en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior, los de la evaluación inicial, los de la prueba de resolución de problemas y la dificultad que le asignaron los alumnos y las calificaciones del primer trimestre en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura.

En el grupo control los resultados (no indicados anteriormente) fueron:

Tabla 13. **Resultados del grupo control en el primer trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas I	Dificultad I	Matemáticas I	Lengua y Literatura I
C 1	2,9	3	1	3
C 2	1,05	8	2	4
C 3	1	4	2	5
C 4	2,45	4	1	5
C 5	2,3	5	4	5
C 6	1,9	7	5	6
C 7	2,15	7	3	4
C 8	2,15	4	5	7
C 9	6,15	5	6	7
C 10	3,65	7	4	3
C 11	0,9	7	2	5
C 12	7,8	4	3	3
C 13	5,35	5	7	8
C 14	1,65	6,5	1	2
C 15	3,75	7	5	5
C 16	1,75	6	1	5
C 17	1,85	5	4	7
C 18	2,25	8	1	2
C 19	4,25	6	5	7
C 20	1,5	8	3	6
C 21	4,25	3	3	3
Media	**2,9**	**5,69**	**3,24**	**4,86**

En el grupo experimental los resultados fueron:

Tabla 14. **Resultados del grupo experimental en el primer trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas I	Dificultad I	Matemáticas I	Lengua y Literatura I
E 1	0,1	2	4	5
E 2	1,5	7	2	2
E 3	5,9	6	9	9
E 4	8,75	4	9	9
E 5	8,75	3	9	9
E 6	2,15	8,375	1	4
E 7	6,25	3	9	8
E 8	4,4	6	9	8
E 9	4,55	6	6	7
E 10	8,25	3	8	5
E 11	2,9	7	9	6
E 12	2	8	4	5
E 13	2	2	3	4
E 14	2,75	6	2	4
E 15	0,85	6	7	5
E 16	4,65	6	6	5
E 17	5,15	8	9	9
E 18	0,75	8	5	4
E 19	0	7	1	3
E 20	3,15	7	7	6
E 21	2,3	7	4	4
Media	**3,67**	**5,73**	**5,86**	**5,76**

En cuanto a la prueba de resolución de problemas, lo primero que debemos hacer es recordar que se realizó el 21 de noviembre de 2011. No se pudo hacer a principios de curso porque nos llevó más tiempo de lo previsto su elaboración y su correspondiente proceso de verificación que detallamos en el punto 2.4.3. Por tanto, estos resultados no son puramente iniciales, como pretendimos, sino que ya se ven afectados por la distinta metodología que estábamos aplicando en ambos grupos.

Los resultados individualizados que obtuvieron los alumnos del grupo control en cada problema fueron:

Tabla 15. **Resultados del grupo control en la primera prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 1.1	P 1.2	P 1.3	P 1.4	P 1.5	P 1.6	P 1.7	P 1.8	Nota
C 1	0	0,75	0	0	0	0,5	0,9	0,75	**2,9**
C 2	0,4	0	0	0	0	0,65	0	0	**1,05**
C 3	0,4	0	0	0	0	0,6	0	0	**1**
C 4	0	0,4	0	0	0	0,1	1,2	0,75	**2,45**
C 5	0,4	0,65	0	0	0	0	0	1,25	**2,3**
C 6	0,4	0	0	0	0	0,25	0	1,25	**1,9**
C 7	0	0,5	0	0	0	1,25	0	0,5	**2,25**
C 8	0,4	0	0	0	0	0,75	0	1	**2,15**
C 9	0,4	1,25	1,25	1,25	0	0	1,25	0,75	**6,15**
C 10	0,4	0,25	0	0	0	1,25	1	0,5	**3,4**
C 11	0,4	0	0	0	0	0	0	0,5	**0,9**
C 12	0,9	1,25	1,25	1,25	0	0,65	1,25	1,25	**7,8**
C 13	0,6	1,25	1,25	0	0	0	1,25	1	**5,35**
C 14	0,4	1	0	0	0	0,25	0	0	**1,65**
C 15	0,75	1	0	0	0	1	1	0	**3,75**
C 16	0	0	0	0	0	0,25	0,5	1	**1,75**
C 17	0,4	0	0	0	0	1,25	0,2	0	**1,85**
C 18	0,5	0	0	1	0	0	0	0,75	**2,25**
C 19	0,4	1,15	0	1	0	1,2	0,5	0	**4,25**
C 20	0	0	0	0	0	1,25	0,25	0	**1,5**
C 21	0,9	0,75	0	0	0	1,2	0,25	1,15	**4,25**
Media	**0,38**	**0,49**	**0,18**	**0,21**	**0**	**0,59**	**0,45**	**0,59**	**2,90**
Sobre 10	**3,07**	**3,89**	**1,43**	**1,71**	**0**	**4,72**	**3,64**	**4,72**	

En el grupo experimental, los resultados fueron:

Tabla 16. **Resultados del grupo experimental en la primera prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 1.1	P 1.2	P 1.3	P 1.4	P 1.5	P 1.6	P 1.7	P 1.8	Nota
E 1	0	0	0	0	0	0,1	0	0	**0,1**
E 2	0	0	0	0	0	0	0,25	1,25	**1,5**
E 3	0,4	0,5	0,5	1,25	0	1,25	1,25	0,75	**5,9**
E 4	1,25	1,25	1,25	1,25	0	1,25	1,25	1,25	**8,75**
E 5	1,25	1,25	1,25	1,25	0	1,25	1,25	1,25	**8,75**
E 6	0	0,75	0	0	0	0,4	1	0	**2,15**
E 7	1,25	1,25	0,25	0	0	1,25	1,25	1	**6,25**
E 8	0,4	1,25	0	0	0	1,25	0,75	0,75	**4,4**
E 9	0,4	1,25	0	0,5	0	1,25	0,4	0,75	**4,55**
E 10	1,25	0,75	1,25	1,25	0	1,25	1,25	1,25	**8,25**
E 11	0,4	0	0	0	0	1,25	0	1,25	**2,9**
E 12	0,4	0,75	0	0	0	0,1	0,75	0	**2**
E 13	0	0	0	0	0	1	0	1	**2**
E 14	1,25	0,25	0	0	0	0	0	1,25	**2,75**
E 15	0,4	0,25	0	0	0	0	0	0,2	**0,85**
E 16	0,4	1,25	0	1,25	0	1,25	0	0,5	**4,65**
E 17	0,4	1,25	0	0	0	1,25	1	1,25	**5,15**
E 18	0	0	0	0,1	0	0,65	0	0	**0,75**
E 19	0	0	0	0	0	0	0	0	**0,9**
E 20	0,9	0,75	0	0	0	1,25	0,25	0	**3,15**
E 21	0	1,25	0	0	0	0,65	0,4	0	**2,3**
Media	**0,49**	**0,67**	**0,21**	**0,33**	**0**	**0,79**	**0,53**	**0,65**	**3,67**
Sobre 10	**3,94**	**5,33**	**1,71**	**2,61**	**0**	**6,34**	**4,21**	**5,22**	

Los resultados se pueden comparar en el gráfico 15.

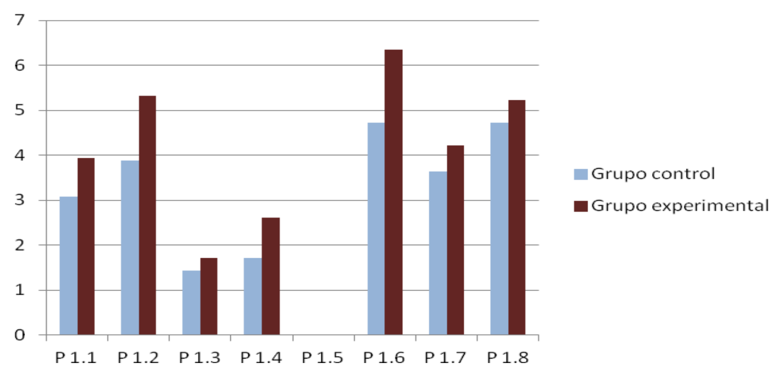
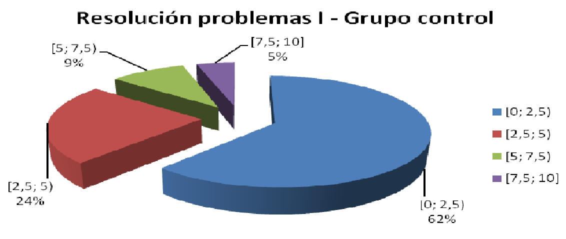
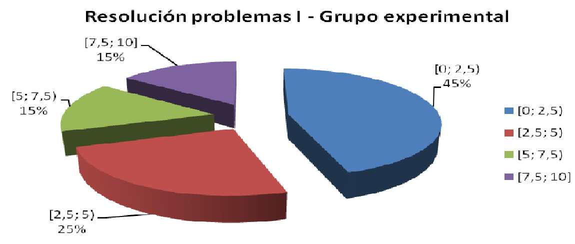


Gráfico 15. **Diagrama de barras de los resultados por problemas de la primera prueba.**

Fácilmente se observó que, salvo en el problema 1.5, el grupo experimental obtuvo mejores resultados que el grupo control en todos los problemas. En ambos grupos, los problemas en los que se obtuvieron mejores resultados fueron en el 1.6 (problema de medias) y en 1.8 (problema de conteo), mientras que los peores resultados se dieron en los dos grupos en los problemas 1.3 (problema de razonamiento lógico) y 1.5 (problema de propiedades de las potencias). En términos absolutos, podemos destacar la notable diferencia entre las puntuaciones que obtuvieron en los problemas 1.2 (1,44 puntos de diferencia en un problema elemental de aritmética) y 1.6 (1,62 puntos de diferencia). En términos relativos, la mayor diferencia se dio en el problema 1.4 (problema de conteo), donde el grupo experimental obtuvo una puntuación casi un 53% superior a la del grupo control.

En cuanto a los resultados globales de la prueba, sí que pudimos observar una cierta diferencia en los resultados ya que la nota media del grupo experimental fue 0,77 puntos superior a la media de las notas del grupo control. Estructuralmente también hubo diferencias. En el grupo control, los alumnos con una nota inferior a 2,5 puntos supusieron el 62% de la clase, mientras que este porcentaje se redujo al 45% en el grupo experimental. Otra diferencia sustancial fue el porcentaje de aprobados que en el grupo control fue de un 14% mientras que en el experimental fue de un 30%.

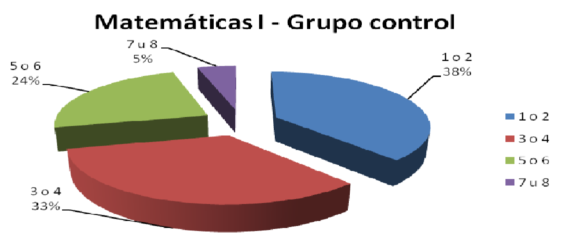


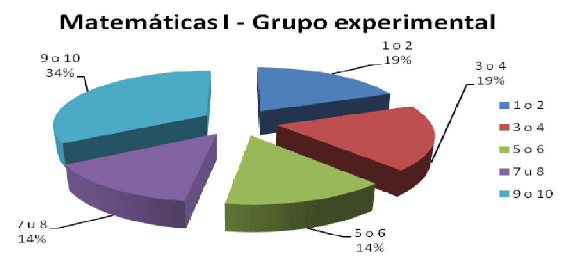


Gráficos 16 y 17. **Diagrama de sectores de las notas de la primera prueba de problemas.**

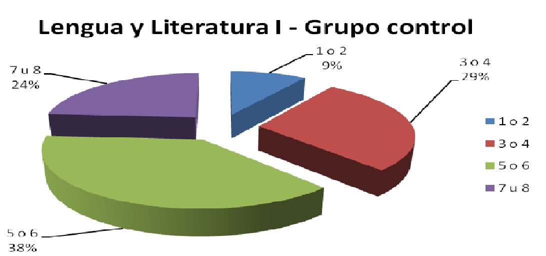
A pesar de los resultados anteriores, la dificultad con la que observaron la prueba los alumnos de ambos grupo fue similar. De hecho, la media fue ligeramente superior en el grupo experimental, 5,73 puntos frente a 5,69 puntos del grupo control. Estas puntuaciones indican que a los dos grupos no les pareció excesivamente dificultosa la prueba.

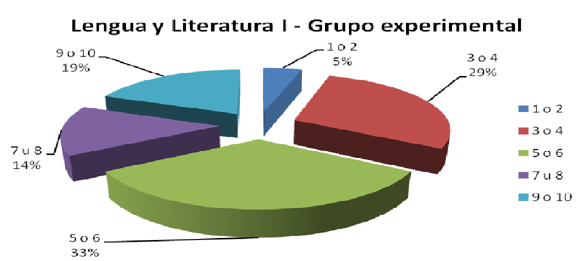
Los resultados obtenidos Lengua y Literatura y Matemáticas en el primer trimestre fueron muy superiores en el grupo experimental. La diferencia entre las notas medias en Matemáticas fue de 2,62 puntos, mientras que en Lengua y Literatura fue de 0,9 puntos. En los gráficos 18, 19, 20 y 21 vemos como estructuralmente se presentaban similitudes claras Lengua y Literatura, pero no así en Matemáticas. Por ejemplo, en Matemáticas el porcentaje de alumnos suspensos en el grupo control fue del 71%, mientras que en el grupo experimental este porcentaje se redujo al 38%. Es reseñable el porcentaje de sobresalientes en los grupos, 0% en el control y 34% en el experimental.





Gráficos 18 y 19. **Diagrama de sectores de las notas de Matemáticas en el primer trimestre.**





Gráficos 20 y 21. **Diagrama de sectores de las notas de Lengua y Literatura en el primer trimestre.**

3.1.3. Análisis de los resultados en el segundo trimestre

En el segundo trimestre, los resultados que obtuvimos fueron los de la prueba de resolución de problemas, la dificultad que le asignaron los alumnos y los resultados en la evaluación del segundo trimestre en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura.

En el grupo control los resultados fueron:

Tabla 17. **Resultados del grupo control en el segundo trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas II	Dificultad II	Matemáticas II	Lengua y Literatura II
C 1	1,5	6	1	2
C 2	2	8	4	4
C 3	1,6	5	5	4
C 4	3	8	3	3
C 5	3,1	6	6	5
C 6	2,25	6	5	5
C 7	0,25	8	3	4
C 8	1,75	8	1	5
C 9	3,75	7	7	6
C 10	0,25	10	5	4
C 11	1	8	2	3
C 12	2,5	5	2	4
C 13	2	8	7	8
C 14	1,25	8	1	3
C 15	3,5	7	5	6
C 16	1	8	1	5
C 17	2,25	8	5	6
C 18	0,25	8	2	3
C 19	3,15	9	6	6
C 20	2,25	8	6	5
C 21	1,5	10		
Media	**1,91**	**7,57**	**3,85**	**4,55**

En el grupo experimental los resultados fueron:

Tabla 18. **Resultados del grupo experimental en el segundo trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas II	Dificultad II	Matemáticas II	Lengua y Literatura II
E 1				
E 2	1	9	3	2
E 3	3,75	9	9	10
E 4	6,75	8	9	10
E 5	8,5	3	10	10
E 6	5	6	1	2
E 7	2,5	7	9	9
E 8	3,25	7	10	9
E 9	2,5	5	8	7
E 10	3	8	6	3
E 11	6,25	4	7	6
E 12	2,75	6	3	4
E 13	0,5	10	3	3
E 14	1	8	2	2
E 15	1,5	8	5	3
E 16	2,1	9	7	4
E 17	5,5	7	7	7
E 18	2,75	7	6	5
E 19	1,75	8	3	2
E 20	2,5	6	7	5
E 21	2,15	4	4	2
Media	**3,25**	**6,95**	**5,95**	**5,25**

Los resultados individualizados que obtuvieron los alumnos del grupo control en cada problema fueron los siguientes:

Tabla 19. **Resultados del grupo control en la segunda prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 2.1	P 2.2	P 2.3	P 2.4	P 2.5	P 2.6	P 2.7	P 2.8	Nota
C 1	0	0	0	1,25	0	0,25	0	0	**1,5**
C 2	0,75	0	0	1,25	0	0	0	0	**2**
C 3	0,75	0	0,25	0,5	0	0,1	0	0	**1,6**
C 4	1	0,25	0,25	1,25	0	0,25	0	0	**3**
C 5	1,25	0	0,1	1,25	0,5	0	0	0	**3,1**
C 6	0,25	0,25	0	1,25	0	0,25	0	0,25	**2,25**
C 7	0	0	0	0	0	0	0	0,25	**0,25**
C 8	0,5	0	0	1,25	0	0	0	0	**1,75**
C 9	0,5	0	0	1	1,25	0,25	0,5	0,25	**3,75**
C 10	0,25	0	0	0	0	0	0	0	**0,25**
C 11	0,75	0	0	0	0	0	0	0,25	**1**
C 12	0,5	0	0,25	0,5	0,5	0	0,5	0,25	**2,5**
C 13	0,5	0	1,25	0	0	0	0,25	0	**2**
C 14	0	0	0	1,25	0	0	0	0	**1,25**
C 15	0,5	0	1,25	1,25	0	0,25	0	0,25	**3,5**
C 16	0,25	0	0	0,5	0	0	0	0,25	**1**
C 17	1	0	0	1,25	0	0	0	0	**2,25**
C 18	0,25	0	0	0	0	0	0	0	**0,25**
C 19	1	0	0	0	0,5	0,5	0,75	0,4	**3,15**
C 20	0,5	0	0	1,25	0	0	0,25	0,25	**2,25**
C 21	0,25	0	0	1,25	0	0	0	0	**1,5**
Media	**0,51**	**0,02**	**0,16**	**0,77**	**0,13**	**0,09**	**0,11**	**0,11**	**1,91**
Sobre 10	**4,1**	**0,19**	**1,28**	**6,19**	**1,05**	**0,7**	**0,86**	**0,91**	

Mientras, los resultados en el grupo experimental fueron:

Tabla 20. **Resultados del grupo experimental en la segunda prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 2.1	P 2.2	P 2.3	P 2.4	P 2.5	P 2 .6	P 2.7	P 2 .8	Nota
E 1									
E 2	0,5	0	0	0	0	0	0	0,5	**1**
E 3	1	1,25	0	0	0	0,25	0,75	0,5	**3,75**
E 4	0,75	0,5	0,5	1,25	1,25	0,5	1,25	0,75	**6,75**
E 5	0,5	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0,5	**8,5**
E 6	0,25	1,25	0,5	0	0,5	0,5	1,25	0,75	**5**
E 7	1,25	0	0	0	0	0	1,25	0	**2,5**
E 8	0,25	0,5	0,5	1,25	0	0	0,75	0	**3,25**
E 9	0,25	0,25	0	1,25	0,5	0	0	0,25	**2,5**
E 10	0,25	0	1	1,25	0	0	0	0,5	**3**
E 11	1,25	0,5	0	1,25	1,25	0,5	1,25	0,25	**6,25**
E 12	0,25	0	0,5	1,25	0,25	0	0	0,5	**2,75**
E 13	0	0	0	0	0,25	0	0,25	0	**0,5**
E 14	0	0,5	0	0	0	0,25	0,25	0	**1**
E 15	0,5	0	0	0	0,5	0	0,25	0,25	**1,5**
E 16	0,5	0,5	0	1,1	0	0	0	0	**2,1**
E 17	0,75	0	0,25	1,25	1,25	0,5	1,25	0,25	**5,5**
E 18	0,25	0	0	1,25	0,5	0	0,75	0	**2,75**
E 19	1	0	0,25	0,25	0	0	0,25	0	**1,75**
E 20	0,25	0	0,25	1,25	0	0	0,75	0	**2,5**
E 21	0,4	0	0	1,25	0	0	0,5	0	**2,15**
Media	**0,51**	**0,33**	**0,25**	**0,76**	**0,38**	**0,19**	**0,6**	**0,25**	**3,25**
Sobre 10	**4,06**	**2,6**	**2**	**6,04**	**3**	**1,5**	**4,8**	**2**	

Los resultados se pueden comparar en el gráfico 22.

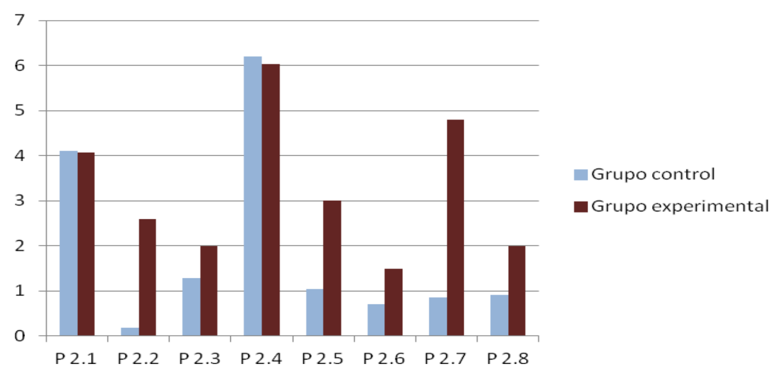
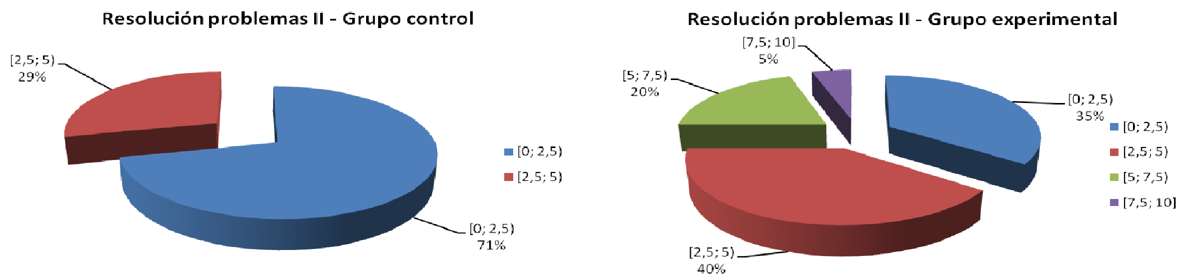


Gráfico 22. **Diagrama de barras de los resultados por problemas de la segunda prueba.**

Los resultados de la prueba de resolución de problemas de este trimestre mostraron algunos detalles muy importantes. Los resultados globales volvieron a ser mejores en el grupo experimental. De hecho la diferencia entre los dos grupos aumentó a 1,34 puntos. Sin embargo, observando problema a problema vimos que hubo dos problemas en concreto que realizaron mínimamente mejor el grupo control. Estos problemas fueron el 2.1 (problema de conteo) y el 2.4 (problema de razonamiento lógico). Por el contrario, hubo problemas donde la diferencia en términos absolutos fue muy notable a favor del grupo experimental. Se puede observar como en los problemas 2.2 y 2.7, dos problemas de razonamiento lógico algo más complejos que el 2.4, la diferencia a favor del grupo experimental fue de 2,41 y 3,94 puntos respectivamente. Si hablamos en términos relativos, nos encontramos con el caso del problema 2.2 en donde la puntuación del grupo experimental fue más del 1200% superior a la que obtuvo el grupo control. Observamos que los problemas donde existió una mayor diferencia entre ambos grupos, que fueron los problemas 2.2, 2.5 y 2.7, tuvieron una característica en común: fueron problemas en los que la estrategia para resolverlos no se veía a simple vista y en donde había que razonar y disponer de ciertas estrategias de resolución de problemas para resolverlos.

En cuanto a la dificultad de los problemas, pudimos observar que para los dos grupos el problema más sencillo fue el 2.4 (problema de lógica), mientras que los más complicados resultaron ser para el grupo control los problemas 2.2 (problema de aritmética con un razonamiento medio) y 2.6 (problema de razonamiento lógico con una cierta complejidad en el que había que relacionar tres variables), mientras que para el grupo experimental fueron los problemas 2.3 (problema de exploración de casos), 2.6 y 2.8 (problema de razonamiento lógico de relacionar una hora con un ángulo en un reloj de agujas).

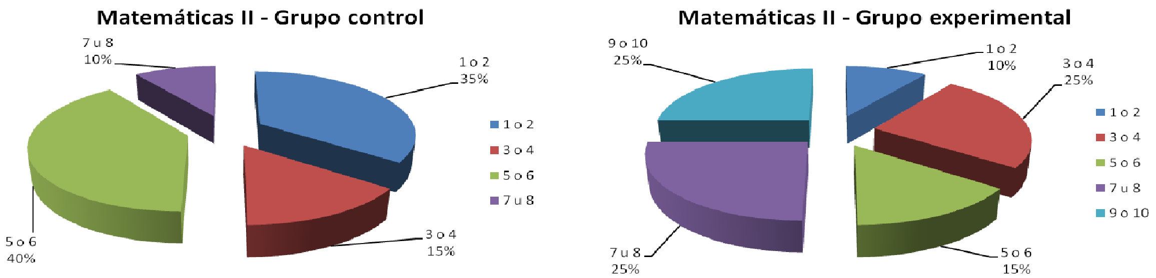
Observando la estructura de los resultados en los grupos, pudimos comprobar cómo mientras en el grupo control no aprobó ningún alumno el examen, en el grupo experimental lo aprobaron el 25% de los alumnos. Otro dato interesante fue que los alumnos con una nota inferior a 2,5 puntos fueron en el grupo control el 71%, mientras que este porcentaje se redujo en el grupo experimental al 35%.



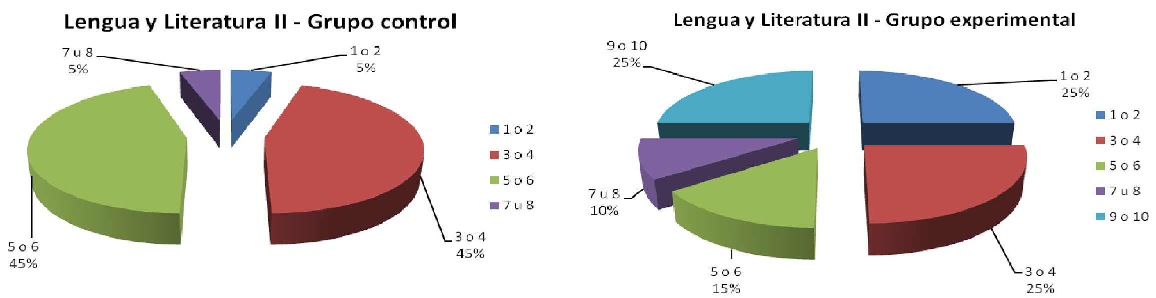
Gráficos 23 y 24. **Diagrama de sectores de las notas de la segunda prueba de problemas.**

Como ya dijimos anteriormente, teníamos la idea previa de hacer las pruebas de problemas en orden ligeramente ascendente de dificultad. Esto se pudo comprobar en que los alumnos consideraron esta prueba más complicada que la anterior. Entre los dos grupos, observamos que a los alumnos del grupo control les pareció ligeramente más complicada la prueba, ya que le otorgaron una dificultad media 0,62 puntos superior. Este resultado fue lógico teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la prueba.

En cuanto a los resultados obtenidos en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura vimos algunas diferencias con respecto a los resultados del primer trimestre. En la asignatura de Matemáticas la media de los resultados del grupo experimental fueron 2,1 puntos superiores a los obtenidos por el grupo control, resultado este similar al del primer trimestre. Estructuralmente, aunque en este trimestre el porcentaje de alumnos aprobados mejoró en el grupo control, se observaron las mejores calificaciones del grupo experimental en el hecho de que los alumnos que obtuvieron una calificación de notable o superior supusieron un 10% en el grupo control, mientras que en el grupo experimental supusieron un 50%. Del mismo modo, los alumnos con una nota inferior a 3 supusieron un 35% en el grupo control, frente a solo un 10% en el grupo experimental. En la asignatura de Lengua y Literatura pudimos observar como los resultados se igualaron ligeramente, siendo la diferencia entre las notas medias de 0,7 puntos a favor del grupo experimental. La principal diferencia que pudimos encontrar es la estructural, ya que mientras en el primer trimestre ambos mantuvieron una distribución próxima a la normal, en el segundo trimestre el grupo control la mantuvo, pero el grupo experimental protagonizó un aumento en los grupos extremos semejante a lo que venía ocurriendo en la asignatura de Matemáticas.



Gráficos 25 y 26. **Diagrama de sectores de las notas de Matemáticas en el segundo trimestre.**



Gráficos 27 y 28. **Diagrama de sectores de las notas de Lengua y Literatura en el segundo trimestre.**

3.1.4. Análisis de los resultados en el tercer trimestre

En el tercer trimestre, los resultados que obtuvimos fueron los de la prueba de resolución de problemas, la dificultad que le asignaron los alumnos, los resultados de la CDI y los resultados en la evaluación del tercer trimestre en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura.

En el grupo control los resultados fueron:

Tabla 21. **Resultados del grupo control en el tercer trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas III	Dificultad III	CDI Matemáticas	CDI Lengua y Literatura	Matemáticas III	Lengua y Literatura III
C 1	0	10	1	3	1	2
C 2	0,25	10	2,33	3,67	2	4
C 3	2,825	7	4,67	5,33	4	5
C 4	1,075	8			1	3
C 5	2,075	8	2	3,67	5	5
C 6	0,25	10	2	3,67	5	6
C 7	1,2	8	3,67	6,33	3	4
C 8	1,5	8	4,67	6,67	2	5
C 9	3,075	8	3,67	6	7	7
C 10	1,7	9	4,33	3,67	3	3
C 11	0,45	9	2,67	3,33	1	5
C 12	1,9	8	5,67	3,67	2	3
C 13	4,25	7	6	9	7	8
C 14	0,575	8	2	4,33	1	4
C 15	2,325	8	4,67	6	5	5
C 16	0	10	0,33	5,33	1	5
C 17	0,5	9	1	7,33	5	6
C 18	0,25	9	3,33	6,33	1	2
C 19	3,55	7	6,67	8	6	5
C 20	1,95	9	4	6,67	5	6
C 21						
Media	**1,49**	**8,50**	**3,40**	**5,37**	**3,35**	**4,65**

En el grupo experimental los resultados fueron:

Tabla 22**. Resultados del grupo experimental en el tercer trimestre.**

Alumno	Resolución de problemas III	Dificultad III	CDI Matemáticas	CDI Lengua y Literatura	Matemáticas III	Lengua y Literatura III
E 1						
E 2	1,825	8	4	3,33	2	1
E 3	4,5	7	10	9,33	10	10
E 4	7,35	5	9,67	9,33	10	10
E 5	9,475	3	9,33	8,67	10	10
E 6	0	10	1,67	6,33	1	2
E 7	4,45	7	8,33	8,33	9	9
E 8	4,575	8	8	9,33	9	9
E 9	2,75	8	6	8,67	7	7
E 10	5,85	5	9	8,67	8	3
E 11	4,875	6	5,67	6	7	6
E 12	0,375	8	1,33	6,67	3	4
E 13	1,575	9	3	4	3	5
E 14	1,75	8	3,67	5,33	2	5
E 15	2,35	7	4	6,33	4	5
E 16	1,7	8	7	8	6	5
E 17	2,45	9	8,33	8	9	8
E 18	1,05	8	2,67	6,33	5	5
E 19	0,85	8	0,33	5,33	3	2
E 20	2,45	7	3	7,67	7	6
E 21	2,375	6	4,33	4,67	3	3
Media	**3,13**	**7,25**	**5,47**	**7,02**	**5,9**	**5,75**

Los resultados individualizados que obtuvieron los alumnos del grupo control en cada problema fueron los siguientes:

Tabla 23. **Resultados del grupo control en la tercera prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 3.1	P 3.2	P 3.3	P 3.4	P 3.5	P 3.6	P 3.7	P 3.8	Nota
C 1	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
C 2	0	0	0	0,25	0	0	0	0	**0,25**
C 3	0	0	0,25	1,25	0,5	0	0,45	0,375	**2,825**
C 4	0	0	0	0	0	0	0,45	0,625	**1,075**
C 5	0	0	0,25	0	1,25	0	0,45	0,125	**2,075**
C 6	0	0	0	0	0,25	0	0	0	**0,25**
C 7	0	0	0	0	0	0	0,45	0,75	**1,2**
C 8	0	0	0,25	0	1,25	0	0	0	**1,5**
C 9	0,25	0,5	0,25	0	1,25	0,25	0,45	0,125	**3,075**
C 10	0	0	0	0	1,25	0	0,45	0	**1,7**
C 11	0	0	0	0	0	0	0,45	0	**0,45**
C 12	0	0	0	0	1,25	0,2	0,45	0	**1,9**
C 13	1,25	0	0	0,25	1,25	0,65	0,85	0	**4,25**
C 14	0	0	0	0	0	0	0,45	0,125	**0,575**
C 15	0	0	0,25	0	1,25	0	0,45	0,375	**2,325**
C 16	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
C 17	0	0	0	0	0,5	0	0	0	**0,5**
C 18	0	0	0,25	0	0	0	0	0	**0,25**
C 19	0	0	0	0	1,25	0,2	0,85	1,25	**3,55**
C 20	0	0	0,25	0,5	0,5	0	0,45	0,25	**1,95**
C 21									
Media	**0,08**	**0,03**	**0,09**	**0,11**	**0,59**	**0,07**	**0,33**	**0,20**	**1,49**
Sobre 10	**0,60**	**0,20**	**0,70**	**0,90**	**4,70**	**0,52**	**2,66**	**1,60**	

Mientras, en grupo experimental, los resultados fueron:

Tabla 24. **Resultados del grupo experimental en la tercera prueba de resolución de problemas.**

Alumno	P 3.1	P 3.2	P 3.3	P 3.4	P 3.5	P 3.6	P 3.7	P 3.8	Nota
E 1									
E 2	0	0	0	0	1,25	0,2	0	0,375	**1,825**
E 3	0	0,75	1,25	0,5	1	0	0,25	0,75	**4,5**
E 4	0	0,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0,85	1,25	**7,35**
E 5	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	1,25	0,85	1,125	**9,475**
E 6	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
E 7	0	0	0	1,25	1,25	0,75	0,45	0,75	**4,45**
E 8	0	1,25	0	0,25	1,25	0,5	0,45	0,875	**4,575**
E 9	0,25	0	0	0	1,25	0,8	0,45	0	**2,75**
E 10	0	0	0,25	1,25	1,25	1	0,85	1,25	**5,85**
E 11	0,25	0	1,25	1,25	0,5	0,8	0,45	0,375	**4,875**
E 12	0	0	0	0	0,25	0	0	0,125	**0,375**
E 13	0	0	0	0	0,25	0	0,45	0,875	**1,575**
E 14	0	0	0	0	1,25	0	0	0,5	**1,75**
E 15	0	0	0	0	1	0	0,85	0,5	**2,35**
E 16	0	0	0	0	1,25	0	0,45	0	**1,7**
E 17	0	0	0,25	0	1,25	0	0,45	0,5	**2,45**
E 18	0	0	0,1	0	0	0	0,45	0,5	**1,05**
E 19	0	0	0	0	0	0	0,85	0	**0,85**
E 20	0	0	0,25	0,5	0	0	0,45	1,25	**2,45**
E 21	0	0	1	0	0,5	0	0	0,875	**2,375**
Media	**0,09**	**0,18**	**0,34**	**0,38**	**0,8**	**0,33**	**0,43**	**0,59**	**3,13**
Sobre 10	**0,7**	**1,4**	**2,74**	**3**	**6,4**	**2,62**	**3,42**	**4,75**	

Los resultados se pueden comparar en el gráfico 29.

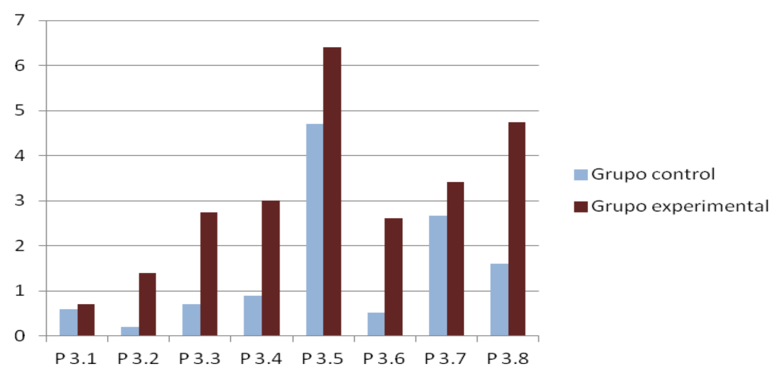
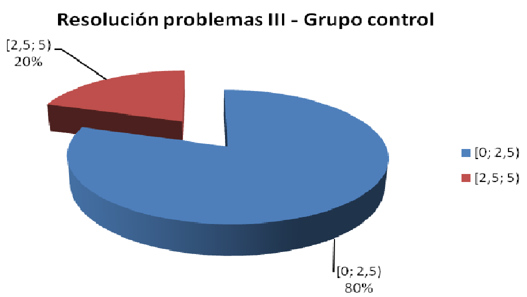
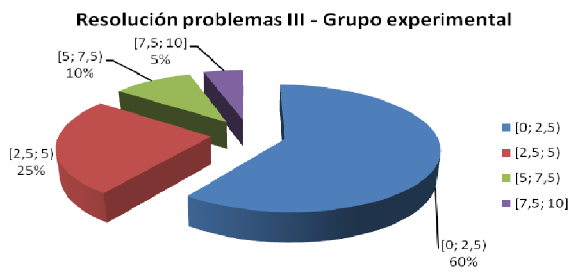


Gráfico 29. **Diagrama de barras de los resultados por problemas de la tercera prueba.**

Se volvió a observar en este trimestre una gran diferencia en los resultados de la prueba de resolución de problemas. En concreto, la diferencia entre las notas medias de ambos grupos fue de 1,64 puntos a favor del grupo experimental. Nótese que esta diferencia fue superior a la del trimestre anterior. Observamos que en esta ocasión en todos los problemas obtuvieron una puntuación superior el grupo experimental. La diferencia entre estas puntuaciones fue desde la mínima que se obtuvo en el problema 3.1 (problema de descomposición de una figura), que fue solo de 0,1 puntos, hasta la máxima que se obtuvo en el problema 3.8 (problema clásico de los *cuatro cuatros*), que fue de 3,15 puntos. En términos relativos, la mayor diferencia se alcanzó en el problema 3.6 (problema de divisibilidad) en donde el grupo experimental obtuvo una puntuación superior al 400% respecto al grupo control. En los dos grupos resultó ser el problema 3.5 el más sencillo (problema elemental de aritmética), mientras que el más complicado fue para el grupo control el 3.2 (problema de razonamiento lógico y proporcionalidad), mientras que para el grupo experimental fue el 3.1.

En esta ocasión hay alguna similitud estructural entre los dos grupos, como que en los dos hubo un porcentaje muy amplio de alumnos con nota inferior a 2,5 puntos, pero también existieron diferencias claras, ya que mientras en el grupo control no aprobó ningún alumno, en el grupo experimental aprobaron tres e incluso hubo una calificación de sobresaliente.





Gráficos 30 y 31. **Diagrama de sectores de las notas de la tercera prueba de problemas.**

En cuanto a la dificultad de la prueba, como era de esperar a tenor de los resultados anteriores, los alumnos del grupo control le otorgaron una dificultad de 1,25 puntos superior a la prueba que los del grupo experimental.

Analizando los resultados obtenidos por ambos grupos en la prueba CDI, observamos que tanto en Matemáticas, como en Lengua y Literatura los resultados fueron ampliamente mejores en el grupo experimental. Cabe mencionar que la media de la Comunidad de Madrid en Matemáticas fue de 5 puntos, mientras que en Lengua y Literatura fue de 5,85 puntos. Por lo tanto, vemos que en Matemáticas el grupo control se situó 1,36 puntos por debajo de esa media, mientras que el grupo experimental se situó 0,71 puntos por encima. Lo mismo pasó en Lengua y Literatura, donde el grupo control obtuvo una media inferior en 0,29 puntos a la media de la comunidad, mientras que el grupo experimental mejoró la media de la comunidad en 1,36 puntos.

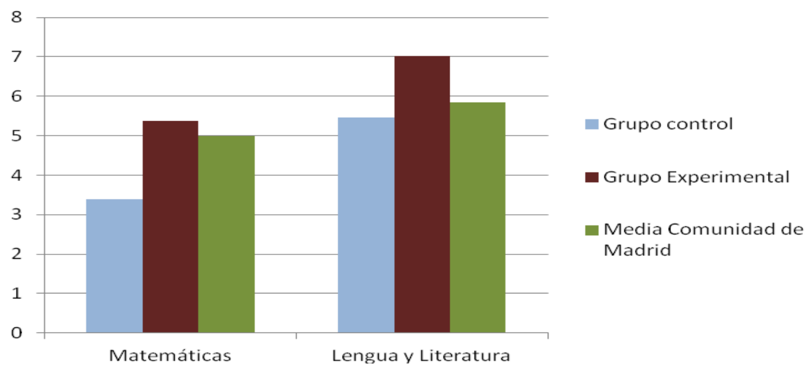
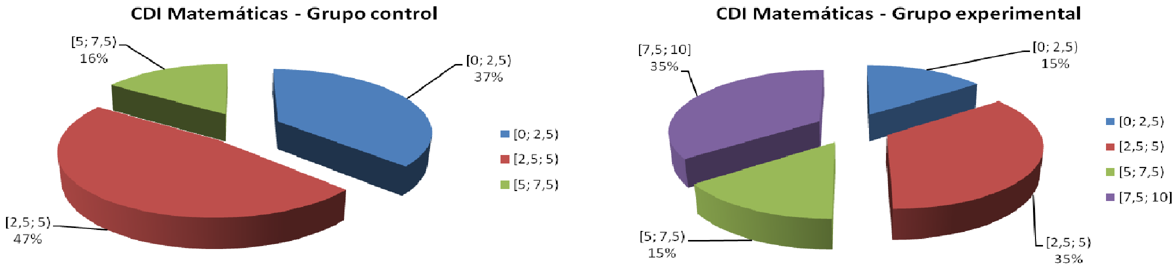
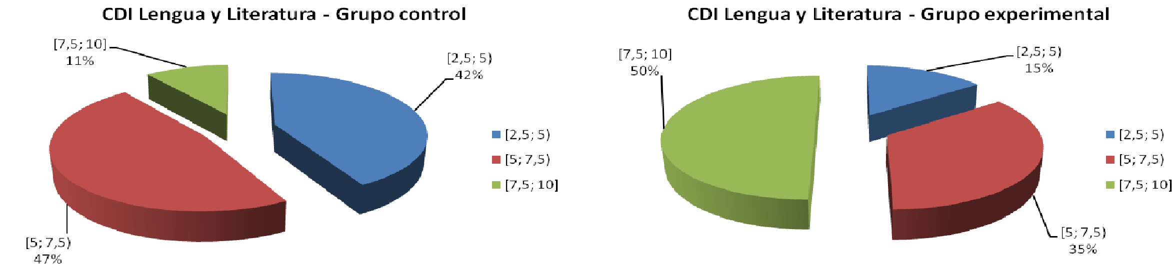


Gráfico 32. **Diagrama de barras de los resultados de la prueba CDI de cada grupo en comparación con los de la media de la Comunidad de Madrid.**

Estructuralmente, vemos diferencias claras entre ambos grupos. En Matemáticas pudimos observar como los aprobados del grupo control fueron solo el 16% de los alumnos, mientras en el grupo experimental aprobaron el 50% de los alumnos. También pudimos observar como los alumnos con notas inferiores a 2,5 puntos supusieron en el grupo control el 37% de la clase, mientras que en el grupo experimental ese porcentaje se redujo al 15%. Estas diferencias también las hubo en la prueba de Lengua y Literatura en donde, por ejemplo, vimos que los alumnos con notas superiores a 7,5 puntos fueron en el grupo control el 11 % de los alumnos, mientras que en el grupo experimental el porcentaje aumentó al 50%.

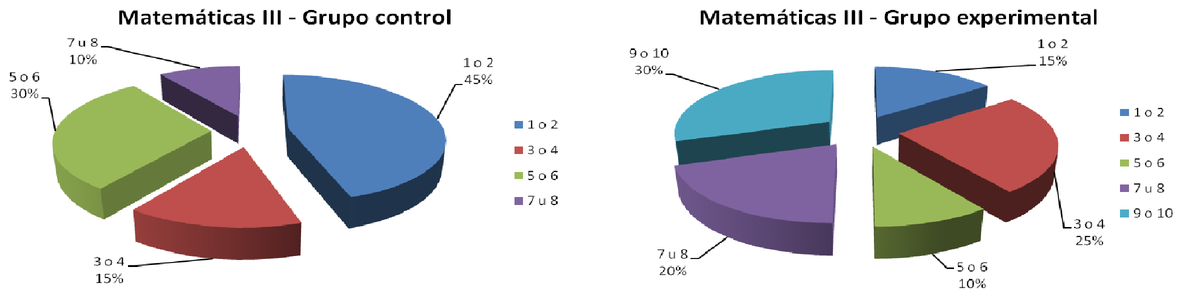


Gráficos 33 y 34. **Diagrama de sectores de las notas de Matemáticas en la prueba CDI.**

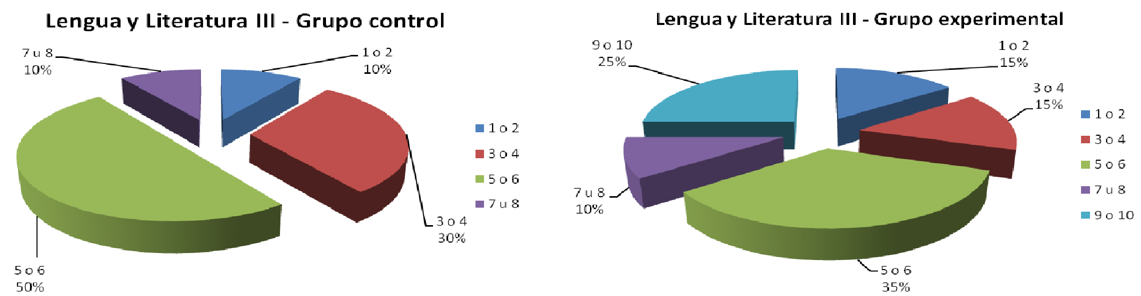


Gráficos 35 y 36. **Diagrama de sectores de las notas de Lengua y Literatura en la prueba CDI.**

Los resultados en el tercer trimestre en la asignatura de Matemáticas mostraron como las diferencias entre ambos grupos aumentaron, estando la nota media del grupo experimental 2,55 puntos por encima de la del grupo control. En la asignatura de Lengua y Literatura, también el grupo experimental obtuvo mejores calificaciones, pero en esta ocasión la diferencia entre las notas medias de ambos grupos fue de 1,1 puntos. Estructuralmente, vimos ciertas similitudes en la asignatura de Lengua y Literatura, siendo en ambos casos el grupo de alumnos con una calificación de 5 ó 6 el más numeroso, aunque habiendo una mayor dispersión en los resultados del grupo experimental. En la asignatura de Matemáticas, no presentaron grandes similitudes. Por ejemplo, en el grupo control el porcentaje de aprobados fue del 40%, mientras que en grupo experimental fue del 60%, la mitad de ellos con una calificación de sobresaliente. Del mismo modo, los alumnos con una calificación de 1 o 2 en el grupo control representó el 45%, mientras que en el grupo experimental el porcentaje se vio reducido al 15%.



Gráficos 37y 38. **Diagrama de sectores de las notas de Matemáticas en el tercer trimestre.**



Gráficos 39 y 40. **Diagrama de sectores de las notas de Lengua y Literatura en el tercer trimestre.**

3.1.5. Análisis evolutivo de los resultados

Un aspecto interesante a analizar era la evolución que tuvieron los resultados anteriores a lo largo del curso. Empecemos analizando con estos dos gráficos la evolución en los dos grupos en los resultados de las pruebas de resolución de problemas y la dificultad de la prueba concedida por los alumnos y los expertos que revisaron dichas pruebas.

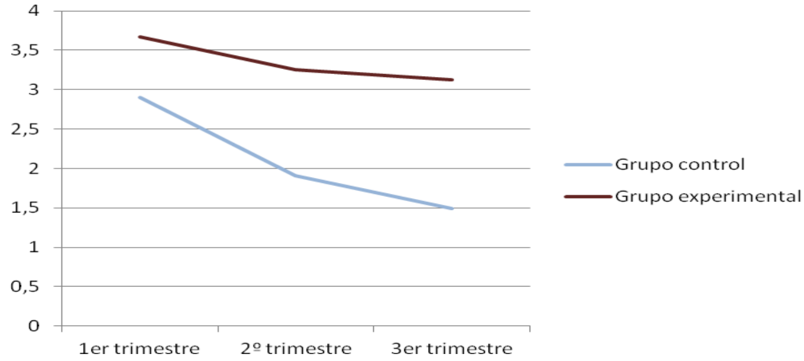


Gráfico 41. **Evolución de los resultados en las prueba de problemas.**

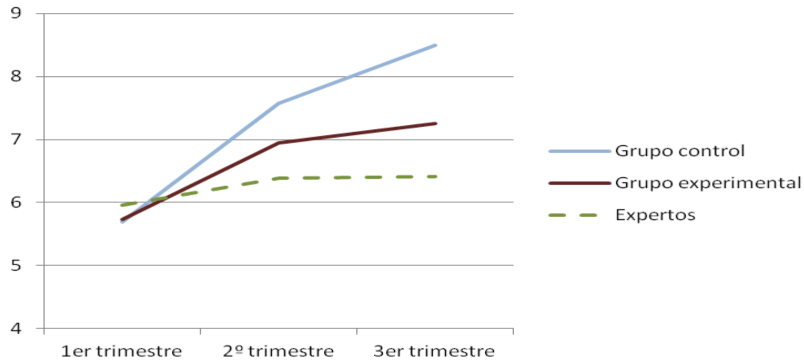


Gráfico 42. **Evolución de los resultados en la dificultad de las pruebas de problemas.**

En el gráfico 42 se muestra como para todos los colectivos las pruebas fueron creciendo en dificultad. Sin embargo, hay que resaltar como este crecimiento fue mucho más pronunciado en el grupo control que en el experimental. Lo mismo ocurrió en los resultados de las pruebas de resolución de problemas. Observamos en el gráfico 41 como en los dos grupos fueron descendiendo pero a ritmos muy distintos. Mientras que en el grupo experimental la puntuación entre la primera prueba y la tercera disminuyó en 0,52 puntos, en el grupo control lo hizo en 1,41 puntos, descenso mucho más acusado que el producido en el grupo experimental.

En cuanto a los resultados de los alumnos en las asignaturas de Matemáticas y de Lengua y Literatura, los gráficos 43 y 44 muestran la evolución que siguieron.

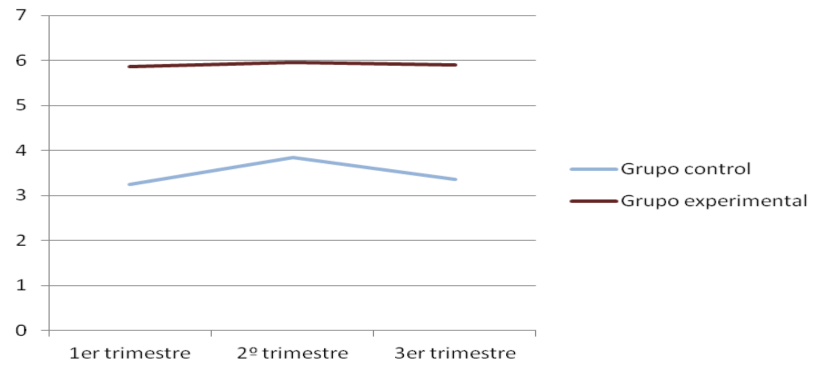


Gráfico 43. **Evolución de los resultados en la asignatura de Matemáticas.**

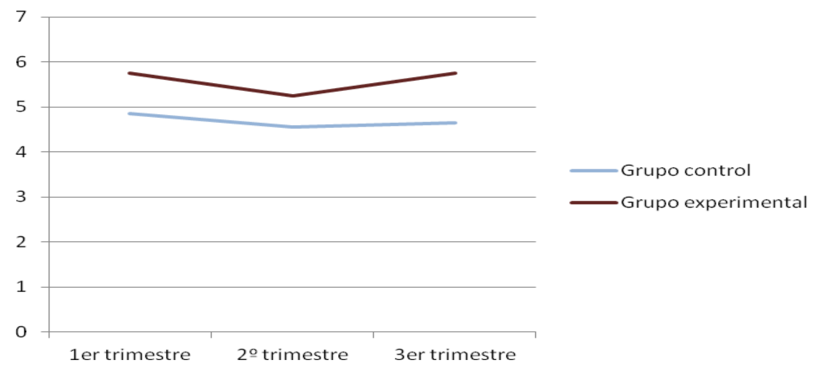


Gráfico 44. **Evolución de los resultados en la asignatura de Lengua y Literatura.**

Podemos observar que se produjeron similitudes entre las tendencias de las dos asignaturas. En ambas, en todos los trimestres el grupo experimental obtuvo calificaciones superiores a las del grupo control, siendo estas superiores a 2 puntos en Matemáticas y de en torno a 1 punto en Lengua y Literatura.

Se observa gráficamente una gran estabilidad en las calificaciones de las dos asignaturas, destacando especialmente la estabilidad en Matemáticas del grupo experimental donde la variación máxima no llega a una décima.

Vemos también como había similitudes en los periodos de crecimiento y decrecimiento de ambas gráficas, aunque en esta ocasión distintos en cada asignatura. Así, en Matemáticas, las mejores calificaciones se alcanzaron en el segundo trimestre, mientras que en Lengua y Literatura en dicho trimestre fue en donde se alcanzaron las peores calificaciones.

Vamos a ver el grado de relación que existía entre los resultados finales de estas dos asignaturas con las calificaciones externas que nos proporcionaron la prueba CDI realizando un estudio de regresión lineal. En los estudios siguientes omitimos los datos de los alumnos en los que faltaba alguno de los resultados.

La variable X la definimos como la nota en junio obtenida por los alumnos de uno de los grupos en la asignatura analizada, mientras que la variable Y la definimos como calificación obtenida en la prueba CDI de los alumnos del grupo en la asignatura analizada. Realizaremos en cada caso el gráfico de la nube de puntos y calcularemos la recta de regresión de Y sobre X, el coeficiente de correlación y el de determinación.

Caso I. Grupo control en Matemáticas.

Tabla 25. **Resultados del grupo control en la asignatura de Matemáticas y en la prueba CDI.**

X	*Y*
1	1
2	2,33
4	4,67
5	2
5	2
3	3,67
2	4,67
7	3,67
3	4,33
1	2,67
2	5,67
7	6
1	2
5	4,67
1	0,33
5	1
1	3,33
6	6,67
5	4
3,474	**3,404**

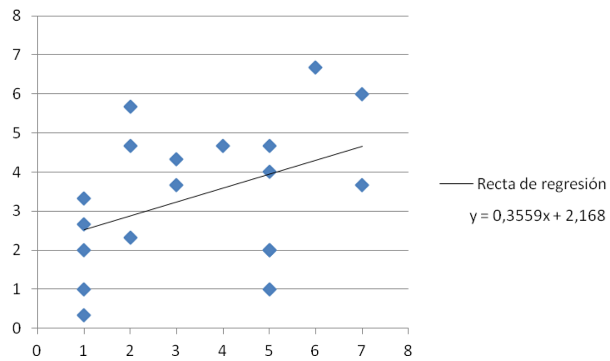


Gráfico 45. **Nube de puntos y recta de regresión del grupo control en la asignatura de Matemáticas y en la prueba CDI.**

<u>Coeficiente de correlación</u>

$r = 0{,}422$

<u>Coeficiente de determinación</u>

$r^{2} = 0{,}178$

Caso II. Grupo experimental en Matemáticas.

Tabla 26. **Resultados del grupo experimental en la asignatura de Matemáticas y en la prueba CDI.**

X	*Y*
2	4
10	10
10	9,67
10	9,33
1	1,67
9	8,33
9	8
7	6
8	9
7	5,67
3	1,33
3	3
2	3,67
4	4
6	7
9	8,33
5	2,67
3	0,33
7	3
3	4,33
5,900	**5,467**

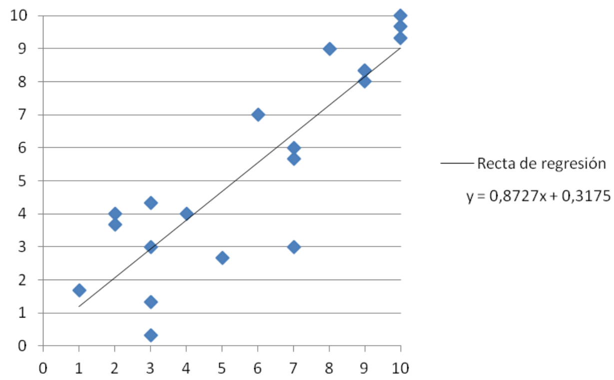


Gráfico 46. **Nube de puntos y recta de regresión del grupo experimental en la asignatura de Matemáticas y en la prueba CDI.**

<u>**Coeficiente de correlación**</u>

$r = 0,877$

<u>**Coeficiente de determinación**</u>

$r^2 = 0,770$

Observamos como en la asignatura de Matemáticas, aunque la media de los resultados en los dos grupos es similar, hay una notable mayor correlación lineal en el grupo experimental, lo que indica que en este grupo la relación entre las dos calificaciones ha sido mayor.

Caso III. Grupo control en Lengua y Literatura.

Tabla 27. **Resultados del grupo control en la asignatura de Lengua y Literatura y en prueba la CDI.**

X	*Y*
2	3
4	3,67
5	5,33
5	3,67
6	3,67
4	6,33
5	6,67
7	6
3	3,67
5	3,33
3	3,67
8	9
4	4,33
5	6
5	5,33
6	7,33
2	6,33
5	8
6	6,67
4,737	**5,368**

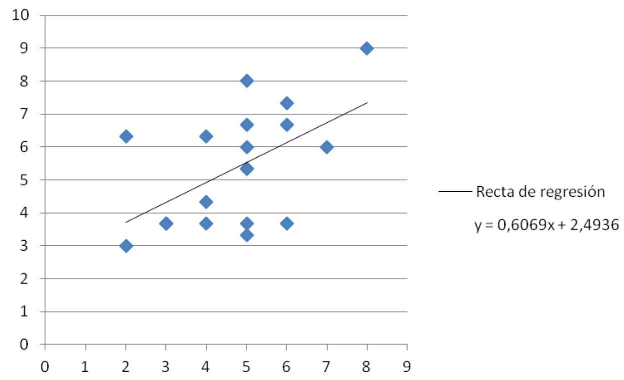


Gráfico 47. **Nube de puntos y recta de regresión del grupo control en la asignatura de Lengua y Literatura y en la prueba CDI.**

Coeficiente de correlación

r = 0,540

Coeficiente de determinación

r^2= 0,291

Caso IV. Grupo experimental en Lengua y Literatura.

Tabla 28. **Resultados del grupo experimental en la asignatura de Lengua y Literatura y en la prueba CDI.**

X	*Y*
1	3,33
10	9,33
10	9,33
10	8,67
2	6,33
9	8,33
9	9,33
7	8,67
3	8,67
6	6
4	6,67
5	4
5	5,33
5	6,33
5	8
8	8
5	6,33
2	5,33
6	7,67
3	4,67
5,750	**7,016**

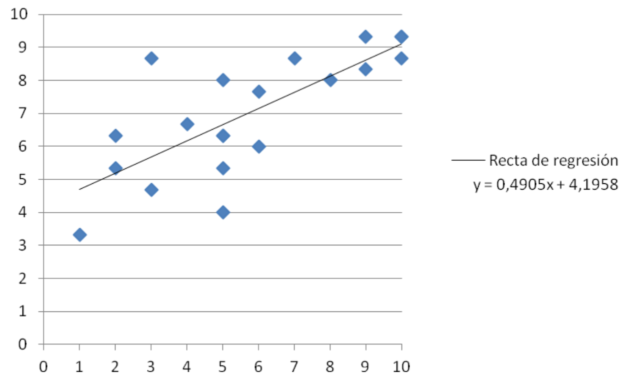


Gráfico 48. **Nube de puntos y recta de regresión del grupo experimental en la asignatura de Lengua y Literatura y en la prueba CDI.**

Coeficiente de correlación

$r = 0{,}756$

Coeficiente de determinación

$r^2 = 0{,}571$

En la asignatura de Lengua y Literatura se observa que las calificaciones en la prueba CDI fueron en los dos grupos superiores a la ordinaria del curso, volviendo a existir una mayor relación entre ambas calificaciones en el grupo experimental.

3.2. Análisis inferencial de los datos

3.2.1. Análisis de los datos iniciales

Para que los resultados que obtuvimos en la parte experimental de la investigación tuvieran credibilidad, debimos asegurarnos de que partimos de dos grupos inicialmente similares. Para comprobar esto comparamos mediante la técnica del análisis de la varianza los dos grupos respecto a tres variables: la edad de los alumnos (las edades de los alumnos pueden variar por repeticiones en cursos anteriores), los resultados que obtuvieron en la asignatura de Matemáticas en el curso anterior y los resultados que obtuvieron en la evaluación inicial.

La tabla de la varianza resultante del análisis de la edad de los alumnos de cada grupo en días a 30 junio de 2012 fue la siguiente:

Tabla 29. **Análisis de la varianza de la edad en días a 30 de junio de 2012 en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	24336	24336	0,361	0,551
Residuales	40	2695264	67382		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 30. **Descriptivos de la edad en días a 30 de junio de 2012 en función de los grupos.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5647,810	277,3697	21	0
Control	5599,667	240,4771	21	0

El valor crítico fue de 0,551 lo que indicaba que no existían respecto a este factor diferencias significativas entre los grupos en las medias.

En cuanto a las notas obtenidas en Matemáticas por los alumnos el curso anterior, la tabla de la varianza resultante fue:

Tabla 31. **Análisis de la varianza de los resultados del curso anterior en Matemáticas en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	0,38	0,381	0,059	0,809
Residuales	40	258,10	6,452		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 32. **Descriptivos de los resultados del curso anterior en Matemáticas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,619048	2,889225	21	0
Control	5,428571	2,134747	21	0

Como el valor crítico fue de 0,809 pudimos concluir que no existían diferencias significativas en las medias entre los grupos respecto a las notas de Matemáticas del curso anterior.

Con los datos de la evaluación inicial resultó la siguiente tabla del análisis de la varianza:

Tabla 33. **Análisis de la varianza de los resultados de la evaluación inicial en función de los grupos.**

	Grados de libertad	**Suma de cuadrados**	**Media cuadrática**	**Valor de F**	***p*(>F)**
Grupo	1	0,01	0,005	0	0,967
Residuales	38	121,21	3,190		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 34. **Descriptivos de la evaluación inicial.**

	Media	**Desviación típica**	**Número de datos**	**Datos ausentes**
Experimental	2,671053	1,806033	19	2
Control	2,647619	1,767801	21	0

Como el valor crítico fue de 0,967 pudimos concluir que no existieron diferencias significativas en las medias entre los grupos respecto a las notas de la evaluación inicial.

En resumen, comprobamos que inicialmente no existían diferencias significativas en las medias entre los dos grupos respecto a los tres factores estudiados, con lo cual se podía suponer que los dos grupos inicialmente eran homogéneos entre sí.

3.2.2. Análisis de los datos en el primer trimestre

Durante el primer trimestre, las variables en las que analizamos si existían diferencias significativas entre los grupos fueron las calificaciones obtenidas en la primera prueba de problemas, la dificultad que dieron los alumnos a dicha prueba y las calificaciones que obtuvieron los alumnos al final del trimestre en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura.

Como mencionamos con anterioridad, la primera prueba de problemas se realizó en los dos grupos el 21 de noviembre de 2011. Teníamos la intención inicial de realizarla antes, a continuación de la evaluación inicial, con el objetivo de tomarlas también como una variable inicial que nos comprobará que los grupos eran homogéneos entre sí. No lo pudimos hacer porque nos retrasamos en la confección y en la verificación de la adecuación de dichas pruebas. Los resultados del análisis de la varianza se resumen en la tabla 35:

Tabla 35. **Análisis de la varianza de los resultados de la primera prueba de problemas en función de los grupos.**

	Grados de libertad	**Suma de cuadrados**	**Media cuadrática**	**Valor de F**	***p*(>F)**
Grupo	1	5,87	5,869	1,098	0,301
Residuales	40	213,72	5,343		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 36. **Descriptivos de los resultados de la primera prueba de problemas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	3,652381	2,721419	21	0
Control	2,904762	1,811001	21	0

Se puede observar que, a pesar de que a esa fecha el grupo experimental obtuvo mejores resultados que el grupo control, no se pudo establecer que existieran diferencias significativas entre los grupos en las medias ya que el valor crítico que obtuvimos fue de 0,301.

En cuanto a la dificultad que encontraron los alumnos en esa primera prueba de problemas, los resultados del análisis de la varianza se resumen en la tabla 37:

Tabla 37. **Análisis de la varianza de la dificultad asignada por los alumnos en la primera prueba en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	0,02	0,018	0,005	0,942
Residuales	40	137,37	3,434		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 38. **Descriptivos de la dificultad asignada por los alumnos a la primera prueba de problemas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,732143	2,051023	21	0
Control	5,690476	1,631534	21	0

Como se puede observar, los alumnos de ambos grupos entendieron la prueba con una dificultad similar. El análisis de la varianza nos ofreció como resultado un valor crítico de 0,942, con lo que obviamente respecto a este factor no existieron diferencias significativas entre los grupos en las medias.

A continuación analizamos los resultados finales del primer trimestre en las asignaturas de Matemáticas y Lengua y Literatura. Como ya vimos en el apartado descriptivo, en los dos grupos hubo diferencias a favor del grupo experimental. Vamos a ver si esas diferencias se podían considerar significativas o no.

Los resultados del análisis de la varianza de los resultados en Matemáticas en el primer trimestre se pueden resumir en la tabla 39:

Tabla 39. **Análisis de la varianza de los resultados en Matemáticas del primer trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	**Suma de cuadrados**	**Media cuadrática**	**Valor de F**	***p*(>F)**
Grupo	1	72,02	72,02	12,09	0,00124**
Residuales	40	238,38	5,96		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 40. **Descriptivos de los resultados en Matemáticas del primer trimestre.**

	Media	**Desviación típica**	**Número de datos**	**Datos ausentes**
Experimental	5,857143	2,937443	21	0
Control	3,238095	1,813967	21	0

El valor crítico obtenido fue de 0,00124, que es menor que una centésima, lo que nos indica que respecto a las calificaciones en Matemáticas en el primer trimestre se produjeron **diferencias muy significativas** entre los grupos en las medias a favor del grupo experimental.

En cuanto a los resultados en la asignatura de Lengua y Literatura en el primer trimestre, el análisis de la varianza de los resultados se resumen en la tabla 41:

Tabla 41. **Análisis de la varianza de los resultados en Lengua y Literatura del primer trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	8,6	8,595	2,199	0,146
Residuales	40	156,4	3,910		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 42. **Descriptivos de los resultados en Lengua y Literatura del primer trimestre.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,761905	2,165751	21	0
Control	4,857143	1,768777	21	0

A pesar de que el grupo experimental obtuvo respecto a este factor unas puntuaciones medias mayores que el grupo control, el valor crítico obtenido fue de 0,146, con lo que no pudimos concluir que existieran diferencias significativas entre los dos grupos en las medias respecto a las notas del primer trimestre en Lengua y Literatura.

En resumen, con los factores estudiados en este primer trimestre, solo se produjeron diferencias significativas entre los grupos en las calificaciones de la asignatura de Matemáticas, donde de hecho fueron muy significativas.

3.2.3. Análisis de los datos en el segundo trimestre

Las variables cuantitativas con las que trabajamos en el segundo trimestre fueron las mismas que en el primero, es decir, los resultados obtenidos en la segunda prueba de problemas, la dificultad que le dieron los alumnos a esta prueba y las calificaciones que obtuvieron los alumnos en las asignaturas de Matemáticas y de Lengua y Literatura.

La segunda prueba de problemas la realizamos el 20 de febrero de 2012 y los resultados del análisis de la varianza se pueden resumir en la tabla 43:

Tabla 43. **Análisis de la varianza de los resultados de la segunda prueba de problemas en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	18,41	18,407	6,737	0,0132*
Residuales	39	106,55	2,732		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Su correspondiente tabla de descriptivos es la siguiente:

Tabla 44. **Descriptivos de los resultados de la segunda prueba de problemas.**

	Media	**Desviación típica**	**Número de datos**	**Datos ausentes**
Experimental	3,250000	2,114735	20	1
Control	1,909524	1,038824	21	0

En esta segunda prueba de problemas vimos como de nuevo el grupo experimental obtuvo mejores resultados que el control, pero a diferencia de la primera, observamos que el valor crítico obtenido es de 0,0132, con lo que se pudo decir que existieron **diferencias significativas** en los resultados a favor del grupo experimental en las medias respecto a los resultados de la segunda prueba de problemas.

En cuanto a la dificultad que entendieron los alumnos que tenía esta prueba, los resultados del análisis de la varianza se resumen en la tabla 45:

Tabla 45. **Análisis de la varianza de la dificultad asignada por los alumnos en la segunda prueba en función de los grupos.**

	Grados de libertad	**Suma de cuadrados**	**Media cuadrática**	**Valor de F**	***p*(>F)**
Grupo	1	3,96	3,956	1,482	0,231
Residuales	39	104,09	2,669		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 46. **Descriptivos de la dificultad asignada por los alumnos a la segunda prueba de problemas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	6,950000	1,877148	20	1
Control	7,571429	1,362770	21	0

Aunque para el grupo control resultó más complicada esta prueba, pudimos comprobar que las diferencias no las podíamos considerar significativas, ya que el valor crítico obtenido fue de 0,231.

En el primer trimestre obtuvimos una diferencia muy significativa en los resultados de la asignatura de Matemáticas, mientras que no obtuvimos diferencias significativas en los resultados de Lengua y Literatura. Analizamos a continuación los resultados del segundo trimestre.

Los resultados del análisis de la varianza de las calificaciones en Matemáticas en el segundo trimestre se resumen en la tabla 47:

Tabla 47. **Análisis de la varianza de los resultados en Matemáticas del segundo trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	44,1	44,10	7,177	0,0109*
Residuales	38	233,5	6,14		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Su correspondiente tabla de descriptivos es la siguiente:

Tabla 48. **Descriptivos de los resultados en Matemáticas del segundo trimestre.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,95	2,799906	20	1
Control	3,85	2,109502	20	1

Volvieron a existir **diferencias significativas** en los resultados, al obtenerse un valor crítico de 0,0109, sin llegar a ser unas diferencias muy significativas como ocurrió en el primer trimestre, pero muy próximas a llegar a ese estado.

Los resultados del análisis de la varianza de las calificaciones en Lengua y Literatura en el segundo trimestre se resumen en la tabla 49:

Tabla 49. **Análisis de la varianza de los resultados en Lengua y Literatura del segundo trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	4,9	4,900	0,875	0,355
Residuales	38	212,7	5,597		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 50. **Descriptivos de los resultados en Lengua y Literatura del segundo trimestre.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,25	3,024027	20	1
Control	4,55	1,431782	20	1

Observamos cómo, a pesar de que el grupo experimental obtuvo mejores puntuaciones que el grupo control, estas diferencias no se podían considerar como significativas ya que el valor crítico obtenido fue de 0,355.

En resumen, hemos visto que en el segundo trimestre siguieron existiendo diferencias significativas en los resultados de la asignatura de Matemáticas, pero, además, ya surgieron diferencias significativas en los resultados de la prueba de resolución de problemas.

3.2.4. Análisis de los datos en el tercer trimestre

En el tercer trimestre, a parte de las cuatro variables cuantitativas que analizamos en los trimestres anteriores, también analizamos los resultados que obtuvieron los alumnos en la prueba CDI que organizó la Comunidad de Madrid en Matemáticas y Lengua y Literatura.

En la siguiente tabla mostramos los resultados del análisis de la varianza respecto a las calificaciones obtenidas en la tercera prueba de problemas realizada el 28 de mayo de 2012:

Tabla 51. **Análisis de la varianza de los resultados de la tercera prueba de problemas en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	p(>F)
Grupo	1	27,02	27,019	7,268	0,0104*
Residuales	38	141,27	3,718		

Nota. * valores significativos p<.05; ** valores muy significativos p<.01; *** valores altamente significativos p<.001.

Su correspondiente tabla de descriptivos es la siguiente:

Tabla 52. **Descriptivos de los resultados de la tercera prueba de problemas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	3,12875	2,421916	20	1
Control	1,48500	1,252928	20	1

Vemos como nuevamente vuelven a existir **diferencias significativas** en las medias entre los resultados de los grupos a favor del grupo experimental al obtenerse un valor crítico de 0,104, valor muy cercano a considerarse las diferencias como muy significativas.

En cuanto a la dificultad que encontraron los alumnos en esta prueba, los resultados tras realizar el análisis de la varianza se resumen en la tabla 53:

Tabla 53. **Análisis de la varianza de la dificultad asignada por los alumnos en la tercera prueba en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	15,62	15,625	8,636	0,00558**
Residuales	38	68,75	1,809		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Su correspondiente tabla de descriptivos es la siguiente:

Tabla 54. **Descriptivos de la dificultad asignada por los alumnos a la tercera prueba de problemas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	7,25	1,618154	20	1
Control	8,50	1,000000	20	1

Observamos cómo en esta ocasión, a diferencia de las dos anteriores en donde no había diferencias significativas, las mayores dificultades que tienen en el grupo control se podían considerar como **muy significativas** respecto a las del grupo experimental al obtenerse un valor crítico de 0,00558.

Analizamos a continuación las calificaciones de la asignatura de Matemáticas en el tercer trimestre. El resumen del análisis de la varianza se puede observar en la tabla 55:

Tabla 55. **Análisis de la varianza de los resultados en Matemáticas del tercer trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	65,03	65,03	9,277	0,0042**
Residuales	38	266,35	7,01		

Nota. * valores significativos $p<.05$; ** valores muy significativos $p<.01$; *** valores altamente significativos $p<.001$.

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 56. **Descriptivos de los resultados en Matemáticas del tercer trimestre.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,90	3,076225	20	1
Control	3,35	2,134306	20	1

Si ya en había en los dos primeros trimestres existieron diferencias significativas en los resultados a favor del grupo experimental, en este tercer trimestre se pudo comprobar que existieron **diferencias muy significativas** en las medias al obtenerse un valor crítico de 0,0042.

El análisis de la varianza de los resultados del tercer trimestre en la asignatura de Lengua y Literatura se resumen en la tabla 57:

Tabla 57. **Análisis de la varianza de los resultados en Lengua y Literatura del tercer trimestre en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	12,1	12,100	2,296	0,138
Residuales	38	200,3	5,271		

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 58. **Descriptivos de los resultados en Lengua y Literatura del tercer trimestre.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,75	2,844663	20	1
Control	4,65	1,565248	20	1

Como ha ocurrido a lo largo del curso, los resultados en esta asignatura son mejores en el grupo experimental, pero al obtenerse un valor crítico de 0,138 no se podían considerar que estas diferencias fueran significativas en las medias.

En la tabla 59 exponemos los resultados del análisis de la varianza de los resultados de la prueba CDI en la asignatura de Matemáticas:

Tabla 59. **Análisis de la varianza de los resultados en la CDI de Matemáticas en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	41,44	41,44	6,52	0,0149*
Residuales	37	235,17	6,36		

Nota. * valores significativos p<.05; ** valores muy significativos p<.01; *** valores altamente significativos p<.001.

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 60. **Descriptivos de los resultados en la CDI de Matemáticas.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	5,466500	3,059459	20	1
Control	3,404211	1,784540	19	2

Como vemos, y tal y como sucedía en la asignatura de Matemáticas, el grupo experimental obtuvo mejores resultados y las **diferencias** existentes en los grupos podían considerarse como **significativas** al haberse obtenido un valor crítico de 0,0149.

En la tabla 61 exponemos los resultados correspondientes a Lengua y Literatura.

Tabla 61. **Análisis de la varianza de los resultados en la CDI de Lengua y Literatura en función de los grupos.**

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Media cuadrática	Valor de F	*p*(>F)
Grupo	1	26,45	26,449	8,151	0,00701**
Residuales	37	120,06	3,245		

Nota. * valores significativos p<.05; ** valores muy significativos p<.01; *** valores altamente significativos p<.001.

Su correspondiente tabla de descriptivos fue la siguiente:

Tabla 62. **Descriptivos de los resultados en la CDI de Lengua y Literatura.**

	Media	Desviación típica	Número de datos	Datos ausentes
Experimental	7,016000	1,846722	20	1
Control	5,368421	1,752231	19	2

Observamos que volvían a ser, como a lo largo del curso, los resultados mejores en el grupo experimental, pero a diferencia de lo que ocurría en la asignatura, donde las diferencias no llegaban a ser consideradas como significativas, en esta prueba los resultados presentaron **diferencias muy significativas** al obtenerse un valor crítico de 0,00701.

3.2.5. Análisis evolutivo de los resultados

En los análisis realizados pudimos comprobar estadísticamente que los grupos inicialmente estaban equilibrados, no presentando diferencias significativas ni en la edad de los alumnos, ni en las calificaciones de Matemáticas del curso anterior, ni en la evaluación inicial realizada a inicios de curso. De hecho, en el estudio hecho de estas tres variables, los resultados obtenidos indicaron que los grupos se encontraban inicialmente muy equilibrados entre sí.

El equilibrio mencionado, no solo se respetó en los valores medios muestrales, sino que también la variabilidad que mostraron los resultados de la evaluación inicial, con unos resultados prácticamente idénticos en desviación típica. En los resultados del curso anterior se observaron ciertas diferencias en la dispersión que crecerían a lo largo del curso.

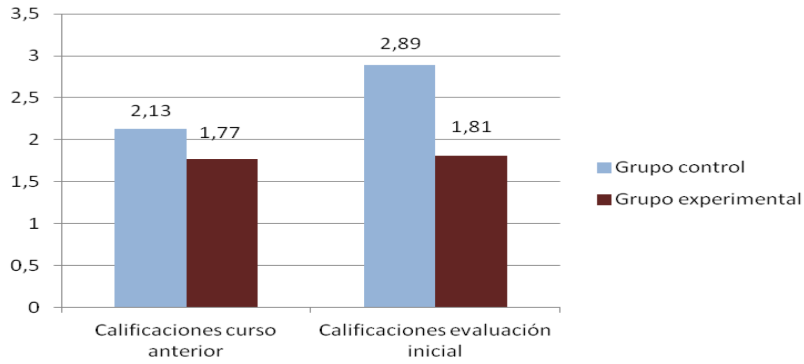


Gráfico 49. **Desviaciones típicas de los grupos de la calificación del curso anterior y la evaluación inicial.**

En cuanto a las pruebas de resolución de problemas realizadas a lo largo del curso hemos visto que se alcanzaron diferencias significativas tanto en el segundo, como en el tercer trimestre.

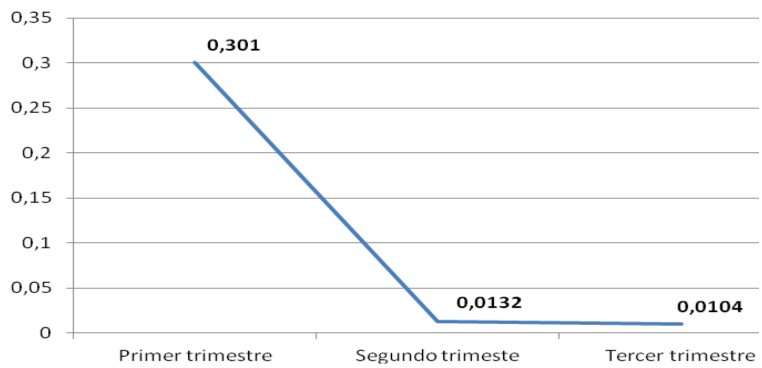


Gráfico 50. **Valores críticos del análisis de la varianza del los resultados de las pruebas de problemas.**

Si vemos el gráfico 51 de las desviaciones típicas que presentaron los grupos respecto a esta variable pudimos observar que la diferencia entre ambos fue bastante estable, en torno a un punto más en el grupo experimental, creciendo esta ligeramente a lo largo del curso. En los dos grupos vimos que la prueba con más variabilidad fue la primera.

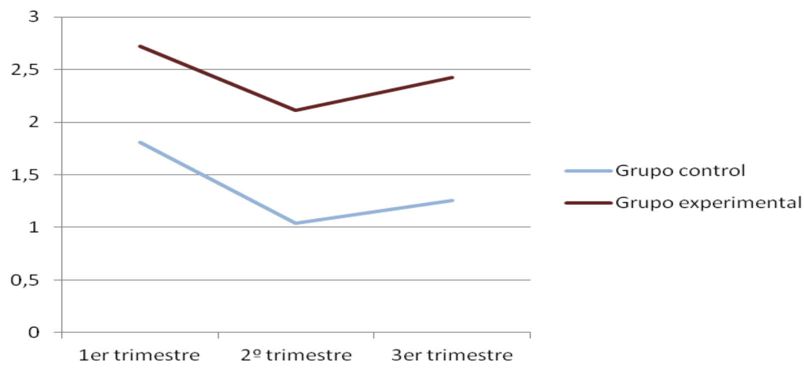


Gráfico 51. **Desviaciones típicas de los grupos en las pruebas de resolución de problemas.**

Si unimos estos resultados a los que vimos en el análisis descriptivo podemos concluir que la experiencia con las pruebas de resolución de problemas favoreció principalmente a los alumnos con mejores aptitudes matemáticas del grupo experimental, no perjudicando en resultados al resto del alumnado.

Estas diferencias significativas que se marcaron en las pruebas de resolución de problemas tardaron más en llegar cuando analizamos la dificultad que para los alumnos tenían las pruebas de problemas propuestas.

Podemos ver en el gráfico 52 como en la primera prueba existían diferencias escasas, en la segunda ya había diferencias reseñables, pero sin llegar a poder ser significativas, y ya en la tercera las diferencias se pudieron considerar como muy significativas.

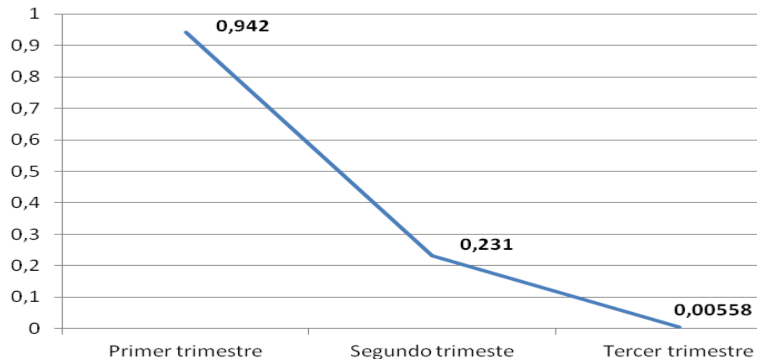


Gráfico 52. **Valores críticos del análisis de la varianza del la dificultad que presentaba las pruebas de problemas a los alumnos.**

Al igual que sucedió anteriormente, respecto a esta variable los resultados del grupo experimental presentaron una mayor dispersión respecto a la desviación típica, relativamente estable en su diferencia, en torno a 0,5 puntos, a lo largo del curso. En los dos grupos observamos cómo esta dispersión va decreciendo a medida que avanza el curso.

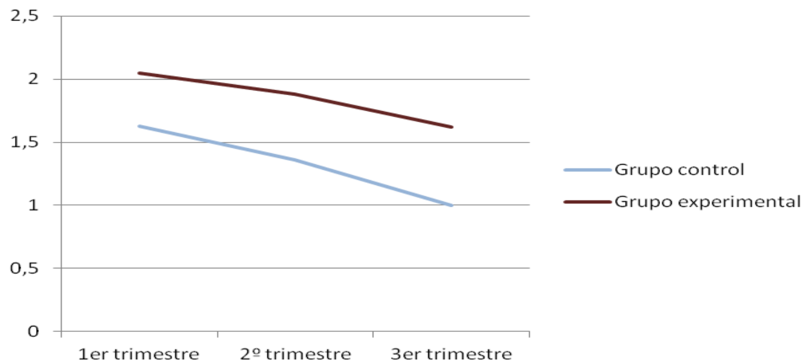


Gráfico 53. **Desviaciones típicas de los grupos en la dificultad de las pruebas.**

En cuanto a los resultados en la asignatura de Matemáticas, las diferencias existentes fueron más estables, considerándose en el primer y tercer trimestre como muy significativas y en el segundo como significativas, aunque muy próximas a ser consideradas como muy significativas. Estos niveles se mantuvieron en los resultados obtenidos en la CDI de Matemáticas donde obtuvo un valor crítico de 0,0149.

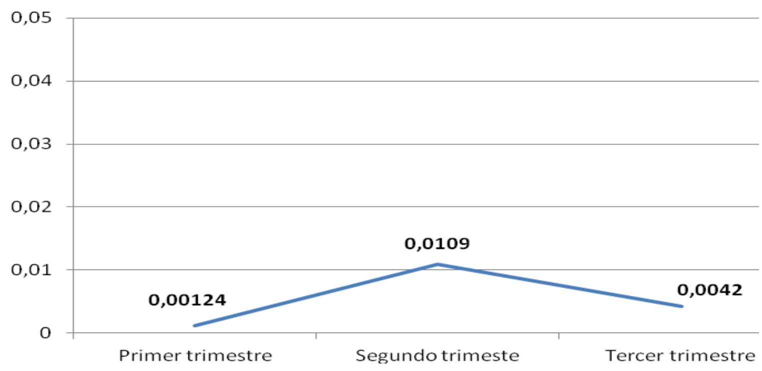


Gráfico 54. **Valores críticos del análisis de la varianza en las calificaciones de la asignatura de Matemáticas.**

Puede observarse la alta dispersión de los resultados en los dos grupos, situándose en el grupo experimental en valores en torno a 3 puntos y en el grupo control en valores en torno a 2 puntos. Estos resultados iban en línea ascendente con los obtenidos con las calificaciones del curso anterior (2,13 y 2,89) y con la variabilidad que mostraron los resultados del CDI (1,78 y 3,06), aunque no se correspondían con el equilibrio en la dispersión que obtuvimos en la evaluación inicial (1,77 y 1,81).

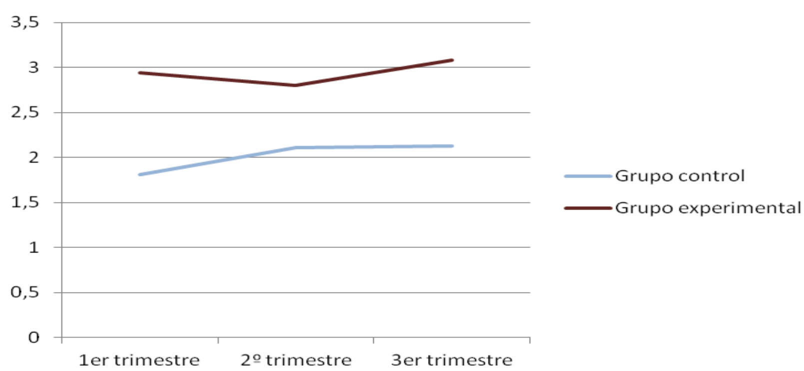


Gráfico 55. **Desviaciones típicas de los grupos en la asignatura de Matemáticas.**

Al contrario de lo que ocurrió en Matemáticas, en la asignatura de Lengua y Literatura vimos que, aunque siempre hubo diferencias a favor del grupo experimental, estas no se consideraron nunca como significativas. Sin embargo, esto no se correspondía con las puntuaciones obtenidas por los alumnos en la CDI en la parte de Lengua y Literatura. Aquí los alumnos de los dos grupos mejoraron sus puntuaciones respecto a las que iban obteniendo en curso. Las diferencias entre las puntuaciones de ambos grupos no aumentó notablemente, pero los que sí que convergieron fueron los valores de dispersión, lo que condujo a que esta diferencia resultará en el análisis de la varianza muy significativa, con un valor crítico de 0,00701.

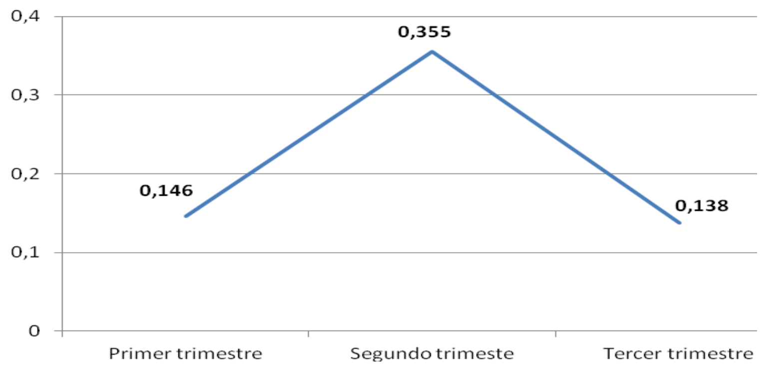


Gráfico 56. **Valores críticos del análisis de la varianza de las calificaciones de la asignatura de Lengua y Literatura.**

En cuanto a la variabilidad de los resultados en esta asignatura, como estaba siendo la tónica habitual, el grupo experimental presentó una mayor dispersión, pero, a diferencia de lo que ocurrió en variables anteriormente estudiadas, esta diferencia pasó de ser escasa en el primer trimestre (0,4 puntos) a ser muy elevada en los otros dos trimestres posteriores, con diferencias de 1,59 y 1,28 puntos respectivamente. Como hemos dicho antes, esto no tuvo correspondencia con los resultados que obtuvieron los alumnos de la CDI, en donde los resultados presentaron en ambos casos valores de desviación típicas en torno a 1,8 puntos.

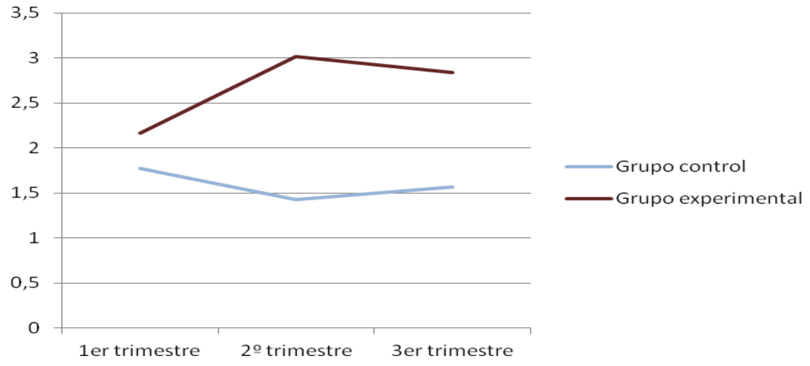


Gráfico 57. **Desviaciones típicas de los grupos en la asignatura de Lengua y Literatura.**

4. CONCLUSIONES Y LIMITACIONES

4.1. Conclusiones

Esta investigación ha pretendido poner algo de luz en el debate sobre si el uso didáctico de las demostraciones en la asignatura de las Matemáticas supone un beneficio o no para los alumnos, sobre todo en la capacidad de estos para resolver problemas matemáticos. Durante la fundamentación teórica hemos visto opiniones de varios investigadores que van en líneas diferentes. En la época de las décadas de los 70 y 80 la opinión predominante era la de desechar su uso didáctico ya que se consideraba un obstáculo en la construcción del conocimiento matemático. Esta idea ha ido cambiando progresivamente hasta llegar a predominar en los últimos años la idea de que su utilización adecuada en el aula puede conllevar importantes beneficios al alumno.

El uso didáctico de la demostración es una cuestión de actualidad dentro de las investigaciones de la didáctica de las Matemáticas. La novedad de nuestra investigación ha sido el estudio experimental que pretende comprobar estadísticamente si su utilización reporta una mejora en las capacidades de los alumnos para resolver problemas matemáticos, analizando paralelamente también el impacto en otras variables.

A lo largo del punto 3 hemos ido exponiendo los resultados obtenidos. En la tabla 63 resumimos los concernientes a los procesos de análisis de varianza que realizamos para ver si existían diferencias significativas entre los grupos en las medias de algunas variables.

Tabla 63. **Resumen de los resultados de los análisis de la varianza.**

Hipótesis	p-valor	Conclusión
H1: Edad de los alumnos.	0,361	No existieron diferencias significativas
H2: Calificaciones en Matemáticas el curso anterior.	0,809	No existieron diferencias significativas
H3: Evaluación inicial.	0,967	No existieron diferencias significativas
H4: Calificaciones en la prueba de problemas I.	0,301	No existieron diferencias significativas
H5: Dificultad I.	0,942	No existieron diferencias significativas
H6: Calificaciones en Matemáticas en el primer trimestre.	0,00124	**Existieron diferencias muy significativas**
H7: Calificaciones en Lengua y Literatura en el primer trimestre.	0,146	No existieron diferencias significativas
H8: Calificaciones en la prueba de problemas II.	0,0132	**Existieron diferencias significativas**
H9: Dificultad II.	0,231	No existieron diferencias significativas
H10: Calificaciones en Matemáticas en el segundo trimestre.	0,0109	**Existieron diferencias significativas**
H11: Calificaciones en Lengua y Literatura en el segundo trimestre.	0,355	No existieron diferencias significativas
H12: Calificaciones en la prueba de problemas III.	0,0104	**Existieron diferencias significativas**
H13: Dificultad III.	0,00558	**Existieron diferencias muy significativas**
H14: Calificaciones en Matemáticas en el tercer trimestre.	0,0042	**Existieron diferencias muy significativas**
H15: Calificaciones en Lengua y Literatura en el tercer trimestre.	0,138	No existieron diferencias significativas
H16: Calificaciones en la prueba CDI de Matemáticas.	0,0149	**Existieron diferencias significativas**
H17: Calificaciones en la prueba CDI de Lengua y Literatura.	0,00701	**Existieron diferencias muy significativas**

Siendo conscientes de las limitaciones que mencionaremos en el punto 4.2, los resultados obtenidos han sido contundentes. En los resultados de las pruebas de resolución de problemas, en las calificaciones de la asignatura de Matemáticas, en los resultados de la prueba CDI y en la dificultad encontrada por los alumnos en las pruebas de resolución de problemas se han acabado produciendo diferencias significativas en los resultados, siempre con resultados favorables al grupo experimental, no produciéndose esas diferencias en los resultados de la asignatura de Lengua y Literatura. Es decir, los beneficios obtenidos por los métodos aplicados en el grupo experimental se han observado, no solo en la resolución de problemas, sino en los procedimientos generales de la Matemática y en la percepción de ellos.

Es de extrañar que no haya habido diferencias significativas entre las medias de los resultados de los grupos en la asignatura de Lengua y Literatura y que sí las haya habido, y de hecho muy significativas, en los resultados de la prueba CDI de esta asignatura. En el punto 3.1.4 realizamos un estudio de regresión lineal para analizar en qué medida estaban relacionados los resultados obtenidos por los alumnos en el instituto en las asignaturas de Matemáticas y de Lengua y Literatura con los obtenidos en la prueba CDI. La tabla 64 resume los resultados que obtuvimos:

Tabla 64. **Resumen de los resultados del estudio de regresión lineal.**

	Matemáticas	**Lengua y Literatura**
Grupo control	Media instituto: 3,474 Media CDI: 3,404 Coeficiente correlación: 0,422	Media instituto: 4,737 Media CDI: 5,368 Coeficiente correlación: 0,540
Grupo experimental	Media instituto: 5,900 Media CDI: 5,467 Coeficiente correlación: 0,877	Media instituto: 5,750 Media CDI: 7,016 Coeficiente correlación: 0,756

Se puede extraer como conclusión que en las dos asignaturas se produjeron mayores relaciones entre los resultados en el grupo experimental. Sin embargo, si nos fijamos solo en los grupos, nos podemos dar cuenta que en el grupo control hubo una mayor relación entre los resultados en Lengua y Literatura, mientras que en el grupo experimental fue mayor en Matemáticas. De todos modos, no hemos sido capaces de encontrar una justificación clara del hecho de que durante el curso no se produjeran diferencias significativas entre las medias de los resultados de la asignatura de Lengua y Literatura, pero sí se produjeran, y de hecho muy significativas, entre las medias de los resultados de la prueba CDI. Algunas de las causas pudieron ser:

a) Mientras que en la asignatura de Matemáticas los grupos tuvieron al mismo profesor, en Lengua y Literatura tuvieron a profesores distintos.
b) Es posible que el grupo experimental hiciera una preparación de la prueba más profunda que la hizo el grupo control. De hecho, la nota del grupo experimental es muy superior a la media de la Comunidad de Madrid (5,85).
c) La prueba CDI es una prueba a la que los alumnos no le suelen dar una gran importancia y es por ello, a pesar de que no posee una gran dificultad, que muchos alumnos ni se la preparan, ni la realizan con la misma seriedad que un examen ordinario del instituto. Del mismo modo, al ser una prueba de escasa dificultad, alumnos que no van bien en el curso pero que se preparan mínimamente esta prueba logran obtener resultados superiores a los que obtiene en el curso ordinario. Todo esto conduce a que se distorsionen ciertos resultados.

Un aspecto importante a resaltar es la variabilidad de los resultados que es mayor en el grupo experimental. Viendo los resultados descriptivos obtenidos se puede apreciar como el incremento en las calificaciones del grupo experimental se debe principalmente al incremento en las calificaciones de los alumnos con más capacidades, no perjudicando al resto.

También hemos estudiados los resultados de los alumnos de cada grupo en cada problema concreto. Nos hemos percatado de que cuando un problema es de razonamiento sencillo los resultados que obtuvieron los alumnos de ambos grupos fueron similares, incluso en algún caso obtuvo mejores resultados el grupo control. En términos absolutos, las mayores diferencias a favor del grupo experimental se produjeron en problemas donde el nivel de razonamiento para llegar a la solución podemos considerarlo medio. En términos relativos, se produjeron en los problemas más complejos debido a las bajas puntuaciones medias obtenidas por el grupo control en este tipo de problemas.

Una vez realizada y analizada la fase experimental y teniendo en cuenta la fundamentación teórica que hemos realizado podemos establecer otras conclusiones de una índole más teórica sobre el uso que en nuestra opinión habría que darle a la demostración en la didáctica de las Matemáticas. En el punto 1.6 vimos como existía un consenso general en situar el origen de la demostración en la Grecia Clásica, a pesar de que civilizaciones anteriores como la babilónica o la egipcia ya habían trabajado con pequeñas pruebas relacionando razones geométricas. En la línea que han propuesto algunos investigadores, creemos que esta línea histórica también es la que debería producirse en la didáctica. No se trata de buscar un curso concreto en donde introducir la demostración y sus métodos a los alumnos. Desde los últimos cursos de la Educación Primaria habría que ir inculcando a los alumnos actitudes que favorezcan su curiosidad por justificar determinados resultados, siempre de una manera lo más individualizada posible, progresiva y adaptándose al nivle del alumno. También es importante, como vimos en el punto 1.4, presentar la demostración con unas funciones que vayan más allá que la habitual de la verificación, como pueden ser la de explicación, sistematización, descubrimiento o comunicación.

Al introducir la demostración y sus métodos en el aula lo ideal sería buscar una situación similar a la que tuvieron los griegos en donde sea una necesidad interna de la propia asignatura sin que el profesor tenga que hacer referencia expresa a esto. Pero, ¿qué situación podría ser adecuada para tal objetivo? Las situaciones para iniciar las demostraciones con cierto rigor en los alumnos podrían ser varias, incluso la misma que utilizaron los griegos, la demostración de la irracionalidad (desde el punto de vista aritmético) de $\sqrt{2}$. Sin embargo, consideramos que no parece plausible para la gran mayoría de los alumnos que por sí solos se planteen esta necesidad, con lo que, en nuestra opinión, consideramos que la aportación externa del profesor es casi imprescindible para despertar en el alumno estas inquietudes. Un ejemplo más sencillo y que quizás pueda tener más posibilidades de despertar el interés intrínseco de los alumnos es la demostración de la existencia de infinitos números primos. La demostración es muy sencilla, es un ejemplo muy esclarecedor del método de reducción al absurdo y sus contenidos se trabajan en los primeros cursos de la Educación Secundaria.

A pesar de la importancia que le damos a la demostración, somos conscientes de que puede suponer un obstáculo difícil de superar para ciertos alumnos, sobre todo si no se ha tratado con la progresividad que hemos mencionado con anterioridad. Hemos visto como a lo largo de la historia las demostraciones y el rigor han ido tomando papeles muy distintos dentro de las Matemáticas. De hecho, durante más de 20 siglos los matemáticos priorizaron las producción de resultados al rigor con los que estos se obtenían. Creemos que este hecho también es aplicable en aula, sobre todo en las primeras etapas, y que el proceso mediante el cual los alumnos deben llegar a unas Matemáticas lo más rigurosas posibles deben ser los más individualizados posibles, intentando que los alumnos conjeturen y prueben "*a su* *manera*", siempre con la supervisión del profesor para corregir los errores y mejorar los procedimiento que vayan produciéndose. De hecho, estamos de acuerdo con el proceso que describe Alsina (2003) en el cual indica que la primera demostración suele ser la peor, que estas mejoran con los años y que la demostración ideal es un ente inalcanzable en multitud ocasiones. Este último aspecto es inherente a las Matemáticas actuales en donde los resultados los asumimos por la fe que tenemos en una comunidad de expertos matemáticos que aprueban ciertos procesos cuyo entendimiento se encuentra al alcance de muy pocos.

En resumen, proponemos que, tras una formación adecuada del profesorado sobre cómo, cuándo y qué demostrar, estos procedimientos se introduzcan en el currículo de una forma más explícita y progresiva, y que se utilicen en el aula como una herramienta que sirva para mejorar los procesos matemáticos generales, más que con el objetivo de evaluar estos propios procedimientos.

4.2. Limitaciones

En todo momento hemos sido conscientes de que nuestra investigación tiene una serie de limitaciones que no nos permite extrapolar con una seguridad total el que era nuestro objetivo principal, demostrar que introduciendo paulatinamente la demostración en la didáctica de las Matemáticas se le proporcionan a los alumnos unas herramientas que le permiten resolver problemas matemáticos en mejores condiciones. Entre las principales limitaciones de nuestro proyecto podemos citar las siguientes:

1. Estamos de acuerdo en la opinión que han expresados diferentes investigadores sobre que la introducción de la demostración debe hacerse de forma progresiva en el aula y no buscar un curso concreto para empezar a trabajar con ella. Consideramos que la forma ideal no es la que hemos utilizado en esta investigación ya que los alumnos de los dos grupos eran desconocidos para el profesor de la asignatura y en cursos anteriores prácticamente no habían trabajado estos procedimientos. Aunque hemos intentado actuar en el grupo experimental de la manera más progresiva posible, está claro que este proceso se debería haber comenzado en cursos anteriores introduciendo a los alumnos pequeñas pruebas y acostumbrándoles a procesos de justificación acordes siempre al nivel en el que estaban.
2. Ya hemos comentado que la fase experimental de nuestra investigación se centra en una muestra de 42 alumnos, que entendemos pequeña, y que además, dada la idiosincrasia de marco donde se sitúa, no se pudo elegir con las técnicas aleatorias propias de un estudio estadístico riguroso. Este segundo problema, una vez analizados los datos, parece que no tuvo una verdadera importancia porque

todos los análisis que realizamos dieron como resultado que los grupos creados eran homogéneos entre sí inicialmente. La cuestión del tamaño sí es más relevante ya que de poder haber tomado más alumnos en la muestra podíamos haber aumentado la certeza de los resultados e incluso haber ampliado la población a los alumnos de 3º ESO que cursan el currículo ordinario en un centro público de la Comunidad de Madrid.

3. No podemos tener la idea de que la diferencia entre los resultados se deben en exclusiva a la diferencia de los métodos utilizados. Aunque los datos iniciales demuestran un equilibrio inicial entre los dos grupos, es obvio que hay una multitud de factores que pueden influir en los resultados académicos de los grupos, a parte de los métodos utilizados con ellos. De hecho, en las demás asignaturas del curso pudimos observar como en general el grupo experimental evolucionó mejor que el grupo control, como pudimos ver por ejemplo con la asignatura de Lengua y Literatura. Sin embargo, las diferencias más significativas se produjeron en la asignatura de Matemáticas.
4. La idea inicial de la investigación era hacer la fase experimental en un curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Inicialmente se pensó en hacerla en 4º ESO, pero dado que en el instituto en el que se realizó la experiencia solo había dos cursos de ese nivel, uno con la opción de las Matemáticas A y otro con la opción de las Matemáticas B, se desestimó esa idea ya que era lógico pensar que en el área de Matemáticas esos grupos iban a estar claramente descompensados y no tenía sentido comparar las notas de la asignatura al pertenecer a currículos distintos. Debido a esta situación, se decidió hacerlo en 3º ESO, advirtiendo previamente al Departamento de Matemáticas de que se iba a realizar tal

experiencia y a Jefatura de Estudios, con el objetivo de que nos confeccionaran, en la medida de lo posible, dos grupos lo más equilibrados posibles entre ellos. Los resultados que hemos obtenido presentan la limitación de que la experiencia se ha realizado en un curso concreto, pero, como ya hemos mencionado, esta se podía haber realizado en cualquier nivel de la Educación Secundaria e incluso en los últimos cursos de la Educación Primaria, adaptándose al nivel de cada curso.

5. Consideramos que también es una limitación que el trabajo con los dos grupos en la asignatura de Matemáticas lo haya llevado a cabo un mismo profesor que ya poseía inicialmente la idea de que trabajar con demostraciones en el aula favorece a alumno en determinados aspectos. Esto pudo hacer que de forma involuntaria pusiera más entusiasmo en la metodología del grupo experimental.
6. Según el Ministerio de Educación (2012, p. 4), los alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria se repartieron en España en el curso 2011-12 en los siguientes porcentajes en función de la titularidad del centro:
   - Enseñanza pública: 65,9%.
   - Enseñanza Concertada: 30,6%
   - Enseñanza privada: 3,5%

   Si nos centramos en la Comunidad de Madrid, el reparto según datos de la Consejería de Educación y Empleo (2012, p. 7) fue:
   - Enseñanza pública: 50,7%.
   - Enseñanza Concertada: 37,5%
   - Enseñanza privada: 11,8%

   Como vemos en el gráfico 56, ni en España, ni mucho menos en la Comunidad de Madrid, toda la Enseñanza tiene carácter público. Nuestra experiencia se ha realizado en el marco público, pero eso ha sido una limitación y ampliar dicho marco enriquecería el valor de los resultados obtenidos aunque habría que analizar previamente si convendría tratar los datos globalmente o diferenciado el marco en el que se encuentran.

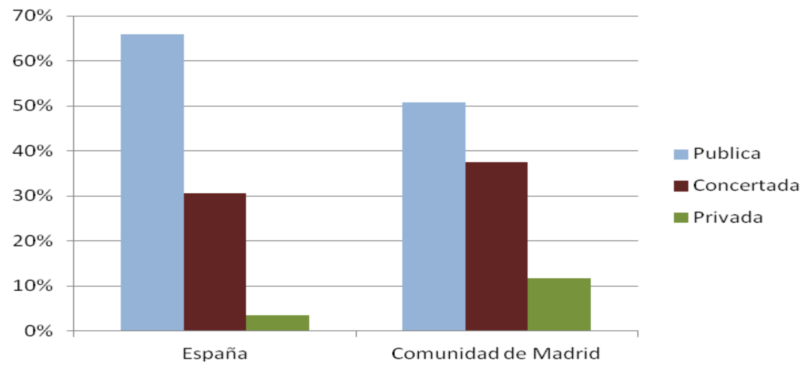


Gráfico 58. **Diagrama de barras de los porcentajes de alumnos en ESO en función de la titularidad del centro en el curso 2011-12.**

4.3. Recomendaciones y posibles trabajos futuros

Las conclusiones y las limitaciones expuestas en los puntos anteriores muestran el camino para continuar esta investigación. La utilización de la demostración en la didáctica de las Matemáticas es una cuestión que está creciendo en interés en los últimos años y que, como hemos visto en nuestra investigación, cada vez más investigadores apoyan su uso adecuado en el aula.

Por todo esto, se pueden realizar investigaciones similares en otros ámbitos para contrastar con los resultados que hemos obtenidos en esta investigación:

1. En otros niveles educativos, ya sean en la Educación Secundaria Obligatoria, en Bachillerato o incluso en últimos cursos de Educación Primaria. Siempre adaptándose los procedimientos al nivel de los alumnos y procurando trabajar con grupos homogéneos entre sí para que los resultados tengan una cierta validez.
2. Extender la investigación a otros centros demográficamente y tipológicamente distintos a los que hemos considerado en la población de nuestra investigación, que son los alumnos que en el curso 2011-12 cursaron el currículo ordinario de 3º ESO en un centro público de Coslada. Es decir, a centros de otras localidades, con sus correspondientes características sociales, y a centros de carácter concertado y privado.
3. Proponemos realizar una investigación similar, pero con una duración mayor, de al menos dos cursos, en donde se introduzcan estos métodos con mayor progresividad y en donde se analicen con un mayor plazo la incidencia que tienen estos métodos en los resultados obtenidos.

4. Dada la progresividad que proponemos en la introducción de estos métodos, consideramos que sería interesante que las autoridades pertinentes introduzcan las herramientas necesarias para que haya una mayor estabilización del profesorado y sus métodos en los centros. La idea que proponemos en esta investigación no tiene sentido si no se da una continuidad en los cursos posteriores.

Una vez terminada la investigación, hemos podido observar que quizás los problemas propuestos en las pruebas han sido excesivamente complicados. A pesar de que pensamos que este hecho no ha afectado a los resultados globales, sí que recomendamos que en experiencias posteriores se propongan problemas de argumentación y resolución algo más sencilla, manteniendo la dificultad creciente a lo largo del curso que hemos aplicado en nuestra investigación.

Con el objetivo de continuar con la investigación, en el punto 6.7 del anexo hemos introducido las instrucciones que nos han permitido realizar el análisis de la varianza en el programa R. No obstante, estos cálculos estadísticos se pueden realizar con otros programas estadísticos como SPSS.

5. BIBLIOGRAFÍA

ADDINGTON, S. CLEMENS, H., HOWE, R. & SAUL, M. (2000). Four reactions to Principles and Standars for school mathematics. En *Notice of the ASM*, *47*, 1072 – 1079.

ALCOLEA, J. (2002). La demostración matemática: problemática actual. En *Contrastes, revista interdisciplinar de Filosofía, 7*, 15 – 34. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uma.es/contrastes/pdfs/007/02Jesus_Alcolea.pdf

ALSINA, C. (2003). *C.Q.D.: Como quisiéramos demostrar*. Conferencia del 19 de noviembre de 2003 en la Facultad de Educación de Córdoba como motivo del homenaje al profesor Paco Anillo. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://ea.upc.edu/matematiques-s2-etsab/personal/claudi-alsina/cqd.pdf

ARISTÓTELES (1950). *Tópicos*. Paris: Vrin (Obra original del año 350 a. de C. aprox.).

AGUIRRE, A. y LUPIAÑEZ, J.L. (2000). El papel de la tecnología en la demostración matemática. En *Memorias del II Simposio de Educación Matemática (CD – ROM)*. Chivilcoy: Universidad de Lujan. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/AguirreM00-2673.PDF

AIGNER, M. & ZIEGLER, G.M. (2004). *Proofs from THE BOOK*. Berlín: Springer. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.math.boun.edu.tr/instructors/ozturk/proofs.pdf

APARICIO, F. M. (2000). Pautas para la mejora de la calidad en la enseñanza de Estadística en Ingeniería de Telecomunicación. En *Revista Relieve (6), 1*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/RELIEVE/v6n1/RELIEVEv6n1_2.htm

ARSAC, G. (1987). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. (Martín Acosta, trad.) En *Recherches en didactique des mathematiques 8 (3)*, 267 – 312.

AZCÁRATE, P. (1997). La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. En *Revista Relieve (3)*, *2*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/RELIEVE/v3n2/RELIEVEv3n2_0.htm

BADIA, A. (2012). *Propuesta didáctica sobre la revalorización de las demostraciones como recurso para mejorar la comprensión del lenguaje matemático en los alumnos de Bachillerato.* (Trabajo fin de máster) Facultad de Educación de la Universidad Internacional de La Rioja. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/692/2012_10_01_TFM_ESTUDIO_DEL_TRABAJO.pdf?sequence=1

BALACHEEF, N. (1999). *¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/resut2.html

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. (Pedro Gómez, trad.) Bogotá: Universidad de los Andes. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf (Obra original publicada en 1987)

BARROSO, R. (2000). Consciencia de la necesidad de una demostración. En *Reflexiones en torno a la demostración (Documentos presentados por miembros del Grupo*

"Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM), 21 – 23. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/RecopilDemo01.pdf

BOMBAL, F. (2006). *Paradojas y rigor. La historia interminable*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.mat.ucm.es/~bombal/Personal/Historia/ParadojasYrigor.pdf

BOMBAL, F. (2010). Rigor y demostración en Matemáticas. En *Revista de la Real Academia de ciencias Exactas, Física y Naturales (104), 1*, 61 – 79. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.rac.es/ficheros/doc/00902.pdf

BORRÁS, E. y CARRILLO, M. E. (1984). *De 12 a 16. Un proyecto de currículo de matemáticas* (Grupo Cero). Valencia: Nau Llibres.

BOYER, C. (1999). *Historia de la matemática*. (Mariano Martínez, trad.) Madrid: Alianza.

BRAVO, M.L., ARTEAGA, E., SOL, J. L. (2001). El valor formativo de las demostraciones. En *Xixím, revista electrónica de didáctica de las matemáticas, 3*.

BRAVO, M. L. y ARRIETA, J. J. (2005). Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas. En *Revista Ibero-Americana, 35*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.rieoei.org/deloslectores/838Bravo.PDF

CALLEJO, M.L. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.

CARRILLO, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

CAVEING, M. (1982). *Zénon d'Élée, prolégomènes aux doctrines du continu: étude historique et critique des Fragments et Témoignages*. París: Vrin.

CHAITIN, G. J. (1988). Aritmética y azar. En *Investigación y Ciencia*, *144*, 44 – 50.

CHAITIN, G. J. (2003). Ordenadores, paradojas y fundamentos de las matemáticas. En *Investigación y Ciencia*, 322, 28 – 35. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/investigacion_y_ciencia.pdf

CODINA, A. y LUPIAÑEZ J.L. (1999). El razonamiento matemático: argumentación y demostración. En el *Resumen del XXII Congreso de la Sociedad Matemática Mexicana, 1*, 139 – 202. Guadalajara: Universidad de Guadalajara. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/CodinaA99-2672.PDF

COLERA, J. y OLIVEIRA, M. J. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2006). *Resolución de 20 de diciembre de 2005, de la Dirección General de Ordenación Académica, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de las áreas de Lengua Castellana y Literatura y de Matemáticas, para los diferentes ciclos de la Educación Primaria de la Comunidad de Madrid*. (B.O.C.M. de 3 de enero de 2006)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2007a). *Decreto 23/2007, de 10 de mayo, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*. (B.O.C.M. de 29 de mayo de 2007)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2007b). *Resolución de 27 de junio, de la Dirección General de Ordenación Académica, sobre la optatividad en la Educación Secundaria Obligatoria derivada de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*. (B.O.C.M. de 16 de agosto de 2007)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2008a). *Decreto 67/2008, de 19 de junio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo del Bachillerato*. (B.O.C.M. de 27 de junio de 2008)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2008b). *Orden 1029/2008, de 29 de febrero, de la Consejería de Educación, por la que se regulan para la Comunidad de Madrid la Evaluación en la Educación Secundaria y los documentos de aplicación*. (B.O.C.M. de 17 de marzo de 2008)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN DE LA COMUNIDAD AUTÓNOMA DE MADRID (2009). *Resolución de 30 de septiembre de 2009, de la Dirección General de Enseñanza Secundaria y Enseñanzas Profesionales, por la que se establecen los estándares o conocimientos esenciales de la materia de Matemáticas para los tres primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Comunidad de Madrid*. (B.O.C.M. de 21 de octubre de 2009)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y EMPLEO DEL LA COMUNIDAD DE MADRID (2012). *Resolución de 19 de febrero de 2012 de las Viceconsejerías de Educación y de Organización Educativa, por la que se dictan instrucciones para la celebración de la prueba de conocimientos y destrezas indispensables (CDI) de los alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria y del primer curso del Programa de Diversificación Curricular de la Comunidad de Madrid, en el curso 2011-2012.* (B.O.C.M. de 23 de marzo de 2012)

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y EMPLEO DEL LA COMUNIDAD DE MADRID (2012). *Datos y cifras de la Educación 2011-12*. Madrid: Publicaciones Consejería Educación y Empleo. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.madrid.org/cs/Satellite?c=CM_InfPractica_FA&cid=1142558405036&idConsejeria=1109266187254&idListConsj=1109265444710&idOrganismo=1142359975427&language=es&pagename=ComunidadMadrid%2FEstructura&sm=1109266100977

CRESPO, C. y PONTEVILLE, C. (2005a). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 560 – 565. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

CRESPO, C. y PONTEVILLE, C. (2005b). Las funciones de la demostración en el aula de Matemáticas. En *Acta latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 307 – 312. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.pucrs.br/famat/viali/orientacao/leituras/artigos/ALME18.pdf

DE LA TORRE, E. (2000). La demostración. En *Reflexiones en torno a la demostración (Documentos presentados por miembros del Grupo "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM)*, 24 – 26. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/RecopilDemo01.pdf

DE VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. En *Epsilón: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 26*, 15 – 30.

DE GUZMÁN, M. (1984). Juegos matemáticos en la enseñanza. Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. En las *Actas de las IV Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas*. Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.sectormatematica.cl/articulos/ juegosmaten.pdf

DE GUZMAN, M. (2004). *Como hablar, demostrar y resolver en matemáticas*. Madrid: Anaya.

DE GUZMAN, M. (2006). *Para pensar mejor*. Madrid: Pirámide.

DÍAZ, P. (2013). Educación utiliza el informe PISA para justificar la ley Wert. En *Público, 3 de diciembre de 2013*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.publico.es/486542/educacion-utiliza-el-informe-pisa-para-justificar-la-ley-wert

DUVAL, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

ESCUDERO, I. (2000). Debate sobre Geometría y demostración. En *Reflexiones en torno a la demostración (Documentos presentados por miembros del Grupo "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM)*, 31 – 34. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/RecopilDemo01.pdf

FERRINI-MUNDY, J. (2000). Principles and standars for schools mathematics. A guide for mathematicians. En *Notices of American Mathematical Society (47), 8*, 868 – 876.

FIOL, M.L. (2001). Demostración. En *Reflexiones en torno a la demostración (Documentos presentados por miembros del Grupo "Aprendizaje de la Geometría" de la SEIEM)*, 35 – 43. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/ archivos2/Recopil Demo01.pdf

FLORES, A. (2005). ¿Cómo saben los alumnos que lo que aprenden en Matemáticas es cierto? Un estudio exploratorio. En *Educación Matemática (17), 3*, 5 – 24. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://mandrake.mat.ufrgs.br/~mem023 /20072/cristiano_santos/artigo_mexico.pdf

GAMBOA, J.M. y RODRIGUEZ, B. (2008). *Desarrollo del temario de las oposiciones de secundaria* (vol. 1 y 2). Madrid: Sanz y Torres.

GAULIN, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. En *Sigma, 19*, 51 – 63. (Transcripción de la conferencia del 15 de diciembre de 2000 en el Palacio de Euskalduna de Bilbao) Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://sferrerobravo. files.wordpress.com/2007/10/7_tendencias_actuales.pdf

GIL, J.A. (2004). *Bases metodológicas de la investigación educativa (Análisis de datos)*. Madrid: Uned.

GODINO, J.D. y MARTÍNEZ, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. En *Enseñanza de las ciencias (3), 19*, 405 – 414. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://ddd.uab.cat/pub/edlc/ 02124521v19n3p405.pdf

GRANADOS, C. (2009). La importancia de la evaluación inicial en el ámbito educativo. En *Revista Digital Innovación y Experiencias educativas*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_24 /CRISTINA__GRANADOS_BERMUDEZ_2.pdf

GREENO, J.G. (1994). Comments on Susanna Epp's Chapter. En *Mathematical thinking problem solving*, 270 – 279. Nueva Jersey: Erlbaum.

HALMOS, P. (1988). *I Want to be a Mathematician: An Automathography in Three Parts.* Washington: Mathematical Association of America.

HANNA, G. (1995). Challenges to the importance of proof. En *For the learning mathematics (15), 3*, 42 – 49.

HANNA, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. En *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5 – 23.

HANNA, G. (2007). The ongoing value of proof. En *Theorems in schools: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, 3 – 18. Rotterdam: Sense Publishers.

HAREL, G. & SOWDER, L. (1998). Student's proof schemes. Results from exploratory studies. A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), en *Research on Collegiate Mathematics Education, 3*, 234 – 283. Providence: American Mathematical Society.

HERNAN, H. y JIMENEZ, F. N. (2006). La demostración, elemento vivo en la didáctica de la matemática. En *Scientia et Technica, 31*, 237 – 240. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://revistas.utp.edu.co/index.php/revistaciencia/article/view/6445

HERSH, R. (1993). Proving is convincing and explaining. En *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389 – 399.

HORGAN, J. (1993). La muerte de la demostración. En *Investigación y Ciencia, 207*, 70 – 77.

IBAÑES, M. J. (1993). Matemáticas en Secundaria a través de los planes de estudio. En *Sigma, 15*, 25 – 31.

IBAÑES, M. J. y ORTEGA, T. (1997). La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la Educación Secundaria. En *Educación Matemática (9), 2*, 65 – 104.

IBAÑES, M. J. (2002). Analizadores específicos para la demostración matemática. Aplicación a los textos en el tema de Trigonometría en Bachillerato. En *Boletín de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 13*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.uv.es/aprengeom/archivos2/Ibanes02.pdf

IBAÑES, M. J. y ORTEGA, T. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. En *Suma, revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* *39*, 53 – 61. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://revistasuma.es/IMG/pdf/39/053-061.pdf

IBAÑES, M. J. y ORTEGA, T. (2005). Dimensiones de la demostración matemática en Bachillerato. En *Números, 65*, 19 – 40.

JAFFE, A. & QUINN, F. (1993). Theoretical Mathematics: Towards a cultural synthesis of Mathematics and Theoretical Physics. En *AMS, 29*, 1 – 13.

KLINE, M. (1981). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo veintiuno editores.

KNORR, W.R. (1975). *The evolution of the Euclidean Elements*. Boston: Reidel Publishing Company.

KRUMMMHEUER, G. (1995). The ethnography of argumentation. En P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.). En *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*, 229 – 269. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

LAKATOS, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

LARIOS, V. (2003). Si no demuestro… ¿enseño matemática? En *Educación matemática (15), 2*, 163 – 178. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.redalyc.org/pdf/405/40515207.pdf

MARTÍNEZ, A. (2001). La demostración en Matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica. En *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 27 – 43. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/title/demostracion-matematica-aproximacion-epistemologica-didactica/id/53458057.html

MARTINÓN, A. (2009). ¡Vivan las demostraciones! En *Unión, Revista Iberoamericana de educación matemática, 18*, 6 – 14. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2009/18/Union_018_005.pdf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.* (B.O.E. de 4 de mayo de 2006)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria*. (B.O.E. de 5 de enero de 2007)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. (B.O.E. de 6 de noviembre de 2007)

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2012). Datos y cifras. Curso escolar 2012-2013. Madrid: Catálogo de publicaciones oficiales del Ministerio. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de https://www.educacion.gob.es/dctm /ministerio/horizontales/estadisticas/indicadores-publicaciones/datos-cifras/datos-y-cifras-2012-2013-web.pdf ?documentId=0901e72b81416daf

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, de Educación.* (B.O.E. de 10 de diciembre de 2013)

NAGEL. E y NEWMANN. J. R. (1968). La demostración de Gödel. En *Sigma, el mundo de las matemáticas, 5*, 57 – 84. Barcelona: Grijalbo.

N.C.T.M. (2000). *Principios y estándares para la educación matemática*. (Manuel Fernández, trad.) Sevilla: Sociedad Andaluza de educación matemática Thales.

OCDE (2004). *Informe PISA 2003: Aprender para el alumno de mañana*. Santillana. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf

OCDE (2007). *PISA 2006: programa para la evaluación internacional de alumnos de la OCDE (Informe español)*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.mec.es/multimedia/00005713.pdf

OCDE (2010). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de los alumnos (Informe español)*. Madrid: Ministerio de Educación. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://iaqse.caib.es/documents/aval2009-10/pisa2009-informe-espanol.pdf

OCDE (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos (Informe español). Volumen I: Resultados y contexto.* Madrid: Ministerio de Educación. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/pisa2012lineavolumeni.pdf?documentId=0901e72b81786310

PAJARES, R. (2005). *Resultados en España del informe Pisa 2000: conocimientos y destrezas de los alumnos de 15 años*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2000infnacional.pdf?documentId=0901e72b8011069b

PATOCKA, J. (1981). *Essais hérétiques sur la philosophie de l'histoire*. Lagrasse: Verdier.

PLATÓN (370 a. C. aprox). *La República*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.nueva-acropolis.es/filiales/libros/Platon-La_Republica.pdf

PLUVINAGE, F. (2007). Demostración. En *CIVESTAV - DME*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/DemostracionFP.pdf

POLYA, G. (1945). *How to solve it*. Nueva Jersey: Princeton University Press.

POZO, J.I. (1994). *La solución de problemas*. Madrid: Santillana.

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA (2001). *Diccionario de la lengua española*. (22ª ed.) Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://lema.rae.es/drae/

RECIO, T. y RICO, L. (2005). El informe PISA 2003 y las matemáticas. En *El País*, *24 de enero 2005*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://elpais.com/diario/2005/01/24/educacion/1106521209_850215.html

RICO, L. (2006). La competencia matemática en PISA. En *PNA (1), 2*, 47 – 66. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://funes.uniandes.edu.co/529/1/RicoL07-2777.PDF

RIBERO, F. (2009). *Doce variaciones sobre un mismo tema o una demostración de cómo demostrar*. Universidad de los Andes. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://webdelprofesor.ula.ve/ciencias/lico/Mateducativa/demostraciones2.pdf

RIVERA, L.M. (2011). *Procesos de justificación y demostración matemática de profesores en formación inicial*. (Tesis para obtener el Grado de Maestro en Ciencias en Educación Matemática) Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://bibliotecavirtual.dgb.umich.mx:8083/jspui/bitstream/123456789/374/1/PROCESOSDEJUSTIFICACIONYDEMOSTRACIONMATEMATICADEPROFESORESENFORMACIONINICIAL.pdf

RUÍZ, A. y CHAVARRÍA, J. (2003). Los “estándares” en la educación matemática de los Estados Unidos: contexto, reforma y lecciones. En *Uniciencia (20), 2*, 379 – 391.

RUÍZ, A. (2006). La educación matemática debe fortalecer el pensamiento abstracto. En *Matemáticas, Educación e Internet, 157*, 22 – 25.

SÁNCHEZ, D. (2013). Las siete claves de España en PISA 2012: una España estancada y con más diferencias internas. En *El diario*, *3 de diciembre de 2013*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.eldiario.es/sociedad/Espana-aumenta-desigualdad-resultados-educativos_0_203330371.html

SANMARTÍN, O. (2013). España sigue 'anclada' a la cola de la UE en Educación. En *El mundo*, *3 de diciembre de 2013*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.elmundo.es/espana/2013/12/03/529cf657684341c1678b458e.html

SANTALÓ, L. (1962). *La enseñanza de la matemática en la Escuela Media*. Bueno Aires: Proyecto CINAE.

SCHOENFELD, A. (1989). *Mathematical problem solving*. Florida: Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1989). Explorations of student´s mathematical beliefs and behavior. En *Journal for Research in Mathematics Education (20), 4*, 338 – 355.

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning*, 334 – 370. Nueva York: MacMillan. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/eudoxus/article/view/177/312

SCHOENFELD, A. (1994). What do we Know about mathematics curricula? En *Journal of Mathematical Behavior*, *13*, 55 – 80. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://gse3.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/Schoenfeld_WhatDoWeKnow.pdf

SILIO, E. (2013). España repite curso. En *El País*, *3 de diciembre de 2013*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://sociedad.elpais.com/sociedad/2013/12/03/actualidad/1386063448_866928.html

SOLOW, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. Mexico: Limusa. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://home.comcast.net/~729FSC/SolowDanielComoEntenderYHacerDemostraciones.pdf

SORIANO, D. (2013). Los exámenes externos de Aguirre mejoran los resultados de los colegios madrileños. En *Libertad digital, 18 de diciembre de 2013*. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.libertaddigital.com/espana/2013-12-18/los-examenes-externos-de-aguirre-mejoran-los-resultados-de-los-colegios-madrilenos-1276506743/

THURSTON, W.P. (1994). On proof and progress in Mathematics. En *Bulletin of the American Mathematical Society (30), 2*, 337 – 355. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.ams.org/journals/bull/1994-30-02/S0273-0979-1994-00502-6/S0273-097 9-1994-00502-6.pdf

TOULMIN, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.

VEGA, L. (1993). ¿Pruebas o demostraciones? Problemas en torno a la idea de la demostración matemática. En *Methexis (9), 2*, 155 – 177.

VERNANT, J.P. (1998). *Los orígenes del pensamiento griego*. Barcelona: Paidos Ibérica. (Obra original de 1962)

VERNANT, J.P. (1982). *Myth e et pensée chez les Grecs* (tomo II). Paris: Maspero.

VITRAC, B. (1999). Le type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque: Sur un ouvrage de Maurice Caveing. En *Revue d'histoire des sciences, 2*, 307 – 314. Recuperado el 17 de mayo de 2014, de http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1999_num_52_2_1355

ZEILBERGER, D. (1994). Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture. En *Mathematical Intelligencer*, 16, 11 – 14.

6. ANEXOS

6.1. Ejemplos de los distintos tipos de demostraciones matemáticas

6.1.1. Directa

Ejemplo 1

Demostrar que un número de trescientas cifras formado por 100 ceros, 100 unos y 100 doses nunca puede ser un número primo.

Demostración

La suma de todas las cifras del número es 100 + 200 = 300, que es un múltiplo de 3. Por tanto, formemos como formemos el número va a ser un múltiplo de 3 y por tanto no va a ser un número primo.

Ejemplo 2

Demostrar que las soluciones de una ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, vienen dadas por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Demostración

Si en la ecuación de segundo grado dejamos los términos con x a la izquierda y multiplicamos ambos lados de la igualdad por $4a$ nos queda $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$. Sumando en cada lado de la igualdad b^2 para completar cuadrados y aplicando la identidad notable del cuadrado de una suma obtenemos de forma directa el resultado que buscábamos.

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 3

En cualquier triángulo ABC se cumple que $\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$. Esta proposición se conoce como el *teorema del seno*.

Demostración

Consideremos la altura h sobre el lado BC.

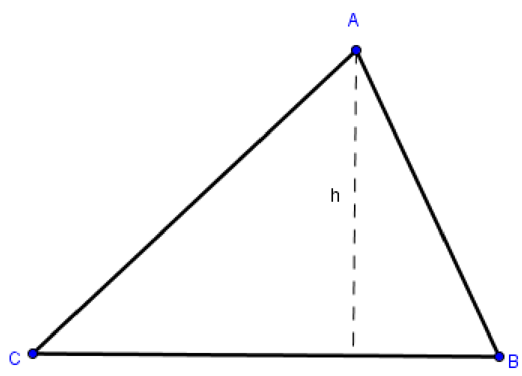


Figura 19. **Teorema del seno.**

Tenemos entonces que $\begin{cases} sen\,\hat{B} = \dfrac{h}{c} \Rightarrow h = c \cdot sen\,\hat{B} \\ sen\,\hat{C} = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot sen\,\hat{C} \end{cases}$.

Igualando las dos expresiones tenemos que $\dfrac{b}{sen\,\hat{B}} = \dfrac{c}{sen\,\hat{C}}$. De forma análoga podríamos obtener la igualdad que nos falta.

6.1.2. Reducción al absurdo

Ejemplo 1

Existen infinitos números primos.

Demostración

Supongamos que el conjunto *P* de números primos es finito, con lo que sería de la forma $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Consideremos el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Este número natural claramente no es divisible por ninguno de los números primos del conjunto *P*, con lo que debería ser también un número primo. Pero esto es una contradicción ya que hemos supuesto que todos los números primos estaban en el conjunto *P* y hemos encontrado un número primo que no está en *P*, con lo que hemos demostrado que existen infinitos números primos.

Ejemplo 2

El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración

Supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional. En este caso se podrá expresar $\sqrt{2}$ mediante una fracción irreducible $\frac{a}{b}$. Elevando al cuadrado la igualdad obtenemos:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2$$

Con lo que a^2 es par y por tanto deducimos que necesariamente a es también par. Si en la expresión anterior sustituimos $a = 2k$, con k un número natural, tenemos que:

$$2b^2 = (2k)^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

De aquí deducimos que b^2 es par y por lo tanto b también es par. Por tanto, a y b son números pares, lo cual es un absurdo ya que hemos supuesto que la fracción $\frac{a}{b}$ era irreducible.

6.1.3. Por negación

Ejemplo

Si p es un número primo mayor que 5, entonces p^2 acaba en 1 o en 9.

Demostración

Vamos a suponer que existe un primo cuyo cuadrado no acaba ni en 1, ni en 9 y vamos a concluir que ese primo no existe examinando los diferentes casos que se producen.

Supongamos que p es un número primo cuyo cuadrado no acaba ni en 1, ni en 9. Sabemos (basta proba por casos) que los cuadrados de todos los números enteros acaban en 0, 1, 4, 5, 6 o 9.

Si p^2 acabará en 0, sería porque p acaba en 0, con lo cual no puede ser primo porque sería divisible por 2 o 5.

Si p^2 acabará en 4, sería porque p acaba en 2 o en 8, con lo cual no puede ser primo porque sería divisible por 2.

Si p^2 acabará en 5, sería porque p acaba en 5, con lo cual no puede ser primo porque sería divisible por 5.

Si p^2 acabará en 6, sería porque p acaba en 4 o en 6, con lo cual no puede ser primo porque sería divisible por 2.

Con lo cual, si el cuadrado de un número no acaba ni en 1, ni en 9, podemos asegurar que no es primo (salvo en los casos $p = 2$ y $p = 5$) o lo que es equivalente, que el cuadrado de todos los números primos mayores que 5 acaban en 1 o en 9.

6.1.4. Exhaustiva

Ejemplo 1

El número $\sqrt{2}$ es irracional.

Demostración

Realizaremos otra demostración de este hecho, pero en esta ocasión analizando todos los casos que se nos pueden dar para llegar finalmente a un absurdo. Al igual que en la demostración anterior, supongamos $\sqrt{2}$ es un número racional, con lo que se podría expresar mediante una fracción irreducible $\frac{a}{b}$. Elevando al cuadrado la igualdad obtenemos que $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2$. Ahora vamos a hacer una tabla con las posibles terminaciones de a^2 y $2b^2$.

Tabla 65. **Terminaciones de a^2 y $2b^2$ para demostrar la irracionalidad de $\sqrt{2}$.**

a	a^2	***b***	b^2	$2b^2$
0	**0**	0	0	**0**
1	1	1	1	2
2	4	2	4	8
3	9	3	9	8
4	6	4	6	2
5	5	5	5	**0**
6	6	6	6	2
7	9	7	9	8
8	4	8	4	8
9	1	9	1	2

Fijémonos que a^2 solo puede acabar en 0, 1, 4, 9, 6 o 5, mientras que $2b^2$ solo puede acabar en 0, 2 u 8. Como ambos números deben ser iguales, la única coincidencia que hay es que acaben en 0, pero en ese caso a acabaría en 0 y b acabaría en 0 o en 5, lo que es una contradicción con que la fracción $\frac{a}{b}$ sea irreducible.

<u>Ejemplo 2</u>

Si $p > 3$ es un número primo, entonces el resto de dividir p^2 entre 12 es 1.

<u>Demostración</u>

Cualquier número entero se puede escribir de la forma $12k + r$, donde k es un entero y $r = 0, 1, 2, \cdots, 11$. Como p es primo es claro que $r \neq 0, 2, 4, 6, 8, 10$, ya que si lo fuera, p sería un número par y no podría ser primo. También es claro que $r \neq 3, 9$, ya que en estos casos el número sería múltiplo de 3 y no podría ser primo. Por tanto, solo tenemos que analizar los casos en que $r = 1, 5, 7, 11$.

$$p = 12k + 1 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 144k^2 + 24k + 1 = 12\left(12k^2 + 2k\right) + 1$$

$$p = 12k + 5 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 144k^2 + 120k + 25 = 12\left(12k^2 + 10k + 2\right) + 1$$

$$p = 12k + 7 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 144k^2 + 168k + 49 = 12\left(12k^2 + 14k + 4\right) + 1$$

$$p = 12k + 11 \quad \Rightarrow \quad p^2 = 144k^2 + 264k + 121 = 12\left(12k^2 + 22k + 10\right) + 1$$

Como se puede observar, en todos los casos el cuadrado del número primo es una unidad mayor que un múltiplo de 12, tal y como queríamos demostrar.

Ejemplo 3

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) que cumple que $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ para el que se cumple que $f'(c) = 0$. Este resultado se conoce como *teorema de Rolle*.

Demostración

Como la función f es continua en un intervalo cerrado y acotado, alcanza en dicho intervalo un valor máximo y un valor mínimo. Se pueden distinguir tres casos:

a) Tanto el máximo como el mínimo están en los extremos del intervalo. Como por hipótesis $f(a) = f(b)$, la función debe ser constante y por tanto en todo el intervalo (a, b) su derivada es nula.

b) La función f alcanza un máximo en un punto $c \in (a, b)$. Como f es derivable en ese punto se cumple que $f'(c) = 0$.

c) La función f alcanza un mínimo en un punto $c \in (a, b)$. Como f es derivable en ese punto se cumple que $f'(c) = 0$.

6.1.5. Principio de inducción

Ejemplo 1

Demostrar que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$, para cualquier número natural *n*.

Demostración

La propiedad es cierta para $n = 1$ ya que $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Ahora vamos a suponer que es cierta para $n = k$ y a partir de ahí tenemos que demostrar la propiedad para $k + 1$.

Suponemos cierto que $1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k\cdot(k+1)}{2}$. A partir de aquí tenemos que:

$$1+2+3+\cdots+k+k+1=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1=\frac{k\cdot(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

Vemos que la propiedad se cumple también para k +1. Por el principio de inducción podemos asegurar que esta propiedad se cumple para cualquier numero natural *n*.

Ejemplo 2

Demostrar que $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$, para cualquier natural *n*.

Demostración

Evidentemente la propiedad se cumple para $n = 1$, ya que $1^2=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6}$.

Vamos a suponer la propiedad cierta para $n = k$ y a partir de ahí vamos a demostrar que también es cierta para $n = k + 1$.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}+\frac{6(k+1)^2}{6}=$$

$$\frac{(k+1)\cdot\left[\left(2k^2+k\right)+(6k+6)\right]}{6}=\frac{(k+1)\cdot\left(2k^2+7k+6\right)}{6}=\frac{2(k+1)\cdot(k+2)\cdot\left(k+\frac{3}{2}\right)}{6}=$$

$$\frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6}$$

Ejemplo 3

Demostrar que si n es un número impar, entonces 7^n+1 es divisible por 8.

Demostración

Para demostrar esta proposición por inducción lo mejor es hacer el cambio de variable $n=2k-1$.

Para k = 1, el resultado es cierto ya que $7^{2\cdot1-1}+1=7+1=8$, evidentemente, es divisible por 8.

Ahora suponiendo que el resultado es cierto para k, vamos a demostrar que es cierto para k + 1.

$$7^{2(k+1)-1}+1=7^{2k+1}+1=7^{2k-1+2}+1=7^2\cdot7^{2k-1}+1=7^2\cdot7^{2k-1}+7^2-7^2+1=7^2\left(7^{2k-1}+1\right)-48$$

Nos queda una diferencia en donde el primer término es múltiplo de 8 por la hipótesis de inducción y el segundo término es 48 que también es un múltiplo de 8. Por lo tanto, la diferencia también es múltiplo de 8 como pretendíamos demostrar.

6.1.6. Descenso al infinito

Ejemplo 1

Demostrar que $\sqrt{3}$ es un número irracional.

Demostración

Supongamos que $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, siendo a y b enteros positivos. Partiremos de la acotación $\frac{3}{2}<\frac{a}{b}<2$, fácilmente comprobable ya que elevándola al cuadrado obtenemos que $\frac{9}{4}<3<4$.

La acotación anterior implica que:

a) $3b<2a \Rightarrow \begin{cases} 3b-a<a \\ 3b<3a \end{cases} \Rightarrow b<a$, lo que implica que $a-b$ es un entero positivo.

b) $a<2b \Rightarrow \begin{cases} a-b<b \\ a<3b \end{cases} \Rightarrow 3b-a$ es un entero positivo.

Si en la identidad $\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$ sustituimos la raíz del denominador por $\frac{a}{b}$ obtenemos $\frac{2}{a/b-1}=\sqrt{3}+1$.

Despejando la raíz se obtiene $\sqrt{3}=\frac{2}{\frac{a-b}{b}}-1=\frac{2b}{a-b}-1=\frac{3b-a}{a-b}$. Observemos que tanto el numerador como denominador de la fracción que hemos obtenido son menores que los de la fracción original $\frac{a}{b}$. Reiterando este proceso podríamos obtener una sucesión estrictamente decreciente de numeradores y denominadores enteros positivos, lo que es imposible. Por lo tanto se concluye que $\sqrt{3}$ es irracional.

Ejemplo 2

Demostrar que si a y b son primos entre sí y $a \cdot b$ es un cuadrado perfecto, entonces a y b son cuadrados perfectos.

Demostración

Vamos a demostrar que no existen dos enteros positivos a y b tales que:

a) Sean primos entre sí.

b) $a \cdot b$ sea un cuadrado perfecto.

c) a y b no son ambos cuadrados.

Supongamos que a no es un cuadrado perfecto, en cuyo caso es divisible por un primo p, es decir, que $a = p \cdot k$, siendo k un número entero. En este caso, p también divide al producto $a \cdot b$, que es un cuadrado perfecto, con lo que podemos expresar $a \cdot b = n^2$. Por las propiedades de los números primos, p debe dividir a n, con lo cual $n = p \cdot t$, siendo t un número entero. Por tanto, se puede escribir la igualdad anterior como:

$$p \cdot k \cdot b = \left(p \cdot t \right)^2 = p^2 \cdot t^2 \Rightarrow k \cdot b = p \cdot t^2$$

Como p divide al lado derecho de la igualdad, también debe dividir al izquierdo, pero al ser a y b primos entre sí, debe dividir a k. Por tanto, $k = p \cdot k'$, siendo k' un entero. Esto nos lleva a que:

$$k \cdot b = p \cdot t^2 \Rightarrow p \cdot k' \cdot b = p \cdot t^2 \Rightarrow k' \cdot b = t^2$$

Como $a = p \cdot k = p^2 \cdot k'$, algún divisor de k' es también divisor de a y por lo tanto k' y b no pueden tener un divisor común mayor que 1. Si k' fuese un cuadrado perfecto entonces $a = p^2 \cdot k'$ también lo sería, pero hemos supuesto inicialmente que no lo es. Luego los números k' y b cumplen que son primos entre sí, su producto no es un cuadrado y no son ambos cuadrados.

Siguiendo el mismo razonamiento nos llevaría a un entero positivo k'' que cumpliría las mismas propiedades con $k' > k''$. De este modo tendríamos una sucesión estrictamente decreciente de enteros positivos, lo cual es imposible.

6.1.7. Principio del palomar

Ejemplo 1

Dados cuatro números naturales cualesquiera siempre habrá al menos dos de ellos cuya diferencia sea un múltiplo de 3.

Demostración

Al dividir los cuatros números entre tres, cada uno tendrá un resto $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{0,1,2\}$. Como hay cuatro números con sus respectivos restos (palomas) y tres posibles restos (palomares), por el principio del palomar seguro que al menos dos de los números tienen el mismo resto cuando se dividen entre 3.

La expresión de esos dos números será $3k + r$ y $3t + r$, siendo r el resto común y $k, t \in \mathbb{N}$. Si restamos esos dos números nos quedaría $3(k-t)$ que es un múltiplo de tres.

Este resultado es fácilmente generalizable con la estrategia utilizada anteriormente a la siguiente proposición:

Dados n números naturales cualesquiera, siempre habrá dos de ellos cuya diferencia sea múltiplo $n-1$.

Ejemplo 2

Dados seis números distintos cualesquiera del 1 al 10, demostrar que va a haber dos de ellos que sumen 11.

Demostración

En este caso hay seis palomas que serán los seis números y hay cinco palomares que son las posibilidades de obtener una suma de 11 con dos números del 1 al 10:

1-10 2-9 3-8 4-7 5-6

Por el principio del palomar, al menos dos de esos números irán a parar al mismo palomar y tendríamos los dos números que suman 11.

Ejemplo 3

En el interior de un triangulo triángulo equilátero de lado 2 cm colocamos al azar 5 puntos en su interior. Demostrar que va a haber al menos dos de ellos a una distancia menor o igual de 1 cm.

Demostración

Si dividimos el triángulo en cuatro triángulos equiláteros de lado 1 cm tal y como muestra la figura 20, nos damos cuenta de que, por el principio del palomar, al menos dos puntos irán al mismo triángulo y por tanto estarán a una distancia menor o igual que 1 cm.

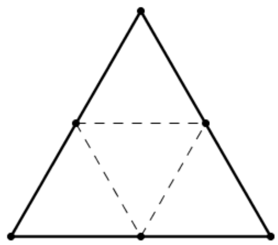


Figura 20. **Principio del palomar (ejemplo 3).**

Ejemplo 4

Todos los números naturales tienen un múltiplo no nulo que está formado únicamente por ceros y unos.

Demostración

Dado un número natural N cualquiera, al dividir cualquier número por N solo hay N posibles restos que son 0, 1, 2,…, $N - 1$. Estos serán los palomares.

Consideremos a continuación los $N + 1$ números formados de la siguiente manera. 1, 11, 111, 1111, etc. Estos números serán las palomas.

Por el principio del palomar habrá dos de ellos con el mismo resto. Esto quiere decir que si restamos el mayor menos el menor el resultado va a ser un múltiplo de N (ver ejemplo 1 de este punto) y además que va a ser un número formado únicamente por ceros y unos.

6.1.8. Algorítmica

Ejemplo

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y en los extremos del intervalo la función toma valores de signos opuestos, entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Demostración

Este resultado se puede demostrar de muchas formas. Una algorítmica es la que se conoce como el método de bisección, que es un método recursivo que nos ayuda a localizar un cero de la función en dicho intervalo con la precisión que queramos.

El método en cuestión es muy elemental. Supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Consideremos el punto $x_1 = \frac{b-a}{2}$. Si:

a) $f(x_1) = 0$, habremos localizado el punto c.

b) $f(x_1) > 0$, podemos asegurar que un cero de la función estará en el intervalo $[x_1, b]$.

c) $f(x_1) < 0$, podemos asegurar que un cero de la función estará en el intervalo $[a, x_1]$.

Siguiendo con este proceso iremos localizando la raíz con una cota de error en el n-esimo paso de $\frac{|b-a|}{2^n}$.

6.1.9. Constructiva

Ejemplo 1

Sobre un segmento dado se puede construir un triángulo equilátero[17].

Demostración

Dado un segmento $\overline{AB}$, se trazan las circunferencias con centro A y que pasa por B, y la que tiene centro B y pasa por A. Estas circunferencias se cortan en dos puntos. Considerando cualquiera de esos dos puntos como tercer vértice obtendríamos el triángulo equilátero.

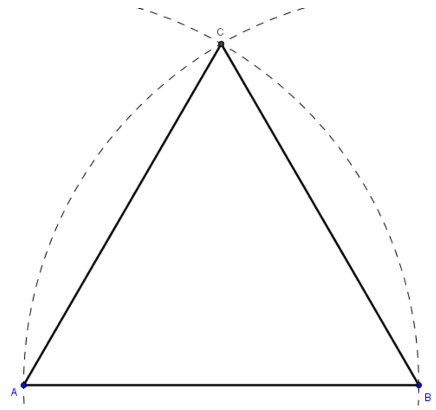


Figura 21. **Construcción de un triángulo equilátero sobre un segmento.**

De una manera análoga se podría demostrar de una forma constructiva que Si a, b y c son las longitudes de los lados de un triángulo y a es la longitud mayor, entonces $a < b + c$.

Ejemplo 2

Existe una distancia mínima entre dos rectas del espacio que se cruzan.

[17] Es la primera proposición del Libro I de "*Los Elementos*" de Euclides.

Demostración

Sean s y r esas rectas. Por un punto A cualquiera de s se traza su recta paralela a r que denotaremos por t. Las rectas s y t determinan un plano α paralelo a la recta t. Por un punto cualquiera B de la recta r se traza la perpendicular al plano α. Denotaremos esta recta como u y calcularemos la intersección de la recta u con α, llamando a este punto C. Por este punto se traza la recta paralela p a r, que cortará a s en un punto D. La recta perpendicular v al plano α por D cortará a r en un punto E. La medida del segmento $\overline{DE}$ nos proporciona la medida de la distancia mínima en posición y magnitud.

No todas las demostraciones en las que se pide la demostración de la existencia de un objeto matemático concreto son constructivas. Las dos que exponemos a continuación demuestran la existencia de ese objeto, pero no muestran dicho objeto, con lo cual no deberíamos considerarlas como constructivas.

Ejemplo 3

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un valor $c \in (a, b)$ para el que se verifica que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$. Este resultado se conoce como *teorema del valor medio*.

Demostración

Consideremos la función $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. Esta función es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) por serlo la función f. Fijémonos que:

a) $\varphi(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0$

b) $\varphi(b)=f(b)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$

Por el teorema de Rolle, sabemos que existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $\varphi'(c)=0$. De esto se deduce que $f'(c)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Ejemplo 4

Si *f* y *g* son funciones continuas en [*a*, *b*] y derivables en (*a*, *b*), entonces existe un punto $c\in(a,\ b)$ para el que se verifica que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Este resultado se conoce como *teorema de Cauchy*.

Demostración

Consideremos la función $\varphi(x)=f(x)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g(x)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]$. Esta función es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*) por serlo las funciones *f* y *g*. Fijémonos que:

a) $\varphi(a)=f(a)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g(a)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]=$

$f(a)\cdot g(b)-f(a)\cdot g(a)-g(a)\cdot f(b)+g(a)\cdot f(a)=f(a)\cdot g(b)-g(a)\cdot f(b)$

b) $\varphi(b)=f(b)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g(b)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]=$

$f(b)\cdot g(b)-f(b)\cdot g(a)-g(b)\cdot f(b)+g(b)\cdot f(a)=-f(b)\cdot g(a)+g(b)\cdot f(a)$

Observamos que la función φ cumple las hipótesis del teorema de Rolle, y por tanto, existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $\varphi'(c)=0$. De esto se deduce que

$f'(c)\cdot\left[g(b)-g(a)\right]-g'(c)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]=0$ y despejando obtenemos que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

6.1.10. Por equivalencia

Ejemplo 1

Demostrar que el cardinal del conjunto de los números naturales es el mismo que el cardinal del conjunto de los números racionales.

Demostración

Lo que haremos en un primer paso será demostrar que el cardinal de los números naturales es el mismo que el de los números enteros para posteriormente demostrar que el cardinal del conjunto de los números enteros es el mismo que el cardinal del conjunto de los números racionales.

Para demostrar que el card ($\mathbb{N}$) = card ($\mathbb{Z}$) lo que haremos será demostrar que card ($\mathbb{N}$)$\leq$card ($\mathbb{Z}$) y que card ($\mathbb{Z}$)$\leq$card ($\mathbb{N}$). La primera desigualdad es obvia ya que por definición $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{Z}$. Para demostrar la segunda desigualdad, bastará con encontrar una aplicación inyectiva de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{N}$, que será:

$$\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}:\begin{cases} z>0 & \to & \varphi(z)=2z \\ z=0 & \to & \varphi(0)=0 \\ z<0 & \to & \varphi(z)=-2z-1 \end{cases}$$

Resulta fácil comprobar que es inyectiva viendo que los enteros positivos van a los naturales pares y los enteros negativos van a los naturales impares. Luego card ($\mathbb{N}$) = card ($\mathbb{Z}$).

Para demostrar que el card ($\mathbb{Z}$) = card ($\mathbb{Q}$) lo que haremos será demostrar que card ($\mathbb{Z}$)$\leq$card ($\mathbb{Q}$) y que card ($\mathbb{Q}$)$\leq$card ($\mathbb{Z}$). La primera desigualdad es obvia ya que por definición $\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}$. Para demostrar la segunda desigualdad, bastará con encontrar una aplicación inyectiva de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Z}$, que será:

$$\varphi:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Z}:\ \varphi\left((-1)^r\cdot\frac{a}{b}\right)=2^r\cdot 3^a\cdot 5^b$$

Expliquemos un poco esta aplicación. La variable r solo tomará los valores 0 o 1 e indicará el signo del número racional. La fracción $\frac{a}{b}$ supondremos que es irreducible y será la que nos indique el número racional, salvo el signo. La aplicación es inyectiva claramente porque para que dos números de la forma $2^r\cdot 3^a\cdot 5^b$ coincidan, la única posibilidad que hay es que las variables r, a y b sean iguales y si son iguales es porque representan al mismo número racional. Con lo cual, hemos probado que card ($\mathbb{N}$) = card ($\mathbb{Z}$) = card ($\mathbb{Q}$).

Ejemplo 2

Existen dos primos consecutivos tan distantes como queramos.

Demostración

La anterior afirmación sería equivalente a demostrar que dado un número natural n cualquiera, existen n números compuestos consecutivos. Para ello consideremos el número $(n+1)!$. Es claro que el número $(n+1)!+2$ no es primo por ser divisible por 2, el número $(n+1)!+3$ no es primo por ser divisible por 3, y así podríamos llegar hasta el número $(n+1)!+n+1$ que no es primo por ser divisible por n+1. Observamos, como queríamos demostrar, que hemos construido una secuencia de n números compuestos consecutivos.

6.1.11. Método de la diagonal de Cantor

Ejemplo 1

El intervalo [0, 1] no es contable.

Demostración

Supongamos que sí que es contable, entonces existiría una sucesión a_n tal que cualquier número del intervalo estaría en esa sucesión. Consideremos el número $0{,}x_1x_2x_3\ldots$, donde x_1 es distinto a la primera cifra de a_1, x_2 es distinto a la segunda cifra de a_2, y así sucesivamente. Es obvio que ese número no puede estar en la sucesión, pero sí está en el intervalo [0,1], lo cual es una contradicción y por lo tanto concluimos que [0, 1] no es contable.

6.1.12. Visualización

Ejemplo 1

La suma de los ángulos interiores de un triángulo suma 180º.

Demostración

Si en un triángulo ABC trazamos por C una paralela al lado AB es fácil observar que se forman tres ángulos que forman un ángulo llano y que coinciden con los ángulos del triángulo.

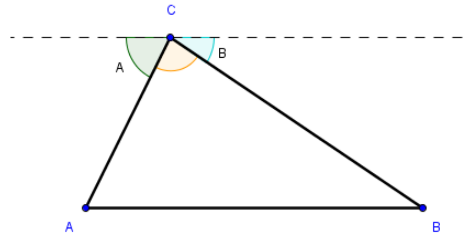


Figura 22. **Demostración de que los ángulos interiores de un triángulo suman 180º.**

Ejemplo 2

Para cualquier pareja de números reales a y b se cumple que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Esta igualdad se conoce como la *identidad notable del cuadrado de una suma*.

Demostración

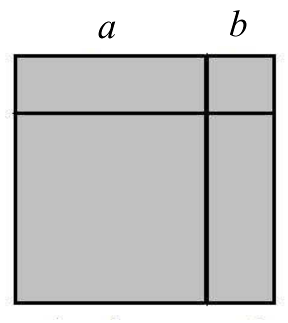
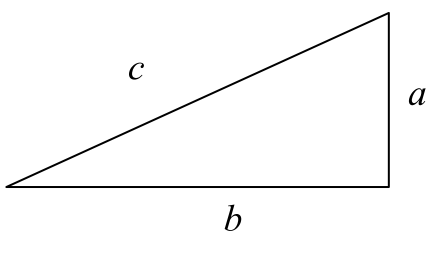


Figura 23. **Igualdad notable del cuadrado de una suma.**

Como el lado de este cuadrado es $a+b$, su área será $(a+b)^2$. Ahora bien, si calculamos el área como la suma de los dos rectángulos y dos cuadrados disjuntos que se forman, tendremos que el área será $a^2 + b^2 + ab + ab = a^2 + b^2 + 2ab$. Igualando las dos expresiones, hemos demostrado visualmente la identidad notable del cuadrado de una suma.

Ejemplo 3

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa coincide con la suma de los cuadrados de los catetos. Este enunciado es conocido como el *teorema de Pitágoras*.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

Figura 24. **Teorema de Pitágoras.**

Demostración

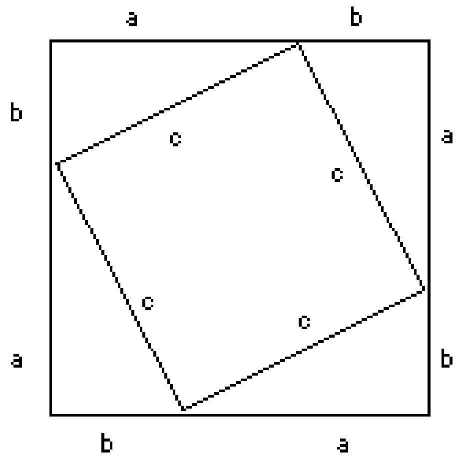


Figura 25. **Demostración del teorema de Pitágoras.**

El área del cuadrado es $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. Calculando el área del cuadrado como suma de las áreas del cuadrado de lado c y los cuatro triángulos rectángulos de catetos a y b, nos queda $c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$. Igualando las dos expresiones obtenemos:

$$a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Ejemplo 4

La suma de los n primeros números enteros positivos es $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Demostración

El rectángulo representado en la figura 26 está formado por $n \cdot (n+1)$ rectángulos, pero solo la mitad de ellos están sombreados. Por tanto, se tiene que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

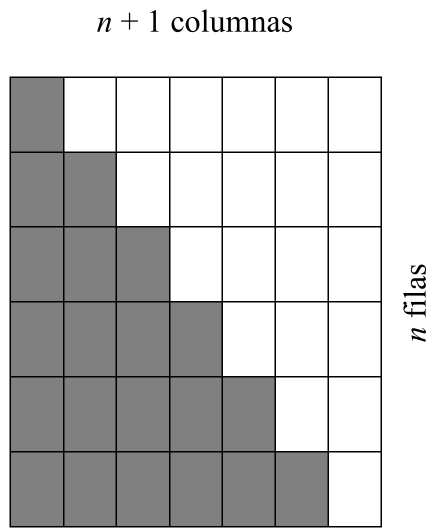


Figura 26. S**uma de *n* primeros número enteros positivos.**

Como dijimos anteriormente, este tipo de demostraciones solo son aceptadas cuando los dibujos no presentan ningún tipo de ambigüedades a la hora de interpretar la información. De no ser así, se podría llegar a *demostrar* resultados que no son ciertos como el que mostramos a continuación.

Ejemplo 5

Todos los triángulos son isósceles.

Demostración fraudulenta

Consideremos un triángulo ABC y tracemos la mediatriz del lado AB y la bisectriz del ángulo interior $\hat{C}$. La mediatriz y la bisectriz se cortan en un punto interior al que llamaremos P. Desde P trazamos sendas perpendiculares a los lados AC y BC,

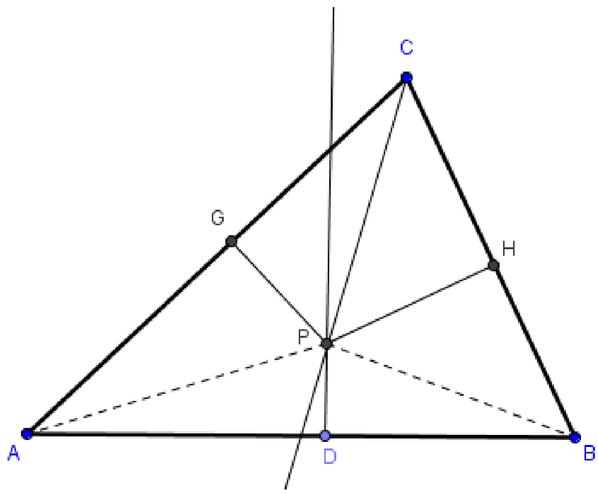


Figura 27. **Demostración fraudulenta de que todos los triángulos son isósceles.**

cuyos puntos de corte con dichos lados los denotaremos como *G* y *H*.

Ahora fijémonos que los triángulos *CPG* y *CPH* son congruentes ya que tienen el lado *CP* en común y tienen dos ángulos iguales, $P\hat{G}C = P\hat{H}C = 90º$ y $P\hat{C}G = P\hat{C}H$, este último por estar el punto *P* en la bisectriz.

Son también congruentes los triángulos *ADP* y *BDP* ya que ambos son triángulos rectángulos con los mismos catetos. El cateto *PD* es común y los catetos *DA* y *DB* son iguales ya que *D* es el punto donde la mediatriz del segmento *AB* corta a dicho segmento.

Por último, fijémonos que los triángulos *GPA* y *HPB* son también congruentes ya que ambos son triángulos rectángulos que cumplen que *PA* = *PB*, por pertenecer *P* a la mediatriz, y *PG* = *PH* por pertenecer *P* a la bisectriz.

Con todo lo anterior se tendría que *CG* + *GA* = *CH* + *HB*, con lo que *AC* = *CB*, que es lo que pretendíamos *demostrar*.

Está claro que este resultado es falso y que por algún lado hay un error. Si intentásemos encontrarlo seguramente revisaríamos los pasos uno a uno con mucho cuidado esperando encontrar el error cuando, en realidad, la solución es mucho más sencilla. El error está en el dibujo. En cualquier triángulo, la mediatriz de un lado y la bisectriz de su ángulo opuesto nunca se cortan en un punto interior del triángulo. De hecho, este razonamiento que hemos utilizado lo podríamos utilizar para demostrar esta propiedad por razonamiento al absurdo. Si hubiésemos trazado bien la mediatriz y la bisectriz del triángulo el dibujo quedaría como se muestra en la figura 28.

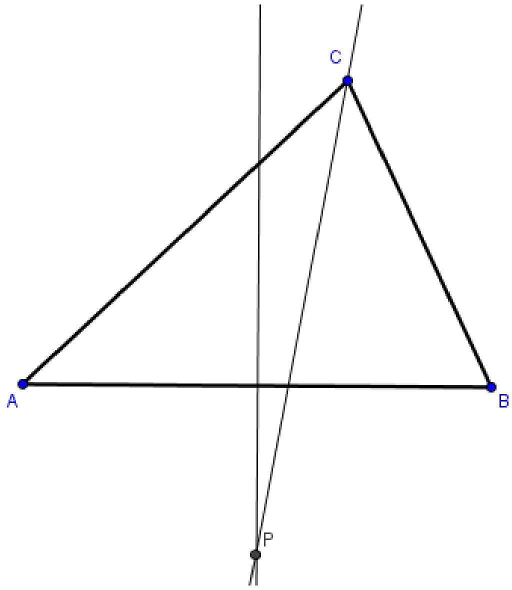


Figura 28. **Punto de corte real de la mediatriz y la bisectriz.**

Lo que acabamos de ver nos muestra como las técnicas de visualización son excelentes para demostrar determinadas afirmaciones, pero hay que utilizarlas con mucho cuidado, con dibujos y gráficos que no lleven a equívocos, ya que si no nos pueden conducir a resultados erróneos.

6.2. Prueba de evaluación inicial

Los ejercicios que se propusieron en la prueba de evaluación inicial fueron los siguientes:

1. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $\left(3-2\cdot(-5)+1\right)\cdot\left(4-5+3\right)$

   b) $\left(1+\dfrac{2}{3}\right):\left(2-\dfrac{1}{5}\right)$

2. Calcula las siguientes potencias:

   a) $(-2)^0$

   c) $(-2)^2$

   b) $(-2)^3$

   d) $(-1)^{2011}$

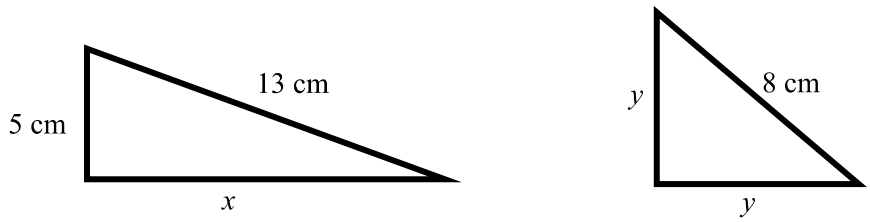
3. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de 15, 20 y 24.
4. De un depósito de agua que se encontraba lleno se extraen $2/5$ partes de su contenido. Si aún quedan en el depósito 21 litros, ¿Qué capacidad tiene el depósito?
5. Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $4-3\cdot\left(x+2\right)=5x-2$

   b) $\dfrac{2x}{3}+1=3x-\dfrac{5}{6}$

6. Resuelve el sistema $\begin{cases} x+3y=0 \\ 2x-y=7 \end{cases}$ por el método que estimes oportuno.
7. Representa gráficamente las ecuaciones $y=2x-1$ e $y=\dfrac{-x+1}{2}$.

8. Calcula el lado desconocido de los siguientes triángulos rectángulos:



Figuras 29 y 30. **Ejercicio 8 de la evaluación inicial.**

6.3. Pruebas de resolución de problemas y sus soluciones

Los problemas de la **primera prueba** y sus respectivas soluciones que se les pasaron a los alumnos el 21 de noviembre de 2011 fueron:

1. ¿Cuántos números capicúas hay de dos cifras? ¿Y de tres cifras? ¿y de cuatro cifras?

   Nota: *los números capicúas son los que se leen igual de izquierda a derecha, que de derecha a izquierdas.*

Solución: Se trataba de un simple problema de conteo:

a) Números capicúas de dos cifras: son de la forma *aa*, luego hay **9 números capicúas de dos cifras**.

b) Números capicúas de tres cifras: son de la forma *aba*. Para a = 1, habrá 10 números, para a = 2 otros 10, etc. Es decir, hay un total de **90 números capicúas de tres cifras**.

c) Números capicúas de cuatro cifras: son de la forma *abba*. Para a = 1, habrá 10 números, para a = 2 otros 10, etc. Es decir, hay un total de **90 números capicúas de cuatro cifras**.

2. Un joyero consigue una rebaja de 150 € en la compra de 20 relojes iguales, cuyo precio según el catálogo es de 65 € la unidad. ¿A cuánto debe vender cada uno para obtener un beneficio total de 400 €?

Solución: Este problema se puede hacer aritméticamente de varias formas. Por ejemplo, se sabe que según catálogo, el joyero debió pagar 65 x 20 = 1300 €. Como obtuvo una rebaja de 150 €, realmente pagó 1150 € por 20 relojes. Como quiere obtener 400 € de beneficio, con la venta debe obtener 1150 + 400 = 1550 €, con lo que cada reloj debe venderlo a 1550 : 20 = **77,5 €**.

3. A una excursión Silvia y Rosa se llevaron respectivamente 5 y 4 pastelitos. Laura no se llevó ninguno, pero sus amigas decidieron compartir sus pastelitos con ella a partes iguales. En compensación, Laura les dio los 2,40 € que llevaba encima. ¿Cómo deberían repartirse ese dinero Silvia y Rosa?

Solución: Este problema es de razonamiento lógico. Como en total había 9 pastelitos, cada una tocó a 3 pastelitos. Ahora bien, Silvia, como llevaba 5, se puede decir que le dio 2 a Laura y Rosa, como llevaba 4, se puede decir que le dio 1. Por lo tanto, los 2,40 € que pagó Laura por 3 pastelitos, se deben repartir a razón de **1,60 € para Silvia** y **0,80 € a Rosa**.

4. En un restaurante te ofrecen el menú del día por 10 €. El menú consiste en un primer plato a elegir entre 5 posibilidades, un segundo plato a elegir entre 4 posibilidades y un postre a elegir entre 4 posibilidades. También incluye el pan y la bebida, en la que puedes elegir agua, vino o un refresco. ¿Cuántos menús diferentes se pueden formar?

Solución: Este es un simple problema de conteo en donde las posibilidades totales serán la multiplicación del número de opciones de cada apartado, es decir, 5 x 4 x 4 x 3 = **240 menús diferentes** se pueden formar.

5. Deduce cuál es el mayor número entero positivo *n* para el que se verifica que $n^{2000} < 5^{3000}$.

Solución: Es un problema que se resuelve con las propiedades de las potencias:

$$n^{2000} < 5^{3000} \quad \Leftrightarrow \quad \left(n^2\right)^{1000} < \left(5^3\right)^{1000} \Leftrightarrow n^2 < 125$$

Claramente, el mayor número entero que cumple esa propiedad es **11**.

6. En los tres primeros exámenes de una evaluación un alumno ha obtenido unas notas de 5,5 en el primero, 5,1 en el segundo y 3,2 en el tercero. ¿Qué nota debe sacar en el cuarto y último examen para que la media le de 5? ¿Y para obtener una nota media de 6?

Solución: Para obtener una media de 5 con 4 exámenes, el alumno debe acumular como mínimo 5 x 4 = 20 puntos. Como lleva acumulados en los tres primeros exámenes 13,8 puntos le harán falta **6,2 puntos en el último examen para obtener una media de 5**. Para obtener una nota media de 6 debería acumular 6 x 4 = 24 puntos. Como lleva 13,8 puntos **será imposible que alcance la media de 6 puntos**.

7. A 50 alumnos de 3º ESO se les ha preguntado si les gusta jugar al fútbol y al baloncesto. En los resultados aparecen que a 35 personas les gusta el fútbol, a 22

personas les gusta el baloncesto y a 15 alumnos les gustan ambos deportes. ¿A cuántos alumnos no les gustan ni el fútbol, ni el baloncesto?

Solución: Con los datos que tenemos, sabemos que hay 35 – 15 = 20 alumnos a los que solo les gusta el fútbol, 22 – 15 = 7 alumnos a los que solo les gusta el baloncesto y 15 alumnos a los que les gustan los dos deportes. Por tanto, habrá 50 – 20 – 7 – 15 = **8 alumnos** a los que no les gusta ninguno de los dos deportes.

8. En un decágono regular hemos unido mediante segmentos cada vértice con los restantes no consecutivos tal y como se observa en la figura. ¿cuánto segmentos (interiores) hemos trazado en total?

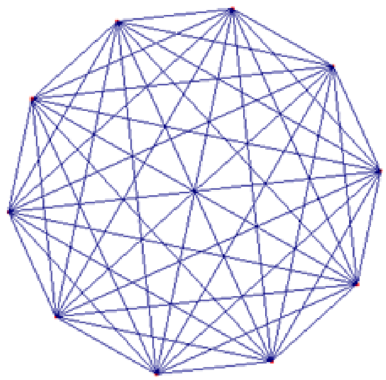


Figura 31. **Problema 1.8.**

Solución: De cada uno de los 10 vértices, salen 7 segmentos interiores. En principio podría parecer que entonces hay un total de 70 segmentos interiores, pero hay que darse cuenta de que cada segmento, al pertenecer a dos vértices, lo hemos contado dos veces, con lo que en total hay 70 : 2 = **35 segmentos interiores**.

Los problemas de la **segunda prueba**, que se realizó el 20 de febrero de 2012, y sus respectivas soluciones fueron:

1. Si escribes todos los números naturales del 1 al 200 (ambos inclusive), ¿cuántas veces tienes que escribir la cifra “1”?

Solución: Veamos primero cuántas veces se escribe del 1 al 99. En las cifras de las unidades el 1 aparece 10 veces, mientras que en las cifras de las decenas aparece otras 10. En total 20 veces. Del 100 al 199, el 1 aparece 10 veces en las unidades, otras 10 veces en las decenas y 100 en las centenas, lo que hace un total de 120 veces. Luego, para escribir los números de 1 al 200, la cifra 1 la tendremos que utilizar 20 + 120 = **140 veces**.

2. El presidente del C.F. Coslada ha fichado al goleador japonés Yono Fallouna por un año. Le va a pagar 800 000 € y un chalet en la mejor zona de Coslada. Al cabo de cuatro meses y ver que no mete ni un gol se le despide del equipo. Entre el presidente y el jugador acuerdan que solo va a recibir como pago el chalet y 100 000 €. ¿En cuánto está valorado el chalet?

Solución: El sueldo anual del jugador es de 800 000 € + un chalet. Los cuatro meses trabajados equivalen a un tercio de año, con lo que por los dos tercios de año no trabajados ha dejado de percibir 700 000 €. Luego, el sueldo del jugador por un tercio de año es de 350 000 €. Si por el tercio de año trabajado le han pagado 100 000 € más el chalet, esto quiere decir que el chalet se ha valorado en **250 000 €**.

3. En una habitación hay taburetes de tres patas y sillas de cuatro patas. Cuando hay una persona sentada en cada uno de ellos, el número total de patas y piernas es 27. ¿Cuántos asientos hay?

Solución: Es un problema que se puede hacer por tanteo. Cada silla contaría como 6 (4+2) patas y cada taburete como 5 (3+2) patas.

- Si hubiera 1 silla, faltarían 21 patas, que no es múltiplo de 5.
- Si hubiera 2 sillas, faltarían 15 patas, lo que equivale a 3 taburetes.
- Si hubiera 3 sillas, faltarían 9 patas, que no es múltiplo de 5.
- Si hubiera 4 sillas, faltarían 3 patas, lo que es imposible.

Con lo cual, la única solución posible es que haya **2 sillas y 3 taburetes**.

4. En un instituto hay tres grupos de 3º ESO. El profesor de Educación Física manda hacer grupos de 6 alumnos cada uno. En el grupo A han quedado sin pertenecer a ningún equipo 4 alumnos, en el grupo B han quedado 5 alumnos y en el grupo C han quedado 3 alumnos. Si en otra actividad, el profesor junta a los tres grupos y vuelve a mandar que se emparejen en grupos de 6, ¿cuántos alumnos quedarán sin equipo?

Solución: Si junta los grupos, podemos suponer que los grupos que se han hecho en cada clase se pueden mantener. Con lo que los 4 + 5 + 3 = 12 alumnos que estaban sin equipo, se pueden hacer dos grupos más y **no quedarían alumnos sin equipo**.

5. En la secuencia de letras ABCDEFABCDEFABCDEF … ¿Qué letra ocupa la posición 2012?

Solución: Fijémonos que es una secuencia que se repite periódicamente en grupos de 6, con lo cual tenemos que ver la posición que nos dan, que es 2012, donde caerá. Si dividimos 2012 entre 6, el cociente será 335 y el resto, que es lo importante, es 2. Si vemos la secuencia, todos los números que tienen resto 2 al dividirlos entre 6, como son 2, 8, 14, 20, etc. coinciden en la letra, que es la B, con lo cual, en la posición 2012 irá una **B**.

6. Una liebre aventaja en 12 de sus saltos al galgo que la persigue. Dos saltos del galgo equivalen, en longitud, a tres de la liebre. Si el galgo tarda en dar tres saltos lo mismo que la liebre en dar cuatro, ¿cuántos saltos dará la liebre antes de ser alcanzada?

Solución: En tiempo, cada 3G = 4L, o lo que equivale a que 6G = 8L. Ahora bien, como en longitud 3L = 2G, podemos asegurar que en el mismo tiempo que la liebre da 8 saltos, el galgo da 6 de los suyos que equivalen a 9 de la liebre. Es decir, que la liebre cada 8 saltos pierde un salto de los suyos de ventaja respecto al galgo. Como le sacaba 12 de sus saltos de ventaja, la liebre será alcanzada por el galgo cuando esta dé 12 x 8 = **96 saltos**.

7. Entre Javier y Lorenzo tienen 16 canicas. Entre Javier y David tienen 13 canicas. Entre David y Lorenzo tienen 17 canicas. ¿Cuántas canicas tiene cada uno de los tres?

Solución: Expresemos las tres informaciones de la siguiente manera:

$$J + L = 16 \; ; \; J + D = 13 \; ; \; D + L = 17$$

Si sumamos las tres expresiones nos queda: $2J + 2L + 2D = 46$. Con lo cual, entre los tres tienen 23 canicas. Ahora ya es fácil deducir que **David tiene 7 canicas, Luis tiene 10 canicas y Javier tiene 6 canicas**.

8. A las tres en punto, las agujas de un reloj forman un ángulo de 90º. ¿Qué ángulo (agudo) formarán esas agujas 20 minutos después?

Solución: Fijemos el origen en el punto 12 del reloj y fijemos el sentido horario. La aguja de la hora, cada hora, avanza 30º, con lo que en 20 minutos avanzará 10º y se situará en la posición de 90º + 10 º = 100º. La aguja de los minutos, cada hora avanza 360º, con lo que en 20 minutos avanzará 120º, que será su posición al partir del origen. Por lo tanto, a las tres y veinte minutos las agujas formarán un ángulo agudo de **20º**, estando ya por delante la aguja de los minutos.

Los problemas de la **tercera prueba**, que se realizó el 28 de mayo de 2012, y sus respectivas soluciones fueron:

1. En la figura de la derecha vemos un molinillo de viento formado por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos isósceles, que está inscrito en un octógono. Si el área del octógono es de 42 m^2, hallar el área del molinillo.

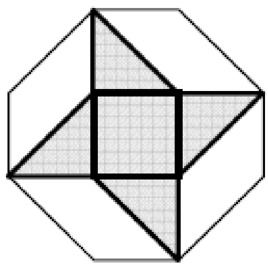


Figura 32. **Problema 3.1**

Solución: La figura se puede dividir fácilmente en 14 triángulos rectángulos. El área de cada uno de ellos será de 42 : 14 = 3 m^2, con lo que el área del molinillo será de 6 x 3 = **18 m^2**.

2. Un camionero presupuesta cierta cantidad de dinero para el gasto de carburante en un recorrido de 600 Km. Sin embargo, una rebaja repentina en el precio del gasóleo le supuso una rebaja de 0,14 € por Kilómetro, lo que le permitiría hacer un recorrido de 750 Km con el mismo gasto. Calcular la cantidad que fue presupuestada inicialmente para el carburante.

Solución: El camionero ha conseguido un ahorro total de 600 x 0,14 = 84 €. Con ese dinero, ha podido recorrer 150 Km más. Luego, mediante una simple regla de tres directa, si 150 Km le cuesta 84 €, los 750 Km le costará $\frac{750 \cdot 84}{150}$ = **420 €**.

3. Un torneo de tenis se juega por el sistema de "*eliminatoria directa*" que quiere decir que el perdedor de un partido queda eliminado del torneo. Si en el torneo participan 130 jugadores, ¿cuántos partidos deberán disputarse para conocer al ganador?

Solución: Simplemente hay que darse cuenta de que en cada partido queda eliminado un participante, luego para que haya un ganador deben quedar eliminados 129 jugadores, con lo que deben jugarse **129 partidos**.

4. En otro torneo de tenis participaron únicamente 6 jugadores. Cada jugador juega un partido con cada uno de los restantes. Alicia ganó 4 partidos, Beatriz 3, Carlos 2, David 2 y Emilio solo 1. ¿Cuántos partidos ganó Félix?

Solución: Cada participante de este torneo juega con los demás, es decir, habrá un total de $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ partidos. Entre los restantes participantes han ganado un total de 4 + 3 + 2 + 2 + 1 = 12, con lo que Felix ganó **3 partidos**.

5. Un vendedor ambulante encuentra una oferta y compra pantalones a un precio de 126 € la docena y camisetas a un precio 105 € cada caja de 20 unidades. Decide comprar 3 docenas de pantalones y 2 cajas de camisetas. En su puesto venderá cada pantalón a 14 € y cada camiseta a 8 €. Si consigue vender toda la mercancía, ¿cuál será el beneficio que obtenga?

Solución: El vendedor se habrá gastado en total 126 x 3 + 105 x 2 = 588 €. Si consigue vender toda la mercancía a los precios indicados obtendrá 14 x 36 + 8 x 40 = 824 €, con lo que obtendrá un beneficio de 824 – 588 = **236 €**.

6. Como ya sabes, un número es primo si tiene únicamente dos divisores. Por ejemplo, son números primos el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. Ahora te pregunto:
   a) ¿Cuál es el primer número primo mayor que 200?
   b) Pon cinco ejemplos de números que tenga únicamente tres divisores. ¿Qué características cumplen estos números?

Solución: Es un problema típico de divisibilidad:

a) Si dejamos de lados los números pares que obviamente no son primos, vamos viendo que no son primos ni el 201 (divisible por 3), ni el 203 (divisible por 7), ni el 205 (divisible por 5), ni el 207 (divisible por 3), ni el 209 (divisible por 11). El primer primo mayor de 200 es el **211**.

b) Si vamos tanteando, vemos que los primeros números que tienen únicamente 3 divisores son 4, 9, 25, 49, etc. Para que un número tenga únicamente 3 divisores, dicho número debe ser de la forma p^2, con p un número primo, ya que en ese caso los divisores serán 1, p y p^2.

7. Completa las casillas que faltan de todas las formas posibles:

$$\begin{array}{r} \square\,\square\,8 \\ \times\,\square \\ \hline \square\,2\,7\,6 \end{array}$$

Solución: En la tabla del 8, los únicos que acaban en 6 son 8 x 2 = 16 y 8 x 7 = 56. Veamos por donde vamos en el primer caso. Para que la cifra de las decenas del resultado sea un 7, tendremos que tener en las decenas del primer número un 3 o un 8. Pero, si fuese 8, nos llevaríamos 1, y luego no podría quedar en las centenas del resultado un 2. Con lo que las decenas del primer número debe ser un 3 y las centenas del primer número debe ser o un 1 o 6. Los casos posibles serían entonces:

138 x 2 = 0276

638 x 2 = 1276

Ahora supongamos que multiplicamos por 7. Como nos llevamos 5, al multiplicar las decenas nos tiene que dar un número que acabe en 2. Esto es posible si las decenas del primer número son 6. En este caso nos llevaríamos 4 y tenemos que buscar unas centenas del primer número que al multiplicarlas por 7 de un número acabado en 8, lo cual solo es posible si el número es 4. Con lo cual, la única posibilidad que tenemos en este caso es:

468 x 7 = 3276

8. Intenta, utilizando únicamente cuatro cuatros y las operaciones fundamentales (suma, resta, multiplicación, división, raíz cuadrada, potencia y paréntesis), formar todos los números de 0 al 10. El primero te lo doy hecho de cuatro formas distintas: $0 = 4 + 4 - 4 - 4 = 44 - 44 = 4^4 - 4^4 = \sqrt{4 \cdot 4} - \sqrt{4 \cdot 4}$

Solución: Hay varias posibilidades. Unas posibles respuestas serían:

$1 = (4 \times 4) : (4 \times 4)$

$2 = (4 \times 4) : (4 + 4)$

$3 = (4 + 4 + 4) : 4$

$4 = ((4 \times 4) + 4) : 4$

$5 = 4^{4-4} + 4$

$6 = 4 + (4+4):4$

$7 = 4 + 4 - (4:4)$

$8 = 4 + 4 + 4 - 4$

$9 = 4 + 4 + (4:4)$

$10 = 4 + \sqrt{4} + \sqrt{4} + \sqrt{4}$

6.4. Encuesta utilizada para comprobar la validez de las pruebas de resolución de problemas

NOMBRE:

PROFESOR/A DEL INSTITUTO:

AÑOS DE EXPERIENCIA DOCENTE:

En esta encuesta se os solicita que valoréis si los problemas que se han confeccionado en estas tres pruebas son adecuados para alumnos de **3º ESO**. Para ello tendréis que valorar cada uno con las puntuaciones 1 (excesivamente fácil), 2 (fácil), 3 (normal), 4 (difícil) o 5 (excesivamente difícil).

Primera prueba

	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Problema 1	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 2	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 3	☐	☐	☐	☐	☐

Problema 4	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 5	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 6	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 7	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 8	☐	☐	☐	☐	☐

¿Algún comentario sobre esta prueba?

<u>Segunda prueba</u>

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Nivel 5**
Problema 1	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 2	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 3	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 4	☐	☐	☐	☐	☐

Problema 5	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 6	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 7	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 8	☐	☐	☐	☐	☐

¿Algún comentario sobre esta prueba?

Tercera prueba

	Nivel 1	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Nivel 4**	**Nivel 5**
Problema 1	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 2	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 3	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 4	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 5	☐	☐	☐	☐	☐

Problema 6	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 7	☐	☐	☐	☐	☐
Problema 8	☐	☐	☐	☐	☐

¿Algún comentario sobre esta prueba?

6.5. Ejercicios y problemas propuestos en la prueba CDI de Matemáticas

Los ejercicios y problemas que se propusieron en la prueba de Conocimientos y Destrezas Indispensable en la especialidad de Matemáticas que se realizó el 17 de abril de 2012 fueron:

Ejercicios propuestos

1. Ordena de menor a mayor:

   a) $\frac{3}{5}$; $-\frac{7}{3}$; $0,65$; $-2,65$

   b) $\sqrt{5}$; -1 ; 2 ; $-\sqrt{3}$

2. Realiza las siguientes operaciones. Expresa el resultado en forma de fracción.

   a) $\left(3+\frac{1}{2}\right)\times\left(3-\frac{1}{2}\right)$

   b) $3+\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{1}{2}\right)$

3. ¿Cuál debe ser el valor de *a* para que sean correctas las siguientes igualdades?

   a) $0,0034 = 34x10^{a}$

   b) $20\,000\,000 = 2\cdot 10^{a}$

4. Completa la siguiente tabla siguiendo el modelo.

Porcentaje	Expresión decimal	Fracción irreducible
25%	0,25	1/4
30%		
	0,08	
		2/5

5. Expresa en horas y minutos:

   a) 6,8 horas.

   b) 1800 segundos.

6. Resuelve razonadamente estos dos ejercicios de ecuaciones:

   a) Si al triple de un número se le resta 6, el resultado es 18. ¿Cuál es ese número?

   b) La suma de tres números consecutivos es 36. Calcula el primero de ellos.

7. En un triángulo rectángulo:

   a) Uno de los catetos mide 3 metros y la hipotenusa mide 5 metros. Halla la longitud del otro cateto.

   b) Los dos catetos son iguales y la hipotenusa mide $\sqrt{2}$ cm. Halla en centímetros la longitud del cateto.

8. Un envase de un litro de leche tiene forma de prisma en donde la base es un cuadrado de lado 10 cm.

   a) ¿Cuál es, en cm^3, el volumen del prisma?

   b) Calcula la altura del envase en centímetros.

9. Una finca rectangular tiene 1 Km de largo y 500 metros de ancho.

   a) Calcula el área de la finca en metros cuadrados.

   b) Calcula el área de la finca en hectáreas.

10. Un euro equivale aproximadamente a 1,3 dólares. Con esta aproximación:

   a) ¿Cuántos euros recibirá un turista americano en Madrid por 260 dólares?

   b) ¿Cuántos dólares recibirá un turista español en Nueva York por 500 euros?

Problemas propuestos

1. La velocidad del sonido en la atmósfera es de 340 m/s. Se dice de un avión que es supersónico cuando es capaz de volar a una velocidad superior a la del sonido. El Concorde fue el avión comercial supersónico más famoso del mundo; estuvo transportando viajeros 27 años, desde 1976 hasta que fue retirado en 2003. Este avión era capaz de alcanzar una velocidad doble a la del sonido.
   a) Calcula la velocidad del sonido en Km/h.
   b) Calcula el tiempo mínimo que podría durar un viaje en el Concorde entre dos ciudades distantes entre sí 6732 Km.
2. La compañía telefónica Movilcom la siguiente tarifa de llamadas al extranjero:
   - Por el establecimiento de llamada: 60 céntimos.
   - Por cada minuto: 80 céntimos.

   Otra compañía, Telesmart, hace la siguiente oferta: establecimiento de llamada sin coste y un euro por minuto.

   Ambas compañías facturan el tiempo real hablado, es decir, los minutos y los segundos.

   a) Completa la siguiente tabla. El coste es el precio en euros que se le facturará al cliente. El tiempo es la duración en minutos de la llamada una vez establecida.

TIEMPO	0	1	2	3	4
Coste de Movilcom					
Coste de Telesmart					

b) Calcula el coste de una llamada que ha durado 3 minutos y 30 segundos en ambas compañías.

c) Explica razonadamente a partir de cuántos minutos empezará a ser más barata la compañía Movilcom.

6.6. Ejercicios propuestos en la prueba CDI de Lengua y Literatura

1 ª parte - Dictado

Pero a Daniel,*[18] el Mochuelo,* le bullían muchas dudas en la cabeza* a este respecto.* Él creía saber* cuanto puede saber un hombre.* Leía de corrido,* escribía para entenderse* y conocía y sabía las cuatro reglas.* Bien mirado,* pocas cosas más* cabían en un cerebro* normalmente desarrollado.* No obstante,* en la ciudad,* los estudios de Bachillerato constaban,* según decían,* de siete años y, después,* los estudios superiores,* en la Universidad,* de otros tantos años,* por lo menos.* ¿Podría existir algo en el mundo* cuyo conocimiento exigiera* catorce años de esfuerzo,* tres más de los que ahora contaba Daniel?*

(El camino, Miguel Delibes)

2 ª parte

Lee atentamente el siguiente texto literario y después contesta a las siguientes preguntas sobre el mismo.

Día Domingo

En 1959, Mario Vargas Llosa, que tenía entonces 23 años, ganó su primer premio literario con una colección de cuentos que llevaba como título ***Los jefes***. El siguiente texto pertenece al cuento "*Día domingo*", de dicha colección.

[18] Los asteriscos (*) marcan los lugares donde el aplicador de la prueba debía realizar una pausa para permitir que los alumnos transcribieran el texto.

Dejó de nadar, su cuerpo se hundió hasta quedar vertical, alzó la cabeza y vio a Rubén que se alejaba. Pensó en llamarlo con cualquier pretexto, decirle por ejemplo «por qué no descansamos un momento», pero no lo hizo. Todo el frío de su cuerpo parecía concentrarse en las pantorrillas, sentía los músculos agarrotados, la piel tirante, el corazón acelerado. Movió los pies febrilmente. Estaba en el centro de un círculo de agua oscura, amurallado por la neblina. Trató de distinguir la playa, cuando menos la sombra de los acantilados, pero esa gasa equívoca que se iba disolviendo a su paso, no era transparente. Solo veía una superficie breve, verde negruzco y un manto de nubes, a ras del agua. Entonces, sintió miedo. Lo asaltó el recuerdo de la cerveza que había bebido, y pensó «fijo que eso me ha debilitado». Al instante preciso que sus brazos y piernas desaparecían. Decidió regresar, pero después de unas brazadas en dirección a la playa, dio media vuelta y nadó lo más ligero que pudo. «No llego a la orilla solo, se decía, mejor estar cerca de Rubén, si me agoto le diré me ganaste pero regresemos». Ahora nadaba sin estilo, la cabeza en alto, golpeando el agua con los brazos tiesos, la vista clavada en el cuerpo imperturbable que lo precedía.

La agitación y el esfuerzo desentumecieron sus piernas, su cuerpo recobró algo de calor, la distancia que lo separaba de Rubén había disminuido y eso lo serenó. Poco después lo alcanzaba; estiró un brazo, cogió uno de sus pies. Instantáneamente el otro se detuvo. Rubén tenía muy enrojecidas las pupilas y la boca abierta.

- Creo que nos hemos torcido —dijo Miguel—. Me parece que estamos nadando de costado a la playa.

Sus dientes castañeteaban, pero su voz era segura. Rubén miró a todos lados. Miguel lo observaba, tenso.

- Ya no se ve la playa —dijo Rubén.
- Hace mucho rato que no se ve —dijo Miguel—. Hay mucha neblina.

- No nos hemos torcido —dijo Rubén—. Mira. Ya se ve la espuma.

En efecto, hasta ellos llegaban unos tumbos condecorados por una orla de espuma que se deshacía y, repentinamente, rehacía. Se miraron, en silencio.

- Ya estamos cerca de la reventazón, entonces —dijo, al fin, Miguel.

- Sí. Hemos nadado rápido.

- Nunca había visto tanta neblina.

- ¿Estás muy cansado? —preguntó Rubén.

- ¿Yo? Estás loco. Sigamos.

Inmediatamente lamentó esa frase, pero ya era tarde, Rubén había dicho «bueno, sigamos».

Llegó a contar veinte brazadas antes de decirse que no podía más: casi no avanzaba, tenía la pierna derecha seminmovilizada por el frío, sentía los brazos torpes y pesados. Acezando, gritó «¡Rubén!». Este seguía nadando. «¡Rubén, Rubén!». Giró y comenzó a nadar hacia la playa, a chapotear más bien, con desesperación, y de pronto rogaba a Dios que lo salvara, sería bueno en el futuro, obedecería a sus padres, no faltaría a la misa del domingo y, entonces, recordó haber confesado a los pajarracos «voy a la iglesia solo a ver una hembrita» y tuvo una certidumbre como una puñalada: Dios iba a castigarlo, ahogándolo en esas aguas turbias que golpeaba frenético, aguas bajo las cuales lo aguardaba una muerte atroz y, después, quizá, el infierno. En su angustia surgió entonces como un eco, cierta frase pronunciada alguna vez por el padre Alberto en la clase de religión, sobre la bondad divina que no conoce límites, y mientras azotaba el mar con los brazos —sus piernas colgaban como plomadas transversales—, moviendo los labios rogó a Dios que fuera bueno con él, que era tan joven, y juró que iría al seminario si se salvaba, pero un segundo después rectificó, asustado, y prometió que en vez de hacerse sacerdote haría sacrificios y otras cosas, daría limosnas y ahí descubrió que la vacilación y el regateo en ese instante crítico podían ser fatales y entonces sintió los gritos enloquecidos de Rubén, muy próximos, y volvió la cabeza y lo vio, a unos diez metros, media cara hundida en el agua, agitando un brazo, implorando: «¡Miguel, hermanito, ven, me ahogo, no te vayas!»

Quedó perplejo, inmóvil, y fue de pronto como si la desesperación de Rubén fulminara la suya, sintió que recobraba el coraje, la rigidez de sus piernas se atenuaba.

- Tengo calambre en el estómago —chillaba Rubén—. No puedo más, Miguel. Sálvame, por lo que más quieras, no me dejes, hermanito.

Flotaba hacia Rubén y ya iba a acercársele cuando recordó, los náufragos solo atinan a prenderse como tenazas de sus salvadores, y los hunden con ellos, y se alejó, pero los gritos lo aterraban y presintió que si Rubén se ahogaba él tampoco llegaría a la playa, y regresó. A dos metros de Rubén, algo blanco y encogido que se hundía y emergía, gritó: «No te muevas, Rubén, te voy a jalar pero no trates de agarrarme, si me agarras nos hundimos, Rubén, te vas a quedar quieto, hermanito, yo te voy a jalar de la cabeza, pero no me toques». Se detuvo a una distancia prudente, alargó una mano hasta alcanzar los cabellos de Rubén. Principió a nadar con el brazo libre, esforzándose todo lo posible para ayudarse con las piernas. El desliz era lento, muy penoso, acaparaba todos sus sentidos, apenas escuchaba a Rubén quejarse monótonamente, lanzar de pronto terribles alaridos, «me voy a morir, sálvame Miguel», o estremecerse por las arcadas. Estaba exhausto cuando se detuvo. Sostenía a Rubén con una mano, con la otra trazaba círculos en la superficie. Respiró hondo por la boca. Rubén tenía la cara contraída por el dolor, los labios plegados en una mueca insólita.

- Hermanito —susurró Miguel—, ya falta poco, haz un esfuerzo. Contesta, Rubén. Grita. No te quedes así.

Lo abofeteó con fuerza y Rubén abrió los ojos; movió la cabeza débilmente.

- Grita, hermanito —repitió Miguel—. Trata de estirarte. Voy a sobarte el estómago. Ya falta poco, no te dejes vencer.

Su mano buscó bajo el agua, encontró una bola dura que nacía en el ombligo de Rubén y ocupaba gran parte del vientre. La repasó, muchas veces, primero despacio, luego fuertemente, y Rubén gritó: «¡No quiero morirme, Miguel, sálvame!».

Comenzó a nadar de nuevo, arrastrando a Rubén esta vez de la barbilla. Cada vez que un tumbo los sorprendía, Rubén se atragantaba, Miguel le indicaba a gritos que escupiera. Y siguió nadando, sin detenerse un momento, cerrando los ojos a veces, animado porque en su corazón había brotado una especie de confianza, algo caliente y orgulloso, estimulante, que lo protegía contra el frío y la fatiga. Una piedra raspó uno de sus pies y él dio un grito y apuró. Un momento después podía pararse y pasaba los brazos en torno a Rubén. Teniéndolo apretado contra él, sintiendo su cabeza apoyada en uno de sus hombros, descansó largo rato. Luego ayudó a Rubén a extenderse de espaldas, y soportándolo en el antebrazo, lo obligó a estirar las rodillas: le hizo masajes en el vientre hasta que la dureza fue cediendo. Rubén ya no gritaba, hacía grandes esfuerzos por estirarse del todo y con sus dos manos se frotaba también.

- ¿Estás mejor?
- Sí, hermanito, ya estoy bien. Salgamos.

Una alegría inexpresable los colmaba mientras avanzaban sobre las piedras, inclinados hacia adelante para enfrentar la resaca, insensibles a los erizos. Al poco rato vieron las aristas de los acantilados, el edificio de los baños y, finalmente, ya cerca de la orilla, a los pajarracos, de pie en la galería de las mujeres, mirándolos.

- Oye —dijo Rubén.
- Sí.
- No les digas nada. Por favor, no les digas que he gritado. Hemos sido siempre muy amigos, Miguel. No me hagas eso.
- ¿Crees que soy un desgraciado? —dijo Miguel—. No diré nada, no te preocupes.

Salieron tiritando. Se sentaron en la escalerilla, entre el alboroto de los pajarracos.

- Ya nos íbamos a dar el pésame a las familias —decía Tobías.
- Hace más de una hora que están adentro —dijo el Escolar—. Cuenten, ¿cómo ha sido la cosa?

Hablando con calma, mientras se secaba el cuerpo con la camiseta, Rubén explicó:

- Nada. Llegamos a la reventazón y volvimos. Así somos los pajarracos. Miguel me ganó. Apenas, por una puesta de mano. Claro que si hubiera sido en una piscina, habría quedado en ridículo.

Sobre la espalda de Miguel, que se había vestido sin secarse, llovieron las palmadas de felicitación.

— Te estás haciendo un hombre —le decía el Melanés.

Miguel no respondió. Sonriendo, pensaba que esa misma noche iría al Parque Salazar; todo Miraflores sabría ya, por boca del Melanés, que había vencido esa prueba heroica y Flora lo estaría esperando con los ojos brillantes. Se abría, frente a él, un porvenir dorado.

“Día domingo”, Mario Vargas Llosa.

Los jefes, Ed. Primera Plana, 1993

Preguntas sobre el texto:

1. Resume el contenido del texto. El resumen no debe sobrepasar las 10 líneas.
2. Rubén y Miguel compiten entre sí. Cita dos frases del texto que muestren esta actitud competidora entre los dos amigos.
3. Cuando Miguel consigue dar alcance a su amigo, este le pregunta si está cansado. Miguel miente. ¿Por qué crees que lo hace?
4. A pesar de su agotamiento inicial, Miguel regresa hasta donde está Rubén y logra salvarlo. ¿Qué es lo que hace que recobre las fuerzas suficientes para arrastrar a Rubén hasta la orilla? Cita alguna frase del texto que lo explique.
5. Explica el significado de las palabras subrayadas en las siguientes frases:

   A. Estaba <u>exhausto</u> cuando se detuvo.

   B. Una alegría inexplicable les colmaba.

   C. Se abría, frente a él, un <u>porvenir dorado</u>.
6. Analiza morfológicamente las palabras subrayadas en esta frase.

   <u>La</u> repasó <u>muchas</u> veces, primero despacio, luego <u>fuertemente</u>.
7. Analiza las formas verbales subrayadas en el siguiente párrafo. Debes indicar, cuando proceda, persona, número, tiempo, modo y verbo en infinitivo:

   "<u>**Sonriendo**</u>, [Miguel] <u>**pensaba**</u> que esa misma noche <u>**iría**</u> al Parque Salazar; todo Miraflores sabría ya, por boca del Melanés, que <u>**había vencido**</u> esa prueba heroica"
8. Indica la función sintáctica del pronombre en la siguiente oración:

   "le hizo masajes en el vientre"
9. Analiza sintácticamente la siguiente oración:

   "En su corazón había brotado una especie de confianza"

6.7. Instrucciones utilizadas en *R* para el análisis de la varianza

```
setwd("C:/Users/Sara & Kike/Desktop/Datos estadisticos Tesis")
load("C:/Users/Sara & Kike/Desktop/Datos estadisticos Tesis/datose1.RData")
library(multcomp, pos=4)
library(abind, pos=4)
Edad <- aov(edad_dias ~ grupo, data=datose1)
summary(Edad)
numSummary(datose1$edad_dias , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
CursoAnterior <- aov(curso_ant ~ grupo, data=datose1)
summary(CursoAnterior)
numSummary(datose1$ curso_ant, groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
Eval0 <- aov(eval_0 ~ grupo, data=datose1)
summary(Eval0)
numSummary(datose1$eval_0 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
Problemas1 <- aov(prob_1 ~ grupo, data=datose1)
summary(Problemas1)
numSummary(datose1$prob_1 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
Dificultad1 <- aov(dificultad_1 ~ grupo, data=datose1)
summary(Dificultad1)
numSummary(datose1$dificultad_1 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
Matematicas1 <- aov(mat_1 ~ grupo, data=datose1)
summary(Matematicas1)
numSummary(datose1$mat_1 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
```

```
Lengua1 <- aov(leng_1 ~ grupo, data=datose1)

summary(Lengua1)

numSummary(datose1$leng_1 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Problemas2 <- aov(prob_2 ~ grupo, data=datose1)

summary(Problemas2)

numSummary(datose1$prob_2 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Dificultad2 <- aov(dificultad_2 ~ grupo, data=datose1)

summary(Dificultad2)

numSummary(datose1$dificultad_2 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Matematicas2 <- aov(mat_2 ~ grupo, data=datose1)

summary(Matematicas2)

numSummary(datose1$mat_2 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Lengua2 <- aov(leng_2 ~ grupo, data=datose1)

summary(Lengua2)

numSummary(datose1$leng_2 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

problemas3 <- aov(prob_3 ~ grupo, data=datose1)

summary(problemas3)

numSummary(datose1$prob_3 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Dificultad3 <- aov(dificultad_3 ~ grupo, data=datose1)

summary(Dificultad3)

numSummary(datose1$dificultad_3 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

Matematicas3 <- aov(mat_3 ~ grupo, data=datose1)

summary(Matematicas3)

numSummary(datose1$mat_3 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
```

```
Lengua3 <- aov(leng_3 ~ grupo, data=datose1)

summary(Lengua3)

numSummary(datose1$leng_3 , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

CDI_Mat <- aov(cdi_mat ~ grupo, data=datose1)

summary(CDI_Mat)

numSummary(datose1$cdi_mat , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))

CDI_Leng <- aov(cdi_leng ~ grupo, data=datose1)

summary(CDI_Leng)

numSummary(datose1$cdi_leng , groups=datose1$grupo, statistics=c("mean", "sd"))
```